Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Факультет маркетинга, менеджмента, предпринимательства
Кафедра «Бизнес-администрирование»

МАТЕМАТИКА

**Методическое пособие по выполнению
контрольной работы
для студентов специальностей
1-36 20 03 Торговое оборудование и технологии;
1-27 03 01 Управление инновационными проектами
промышленных предприятий;
1-27 03 02 Управление дизайн-проектами на
промышленных предприятиях.**

Электронный учебный материал

Минск 2015

УДК 51(075.8)
ББК 22.18я73.1я7

Автор:
И.Е.Ругалева

Рецензент:
Б.М. Астрахан, доцент кафедры «Экономика и управление инновационными проектами в промышленности» БНТУ, кандидат технических наук

Ругалева, И.Е. Математика: методическое пособие по выполнению контрольной работы для студентов специальностей 1-36 20 03 «Торговое оборудование и технологии», 1-27 03 01 «Управление инновационными проектами промышленных предприятий»; 1-27 03 02 «Управление дизайн-проектами на промышленных предприятиях»/И.Е. Ругалева, – Мн.: БНТУ, 2015. – 56 с.

Методическое пособие содержит исходные данные и методические указания по выполнению контрольных работ по дисциплине «Математика». В работу включены разделы 3 семестра «Ряды», «Теория функции комплексного переменного» и «Операционное исчисление».

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37
E-mail: emd@bntu.by
http://www.bntu.by/ru/struktura/facult/psf/chairs/im/
Регистрационный № БНТУ/

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Контрольная работа выполняется в соответствии с учебными планами БНТУ по специальностей 1-36 20 03 «Торговое оборудование и технологии», 1-27 03 01 «Управление инновационными проектами промышленных предприятий»; 1-27 03 02 «Управление дизайн-проектами на промышленных предприятиях».

Данное методическое пособие включает в себя задания для практического закрепления трех разделов: «Ряды», «Теория функций комплексного переменного» и «Операционное исчисление», каждый из которых включает комплекс контрольных заданий для самостоятельного решения заданий, а также самопроверки и закрепления знаний. Контрольная работа соответствует учебной программе 3 семестра по дисциплине «Математика».

Выполнение контрольной работы обеспечивает более глубокое изучение материала, направлено на закрепление и систематизацию знаний, умений и формирование общих компетенций.

Теоретические сведения к контрольной работе (основные определения, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач, можно найти в учебном пособии по «Высшей математике» [1], а также другой рекомендуемой литературе. Контрольные работы сопровождаются решением типового варианта.

Контрольная работа содержат 25 вариантов

1 1 СОДЕРЖАНИЕ И ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1 Цели и задачи контрольной работы

Целью контрольной работы является закрепление знаний, полученных в процессе обучения по дисциплине «Математика», формирование необходимых умений и навыков при нахождении производной функции комплексного переменного, нахождении особых точек, вычетов, интегрировании по комплексному аргументу, сведению его к вычислению криволинейных интегралов.

Пособие содержит

– решение типовых задач;
– варианты индивидуальных заданий.

1.2 Содержание и порядок выполнения контрольной работы

1.2.1 Структура и задание на контрольную работу

Задачи выполняются в той последовательности, в которой они указаны в контрольной работе. Обязательно должно быть записано условие задачи, решение с достаточной степенью подробности и необходимыми пояснениями, затем ответ. Если в задаче приведено только условие и ответ, то задача считается нерешенной.

Отчет можно представлять в рукописном виде (четким и разборчивым почерком), используя только черные или синие чернила, или в печатном виде.

На титульном листе отчета должны быть указаны:

- дисциплина;
- номер варианта;
- номер группы;
- фамилия, имя, отчество студента

1.2.2 Выбор варианта исходных данных для выполнения контрольной работы

Каждый студент выполняет контрольную работу по выбранному номеру варианта, который определяется на основе таблицы 1.1. К цифрам в рамках необходимо добавить сумму цифр номера группы, например, 1+0+5+0+3+6+1+4=20

Таблица 1.1 - Номера вариантов контрольной работы

		Четвертая и пятая цифры зачетной книжки								
		01	02	03	04	05	06	07	08	09
Последние две цифры зачетной книжки	01	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	02	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	03	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	04	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	05	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	06	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	07	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	08	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	09	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	11	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	12	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	13	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	14	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	15	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	16	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	17	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	18	18	19	20	21	22	23	24	25	1
	19	19	20	21	22	23	24	25	1	2
	20	20	21	22	23	24	25	1	2	3
	21	21	22	23	24	25	1	2	3	4
	22	22	23	24	25	1	2	3	4	5
	23	23	24	25	1	2	3	4	5	6
	24	24	25	1	2	3	4	5	6	7
	25	25	1	2	3	4	5	6	7	8

1.2.3 Порядок выполнения и защиты контрольной работы

Руководитель контрольной работы составляет график выполнения отдельных разделов, проводит консультации по утвержденному расписанию, контролирует ход выполнения контрольной работы.

За качество принятых в контрольной работе решений отвечает студент, который обязан после каждого этапа представлять руководителю промежуточный объем работ на проверку. Руководитель проверяет выполненную работу, указывает ошибки и дает рекомендации по их исправлению.

Выполненная контрольная работа сдается студентом до начала экзаменационной сессии с учетом сроков проведения зачетов. Руководитель контрольной работы проверяет ее. Замечания фиксируются на оборотной стороне титульного листа.

При условии соответствия требованиям, предъявляемым к контрольной работе, она решением руководителя допускается к защите, о чем делается подпись «К защите» на титульном листе.

Если контрольная работа требует полной или частичной переработки, то студент обязан до защиты представить ее руководителю для повторной проверки.

Защита контрольной работы происходит (после исправления замечаний руководителя) в виде доклада и ответов на вопросы.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАЗДЕЛОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1 Содержание контрольной работы

Задания по разделу «Ряды»

1. В задачах № 1,2 исследовать сходимость числового ряда.
2. В задаче № 3 исследовать сходимость знакочередующегося ряда.
3. В задаче № 4 найти область сходимости функционального ряда.
4. В задачах № 5,6 найти область сходимости степенных рядов.
5. В задаче №7 разложить функцию *f(x)* по степеням *x*, используя разложения основных элементарных функций.
6. В задаче № *8* найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд функции *f(x)* по степеням $(x-x_0)$.
7. В задаче № *9* вычислить с помощью ряда определенный интеграл с точностью до 0,001.
8. В задаче №10 найти с помощью ряда решение дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

В а р и а н т 1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{2n+1}}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+5}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{10^n}$;

7. $f(x)=(1+x)\cos x$; 8. $f(x)=\ln(1+x^2)$, $x_0=1$.

9. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$; 10 $xy''+y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

В а р и а н т 2

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1+n^2}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\cdot\theta$, $|r|<1$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n (x-5)^n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+1)^2}$;

7. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 8. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x_0=0$;

9. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,dx$; 10. $y''+y\sin x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Вариант 3

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n-1}{3n}\right)^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+13}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{2^n}x^n$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{\sqrt{n+1}}$;

7. $f(x)=\arcsin x$; 8. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x_0=2$;

9. $\int_0^{0,8}x^{10}\sin x dx$; 10. $xy''+y^2=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

Вариант 4

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+4}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n-1)^n}(x-3)^n$;

7. $f(x)=\operatorname{arctg} x$; 8. $f(x)=\frac{1}{x+1}, x_0=1$;

9. $\int_{0,1}^{0,2}\frac{e^x}{x^2}dx$; 10. $y''+yy'+x^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Вариант 5

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^4-1}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{3^n(n+2)}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\frac{1}{(1+x)^n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)(n+2)}$;

7. $f(x)=x\ln(1+x^2)$; 8. $f(x)=\frac{x}{2-x}, x_0=1$.

9. $\int_{0,1}^{0,2}\frac{\cos x}{x}dx$; 10 $y''-xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Вариант 6

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(3n)!}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2+4}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}r^n\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\ |r|<1$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a^2+x^2)^n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{3n+2}$;
7. $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$;
8. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}, x_0=1$;
9. $\int_0^{0,1}\frac{dx}{1+x^2}$;
10. $y'=\mathrm{e}^{\sin x}+x, y(0)=0$.

Вариант 7

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{3n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}x^n$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$;
7. $f(x)=\frac{x}{1+x}$;
8. $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}, x_0=2$;
9. $\int_0^1\sqrt{x}\cos x dx$;
10. $2ny''-xy'+y=0, y(0)=1, y'(0)=2$.

Вариант 8

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\cdot 4^n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{2+3n}\right)^2$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^3}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n+3}x^n$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-2)^n}{n+1}$;
7. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$;
8. $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}, x_0=1$;
9. $\int_{0,1}^{0,2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx$;
10. $y'=x^2+xy+y^2, y(0)=1$.

Вариант 9

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n+4}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+1}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{n+3}$;

7. $f(x)=x\cdot\sqrt{1+x}$; 8. $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

9. $\int_0^{0,2}\sqrt{x(1-x^2)}dx$; 10 $xy''+y=0$, $y(1)=2$, $y'(1)=1$.

Вариант 10

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{3^{\frac{n}{2}}}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\frac{\cos nx}{5^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2n-3}$;

7. $f(x)=\frac{e^{x^2}}{x}$; 8. $f(x)=\sqrt{1+}$, 9. $\int_{0,1}^{0,4}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$;

10. $y''-xy+1=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Вариант 11

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n+1}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\frac{\sin nx}{4^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3+1}$;

7. $f(x)=(x-1)e^x$; 8. $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x_0=1$; 9. $\int_0^1\cos\sqrt{x}dx$;

10. $y'=x+y+y^2$, $y(0)=1$.

Вариант 12

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{n^2+1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+4)!}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\dfrac{\cos nx}{3^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{|x|}{x}\right)^n$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^{n-1}+1}$;

7. $f(x)=x\cdot\cos 2x$; 8. $f(x)=\dfrac{x}{1-x}, x_0=2$;

9. $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$; 10. $y'=y\cos x+2\cos y,\ y(0)=0$.

Вариант 13

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n+2}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n\sqrt{n}}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n\cdot 3^n}$;

7. $f(x)=\sin^2 x\cos^2 x$; 8. $f(x)=\dfrac{1}{x}, x_0=1$, 9. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$;

10. $y''+xy'+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$

Вариант 14

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^2}{n^2}$;

7. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$; 8. $f(x)=e^x, x_0=-2$, 9. $\int_0^1\sqrt[3]{x}\cos 2x dx$;

10. $y'''+xy'+x^2y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=1,\ y''=-1$

Вариант 15

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3n+2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4+n^2}{1+n^2}\right)^2$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)^n}{(3n+1)^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{2^n}x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$;

7. $f(x)=xchx$; 8. $f(x)=x, x_0=4$, 9. $\int_0^1 x\sin x^2dx$;

10. $xy+y^2+x^2=y',\ y(0)=1$

Вариант 16

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{4^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{2n-1}\right)^n$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n\sin x}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\sqrt{n+1}}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{2n}}{n9^n}$;

7. $f(x)=\sqrt[3]{x+8}$; 8. $f(x)=\cos^2 x, x_0=\dfrac{\pi}{4}$, 9. $\int_0^{0,5}x\ln(1+x^3)dx$;

10. $x^2y^2+y\sin x=y',\ y(0)=0{,}5$

Вариант 17

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{(2n)!}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{10n+1}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)x^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n^2}$;

7. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; 8. $f(x)=e^x, x_0=1$, 9. $\int_0^{1/3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$;

10. $y'=e^{2x}+2xy^2,\ y(0)=1$

Вариант 18

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-2}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+10}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

7. $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$; 8. $f(x)=chx, x_0=1$, 9. $\int_0^{0,5}\frac{\arcsin x}{x}dx$;

10. $y'=x+e^y,\ y(0)=0$

Вариант 19

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+1}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^8}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}x^{n-1}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;

7. $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$; 8. $f(x)=ctgx, x_0=\frac{\pi}{4}$, 9. $\int_{0,1}^{0,2}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$;

10. $y'=2y^2+ye^x,\ y(0)=1$

Вариант 20

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+5}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5n-4}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{x^2}{5^n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}x^n$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+5)^n}{(n^3+1)}$;

7. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; 8. $f(x)=ctgx-\frac{1}{x}, x_0=\frac{\pi}{4}$, 9. $\int_0^{0,2}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$;

10. $y''+x^2y=0,\ y(0)=1, y'(0)=1$

Вариант 21

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{\frac{1}{\ln x}}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$;
7. $f(x) = \cos(x+\alpha)$;
8. $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 3$,
9. $\int_0^1 \frac{shx}{x} dx$;
10. $y'' + y' + x^2 y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

Вариант 22

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{1+n^2}\right)^2$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{(n+1)\sqrt{n}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+5)^n}{(n^3+1)}$;
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$;
8. $f(x) = ctgx - \frac{1}{x},\ x_0 = \frac{\pi}{4}$,
9. $\int_0^{0,2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$;
10. $y'' + x^2 y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Вариант 23

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1+n^2}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+4)^n}{n \cdot 3^n}$;
7. $f(x) = x\sin^2 x$;
8. $f(x) = \frac{1}{1+x},\ x_0 = 2$,
9. $\int_0^{1/9} \sqrt{x} e^x dx$;
10. $xy'' + 2y' + xy = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Вариант 24

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{1+3n}\right)^{\frac{n}{2}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n}}{n+1}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\sqrt{n}}(x-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

7. $f(x)=\frac{x^6}{1-x}$; 8. $f(x)=chgx, x_0=1$, 9. $\int_0^{1/4}\sqrt{1+x^3}dx$;

10. $y^7+xy+y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$

Вариант 25

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n^2+1)}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{n^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 5^n}$;

7. $f(x)=x^2e^{2x}$; 8. $f(x)=tgx, x_0=\frac{\pi}{4}$, 9. $\int_0^{0,1}\frac{1}{1+x^4}dx$;

10. $y''+y'+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$

Задания по разделу «Элементы теории функций комплексного переменного»

1.Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

2.Найти действительную и мнимую части функции $w = f(z)$.

3.Найти аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной (u) или мнимой (v) части и заданному значению $f(z_0)$.

4.Найти область, на которую заданная функция w=f(z) отображает указанную область G. Заданную область G на плоскости z и ее образ на плоскости w изобразить на чертежах.

5.Вычислить $\int_\gamma f(z)dz$.

6.Вычислить с помощью формулы Коши $\int_\gamma f(z)dz$, где γ – замкнутый контур, пробегаемый против часовой стрелки.

7.Записать ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 и определить область сходимости полученного ряда.

8.Найти особые точки функции $f(z)$ и выяснить их характер.

9.Найти вычеты функции $f(z)$ в изолированных особых точках.

10.Вычислить с помощью вычетов $\int_\gamma f(z)dz$, где γ – замкнутый контур, пробегаемый против часовой стрелки.

В а р и а н т 1

1. $f(z)=\mathrm{Ln}\,z\,,z_0=1+\sqrt{3}i\,;$

2. $w=z\,\mathrm{e}^z\,;$

3. $u=x^2-y^2+3x+y\,,f(0)=i\,;$

4. $w=i(2z+1)\,,G$: квадрантRe $z\geq 0$, Im $z\geq 0$;

5. $\int_\gamma \mathrm{Re}\,dz$, γ – отрезок прямой от точки $z_0=0$ до точки $z_1=2+i$;

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{zdz}{z^2+1}$, $\gamma:|z+i|=1$;

7. $f(z)=z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{Ln}\,z\,,\ z_0=0\,;$

8. $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)^3(z+1)}\,;$

9. $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)\sin z}\,;$

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{(z^2+4)^2}$, $\gamma:|z+2i|=1$

В а р и а н т 2

1. $f(z)=z^i\,,z_0=i\,;$

2. $w=\sin z\,;$

3. $u=x^3-3xy^2+2\,,f(0)=2+i$

4. $w=\mathrm{e}^{2z}+i\,,G$:полоса $-\infty<\mathrm{Re}\,z<+\infty$, 0<Im< π

5. $\int_\gamma \bar{z}dz$, где γ – ломаная с вершинами в точках $z_0=0$, $z_1=1$, $z_2=1+i$

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z dz}{(z-i)^3}$, $\gamma:|z|=2$;

7. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$

8. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}\,;$

9. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2(z+3)}\,;$

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{tgz}{z+2}dz$, $\gamma:|z+2|=2$

Вариант 3

1. $f(z)=\mathrm{e}^{z}$, $z_0=3+\dfrac{\pi}{4}i$;

3. $v=2\mathrm{e}^{x}\cos y$, $f(0)=2(1+i)$;

2. $w=\mathrm{ch}\,z$;

4. $w=(1-i)(1+z)$, G : треугольник с вершинами в точках $z_1=0$, $z_2=-i$, $z_3=1$

5. $\int_{\gamma} z^2dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0=1$ с точкой $z_1=1+i$

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{z^2dz}{(z-2i)^2}$, $\gamma: |z-i|=2$;

9. $f(z)=\dfrac{z^5}{z^2-1}$;

7. $f(z)=\dfrac{1}{(z+3)(z-1)^4}$, $z_0=1$;

10. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{z}}{2z}dz$, $\gamma: |z|=1$

8. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+i}$;

Вариант 4

1. $f(z)=2^{z}$, $z_0=1+i$,

2. $w=\cos z$;

3. $u=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

4. $w=\dfrac{1}{z+i}$, G : полуплоскость $\mathrm{Im}\,z\geq 0$;

$f(1)=6+2i$ ($|z|>0$);

5. $\int_{\gamma}\dfrac{dz}{\sqrt{z}}$, γ – полуокружность $|z|=1$ от $z_0=1$ до $z_1=-1$, лежащая в верхней полуплоскости

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{(z+1)^3(z-1)^3}$, $\gamma: |z+1|=1,5$;

9. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$;

7. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z-2}$, $z_0=2$;

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{zdz}{(z+2)(z-1)}$, $\gamma: |z|=3$

8. $f(z)=\dfrac{(z+6)\sin(z+5)}{(z-z^2)(z^2-25)}$;

Вариант 5

1. $f(z)=\operatorname{Ln} z$, $z_0=3+4i$;

2. $w=\mathrm{e}^{z^2}$;

3. $u=x^2-y^2+xy$, $f(0)=0$;

4. $w=\dfrac{z+i}{z-i}$, G : квадрант $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z\le 0$;

5. $\int_\gamma \operatorname{Re} z dz$, где γ – окружность $|z-a|=R$, пробегаемая против часовой стрелки;

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z dz}{(z+i)^2}$, $\gamma: |z|=1{,}5$;

7. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{z^2}$, $z_0=0$;

8. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z-1}$;

9. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{zdz}{z^2-1}$, γ – эллипс $\dfrac{(x-1)^2}{1}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Вариант 6

1. $w=\mathrm{e}^z$, $z_0=2-3i$;

2. $w=\operatorname{sh} z$;

3. $v=x^3-6x^2y-3xy^2-2y^3$, $f(0)=0$;

4. $w=\dfrac{1}{z+1}$, G : полуплоскость $\operatorname{Im} z\ge 0$;

5. $\int_\gamma \bar{z} dz$, где γ – дуга параболы $y=x^2$ от точки $(0,\ 0)$ до точки $(1,\ 1)$;

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z dz}{(z+2)^4}$, $\gamma: |z+1|=1{,}5$;

7. $f(z)=(z-2)^3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z-2}}$; $z_0=2$;

8. $f(z)=\dfrac{z^2}{1-\cos z}$;

9. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3-z}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{(z^2+1)(z-1)}$, $\gamma: |z-1-i|=2$

В а р и а н т   7

1. $f(z)=\cos z$, $z_0=i$;

2. $w=z^2\,\mathrm{e}^z$;

3. $u=x^2-y^2+2x$, $f(i)=2i-1$;

4. $w=z^2$,G: прямоугольник 0<Im<1, 0<Im< 2;

5. $\int_\gamma z\bar{z}dz$, γ – дуга окружности $|z|=1$, 0≤ Im ≤ π.

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{(z+1)^2(z+2)}$, $\gamma: |z|=1{,}5$;

7. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^5}$, $z_0=0$;

8. $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$;

9. $f(z)=\dfrac{z^4}{z^2-1}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$, $\gamma: |z-i|=1$

В а р и а н т   8

1. $f(z)=\sin z$, $z_0=1+2i$;

2. $w=z^2-|z|$;

3. $u=-2\,\mathrm{e}^x\sin y$, $f(0)=2i$;

4. $w=z^2$,G: полоса $-\infty<\mathrm{Re}\,z<+\infty$,-π<Im< 0;

5. $\int_\gamma z^2dz$, γ – ломаная с вершинами в точках $z_0=0$, $z_1=1$, $z_2=1+i$;

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{z^2+2z}$, $\gamma: |z|=1$;

7. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0=i$;

8. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-\dfrac{\pi}{2}}$;

9. $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+4)z^2}$;

10. $\oint\limits_\gamma (z-1)^2\dfrac{1}{z+1}dz$, $\gamma: |z+1|=0$

В а р и а н т 9

1. $f(z) = \mathrm{Ln}\, z$, $z_0 = 3+4i$;

2. $w = \mathrm{e}^z \,\mathrm{Re}\, z$;

3. $u = x^3 - 3xy^2$, $f(0) = i$;

4. $w = z^2$,G:полуполоса, 0< Im< 1, 0< Re < 2; $\mathrm{Im} \geq 0$

5. $\int_\gamma (2 - 3z + z^2)dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = i$;

6. $\oint\limits_\gamma z \dfrac{zdz}{z^2+9}$, $\gamma: |z+2i| = 2$;

7. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$, $z_0 = 1$;

8. $f(z) = \mathrm{tg}\, z$;

9. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{z+1}{(z-2)^2}dz$, $\gamma: |z - \dfrac{1}{2}| = 1$

В а р и а н т 1 0

1. $f(z) = 2^z$, $z_0 = 1+i$;

2. $w = z^3 + \mathrm{Im}\, z$;

3. $v = arctg \dfrac{y}{x}$, $(x > 0)$, $f(1) = 0$;

4. $w = i(2-z)$, G : квадрат 0,, $\mathrm{Re}\, z$,, 1, 0,, $\mathrm{Im}\, z$,, 1;

5. $\int_\gamma \bar{z} dz$, γ – отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 1+i$;

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{\cos zdz}{(z-i)^2}$, $\gamma: |z| = 2$;

7. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+5)}$, $z_0 = 0$;

8. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$;

9. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^4}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{(z+3)dz}{(z-1)(z+1)^2}$, $\gamma: |z+2i| = 1$

Вариант 11

1. $f(z) = \mathrm{Ln}\, z$, $z_0 = -i$; 2. $w = (z+i)\,\mathrm{e}^{z}$;

3. $v = y^2 - 2y - x^2 + 1$, $f(2i) = i - 1$;

4. $w = (1+i)z + 3$, G : круг $|z| \leq 1$;

5. $\int_{\gamma} \mathrm{Re}\, z dz$, γ – радиус – вектор точки $z_0 = 2 + i$;

6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^{z} dz}{z(z-1)^3}$, γ : 7. $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z-1)}$, $z_0 = i$;

$|z+1| = 1{,}5$;

8. $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{z}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$; 9. $f(z) = \dfrac{z+1}{z^3 + 4z}$;

10. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$, γ : $|z-2| = 0{,}5$

Вариант 12

1. $f(z) = \cos z$, $z_0 = 5 - i$; 2. $w = \mathrm{e}^{z+i}$;

3. $v = 3x^2 y - y^3 + 3y - 1$, $f(1+i) = 2 + 4i$;

4. $w = \dfrac{z-i}{z+i}$, G : квадрант $\mathrm{Re}\, z > 0$;

5. $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0 = 0$ с точкой $z_1 = 2 + i$;

6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{z^2(z^2+4)}$, γ : $|z + 2i| = 1$; 7. $f(z) = z^3\, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$;

8. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 5z + 4}$; 9. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 (z - \frac{\pi}{2})}$;

10. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\sin z dz}{z\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)^2}$, γ : $|z| = 2$

В а р и а н т 1 3

1. $f(z)=\arccos z$, $z_0=2$;

2. $w=z^2+\operatorname{Re} z$;

3. $u=\mathrm{e}^{1+y}\cos x$, $f(-i)=1+3i$;

4. $w=\dfrac{1+z}{1-z}$, G : полуплоскость $\operatorname{Re}\le 0$;

5. $\int\limits_{\gamma} z^2dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_1=0$ с точкой $z_2=1+i$;

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z dz}{z(z-1)}$, $\gamma: |z-2|=1,5$;

7. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$;

8. $f(z)=\dfrac{z}{(4+z^2)\sin z}$;

9. $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+1}$;

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{z^3+4z^2}$, $\gamma: |z|=1$

В а р и а н т 1 4

1. $f(z)=\arccos z$, $z_0=2i$;

2. $w=z^3\operatorname{Im} z$;

3. $v=-\mathrm{e}^{1+2y}\sin 2x$, $f(-\dfrac{i}{2})=3$;

4. $w=(1-i)z+2i$, G : круг $|z|\le 1$;

5. $\int_{\gamma}\operatorname{Re} z dz$, γ – дуга параболы $y=x^2$ от точки $(0,\ 0)$ до точки $(1,\ 1)$;

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{z^2+4z}$, $\gamma: |z|=1$;

7. $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$;

8. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

9. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{z^2}$;

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{1}{1-z^2}dz$, $\gamma: |z|=1,5$

Вариант 15

1. $f(z) = \mathrm{Ln}\, z$, $z_0 = 1 + i$;
2. $w = (z+i)^2$;
3. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $f(0) = 0$;
4. $w = -i(2z-1)$, G: полуплоскость $\mathrm{Re} \geq 0$;
5. $\int_\gamma \sin z dz$, γ – произвольный контур, соединяющий $z_0 = 0$ с $z_1 = \frac{\pi}{2} + i$;
6. $\oint\limits_\gamma \frac{\sin 2z dz}{(z+1)^4}$, $\gamma: |z| = 2$;
7. $f(z) = (z-3i)\sin\frac{1}{z-3i}$, $z_0 = 3i$;
8. $f(z) = \frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})(z^2+1)^2}$;
9. $f(z) = \frac{1}{(z^2-9)^2}$;
10. $\oint\limits_\gamma \frac{e^z dz}{z(z^2+1)^2}$, $\gamma: |z| = \frac{1}{2}$

Вариант 16

1. $f(z) = \arcsin z$, $z_0 = 2$;
2. $w = \frac{\mathrm{Re}\, z}{z}$;
3. $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $f(2) = \frac{1}{2}$;
4. $w = (1+i)z$, G: круг $|z-1| \leq 1$;
5. $\int_\gamma |z|\, dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий $z_1 = -1$ с точкой $z_2 = 1$;
6. $\oint\limits_\gamma \frac{z^2 dz}{(z-2)^3}$, $\gamma: |z| = 3$;
7. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$, $z_0 = 0$;
8. $f(z) = \frac{z-1}{\cos z}$;
9. $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)^2(z-3)}$;
10. $\oint\limits_\gamma \frac{\cos z}{z^2} dz$, $\gamma: |z| = 3$

Вариант 17

1. $f(z)=\mathrm{e}^z$, $z_0=\dfrac{\pi i}{2}$;

2. $w=z^2\sin z$;

3. $u=x^3-3xy^2+3x^2-6x-3y^2$, $f(0)=0$;

4. $w=\dfrac{z+i}{z-i}$, G : полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$;

5. $\int_\gamma \operatorname{Re} z dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_1=i$ с точкой $z_2=2-i$;

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{z^2+1}$, $\gamma: |z-i|=1$;

7. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-3}$, $z_0=3$;

8. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-z+1}{z^2}$;

9. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}}{z-1}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{z-2}{z(z-1)}dz$, $\gamma: |z+0,5|=3$

Вариант 18

1. $f(z)=z^{1+i}$, $z_0=i$;

2. $w=\dfrac{\cos z}{z}$;

3. $v=x+y-3$, $f(0)=0$;

4. $w=\dfrac{z}{z+i}$, $\operatorname{Re} z>0$;

5. $\int_\gamma |z|\,dz$, γ – полуокружность $|z|=1$ от точки $z_1=-1$ с точкой $z_2=1$, лежащая в верхней полуплоскости;

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{z^3+4z}$, $\gamma: |z-3i|=2$;

7. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=3$;

8. $f(z)=\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$;

9. $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{\sin z}{z(z-\frac{\pi}{2})^2}dz$, $\gamma: |z|=2$

Вариант 19

1. $f(z)=\cos z$, $z_0=1+i$;

2. $w=\mathrm{Ln}\, z$;

3. $v=2xy$, $f(0)=0$;

4. $w=3z^2$, G : полуплоскость $\mathrm{Im}\, z>0$;

5. $\int_\gamma z^3dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=1+i$;

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z dz}{z^2+\pi^2}$, $\gamma: |z-i|=3$;

7. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, $z_0=1$;

8. $f(z)=\dfrac{z^3}{\sin^4 z}$;

9. $f(z)=\dfrac{z^6}{(z-1)^3}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{(z-1)}{z^2+4}dz$, $\gamma: |z|=3$;

Вариант 20

1. $f(z)=\cos z$, $z_0=2-i$;

2. $w=z^i$;

3. $u=x^2-y^2$, $f(0)=0$;

4. $w=(1+\sqrt{3}i)z-2i$, G : круг $|z|\le 1$;

5. $\int_\gamma \mathrm{Im}\, z dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=2+i$;

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{(z^2+1)dz}{z^2-1}$, $\gamma: |z+1|=1$;

7. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0=0$;

8. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-i}$;

9. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z^2+4)}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{(1+z)^2(z+2)}$, $\gamma: |z|=1{,}5$

Вариант 21

1. $f(z)=z^i$, $z_0=1+i$; 2. $w=\dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$;

3. $v=4x^3y-4xy^3$, $f(0)=0$; 4. $w=i(3z-1)$, G : полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$;

5. $\int_\gamma (z^2+iz-2)dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_1=0$ с точкой $z_2=i-1$;

6. $\oint_\gamma \dfrac{dz}{\left(z^2+9\right)^2}$, $\gamma: |z-2i|=2$;

7. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0=2$; 8. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$;

9. $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+1}$; 10. $\oint_\gamma \dfrac{dz}{\sin z}$, $\gamma: |z|=2$

Вариант 22

1. $f(z)=\operatorname{Arcsin} z$, $z_0=3$; 3. $v=3x^2y+6xy-6y-y^3$, $f(0)=0$;

2. $w=|z|\cos z$;

4. $w=(1-i)(1+z)$,G: треугольник с вершинами в точках $z_1=0$, $z_2=-i$, $z_3=-1$.

5. $\int_\gamma z\bar{z}dz$, γ – дуга параболы $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$

6. $\oint_\gamma \dfrac{\sin z dz}{\left(z+i\right)^3}$, $\gamma: |z|=1,5$; 7. $f(z)=ze^{-\frac{1}{z^2}}$, $z_0=0$;

8. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$; 9. $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z-i)}$;

10. $\oint_\gamma \dfrac{\cos z}{z^3}dz$, $\gamma: |z-1|=2$

Вариант 23

1. $f(z)=\mathrm{e}^{z}$, $z_0=3+i$;

2. $w=z^{3i}$;

3. $u=x^2-y^2+3x$, $f(0)=0$;

4. $w=\mathrm{e}^{z+3}$, G : полоса $-\infty<\operatorname{Re}z<+\infty, 0\le\operatorname{Im}z\le\pi$;

5. $\int_{\gamma}\operatorname{Im}z dz$, γ – ломаная линия, соединяющая точки $z_0=0$, $z_1=i$, $z_2=2+$

6. $\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^2+4}$, γ : $|z-2i|=1$;

7. $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$;

8. $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z}$;

9. $f(z)=\frac{2}{(z-i)(z+1)}$;

10. $\oint_{\gamma}\frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$, γ : $|z|=4$

Вариант 24

1. $f(z)=\operatorname{Ln}z$, $z_0=3-4i$;

2. $w=z\cos z$;

3. $v=2xy+3y$, $f(0)=0$;

4. $w=\frac{z+i}{z}$, G: квадрант $\operatorname{Re}z>0$, $\operatorname{Im}z>0$

5. $\int_{\gamma}\bar{z}dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_1=2i$ с точкой $z_2=1-i$

6. $\oint_{\gamma}\frac{zdz}{(z-1)^2(z+1)}$, γ : $|z|=2$;

7. $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z^2}$, $z_0=0$;

8. $f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^2}$;

9. $f(z)=\frac{z}{(z+1)^3}$;

10. $\oint_{\gamma}\frac{e^{-z}dz}{z^2}$, γ : $|z|=3$

В а р и а н т 2 5

1. $f(z)=\cos z$, $z_0=2i$;

2. $w=\dfrac{z^2+i}{z}$;

3. $u=x^3-3xy^2-2x$, $f(0)=0$;

4. $w=\dfrac{z}{z+i}$, G: треугольник с вершинами в точках $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-i$;

5. $\int_\gamma (z+2)dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_1=0$ с точкой $z_2=i$.

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{sin\,zdz}{(z+i)^3}$, γ: $|z|=1,5$;

7. $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+5)}$, $z_0=0$;

8. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$;

9. $f(z)=\dfrac{z^4}{(z+i)^2}$;

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z}{z^2+1}$, γ: $|z|=3$

Задания по разделу «Элементы операционного исчисления»

1. В задачах № 1,2 установить, принадлежат ли множеству оригиналов данные функции.
2. В задаче № 3 пользуясь определением ,найти изображение оригинала *1(t) f(t),*

где $1(t)=\begin{cases} 0 \ \forall t < 0 \\ 1 \forall t \geq 0 \end{cases}$

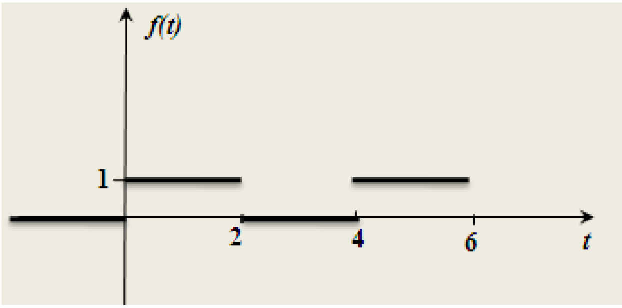
3. В задачах № 4,5 найти изображение оригинала *1(t) f(t)*
4. В задаче №6 найти свёртку данных функций.
5. В задаче № 7 найти изображение периодического оригинала *1(t) f(t)* .
6. В задаче № 8 найти оригинал по данному изображению.
7. В задаче № 9 найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.
8. В задаче №10 найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Вариант 1

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ e^{5t} & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ \frac{1}{t+3} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t) = e^{2t}$; 4. $f(t) = \sin^4 t$;

5. $f(t=) \dfrac{e^{-2t} \sin t}{t}$; 6. $f_1(t) = t,\ f_2(t) = sht$;



8. $F(p) = \dfrac{2}{p(p^2+4)}$; 9. $y'' - 2y' = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

10. $\left.\begin{aligned} x' &= -2x - 2y - 4z, \\ y' &= -2x + y - 2z, \\ z' &= 5x + 2y + 7z, \end{aligned}\right\}$ x(0)=1, y(0)=2, z(0)= -1

Вариант 2

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0, \\ e^{t2} & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ \frac{\sin t}{t} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t) = \begin{cases} e^{3t} & \forall t \epsilon [0,1] \\ 2 & \forall t \epsilon]1, \infty[\end{cases}$; 4. $f(t) = cht\ \sin^2 3t$;

5. $f(t) = \dfrac{\cos 2t - \cos 3t}{t}$; 6. $f_1(t) = e^t,\ f_2(t) = e^{-t}$;

8. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+p+7}$; 9. $y''+y'=\sin t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

10. $\left.\begin{array}{l} x''-3x'+2x+y'-y=0, \\ -x'+x+y''-5y'+4y=0, \end{array}\right\}$ $x(0)=x'(0)=y'(0)=0$, $y(0)=1$

Вариант 3

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0, \\ t^3 & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0, \\ \frac{\cos t}{t} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=e^{t/2}$; 4. $f(t)=\sin t \sin 2t$;

5. $f(t)=\dfrac{1-e^t}{t e^{2t}}$; 6. $f_1(t)=\cos 2t$, $f_2(t)=e^{-t}$;

7. $f(t)=e^{-t}$ $\forall t \in [0;3[$; $f(t+3)=f(t)$;

8. $F(p)=\dfrac{p+2}{p(p+3)}$; 9. $y''-y=8te^t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

10. $\left.\begin{array}{l} x''-bx+\sqrt{6}\,y'=0, \\ -\sqrt{6}\,x'+y''+2y=0, \end{array}\right\}$ $x(0)=1$, $x'(0)=y(0)=y'(0)=0$;

Вариант 4

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0, \\ 1 & \forall t\epsilon[0,2], \\ 2t^3 & \forall t>2; \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0, \\ \frac{2}{\sin t} & \forall t \geq 0. \end{cases}$;

3. $f(t)=2-t$; 4. $f(t)=e^{2t}\cos^2 t;$

5. $f(t)=e^{2t}\sin 4t$; 6. $f_1(t)=t$, $f_2(t)=e^{3t};$

7. $f(t)=e^{-2t}$ $\forall t\epsilon[0,2[$, $f(t+2)=f(t);$

8. $f(p)=\frac{4-p}{p^2+9}$; 9. $y''-2y'+3y=1,$ $y(0)=0, y'(0)=0$;

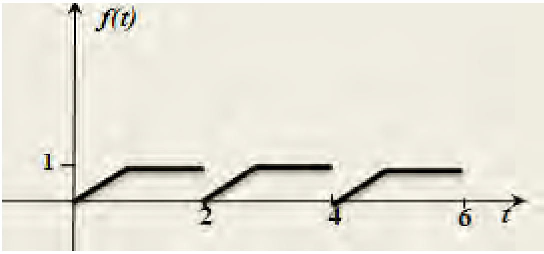
10. $\left.\begin{aligned} x' &= y+z, \\ y' &= z+x, \\ z' &= x+y, \end{aligned}\right\}$ $x(0)=3,$ $y(0)=-1,$ $z(0)=2;$

Вариант 5

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0, \\ t+\sin 3t & \forall t \geq 0 \end{cases}$ 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{e^t}{t} & \forall t \geq 0; \end{cases}$

3. $f(t)=$ s h $2t$; 4. $f(t)=\cos^3 t$;

5. $f(t)=\frac{e^{-at}\sin t}{t}$; 6. $f_1(t)=\cos t$, $f_2(t)=\cos t;$



8. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^2-6p+12}$; 9. $y''+y=t^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

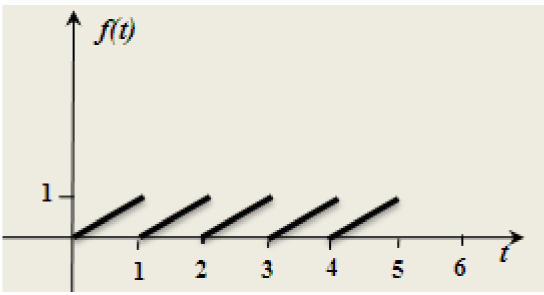
10. $\left.\begin{aligned} x' &= 8y, \\ y' &= -2z, \\ z' &= 2x+8y-2z, \end{aligned}\right\}$ $x(0)=2$, $y(0)=0$, $z(0)=-1$.

Вариант 6

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0, \\ \frac{\sin^2 t}{t} & \forall t \ge 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0, \\ \frac{1}{t+1} & \forall t \ge 0; \end{cases}$

3. $f(t)=2ch3t$; 4. $f(t)=e^{3t}\sin^2\frac{t}{2}$;

5. $f(t)=\cos(at-b)$; 6. $f_1(t)=sin3t$, $f_2(t)=sin4t$;



8. $F(p)=\dfrac{5}{p(p^2+2p+5)}$; 9. $y''+2y'+y=2\sin t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

10. $\left.\begin{aligned} x'+3x+y=0, \\ y'-x+y=0, \end{aligned}\right\}$ $x(0)=2$, $y(0)=3$

Вариант 7

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ e^{(2+3)t} & \forall t\geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{\cos 3t}{t} & \forall t\geq 0; \end{cases}$

2. $f(t)=2-e^{2t}$; 4. $f(t)=\cos^4\frac{t}{2}$;

5. $f(t)=\dfrac{\cos bt-\cos at}{t}$; 6. $f_1(t)=\frac{t}{2}$, $f_2(t)=ch3t;$

7. $f(t)=\begin{cases} 4 & \forall t\epsilon[0;2[, \\ 2 & \forall t\epsilon[2;3[\end{cases}$; $f(t+3)=f(t);$

8. $F(p)=\dfrac{2p-6}{(p-2)(p+3)^3}$; 9. $y''+2y'+5y=5$, $\begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{matrix}$;

10. $\left.\begin{matrix} x''+y''=0, \\ x'+y=1+e^t, \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} x(0)=x'(0)=0 \\ y(0)=2, \quad y'(0)=-1. \end{matrix}$

Вариант 8

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ t^3 & \forall t\geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{1}{\sin t} & \forall t\geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=3-2t$; 4. $f(t)=ch3t\cos^2 t$;

5. $f(t)=\dfrac{1-e^{2t}}{te^t}$; 6. $f_1(t)=e^{-t}$, $f_2(t)=\sin t$;

7. $f(t)=\begin{cases} e^{-t} & \forall t\epsilon[0;a[, \\ e^{-2t} & \forall t\epsilon[a;2a[; \end{cases}$; $f(t+2a)=f(t);$

8. $F(p)=\dfrac{3p+1}{p^2(p^2-4p+1)}$; 9. $y''+y=\sin t$, $\begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{matrix}$;

10. $\left.\begin{matrix} x''-x'+9x-y''-y'-3y=0, \\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} x(0)=x'(0)=1 \\ y(0)=y'(0)=0. \end{matrix}$

Вариант 9

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ e^{\frac{1}{t}} & \forall t\ge 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{\sin t}{2t} & \forall t\ge 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=1+e^{2t}$; 4. $f(t)=\sin^2 2t\cos 3t$;

5. $f(t)=e^{2(t-1)}\sin(t-1)$; 6. $f_1(t)=t$, $f_2(t)=\cos 3t$;

7. $f(t)=\begin{cases} 2t & \forall t\epsilon[0;\Pi] \\ 3e & \forall t\epsilon]\Pi,2\Pi[\end{cases}$ $f(t+2\Pi)=f(t)$;

8. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^3+27}$; 9. $y''+y=te^t$, $\begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{matrix}$;

10. $\left.\begin{matrix} x'-2y+5x=e^t, \\ y'-x+6y=e^{-2t}, \end{matrix}\right\}$ $x(0)=1, y(0)=-1.$

Вариант 10

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ e^3 & \forall t\ge 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{1}{t-1} & \forall t\ge 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=\begin{cases} 2 & \forall t\epsilon[0;3] \\ t & \forall t\epsilon]3;\infty[\end{cases}$; 4. $f(t)=\sin^3 t$;

5. $f(t)=e^{-(t-a)}\cos(t-a)$; 6. $f_1(t)=t$, $f_2(t)=cht$;

7. $f(t)=\frac{3at}{2\Pi}$ $\forall t \epsilon [0; 2\Pi[$, $f(t+2\Pi)=f(t)$;

8. $F(p)=\frac{2p^2-1}{p(p^2+2)}$; 9. $y''+y=e^t$, $\begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{matrix}$;

10. $\left.\begin{matrix} 4x'-y'+3x=\sin t, \\ x'+y=\cos t \ , \end{matrix}\right\}$ $x(0)=2$, $y(0)=-1$.

Вариант 11

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ t+\sin 2t & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{1}{t^2-4} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=2t^2$; 4. $f(t)=sh2t\sin 3t$;

5. $f(t)=t\sin^2 t$; 6. $f_1(t)=t$, $f_2(t)=\sin 4t$;

7. $f(t)=\begin{cases} \pi & \forall t \in [0,\pi[\ , \\ 2\pi & \forall t \in [\pi, 2\pi[\ , \end{cases}$ $f(t+2\pi)=f(t)$;

8. $F(p)=\frac{p^2+1}{p(p^2+9)}$; 9. $y'''+y''=\cos t$,

$y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

10. $\left.\begin{matrix} x''+y'+x=e^t, \\ x'+y''=1 \ , \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} x(0)=1 & x'(0)=0 \\ y(0)=-1, & y'(0)=2. \end{matrix}$

Вариант 12

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ ch2t & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{\cos 3x}{x} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=e^{-2t}$; 4. $f(t)=\cos 2t\cos 3t$;

5. $f(t)=\dfrac{e^{2t}\sin t}{t}$;   6. $f_1(t)=\sin t$, $f_2(t)=\sin 2t$;

7. $f(t)=\begin{cases} 2t & \forall t\epsilon[0;1[\\ t & \forall t\epsilon[1;2[\end{cases}$, $f(t+2)=f(t)$

8. $F(p)=\dfrac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}$;   9. $2y'+3y=t^2$, $y(0)=-1$;

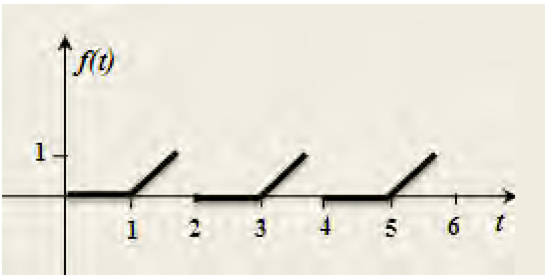
10. $\left.\begin{array}{l} x''+y=1, \\ y''+x=0, \end{array}\right\}$ $x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)$

Вариант 13

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ t & \forall t\epsilon[0,1[\\ e^t & \forall t\geq 1 \end{cases}$;   2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{2}{t-3} & \forall t\geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=ch\dfrac{t}{2}$;   4. $f(t)=e^t\cos^2 t$;

5. $f(t)=\dfrac{\sin 3t\cos 2t}{t}$;   6. $f_1(t)=\cos 2t$, $f_2(t)=e^{2t}$;



8. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+3p+2}$;   9. $y'+ay=b$, $y(0)=0$;

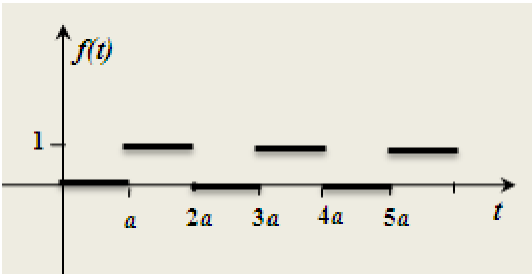
10. $\left.\begin{array}{l} x''+y'=sht-\sin t-t, \\ y''+x'=cht-cost, \end{array}\right\}$ $\begin{array}{ll} x(0)=0, & y(0)=1 \\ x'(0)=2, & y'(0)=0 \end{array}$;

Вариант 14

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ t+\frac{sint}{t} & \forall t\geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ e^{3t^2} & \forall t\geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=\begin{cases} 2 & \forall t\epsilon[0,5] \\ t & \forall t\epsilon]5,\infty[\end{cases}$; 4. $f(t)=s\,h\,t\cos 2t$;

5. $f(t)=\dfrac{\sin 3t}{t}$; 6. $f_1(t)=e^{3t}$, $f_2(t)=\cos t$;



8. $F(p)=\dfrac{1-p^2}{p(p^2+1)}$; 9. $y''-y'-6y=2$, $y(0)=1, y'(0)=0$;

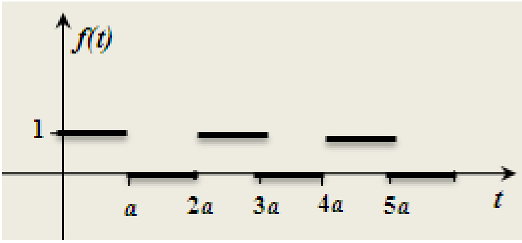
10. $\left.\begin{aligned} x''-x'+y&=e^{-t}+\cos t, \\ x'-y''-y'&=2e^{t}+\sin t, \end{aligned}\right\}$ $\begin{matrix} x(0)=2 & ,x'(0)=1 \\ y(0)=0, & y'(0)=1 \end{matrix}$

Вариант 15

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{sint}{t-2} & \forall t\geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ e^{(1+l)t} & \forall t\geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=3sh\frac{t}{3}$; 4. $f(t)=cos5t\ sin3t$;

5. $f(t)=\dfrac{e^{t}\sin 2t}{t}$; 6. $f_1(t)=t$, $f_2(t)=\cos 2t$;



8. $F(p)=\dfrac{p+2}{\left(p^2+4p+5\right)^2}$; 9. $y''-4y=2\cos 2t,\quad \begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=4 \end{matrix}$;

10. $\left.\begin{matrix} x'+3x-4y=9e^{2t}, \\ 2x+y'-3y=3e^{2t}, \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x(0)=2 \\ y(0)=0, \end{matrix}$

Вариант 16

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ sh2t & \forall t\geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ t^2 & \forall t\epsilon[0,2] \\ \frac{1}{t-4} & \forall t>2 \end{cases}$;

3. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t\epsilon[0,4] \\ 5t & \forall t\epsilon]4,\infty[\end{cases}$; 4. $f(t)=e^t\sin^2 t$;

5. $f(t)=\dfrac{1+\cos 2t}{t}$; 6. $f_1(t)=t$, $f_2(t)=sin2$;

7. $f(t)=\begin{cases} a & \forall t\epsilon[0;e[\\ -a & \forall t\epsilon[e;2e[\end{cases}$, $f(t+2e)=f(t)$;

8. $F(p)=\dfrac{p^2-2p-1}{(p^2-2p+3)^2}$; 9. $y''-9y=2-t,\quad \begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{matrix}$;

10. $\left.\begin{matrix} x''+y'+y=e^t-t, \\ x'-x+2y''-y=-e^{-t}, \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x(0)=1,\ x'(0)=2, \\ y(0)=y'(0)=0, \end{matrix}$

Вариант 17

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ t^2+1 & \forall t \epsilon [0,1] \\ \sin t & \forall t>1 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ e^{2t^3} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=t^2-1$; 4. $f(t)=ch2tcost$;

5. $f(t)=\frac{\cos 3t}{2}+te^t$; 6. $f_1(t)=e^{2t}$, $f_2(t)=sin3t$;

7. $f(t)=\begin{cases} |\sin t| & \forall t>0 \\ 0 & \forall t<0 \end{cases}$, $f(t+\pi)=f(t)$;

8. $F(p)=\frac{p^2-3p-9}{(p^2+9)^2}$; 9. $y''+y=sin2x$, $y(0)=y'(0)=0$;

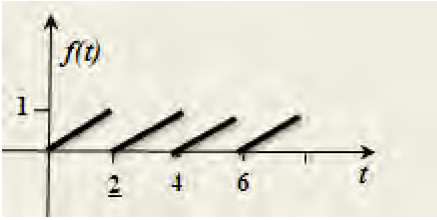
10. $\left.\begin{aligned} x''-y'=1, \\ y''-x'=0, \end{aligned}\right\}$ $x(0)=1$, $x'(0)=y(0)$, $y(0)=1$,

Вариант 18

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ shit & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{1}{t-2} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=\begin{cases} 1 & \forall t \epsilon [0,2] \\ 1+2t & \forall t \epsilon]2,\infty[\end{cases}$; 4. $f(t)=\sin 2t \cos^2 t$;

5. $f(t)=\frac{2+3\cos 4t}{e^t}$; 6. $f_1(t)=t$, $f_2(t)=sh2t$;



8. $F(p)=\dfrac{p^2+4}{(p^2-4)^2}$; 9. $y'''+y'=10e^{2t}$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

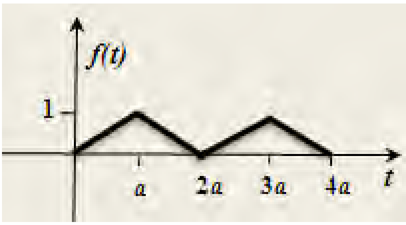
10. $\left.\begin{array}{r} x'+3x+y=0, \\ y'-x+y=0\ , \end{array}\right\} x(0)=y(0)=1$

Вариант 19

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ sint+\frac{1}{t} & \forall t\geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ e^{(1+2i)t} & \forall t\geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=t^2+2$ 4. $f(t)=ch2t\sin^2 t$;

5. $f(t)=\dfrac{\sin t\cos 3t}{t}$; 6. $f_1(t)=e^{2t}$, $f_2(t)=e^{\frac{t}{2}}$;



8. $F(p)=\dfrac{p^2-2p-8}{(p^2-2p+10)^2}$; 9. $y''+y'=t$, $y(0)=y'(0)=0$;

10. $\left.\begin{array}{r} x'+4x+4y=0, \\ y'+2x+6y=0\ , \end{array}\right\} x(0)=3,\ \ y(0)=15$

Вариант 20

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ sint & \forall t\geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{1}{e+3} & \forall t\geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=sh\frac{t}{3}$; 4. $f(t)=ch3t\, sin2t$;

5. $f(t)=t\sin 3t\ \cos 4t$; 6. $f_1(t)=e^{5t}$, $f_2(t)=t$;

7. $f(t)=t+1\quad \forall t\epsilon[0,1[$, $f(t+1)=f(t)$;

8. $F(p)=\dfrac{2(p-3)}{(p^2-6p+8)^2}$; 9. $y''+y'=1$, $y(0)=y'(0)=0$;

10. $\left.\begin{matrix} x''+y'+x=e^t, \\ x'+y''=1\,, \end{matrix}\right\}$ $x(0)=1,\quad x'(0)=0$ $y(0)=-1,\quad y'(0)=2$

Вариант 21

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ cost & \forall t\geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{1}{\sin t} & \forall t\geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=\begin{cases} e^{2t} & \forall t\epsilon[0,1] \\ 1 & \forall\, t\epsilon]1,\infty[\end{cases}$; 4. $f(t)=sh\, t\sin^2 t$;

5. $f(t)=\dfrac{\sin t\ \sin 3t}{t}$; 6. $f_1(t)=\cos 2t$, $f_2(t)=\cos 3t$;

7. $f(t)=2\quad \forall t\epsilon[0,3[$, $f(t+3)=f(t)$

8. $F(p)=\dfrac{p-1}{(p^2-2p+10)^2}$; 9. $y''+y=3$, $y(0)=y'(0)=0$;

10. $\left.\begin{matrix} x'=-2x-2y-4z, \\ y'=-2x+y-2z \\ z'=5x+2y+7z, \end{matrix}\right\}$ $x(0)=1\quad ,y(0)=2$ $z(0)=-1.$

Вариант 22

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \sin t & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ e^t & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=\begin{cases} \sin t & \forall t \epsilon \left[0, \frac{\Pi}{2}\right], \\ 0 & \forall t \epsilon \left]\frac{\Pi}{2}, \infty\right[\end{cases}$; 4. $f(t)=sh\, 2t \cos^2 \frac{t}{2}$;

5. $f(t) = t\cos(2t+3)$; 6. $f_1(t)=\sin 3t$, $f_2(t)=t$;

7. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t \epsilon [0,1[\\ 1 & \forall t \epsilon [1,4[\end{cases}$, $f(t+4)=f(t)$;

8. $F(p)=\frac{1}{(p-a)(p-b)}$; 9. $y''-2y'+y=e^t$, $y(0)=y'(0)=0$;

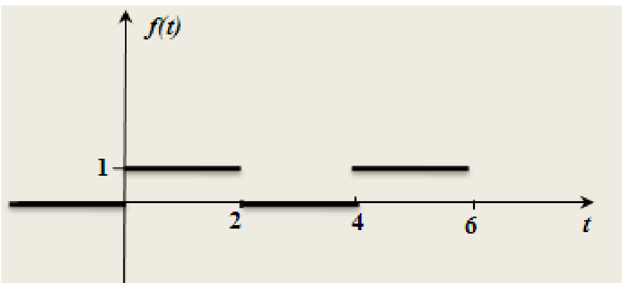
10. $\left.\begin{matrix} x'-x-2y=1, \\ y'-2x-y=t \end{matrix}\right\}$ $x(0)=2, y(0)=4$

Вариант 23

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ e^{2+t} & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ \frac{1}{2t+1} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=\begin{cases} \cos t & \forall t \epsilon [0,\Pi] \\ 0 & \forall t \epsilon]\Pi, \infty[\end{cases}$; 4. $f(t)=\sin^2 t \cos 2t$;

5. $f(t)=\frac{t\cos t}{e^{5t}}$; 6. $f_1(t)=\sin 2t$, $f_2(t)=e^{3t}$;



8. $F(p)=\frac{1}{(p-2)^4}$; 9. $y'+y=\sin t$, $y(0)=0$;

10. $\left.\begin{aligned} x' &= y - z, \\ y' &= z - 2x \\ z' &= 2x - y \end{aligned}\right\}$ $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$

Вариант 24

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 3t^2 & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ \frac{1}{\sin 2t} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

2. $f(t)=2 - t$ 4. $f(t)=\operatorname{ch} t \sin^2 t$;

5. $f(t)=t\cos(2t + 3)$; 6. $f_1(t)=\cos 3t$, $f_2(t) = \sin 2t$;

7. $f(t)=2t \quad \forall t \epsilon [0,1[$, $f(t+1)=f(t)$;

8. $F(p)=\frac{p^2+5}{(p^2-5)^2}$; 9. $y'+y=t, \quad y(0) = 0$;

10. $\left.\begin{aligned} x''+2y&=0, \\ y'' - 2x &= 0 \end{aligned}\right\}$ $x(0)$, $x'(0)=1$ $y(0)=y'(0)=0$

Вариант 25

1. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ e^{2t} & \forall t \geq 0 \end{cases}$; 2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ \frac{1}{t-2} & \forall t \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(t)=1 - t^2$; 4. $f(t)=\sin 2t \sin 4t$;

5. $f(t)=\frac{t\cos(t+2)}{e^{t+2}}$; 6. $f_1(t)=\cos 5t$, $f_2(t) = t$;

7. $f(t)=\begin{cases} e^t & \forall t \epsilon [0,2] \\ 0 & \forall t \epsilon]2,3[\end{cases}$ $f(t+3)=f(t)$

8. $F(p)=\frac{1}{(2p+3)^3}$; 9. $y'+y=\sin t, \quad y(0) = 0$;

10. $\left.\begin{aligned} x'-x+2y&=0, \\ y'' - 2y' &= 2t - \cos 2t \end{aligned}\right\}$ $x(0)=0$, $x'(0)=-1$ $y(0)=-\frac{1}{2}$ $y'(0)=0$

2.2 Решение типового варианта

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{n}{3n-1}+\ldots$$

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

т. е. не выполняется необходимый признак сходимости, то ряд расходится.

Пример2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

Решение. Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, $a_n=\frac{1}{2^n+1}$, $b_n=\frac{1}{2^n}$ и $a_n < b_n$. Тогда на основании (1.7), так как новый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, как геометрический ряд, будет сходится и данный ряд.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

Решение. Здесь удобно применить радикальный признак Коши:

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2};$$

т.е. $l < 1$, следовательно, ряд сходится

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n}+\ldots$$

Решение. Это знакочередующийся ряд, для которого оба условия признака Лейбница выполнены: наблюдается и убывание абсолютных величин членов ряда, и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится.

Если рассматривать ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

то такой ряд является гармоническим и он расходится. Таким образом, заданный ряд сходится условно.

Пример 5. Найти область сходимости степенного ряда

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots$$

Решение. Коэффициенты степенного ряда $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. Найдем радиус сходимости ряда по формуле (2.2)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Следовательно, ряд сходится в интервале, в котором $-1<x<1$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

Пусть $x=-1$. Тогда, подставляя это значение в заданный степенной ряд, получаем числовой ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\,\frac{1}{n}+\ldots$$

Этот ряд сходится условно, что доказано в примере 16.

Пусть $x=1$. Тогда, подставляя это значение в заданный степенной ряд, получаем числовой ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Этот ряд гармонический (1.3), расходящийся.

Следовательно, область сходимости заданного степенного ряда $-1 \le x < 1$.

Пример 6. Найти область сходимости ряда

$$(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots+\frac{1}{n^2}(x-2)^n+...$$

Решение. Коэффициенты

$$a_n=\frac{1}{n^2},\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1\cdot$$

Интервал сходимости $|x-2|<1$ или $1<x<3$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Если $x=3$, то получаем ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ Этот ряд сходится как обобщенный гармонический (1.4), у которого $k>1$.

Если $x=1$, то получаем ряд $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\ldots$ Этот ряд знакочередующийся. Он сходится по признаку Лейбница.

Таким образом, область сходимости ряда $1 \le x \le 3$.

Пример 7. Разложить в степенной ряд функцию e^{-x^2} при $x_0 = 0$.

Решение. В разложении функции e^x (2.13) заменим x на $-x^2$. В результате получится ряд

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots,\ -\infty<x<\infty.$$

Пример 8. Вычислить с точностью ε = 0,0001 определенный интеграл

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\,.$$

Решение. Заменим в подынтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд (2.15):

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1-1+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx = \left(\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots$$

Третье слагаемое меньше заданной величины ε:

$$\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5} < 0,0001,$$

поэтому

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \approx 0,25-0,00174 = 0,24826 \approx 0,2483\,.$$

В данном случае для вычисления интеграла с заданной точностью достаточно двух слагаемых ряда.

Пример 9. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на промежутке $[-\pi,\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \le 0, \\ 3, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Условия Дирихле выполнены. Функция непрерывна во всех точках промежутка, кроме точки $x=0$ и концов промежутка, где она имеет разрывы первого рода. Вычисляем коэффициенты разложения: коэффициент a_0 – по формуле (3.2)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}1dx+\int\limits_{0}^{\pi}3dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0}+3x\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(\pi+3\pi)=4,$$

коэффициенты a_n - по формуле (3.3)

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}1\cdot\cos nxdx+\int\limits_{0}^{\pi}3\cdot\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}+3\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)=0,$$

коэффициенты b_n – по формуле (3.4)

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}1\cdot\sin nxdx+\int\limits_{0}^{\pi}3\cdot\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-3\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}-3\frac{(-1)^n}{n}+\frac{3}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\left(2\frac{1}{n}-2\frac{(-1)^n}{n}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Откуда следует, что чётные и нечётные коэффициенты будут равны:

$$b_{2m}=0,\ b_{2m+1}=\frac{4}{\pi(2m+1)}.$$

В итоге получается разложение функции в ряд Фурье

$$f(x)=2+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m+1)}\sin(2m+1)x=$$

$$f(x)=2+\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\frac{4}{5\pi}\sin 5x+...$$

Пример 10. Найти четыре первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''=x-y^2$, удовлетворяющее условию: <u>$y(1)=1$.</u>

Решение. Будем искать в виде:

$$y=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3+...$$

Последовательно дифференцируя, получим:

$$y'' = 1 - 2y \cdot y',$$
$$y''' = -2(y')^2 - 2y \cdot y'',$$
$$y^{(4)} = -6y' \cdot y'' - 2y \cdot y''',$$
$$y^{(5)} = -6(y'')^2 - 8y' \cdot y''' - 2y \cdot y^{(4)}.$$

Подставляя начальные условия, найдем:

$$y'(1) = 0 \quad ; \quad y''(1) = 1 \quad ; \quad y'''(1) = -2 \quad ; y^{(4)}(1) = 4 \quad .$$

Таким образом, решение имеет первые слагаемые:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{-2}{6}(x-1)^3 + \frac{4}{24}(x-1)^4 + \dots .$$

Или окончательно :

$$y = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{6} + \dots$$

.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом выполнения контрольной работы является закрепление теоретических знаний, получение практических навыков при решении основных задач «Ряды», «Теория функций комплексного переменного», «Операционное исчисление». В частности:

- знакочередующиеся ряды, ряды Фурье;
- элементы теории функций комплексного переменного;
- основные правила и теоремы операционного исчисления.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грибкова, В.П. Сборник задач по высшей математике для экономистов / В.П. Грибкова. – Мн.: БНТУ, 2005 –48 с.

2. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер[и др.]; под редакцией проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2004. –471 с.

3. Гусак, А.А. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление : справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак [и др.]. – Мн.: Тетрасистемс, 2002. –174 с.

4. Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике: Ч.2 / Д.Т. Письменный [и др.]. – М.: Айрис Пресс, 2007. –487 с.

5. Соболь, Б.В. Практикум по высшей математике..: учеб. пособие / Б.В.Соболь [и др.]. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2006. –617 с.