МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания
для студентов строительных специальностей

М и н с к
Б Н Т У
2 0 1 5

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания
для студентов строительных специальностей

Минск
БНТУ
2015

УДК 53:51 (075.8)
ББК 22.311я7
М54

Составители:
Н. П. Воронова, А. А. Кузнецова,
М. А. Хотомцева, М. Н. Королева

Рецензенты:
В. А. Липницкий, А. В. Метельский

Издание предназначено для студентов строительных специальностей и содержит необходимые теоретические сведения и указания к решению задач. Приведены примеры и варианты заданий.

ВВЕДЕНИЕ

В современной науке и технике математические методы исследования, моделирования и проектирования играют все большую роль. Это обусловлено совершенствованием вычислительной техники, благодаря которой существенно расширяется возможность успешного применения математики при решении конкретных задач.

Для изучения курса студенты должны владеть основами математического анализа в объеме первых двух курсов университета.

Целью настоящих методических указаний является ознакомление с основными понятиями математической физики, освоение методов и способов решения основных задач.

Задачи курса сводятся к изучению основ математической физики, необходимых для освоения других прикладных дисциплин, и развитию практических навыков решения соответствующих задач. Особое место в овладении данным курсом отводится самостоятельной работе по решению текущих и индивидуальных домашних заданий.

Авторы выражают благодарность доценту кафедры «Высшая математика №3» БНТУ Крушевскому Е.А. за помощь в обсуждении и оформлении данной работы.

Лекция №1

1.1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Большинство физических явлений в таких областях, как динамика жидкости, электричество и магнетизм, механика, оптика, теплопередача, могут быть описаны с помощью дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП). Большинство уравнений математической физики – это ДУЧП, хотя на самом деле далеко не все в матфизике исчерпывается ими. Многие процессы для своего описания требуют присутствия интегральных членов, что приводит к интегральным либо даже к интегро-дифференциальным уравнениям. Однако такие уравнения выходят за рамки настоящих методических указаний.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которых неизвестная функция зависит только от *одной переменной,* в ДУЧП неизвестная функция зависит от нескольких переменных (например, температура $u(x,t)$ зависит от координаты x и времени t). Для упрощения записи будем использовать следующие обозначения $u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и т.п.

К наиболее важным ДУЧП относятся:

$u_t = u_{xx}$ – одномерное уравнение теплопроводности,

$u_t = u_{xx} + u_{yy}$ – двумерное уравнение теплопроводности,

$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ – уравнение Лапласа в полярных координатах,

$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ – трехмерное волновое уравнение,

$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u$ – телеграфное уравнение.

Во всех приведенных примерах неизвестная функция u зависит *более* чем от одной переменной. Такая переменная u (которую дифференцируем) называется **зависимой** переменной или просто – **неизвестной функцией**. Переменные, по которым происходит дифференцирование, называются **независимыми** переменными. Например, в уравнении $u_t = u_{xx}$ зависимая переменная (неизвестная функция)

$u(x, t)$ является функцией двух независимых переменных x и t.

Мы уже упоминали, что множество **физических законов природы** можно сформулировать на языке ДУЧП. Примером могут быть уравнения Максвелла, закон теплообмена Ньютона, уравнения движения Ньютона, уравнение Шрёдингера в квантовой механике. Во всех этих уравнениях физические явления описываются на языке **пространственных и временных производных.** Производные появляются в уравнениях потому, что они описывают важнейшие физические величины (такие, как скорость, ускорение, сила, трение, поток, ток и т. д.). Таким образом, возникают ДУЧП, содержащие неизвестную функцию, которую необходимо найти (т.е. определить ее значения для любых значений независимых переменных).

Типы уравнений с частными производными

Уравнения с частными производными можно классифицировать по многим признакам. Классификация уравнений важна потому, что для каждого класса существует своя общая теория и методы решения уравнений.

Приведем шесть основных методов классификации уравнений.

1. *Порядок уравнения.* Порядком уравнения называется *наивысший порядок частных производных,* входящих в уравнение.

$u_t = u_{xx}$ – уравнение второго порядка,

$u_t = u \cdot u_{xxx} + \sin x$ – уравнение третьего порядка.

2. *Число переменных.* Числом переменных называется *число независимых переменных.* Например,

$u_t = u_{xx}$ – уравнение с двумя переменными x и t,

$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ – уравнение с двумя переменными.

3. *Линейность.* Уравнения с частными производными бывают *линейными* и *нелинейными.* В линейные уравнения зависимая переменная (неизвестная функция) и все ее частные производные входят линейным образом (т.е. не умножаются друг на друга, не возводятся в квадрат и т. д.). Например, **линейным уравнением второго порядка с двумя независимыми переменными** называется уравнение вида:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (1.1)$$

где *A, B, C, D, E, F и G* – *константы* или заданные *функции* независимых переменных *x* и *y*. Например,

$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t$ – линейное уравнение,

$u_t = u \cdot u_{xxx} + \sin x$ – нелинейное уравнение.

4. *Однородность*. Уравнение (1.1) называется **однородным**, если правая часть *G(x,y)* тождественно равна нулю для всех *x* и *y*. Если *G(x,y)* не равна тождественно нулю, то уравнение называется **неоднородным.**

5. *Виды коэффициентов*. Если коэффициенты *A, B,* C, *D*, *E* и *F* уравнения (1.1) постоянны, то уравнение называется *уравнением с постоянными коэффициентами* (иначе с переменными коэффициентами).

6. *Три основных типа линейных уравнений.* Все линейные уравнения с частными производными второго порядка вида (1.1) относятся к одному из трех типов: а) параболический, б) гиперболический, в) эллиптический.

Параболический тип. **Уравнения параболического типа описывают** процессы теплопроводности и диффузии и определяются условием $B^2 - 4AC = 0$.

Гиперболический тип. **Уравнения гиперболического типа** описывают колебательные системы и волновые движения и определяются условием $B^2 - 4AC > 0$

Эллиптический тип. **Уравнения эллиптического типа** описывают установившиеся (стационарные) процессы и определяются условием $B^2 - 4AC < 0$.

ПРИМЕРЫ:

а) $u_t = u_{xx}$, $B^2 - 4AC = 0$, параболический тип,

б) $u_{tt} = u_{xx}$, $B^2 - 4AC = 4$, гиперболический тип,

в) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $B^2 - 4AC = -4$, эллиптический тип,

г) $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, $B^2 - 4AC = -4y$, т.н. *смешанный тип*, эллиптический тип при $y > 0$, параболический тип при $y = 0$, гиперболический тип при $y < 0$.

Из этих примеров видно, что в случае переменных коэффициентов тип уравнения может изменяться от точки к точке. Тип уравнения зависит только от коэффициентов при вторых производных и никаким образом не связан с коэффициентами при первых производных, с самой функцией и свободным членом.

ЗАДАЧф

Проведите классификацию следующих уравнений по всем признакам:

а) $u_t = u_{xx} + 2u_x + u$, б) $u_t = u_{xx} + e^{-t}$, в) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$,

г) $u_{tt} = uu_{xxx} + e^{-t}$.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ДУЧП. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Мы уже указали, что линейное ДУЧП второго порядка с двумя независимыми переменными

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

(*A, B, C, D, E, F, G* являются функциями *x* и *y* или могут быть константами) относится к одному из следующих типов в зависимости от знака выражения $B^2 - 4AC$.

С помощью новых переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, которые вводим вместо *x* и *y*, преобразуем исходное уравнение к **каноническому виду**. Для этого составим **характеристическое** дифференциальное **уравнение** $A(dy)^2 - B\,dy \cdot dx + C(dx)^2 = 0$, которое распадается на пару обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (в гиперболическом и эллиптическом случае), либо представляет собой одно уравнение (параболический случай). Общие интегралы характеристического уравнения $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$ называют **характеристиками** (в параболическом случае будет только одна характеристика).

1. Для уравнения гиперболического типа замена переменных (обе характеристики - действительные функции!) $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ приведет уравнение к каноническому виду $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ (или $u_{\xi\xi} - u_{\psi\psi} = \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$, если дополнительно положить $\xi = 0{,}5\,(\varphi(x, y) + \psi(x, y))$, $\eta = 0{,}5\,(\varphi(x, y) - \psi(x, y))$ (для гиперболиче-

ского уравнения есть два канонических вида);

2. Для параболического уравнения замена переменных $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ - характеристика, а $\psi(x,y)$ - произвольная функция, *линейно независимая* с $\varphi(x,y)$, приведет уравнение к виду $u_{\eta\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$ (канонический вид параболического уравнения);

3. В эллиптическом случае обе характеристики $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ являются комплексно сопряженными функциями, поэтому в качестве замены переменных применяют их действительную и мнимую часть $\xi=\frac{1}{2}(\varphi(x,y)+\psi(x,y))=\mathrm{Re}(\varphi(x,y))$, $\eta=\frac{i}{2}(\psi(x,y)-\varphi(x,y))=\mathrm{Im}(\varphi(x,y))$, при этом уравнение примет вид $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$ (канонический вид эллиптического уравнения).

Теперь мы более подробно рассмотрим вопрос приведения к каноническому виду уравнение общего вида в гиперболическом случае

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G \qquad (1.2)$$

ШАГ 1. Введем новые переменные $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ так, чтобы уравнение имело наиболее простую форму. Для этого сначала вычисляем частные производные

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx},$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y,\ u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}.$$

ШАГ 2. Подставим эти соотношения в уравнение (1.2) и после довольно громоздких вычислений и приведения подобных получаем

$$\overline{A}u_{\xi\xi}+\overline{B}u_{\xi\eta}+\overline{C}u_{\eta\eta}+\overline{D}u_\xi+\overline{E}u_\eta+\overline{F}u=\overline{G},$$

где $\overline{A}=A\xi_x^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2$, $\overline{B}=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y$, $\overline{C}=A\eta_x^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2$, $\overline{D}=A\xi_{xx}+B\xi_{xy}+C\xi_{yy}+D\xi_x+E\xi_y$, $\overline{F}=F$, $\overline{E}=A\eta_{xx}+B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+D\eta_x+E\eta_y$, $\overline{C}=A\eta_x^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2$, $\overline{G}=G$.

ШАГ 3. Зададимся целью выбрать $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ таким образом, чтобы коэффициенты $\overline{A}$ и $\overline{C}$ обратились в нуль. Это позволит нам привести исходное уравнение к каноническому виду.

Таким образом, мы можем записать уравнения:

$$A(\xi_x/\xi_y)^2+B(\xi_x/\xi_y)+C=0\,,\ A(\eta_x/\eta_y)^2+B(\eta_x/\eta_y)+C=0\,.$$

Из них получаем пару характеристических уравнений:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\xi_x}{\xi_y}=\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\eta_x}{\eta_y}=\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,.$$

Наша задача свелась к нахождению двух функций $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ таких, чтобы отношения ξ_x/ξ_y и η_x/η_y удовлетворяли указанной выше паре характеристических уравнений.

ПРИМЕР: Дано уравнение $u_{xx}-4u_{yy}+u_x=0$ (гиперболического типа). Его действительные характеристики определяются из уравнений

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\xi_x}{\xi_y}=\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=-2\,,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\eta_x}{\eta_y}=\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=2\,.$$

Решим их относительно y, получим: $y=-2x+c_1, y=2x+c_2$. Затем выразим ξ и η через c_1 и c_2, т.е. получим выражения $\xi=y+2x=c_1, \eta=y-2x=c_2$. Введенные таким образом новые координаты удовлетворяют уравнению характеристик. Их можно изобразить на рисунке.

Для получения канонического вида данного уравнения (см. выше) подставляем новые координаты $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ в уравнение $\overline{A}u_{\xi\xi}+\overline{B}u_{\xi\eta}+\overline{C}u_{\eta\eta}+\overline{D}u_{\xi}+\overline{E}u_{\eta}+\overline{F}u=\overline{G}$. Все коэффициенты для него были определены ранее.

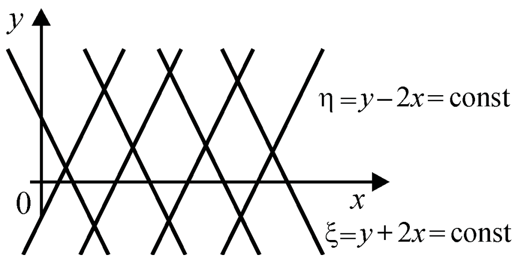

Рис. 1. Графики семейства характеристик

Приведем теперь ПРИМЕР того, как «работает» общий метод приведения к каноническому виду.

Рассмотрим уравнение $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$, $x > 0$, $y > 0$. Данное уравнение имеет гиперболический тип в первом квадранте.

Далее, определяем новые координаты, чтобы привести исходное уравнение к канонической форме.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{x}{y}, \ \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{x}{y}.$$

Интегрируем эти ОДУ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Получаем два общих интеграла $y^2 - x^2 = c_1, y^2 + x^2 = c_2$.

Новые координаты вводим по формулам $\xi = y^2 - x^2, \eta = y^2 + x^2$.

После преобразования получим новые коэффициенты $\overline{A} = 0$, $\overline{B} = -16x^2y^2$, $\overline{C} = 0$, $\overline{D} = -2(x^2 + y^2)$, $\overline{E} = 2(y^2 - x^2)$, $\overline{F} = 0$, $\overline{G} = 0$.

Подставим в уравнение $\overline{A}u_{\xi\xi} + \overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + \overline{D}u_{\xi} + \overline{E}u_{\eta} + \overline{F}u = \overline{G}$ и получим $u_{\xi\eta} = \frac{-(x^2 + y^2)u_{\xi} + (y^2 - x^2)u_{\eta}}{8x^2y^2}$. Выразив x и y через ξ и η, получим канонический вид данного уравнения: $u_{\xi\eta} = \frac{\eta u_{\xi} - \xi u_{\eta}}{2(\xi^2 - \eta^2)}$.

На самом деле для гиперболических уравнений существует две канонические формы. Вторую можно получить из первой заменой переменных вида $\alpha = \alpha(\xi,\eta) = \xi + \eta$, $\beta = \beta(\xi,\eta) = \xi - \eta$. Найдя

$$u_{\xi} = u_{\alpha}\alpha_{\xi} + u_{\beta}\beta_{\xi} = u_{\alpha} + u_{\beta}, \ u_{\eta} = u_{\alpha}\alpha_{\eta} + u_{\beta}\beta_{\eta} = u_{\alpha} - u_{\beta},$$

$$u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha}\alpha_{\eta} + u_{\alpha\beta}\beta_{\eta} + u_{\beta\alpha}\alpha_{\eta} + u_{\beta\beta}\beta_{\eta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta},$$ получим

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \frac{-\beta u_{\alpha} - \alpha u_{\beta}}{2\alpha\beta}.$$

1.3. ПОНЯТИЕ О НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Из курса высшей математики известно, что дифференциальные уравнения, как правило, имеют бесконечное множество решений. Это связано с появлением в процессе интегрирования констант, при любых значениях которых решение удовлетворяет исходному уравнению. Решение задач матфизики связано с нахождением зависимостей от координат и времени определенных физических величин, которые, безусловно, должны удовлетворять требованиям однозначности, конечности и непрерывности. Иными словами, любая задача матфизики предполагает поиск единственного решения (если оно вообще существует). Поэтому математическая формулировка физической задачи должна помимо основных уравнений (ДУЧП), описывающих искомые функции внутри рассматриваемой области, включать дополнительные уравнения (дифференциальные или алгебраические), описывающие искомые функции на границах рассматриваемой области в любой момент времени и во всех внутренних точках области в начальный момент времени. Эти дополнительные уравнения называют соответственно граничными и начальными условиями задачи.

Граничные условия

Предположим, необходимо решить определенную задачу, описываемую ДУЧП, для некоторой области. Тогда для нахождения единственного решения необходимо задать граничные условия (ГУ), т. е. связать искомые переменные на границе области некоторыми уравнениями.

По виду уравнений, задающих ГУ, различают граничные условия:
- первого рода (условия Дирихле), задающие значения неизвестной функции через заданную на границе области известную функцию;
- второго рода (условия Неймана), задающие значения нормальной производной от неизвестной функции через заданную на границе области известную функцию;
- и третьего рода (условия Робена), когда на границе задается линейная комбинация ГУ 1-го и 2-го вида.

Начальные условия

Для нахождения единственного решения в задачах, описывающих нестационарные, т.е. изменяющиеся во времени физические процессы, помимо граничных необходимо задавать еще и начальные условия, определяющие значения переменных или их градиентов во всех точках рассматриваемой области в начальный момент времени.

Лекция №2

2.1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Одномерное уравнение теплопроводности $u_t = \alpha u_{xx} + f(x,t)$ можно вывести, опираясь на фундаментальный *закон сохранения количества тепла*. При этом рассматривается зависимость скорости теплообмена от основных теплофизических параметров: *теплопроводности*, *теплоемкости* и *плотности материала*.
В теории теплопроводности основным принципом является *закон сохранения энергии* (тепловой энергии). Все остальные утверждения выводятся из этого основного принципа. В частности, из уравнения сохранения энергии и выводится уравнение теплопроводности.

Рассмотрим однородный стержень длины L, относительно которого сделаем следующие предположения:

1. Стержень сделан из одного однородного проводящего материала.

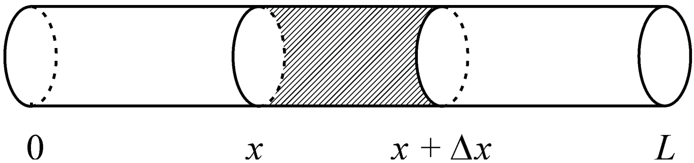

Рис. 2. Тонкий теплопроводящий стержень

2. Боковая поверхность стержня теплоизолирована (тепло может распространятся только вдоль оси *x)*.

3. Стержень тонкий, это значит, что температура всех точек в каждом поперечном сечении стержня постоянна. Если рассмотреть часть стержня на отрезке $[x, x+\Delta x]$ и воспользоваться законом сохранения количества тепла, то можно написать:

Общее изменение количества тепла на отрезке $[x, x+\Delta x]$
= *Полное количество тепла, прошедшего через границы*
+ *Полное количество тепла, образовавшегося внутри отрезка* $[x, x+\Delta x]$**.**

Общее количество тепла внутри отрезка $[x, x+\Delta x]$ в любой момент времени t вычисляется по формуле $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t)\,ds$, где:

c – удельная теплоемкость материала (показывает способность материала запасать тепло), ρ – плотность материала, A – площадь поперечного сечения стержня.

Тогда закону сохранения энергии можно придать следующую математическую форму:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t)\,ds = c\rho A\int\limits_{x}^{x+\Delta x} u_t(s,t)\,ds = \\ &= kA[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)] + A\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(s,t)\,ds \end{aligned}, \qquad (2.1)$$

где k – теплопроводность материала (показывает способность материала проводить тепло), $f(x, t)$ – объемная мощность внешнего источника тепла.

Задача теперь состоит в том, чтобы записать уравнение (2.1) в форме, не содержащей интегралов. Для решения этой проблемы следует воспользоваться теоремой о среднем значении из курса интегрального исчисления.

Теорема о среднем значении

Если функция f(x) непрерывна на отрезке $[a,b]$***, то существует по крайней мере одна точка*** $\xi\in[a,b]$ ***такая, что*** $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Применяя этот результат к уравнению (2.1), приходим к следующему уравнению:

$$c\rho A u_t(\xi,t)\Delta x = kA[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)] + A f(\xi,t)\Delta x, \qquad x<\xi<x+\Delta x,$$

или $u_t(\xi,t) = \dfrac{k}{c\rho}A\left[\dfrac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}\right] + \dfrac{1}{c\rho}f(\xi,t)$.

Устремим Δx к нулю, получаем искомое уравнение

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) + F(x,t),$$

где $\alpha^2 = k(c\rho)^{-1}$ – коэффициент температуропроводности,

$F(x,t) = (c\rho)^{-1} f(x,t)$ – плотность источников тепла.

В случае, когда боковая поверхность стержня не является теплоизолированной, будем считать, что величина теплового потока через боковую поверхность стержня пропорциональна (обозначим через β – коэффициент пропорциональности) разности между температурой стержня $u(x, t)$ и температурой окружающей среды, которая поддерживается постоянной и равной нулю (при любой другой постоянной температуре окружающей среды результат будет аналогичен). В этом случае закон сохранения количества тепла приводит к уравнению

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) - \beta u + F(x,t) .$$

В плоском и пространственном случаях при выводе уравнения теплопроводности следует использовать ранее изученный учебный материал по теме кратные интегралы и теория поля.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии, который в рассматриваемом случае может быть сформулирован следующим образом: количество теплоты dQ, введенное в элементарный объем извне за время $d\tau$ вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников, равно изменению внутренней энергии или энтальпии вещества (в зависимости от рассмотрения изохорного или изобарного процесса), содержащегося в элементарном объеме:

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ , \tag{2.2}$$

где dQ_1 – количество теплоты, введенное в элементарный объем путем теплопроводности за время dt; dQ_2 – количество теплоты, которое за время dt выделилось в элементарном объеме dV за счет внутренних источников; dQ – изменение внутренней энергии или энтальпии вещества, содержащегося в элементарном объеме dV, за время dt.

Для нахождения составляющих уравнения (2.2) выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz (рис. 3). Параллелепипед должен быть расположен так, чтобы его грани были параллельны соответствующим координатным плоскостям. Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объема за время dt в направлении осей Ox, Oy, Oz, обозначим соответственно dQ_x, dQ_y, dQ_z. Количество теплоты, которое будет отводиться через противоположные грани в тех же направлениях, обозначим соответственно dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}. Количество теплоты, подведенное к грани $dydz$ в направлении оси Ox за время dt составляет

$dQ_x = q_x dydzdt$, где q_x – проекция плотности теплового потока на направление нормали к указанной грани.

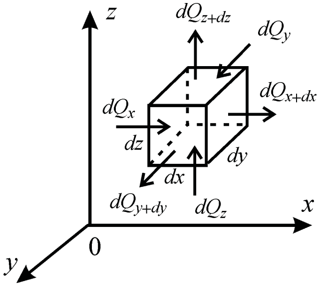

Рис. 3. К выводу пространственного уравнения теплопроводности

Количество теплоты, отведенное через противоположную грань элементарного параллелепипеда в направлении оси *Ox*, запишется как $dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzdt$. Разница между количеством теплоты, подведенного к элементарному параллелепипеду, и количеством теплоты отведенного от него за время dt в направлении оси *Ox*, представляет собой количество теплоты:

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = (q_x - q_{x+dx})dydzdt = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydzdt \qquad (2.3)$$

Так как функция q_{x+dx} является непрерывной в рассматриваемом интервале dx, то к ней можно применить формулу Лагранжа.

Аналогичным образом можно найти количество теплоты, подводимое к элементарному объему и в направлениях двух других координатных осей *Oy* и *Oz*. Количество теплоты dQ, подведенное в результате теплопроводности к рассматриваемому объему, будет равно:

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dxdydzdt = -\operatorname{div}(\vec{q}) dxdydzdt$$

Теперь определим вторую составляющую уравнения (2.3). Обозначим количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объема среды в единицу времени и называемое мощностью внутренних источников теплоты, через q_V, тогда $dQ_2 = q_V dxdydzdt$.

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{q}) + q_V \tag{2.4}$$

В твердых телах перенос теплоты осуществляется по закону Фурье $\vec{q} = -k(x,y,z)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\vec{u}$, где $k(x,y,z)$ – коэффициент (вообще говоря, переменный) теплопроводности неоднородного изотропного тела. Подставляя в (2.4), получаем уравнение теплопроводности неоднородного изотропного твердого тела в декартовых координатах

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u) + F(x,y,z,t),$$

где $F(x,y,z,t)$ – т.н. функция источника. В случае однородного изотропного тела (k = const) приходим к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(x,y,z,t), \tag{2.5}$$

где $\Delta u = \nabla^2 u = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u)$ – лапласиан, $f(x,y,z,t)$ – модифицированная функция источника, а $a = \sqrt{k/(c\rho)}$.

В правой части уравнения (2.5), которое мы вывели для декартовой системы координат, стоит лапласиан (оператор Лапласа). В цилиндрической системе координат лапласиан имеет вид: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, где r – радиус-вектор; φ – полярный угол; z – апликата. Выражение лапласиана в сферических координатах имеет вид

$\Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 (r\,u)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$, где r – сферический радиус-вектор; φ – полярный (азимутальный) угол, θ – нормальный (зенитный) угол.

В любом случае вне зависимости от выбора системы координат, уравнение теплопроводности будет иметь вид (2.5), при этом лапласиан будет иметь одну из указанных выше форм.

Если внутренние источники или стоки теплоты отсутствуют, то уравнение (2.5) принимает вид уравнения Фурье

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, \tag{2.6}$$

В случае стационарной теплопроводности и отсутствии внутренних источников теплоты выражение (2.6) принимает вид уравнения Лапласа $\Delta u = 0$.

Для уравнения теплопроводности различают 3 типа ГУ, которые задают тепловой режим на границе. Основные виды тепловых режимов

- на границе поддерживается определенная температура. Это ***ГУ первого рода (задача Дирихле)***;
- через границу подается определенный тепловой поток (задается значение внешней нормальной производной). Это ***ГУ второго рода (задача Неймана)***;
- происходит теплообмен с внешней средой, температура которой известна (поток, втекающий в область (или вытекающий из области) через границу пропорционально разности между температурой внутри тела и некоторой заданной температурой). Это ***ГУ третьего рода (задача Робена)***.

Начальные условия для уравнения теплопроводности задают начальное распределение температуры внутри тела.

2.2. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Цель данного изложения ознакомить с мощным методом разделения переменных и показать, как можно воспользоваться этим методом для решения хорошо известной диффузионной задачи.

Основная идея метода состоит в разложении *начального условия* в ряд Фурье, нахождении отклика системы на каждый член этого ряда и последующего суммирования всех откликов. Так можно найти отклик на *произвольное начальное условие*.

Метод разделения переменных – один из наиболее почтенных по возрасту методов решения смешанных задач и применяется, когда:

1. Уравнение является линейным и однородным (не обязательно с постоянными коэффициентами).

2. Граничные условия заданы в виде:

$$\alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = 0$$
$$\gamma u_x(1,t) + \delta u(1,t) = 0 \ ,$$

где α, β, γ и δ – константы (граничные условия, заданные в таком виде, называются **линейными** однородными граничными условиями).

Метод был создан во времена Фурье (обычно он называется *методом Фурье)* и в настоящее время является наиболее популярным (в тех случаях, когда он применим).

Вместо изучения метода в общем случае разберем сначала частную задачу (позже обсудим и общий случай). Рассмотрим смешанную задачу диффузионного типа: найти решение ДУЧП

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},\ 0< x <1,\ 0< t <\infty,$$

удовлетворяющее граничным условиям (ГУ)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases},\ 0< t <\infty,$$

и начальному условию (НУ)

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le 1.$$

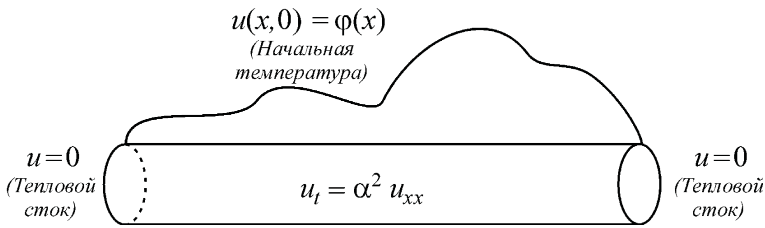

Рис. 4. Схематическое изображение диффузионной задачи

Физическая интерпретация данной задачи такова. Имеется стержень конечной длины, концы которого поддерживаются при постоянной, равной нулю температуре (на самом деле концы могут поддерживаться при гораздо более высокой температуре, значение которой принимается за начало отсчета). Дополнительные данные о задаче представлены в виде начального условия. Наша цель – найти распределение температуры $u(x,t)$ по всему стержню в последующие моменты времени.

Общие принципы метода разделения переменных

Для уравнения с частными производными разделение переменных – это поиск решений вида $u(x,t)=X(x)T(t)$, где $X(x)$ – функция, зависящая только от переменной x, а $T(t)$ - зависящая только от t. Такое решение является в каком-то смысле элементарным, поскольку температура $u(x,t)$, представленная в таком виде, будет сохранять «форму» профиля в различные моменты времени (см. Рис. 5).

Общая идея заключается в том, чтобы найти бесконечное число таких решений уравнения с частными производными (удовлетворяющие граничным условиям). Эти функции $u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$ (**фундаментальные решения**) являются элементарными кирпичиками, из которых строится решение задачи. Это решение $u(x,t)$ находится в виде такой линейной комбинации фундаментальных решений $X_n(x)T_n(t)$, что результирующая сумма $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)T_n(t)$ (ряд Фурье по двум переменным) удовлетворяет уравнению, начальным и граничным условиям, и является решением исходной задачи. Проделаем все выкладки подробно.

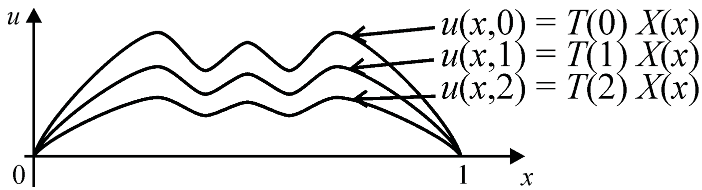

Рис. 5. График функций $X(x)$ $T(t)$ в различные моменты времени

Разделение переменных

ШАГ 1. (Нахождение элементарных решений уравнения с частными производными.) Мы хотим найти функцию $u(x,t)$ которая является решением задачи:

$$\text{(УЧП)}\quad u_t=\alpha^2 u_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t<\infty,$$

$$\text{(ГУ)}\quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases},\ 0<t<\infty,$$

$$(\text{НУ}) \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1.$$

Будем искать решения, представимые в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Для этого подставим выражение $X(x)T(t)$ в уравнение. В результате подстановки получаем $X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$. Теперь *разделим* обе части последнего уравнения на $\alpha^2 X(x)T(t)$, в результате чего получаем $\dfrac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$.

Получили (дифференциальное) уравнение с разделенными переменными, т.е. левая часть уравнения зависит только от *t*, а правая часть – только от *x*. Так как *x* и *t* *не зависят один от другого,* то каждая часть этого уравнения должна быть константой. Обозначим эту константу *k*, тогда $\dfrac{T'}{\alpha^2 T} = \dfrac{X''}{X} = k$.

Теперь можно решить каждое из этих обыкновенных дифференциальных уравнений отдельно. Произведение соответствующих решений будет удовлетворять исходному уравнению с частными производными. Таким образом, исходное ДУЧП второго порядка превратилось в два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Следует отметить, что константа *k* должна быть *отрицательной*. Иначе уравнение $X'' - kX = 0$ *с граничными условиями* $X(0) = X(1)$ *(т.н. задача Штурма-Лиувилля) имеет только тривиальное решение* $X(x) \equiv 0$. Другими словами, функции $T(t)$ должны стремиться к нулю при $t \to \infty$. Поэтому обозначим $k = -\lambda^2$, где $\lambda \ne 0$ (в этом случае выражение $-\lambda^2$ будет всегда отрицательным). С учетом нового обозначения два обыкновенных дифференциальных уравнения запишутся

$$T' + \lambda^2 \alpha^2 T = 0,$$
$$X'' + \lambda^2 X = 0.$$

Решив эти уравнения, получим их общие решения в виде $T(t) = Ce^{-\lambda^2 \alpha^2 t}$, $X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$, *A*, *B* и *C* – произвольные постоянные. Следовательно, функция вида

$$u(x,t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t}\left[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right],$$

где A, B и λ – произвольные постоянные, удовлетворяет ДУЧП $u_t = \alpha^2 u_{xx}$. То есть теперь мы имеем бесконечный набор функций, удовлетворяющих нашему ДУЧП.

ШАГ 2. (Нахождение решений, удовлетворяющих граничным условиям.) У нас есть бесконечное множество решений исходного уравнения, но не все они удовлетворяют граничным или начальным условиям. Следующий шаг состоит в выборе такого *подмножества* решений вида $e^{-\lambda^2\alpha^2 t}\left[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right]$, которые удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

Чтобы сделать это, подставим в эти граничные условия решения $e^{-\lambda^2\alpha^2 t}\left[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right]$. В результате получаем

$$u(0,t) = Be^{-\lambda^2\alpha^2 t} = 0 \text{, отсюда } B = 0,$$

$$u(1,t) = Ae^{-\lambda^2\alpha^2 t}\sin\lambda = 0 \text{, отсюда } \sin\lambda = 0.$$

Второе граничное условие накладывает ограничение на возможные значения константы разделения λ*:* она должна быть корнем уравнения $\sin\lambda = 0$. Другими словами, чтобы удовлетворить условию $u(1,t) = 0$, необходимо *потребовать* выполнения соотношений $\lambda = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ или $\lambda_n = \pm n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$.

Можно удовлетворить второму граничному условию, если $A = 0$, но в таком случае решение $e^{-\lambda^2\alpha^2 t}\left[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right]$ будет тождественно равенству нулю.

После выполнения второго шага располагаем бесконечным набором функций $u_n(x,t) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$, каждая из которых удовлетворяет исходному ДУЧП и граничным условиям. Решение будет представлять собой некоторую сумму этих элементарных решений. Конкретный вид суммы будет зависеть от начального условия.

ШАГ 3. (Нахождение решения, удовлетворяющего уравнению, граничным и начальным условиям).

Последний шаг заключается в нахождении суммы фундаментальных решений $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)$, т. е. в подборе таких коэффициентов A_n, что функция будет удовлетворять начальному условию $u(x,t) = \varphi(x)$.

Подстановка суммы в начальное условие приводит к равенству $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$. Это равенство, которое на самом деле является уравнением, приводит нас к интересному вопросу: можно ли начальную температуру $\varphi(x)$ разложить в ряд по элементарным функциям вида $A_1 \sin(\pi x) + A_2 \sin(2\pi x) + A_3 \sin(3\pi x) + \dots$?
Положительный ответ на этот вопрос дал французский математик Жозеф Фурье. Оказалось, что для достаточно «хороших» функций такое разложение возможно. Тогда возникает новый вопрос: как найти коэффициенты разложения A_n ?

На самом деле сделать это легко. Для этого воспользуемся свойством системы функций $\{\sin(n\pi x); n = 1,2,3...\}$, известным, как **ортогональность.** В нашем случае эти функции удовлетворяют условиям

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{1}{2}, m = n. \end{cases}$$

Итак, мы хотим найти коэффициенты в разложении

$$\varphi(x) = A_1 \sin(\pi x) + A_2 \sin(2\pi x) + A_3 \sin(3\pi x) + \dots .$$

Для этого умножим обе части этого соотношения на $\sin m\pi x$ (m – произвольное целое число) и проинтегрируем от нуля до единицы. В результате получаем

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin(m\pi x)dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x)dx = \frac{A_m}{2},$$

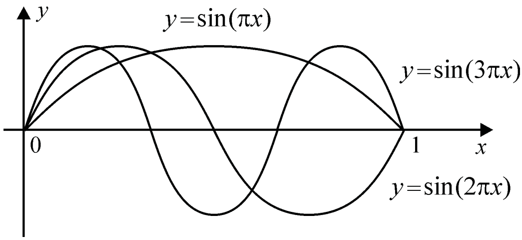

Рис. 6. Ортогональная система функций

все остальные слагаемые обратились в нуль, благодаря ортогональности. Решая уравнение относительно A_m, получаем

$$A_m = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(m\pi x)dx\,.$$

Таким образом, мы получили, что решение записывается в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)\,,$$

где коэффициенты A_n определяются по формулам

$$A_n = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(n\pi x)dx\,.$$

Можно убедиться в том, что полученное нами решение удовлетворяет всем условиям исходной задачи.

Несмотря на сложность записи данного решения, оно обладает большой информативностью.

1. Обратим внимание на единственную разницу между *разложением* функции $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$ *в ряд Фурье по синусам* и решением $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)$, которая состоит в наличии временного множителя $e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$ в каждом члене ряда. Поэтому, если начальное условие имеет простое разложение вида:

$$\varphi(x) = \sin(\pi x) + 0{,}5\sin(3\pi x)$$

то решение можно записать сразу

$$u(x,t)=e^{-\pi^2\alpha^2 t}\left[\sin(\pi x)+0{,}5\sin(3\pi x)\right]$$

Очевидно, что если мы разложим $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам, то получим $A_1=1, A_2=0, A_3=0{,}5, A_4=A_5=\ldots=0$

2. Можно объяснить решение $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$ следующим образом: мы представляем начальную температуру $\varphi(x)$ в виде суммы элементарных решений вида $A_n\sin(n\pi x)$, каждая такая функция порождает отклик $A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$). Складывая все такие отклики, мы получаем решение, соответствующее начальному условию $u(x,0)=\varphi(x)$.

3. Каждое слагаемое в разложении

$$u(x,t)=A_1 e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi x)+A_2 e^{-(2\pi\alpha)^2 t}\sin(2\pi x)+\ldots$$

является функцией от *x* и *t*. Вклад слагаемых с большими номерами при $t>0$ очень мал благодаря множителю $e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$. Следовательно, по истечении достаточно большого промежутка времени полное решение приближенно совпадает с первым слагаемым, которое представляет собой затухающую со временем полуволну синусоиды.

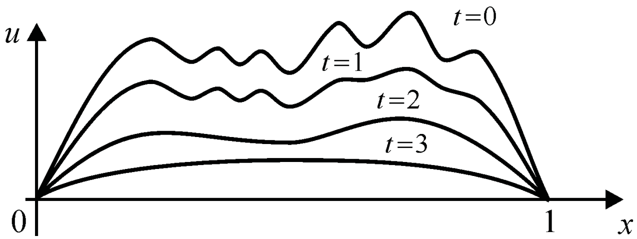

Рис. 7. Осцилляция решения во времени

ЗАДАЧИ:

1. Покажите, что функции вида $u(x,t) = e^{-\lambda^2\alpha^2 t}\left[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right]$ удовлетворяют уравнению $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, при произвольных значениях A, B и λ.

2. Покажите, что $\int\limits_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 0,5, m = n. \end{cases}$, используя тождество $\sin(mx)\sin(nx) = 0,5\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$.

3. Найдите разложение в ряд Фурье по синусам функции $\varphi(x) = 1$ на отрезке [0,1]. Постройте график первых трех-четырех членов разложения.

4. Используя результаты задачи 3, найдите решение следующей смешанной задачи: $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, $0 < x < 1$, с граничными условиями $u(0,t) = 0, u(1,t) = 0$, $0 < t < \infty$, $u(x,0) = 1$, $0 \le x \le 1$.

5. Решите задачу 4, если начальное условие имеет вид $u(x,0) = x - x^2$, $0 < x < 1$.

Лекция №3

3.1. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Рассмотрим туго натянутую струну (*тонкая нить, «работающая» на растяжение без изгиба*) длины l, конечные точки которой закреплены. Если вывести струну из положения равновесия, (например, оттянуть её или ударить по ней), то струна начнет колебаться. Будем предполагать, что все точки струны движутся перпендикулярно её положению равновесия (поперечные колебания), причем в каждый момент времени струна лежит в одной и той же плоскости.

Возьмем в этой плоскости систему прямоугольных координат $x0u$. Тогда, если в начальный момент времени струна располагалась вдоль оси $0x$ от 0 до l, то u есть отклонение струны от положения равновесия. В процессе колебания величина отклонения u будет зависеть от абсциссы точки струны x и от времени t. Таким образом, чтобы знать положение любой точки струны в произвольный момент времени, нам надо найти зависимость u от x и t, т.е. найти функцию $u(x,t)$. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x,t)$ представляет форму колеблющейся струны в момент времени t (рис. 8), при этом частная производная $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x(x,t)$ выражает угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x.

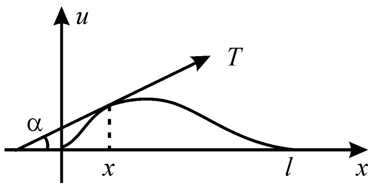

Рис. 8. Форма колеблющейся струны

При постоянном значении x функция $u(x,t)$ дает закон движения точки с абсциссой x вдоль прямой, параллельной оси $0u$, а производная $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t(x,t)$ – скорость, вторая производная $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ – ускорение.

Наша задача состоит в том, чтобы составить уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x,t)$, выражающая величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент времени t. Для этого сделаем предварительно несколько упрощающих предположений. Будем считать струну абсолютно *гибкой* (т.е. не сопротивляющейся изгибу), *упругой* (подчиняющейся закону Гука), *однородной* (ρ – масса единицы длины струны).

Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости $x0u$, то также можно предположить, что длина элемента струны MM_1 равняется её проекции на ось $0x$, а натяжение во всех точках струны одинаковое и не меняется со временем. Обозначим его через *T*. Рассмотрим элемент струны MM_1. На концах этого элемента по касательным к струне действует сила *T*. Пусть эти касательные образуют с осью $0x$ углы $\varphi + \Delta\varphi$ и φ (Рис. 9).

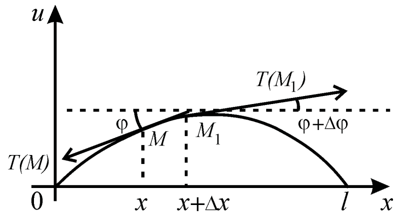

Рис. 9. Вывод уравнения колебаний струны

Тогда проекция на ось $0u$ сил, действующих на элемент MM_1, равна $T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin(\varphi)$. Так как угол φ мал, то можно предположить $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$. Отсюда $T(\sin(\varphi+\Delta\varphi)-\sin(\varphi)) \approx T(\operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi)-$

$$-\operatorname{tg}(\varphi)) = T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x,$$

где $0<\theta<1$ (здесь мы воспользовались геометрическим смыслом частных производных и теоремой Лагранжа о конечных приращениях дифференцируемых функций).

Так как ρ – линейная плотность струны, то масса элемента MM_1 струны будет $\rho\Delta x$, а ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Таким образом, сила инерции равна $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho\Delta x$. Согласно принципу д′Аламбера (сумма проекций на ось $0u$ всех сил, приложенных к элементу струны, включая силу инерции, равна нулю) имеем $T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x - \rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, или после сокращения на Δx и обозначив $a^2 = T/\rho$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

Это и есть одномерное волновое уравнение – уравнение свободных колебаний струны. Если при этом на струну действует еще и внешняя сила $P(x,t)$, рассчитанная на единицу длины и действующая на струну параллельно оси $0u$, то получаем уравнение вынужденных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x,t),$$

где $f(x,t) = P(x,t)/\rho$.

3.2. БЕСКОНЕЧНАЯ СТРУНА. МЕТОД Д′АЛАМБЕРА

Если представить себе очень длинную струну, то ясно, что на колебания, возникающие в ее средней части, концы струны не будут оказывать заметного влияния. Так, если взять длинную натянутую веревку и слегка качнуть ее в середине, то по веревке влево и вправо побегут волны. Картина начнет искажаться только тогда, когда волны дойдут до конца веревки и, отразившись, пойдут обратно.

Рассматривая свободные колебания бесконечной струны, решим так называемую задачу Коши или задачу с начальными условиями: Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

и заданным начальным условиям

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = \varphi(x)\ . \tag{3.2}$$

Непосредственной подстановкой в уравнение легко показать, что общее решение, содержащее две произвольные функции, имеет вид

$$u(x,t) = \varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at) \tag{3.3}$$

Для нахождения функций φ_1 и φ_2, с учетом начальных условий (3.2), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = f(x) \\ u_t(x,0) = -a\varphi_1'(x) + a\varphi_2'(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

Интегрируя второе уравнение системы в пределах от 0 до x, имеем:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = f(x) \\ -\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \varphi(z)dz + C \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi(z)dz - \frac{1}{2}C, \;\; \varphi_2(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi(z)dz + \frac{1}{2}C .$$

Заменяя в полученных формулах аргумент x соответственно на $x - at$ и $x + at$ и подставляя полученные выражения в формулу (3.3) после простых преобразований получим решение поставленной задачи

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(z)dz$$

Эту формулу называют формулой д′Аламбера. Она дает решение задачи, если $f(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi(x)$ – до первого. Следует отметить, что изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой. Эта задача имеет особо важное значение при изучении процессов отражения волн от конца и ставится следующим образом.

Найти решение уравнения колебаний (3.1), удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t) = \gamma(t) \text{ (или } u_t(0,t) = \beta(t) \text{)}, \; t \geq 0$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=\varphi(x),\ x\geq 0.$$

Рассмотрим случай однородного граничного условия $u(0,t)=0$.

Легко видеть, что если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой являются нечётными функциями относительно некоторой точки, то соответствующее решение в этой точке равно нулю.

Следовательно, продолжая функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ нечётным образом для $x<0$, мы получаем рассмотренную выше задачу о распространении колебаний на неограниченной прямой.

Итак, рассмотрим функции $F(x)=\begin{cases} f(x), x>0, \\ -f(x), x<0, \end{cases}$ и $\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x), x>0, \\ -\varphi(-x), x<0, \end{cases}$, являющиеся нечетным продолжением $f(x)$ и $\varphi(x)$. Функция $u(x,t)=\frac{1}{2}(F(x-at)+F(x+at))+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Phi(z)dz$ определена для всех $x>0$ и $t>0$. В силу вышеуказанного замечания $u(0,t)=0$. Кроме того, эта функция удовлетворяет при $t=0$ и $x>0$ следующим начальным условиям: $u(x,0)=F(x)=f(x)$, $u_t(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x)$.

Таким образом, рассматривая полученную функцию $u(x,t)$ только для всех x и $t>0$, мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Возвращаясь к прежним функциям, можно записать:

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}(f(x+at)+f(x-at))+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(z)dz,\ t<\frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2}(f(x+at)-f(x-at))+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\varphi(z)dz,\ t>\frac{x}{a}, \end{cases}$$

$x>0$ всюду. В области $t<x/a$ влияние граничных условий не сказывается, и выражение для $u(x,t)$ совпадает с решением для бесконечной прямой.

Аналогично, если при $x=0$ мы имеем свободный конец $u_x(0,t)=0$, то уже четным продолжением функций, определяющих начальные условия, мы получим решение поставленной задачи.

В заключении отметим, что в общем случае неоднородных граничных условий решение представляется в виде суммы, каждое слагаемое которой удовлетворяет только одному из поставленных условий.

3.3. РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Смешанная задача ставится так: найти решение

$$u(x,t), 0 \le x \le l, t \ge 0, u(x,t) \ne 0 \tag{3.4}$$

уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее *граничным условиям*

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0 \, (t \ge 0) \tag{3.5}$$

и *начальным условиям*

$$u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), 0 \le x \le l \tag{3.6}$$

Условия (3.5) означают, что если уравнением (3.1) описываются колебания струны, то она имеет конечную длину l и её концы закреплены в точках $x=0$ и $x=l$. Начальные условия (3.6) показывают, в каком положении находилась струна в начальный момент времени и какова скорость каждой её точки при $t=0$.

Смешанную задачу можно решить методом Фурье, в основе которого лежит идея разделения переменных (см. Лекцию №2) $u(x,t)=X(x)T(t)$. После подстановки этого произведения в исходное уравнение получаем: $\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}$. Заметим, что полученное соотношение отличается от случая уравнения параболического типа. Получили два уравнения:

$$T''(t)-ca^2T(t)=0 \tag{3.7}$$

$$X''(x)-cX(x)=0 \tag{3.8}$$

Эти уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Решив соответствующую задачу Штурма-Лиувилля для уравнения (3.8) с условиями (3.5), получим, что решением является каждая из функций вида

$$X_k(x) = A_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \;\; k \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

где A_k – произвольная.

Обратимся к уравнению (3.7). Так как $c = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}$, то уравнение принимает вид $T''(t) + \frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0$. Его общее решение определяется формулой

$$T_k(t) = B_k \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right) + D_k \sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right), k \in \mathbb{N} \tag{3.10}$$

где B_k, D_k – произвольные постоянные.

Подставляя функции (3.9), (3.10) в формулу $u(x,t) = X(x)T(t)$, получаем

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(B_k \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right) + D_k \sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right)\right) A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$

или, перемножая коэффициенты,

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \;\; k \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

Далее, составим ряд из функций (3.11),т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

При условии равномерной сходимости ряда, его сумма является непрерывной функцией и ряд можно дважды почленно дифференцировать по x и по t

Для смешанной задачи решение по методу Фурье имеет вид суммы бесконечного ряда:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right)+b_k\sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{3.12}$$

где $a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$, $b_k=\frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^l\psi(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$. (3.13)

Если ввести обозначения: $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$, $\sin\varphi_k=a_k/A_k$, $\cos\varphi_k=b_k/A_k$, то решение (3.12) можно записать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{\varphi_k+k\pi at}{l}\right).$$

Каждый член этого ряда представляет собой так называемую *стоячую волну*, при которой точки струны совершают гармонические колебательные движения с амплитудой $A_k\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$, фазой φ_k и частотой $\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$.

В случае, когда рассматриваются *вынужденные колебания однородной струны,* закреплённой на концах, под воздействием внешней силы $f(x,t)$, эта задача приводится решению уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-f(x,t) \tag{3.14}$$

при граничных условиях

$$u(0,t)=0,u(l,t)=0\,(t\geq 0) \tag{3.15}$$

и начальных условиях

$$u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),0\leq x\leq l \tag{3.16}$$

Решение задачи (3.14) – (3.16) выражается в виде ряда

$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right)+b_k\sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$, где коэффициенты a_k, b_k определяются по формулам (3.13), а

$$T_k(t)=\frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^t\sin\left(\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\right)d\tau\int\limits_0^l f(x,\tau)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx.$$

Лекция №4

4. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Уравнение теплопроводности для стационарного случая $u'_t = 0$ обращается в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 . \qquad (4.1)$$

Для задач, относящихся к плоским фигурам, уравнение Лапласа записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \qquad (4.2)$$

К уравнениям Лапласа приводятся задачи равновесия, исследования стационарного распределения тепла, электрических и магнитных полей и др.

Для двумерного случая в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (при этом $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$) уравнение (4.2) преобразуется с помощью следующих формул

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi , \; \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\varphi , \; \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi , \; \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \sin\varphi\cos\varphi +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2\varphi - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\varphi , \; r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Таким образом, уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (4.3)$$

Функции, непрерывные со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющие уравнению (4.1) в некоторой области D, называют ***гармоническими*** в этой области.

Так, функция $u = 1/r$, где $r = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2}$ является гармонической в любой области, не включающей точку

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ и удовлетворяет уравнению (4.1). Для уравнения (4.2) гармонической функцией является $u = \ln(1/r)$.

Известно, если задать значения гармонической функции *u* или ее нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ в точках некоторой замкнутой поверхности Г, то этим вполне определяются значения функции *u* во всех точках внутри этой поверхности.

В зависимости от вида условия задания функции *u* на границе различают три основных граничных задачи для уравнения Лапласа:

1. Задача Дирихле

$$u\big|_{\Gamma} = f(M) \tag{4.4}$$

M – точки, принадлежащие границе Г области *D* ($M \in \Gamma$).

2. Задача Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(M) \tag{4.5}$$

M – точки, принадлежащие границе Г области *D* ($M \in \Gamma$).

3. Смешанная граничная задача

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} + \varphi(M)u\big|_{\Gamma} = f(M), \tag{4.6}$$

где $f(M)$, $\varphi(M)$ – заданные непрерывные функции на границе области *D*, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная, взятая по направлению внешней нормали к поверхности *Г*.

Если в качестве неизвестной функции в уравнении Лапласа рассматривать температуру, то условие (4.4) означает, что в каждой точке *M* границы области задана температура $f(M)$ условие (4.5) означает, что на поверхности области температура неизвестна, но известен тепловой поток в каждой точке поверхности ($-K\frac{\partial u}{\partial n}$, где *K* – коэффициент теплопроводности); условие (4.6) означает, что в каждой точке *M* границы области задана и температура и тепловой поток.

Математическая задача для уравнения Лапласа состоит в следующем: найти гармоническую в области *D* функцию, которая на границе области Г удовлетворяет некоторому условию.

При решении граничных задач для уравнения Лапласа используются следующие методы:

1) Метод разделения переменных;
2) Метод Грина;
3) Метод интегральных преобразований;
4) Вариационные методы;
5) Численные методы.

Рассмотрим применение метода разделения переменных (метода Фурье) при решении задачи Дирихле для круга.

Постановка задачи: найти распределение температуры в круглой пластинке, если в каждой точке границы задана конкретная температура.

Математическая постановка задачи примет вид: найти функцию $u(r,\varphi)$ удовлетворяющую уравнению (4.3) внутри круга радиуса R с центром в полюсе полярной системы координат и граничному условию на окружности

$$u\big|_{r=R} = f(\varphi)\,, \tag{4.7}$$

где $f(\varphi)$ – заданная функция, непрерывная на окружности.

Будем искать решение задачи (4.3), (4.7) в виде $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Тогда уравнение (4.3) примет вид

$$r^2 R''(r)\Phi(\varphi) + rR'(r)\Phi(\varphi) + R(r)\Phi''(\varphi) = 0$$

После разделения переменных имеем $\dfrac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\dfrac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)}$.

Приравнивая каждую часть полученного равенства постоянной $-\lambda^2$, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0 \tag{4.8}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda^2 R(r) = 0 \tag{4.9}$$

При $\lambda = 0$ (4.8) примет вид $\Phi''(\varphi) = 0$, откуда

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi\,. \tag{4.10}$$

Уравнение (4.9) примет вид $r^2R''(r)+rR'(r)=0$ (дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка), отсюда

$$R(r)=C+D\ln r \tag{4.11}$$

Если $\lambda\neq 0$, то уравнение (4.8) есть однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и его решение имеет вид

$$\Phi(\varphi)=A\cos\lambda\varphi+B\sin\lambda\varphi \tag{4.12}$$

Решение уравнения (4.9) будем искать в виде $R(r)=r^m$, тогда из уравнения (4.9) получим $r^2m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-\lambda^2r^m=0$, отсюда $r^m(m^2-\lambda^2)=0$ и $m=\pm\lambda$, так как $r\neq 0$.

Следовательно

$$R(r)=Cr^{\lambda}+Dr^{-\lambda} \tag{4.13}$$

Функция $u(r,\varphi)$ из решения (4.12) есть периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π и $u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi)$. Поэтому из (4.10) следует, что $B = 0$, а в (4.12) λ могут быть только натуральными числами.

В равенстве (4.11) и (4.13) $D = 0$ так как, если было бы иначе, то функция $u(r,\varphi)$ имела бы разрыв в точке $r = 0$ и ,следовательно, не была бы гармонической в круге.

В результате получаем бесчисленное множество частных решений уравнения (4.3):

$$u_0(r,\varphi)=A=\frac{A_0}{2};\ \ u_n(r,\varphi)=(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)r^n,\ \ n=1,2...$$

Вследствие линейности и однородности уравнения Лапласа общее решение уравнения (4.3) имеет вид

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)r^n \tag{4.14}$$

при условии, что этот ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать.

Из условия (4.7) следует

$$u(R,\varphi)=f(\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)R^n$$

Получено разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье в промежутке $[-\pi;\pi]$. Тогда коэффициенты решения (4.14) находятся как коэффициенты разложения функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье, т.е.

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\ ,\ A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt\ ,\ B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt$$

Тогда решение (4.14) примет вид

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)\right]dt \tag{4.15}$$

Если ввести обозначения $\frac{r}{R}=\rho,\ t-\varphi=\tau$ то выражение (4.15) преобразуется $u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos n\tau-\frac{1}{2}\right]d\tau$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho e^{i\tau}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos n\tau+i\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\sin n\tau$. Этот ряд сходится при $\rho<1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-\rho e^{i\tau}}=\frac{1}{1-\rho\cos\tau-i\rho\sin\tau}=\frac{1-\rho\cos\tau+i\rho\sin\tau}{1-2\rho\cos\tau+\rho^2}$.

Следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos n\tau-\frac{1}{2}=\frac{1-\rho\cos\tau}{1-2\rho\cos\tau+\rho^2}-\frac{1}{2}=\frac{1-\rho^2}{2\left(1-2\rho\cos\tau+\rho^2\right)}$.

Возвратившись к исходным переменным, получим

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}dt\ . \tag{4.16}$$

Интеграл, стоящий в правой части, называется ***интегралом Пуассона.***

Такой вид приобретает решение задачи Дирихле для круга.

Замечание: В дальнейшем уравнение Лапласа будем записывать с использованием оператора Лапласа $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ в виде $\Delta u=0$.

Практическое занятие №1

1.1. ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Под *простейшим дифференциальным уравнением в частных производных* будем понимать уравнение, позволяющее найти решение непосредственным интегрированием.

Пример 1.1. Решить дифференциальное уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$, где $u = u(x, y)$.

Решение. Интегрируя дважды по x и представляя постоянные интегрирования функцией от y, будем иметь

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = 6\int x dx, \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + \varphi(y),$$
$$\int \frac{\partial u}{\partial x}dx = 3\int x^2 dx + \varphi(y)\int dx, u = x^3 + x\varphi(y) + \psi(y) \quad ,$$

где $\varphi(y), \psi(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Ответ: $u(x, y) = x^3 + x\varphi(y) + \psi(y)$.

Пример 1.2. Решить дифференциальное уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, u = u(x, y)$.

Решение. Уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ равносильно уравнению $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$, откуда следует, что производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ зависит только от y, то есть $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_1(y)$, где $\varphi_1(y)$ — некоторая произвольная непрерывная функция. Отсюда

$$\int \frac{\partial u}{\partial y}dy = \int \varphi_1(y)dy, u = \int \varphi_1(y)dy + \psi(x) = \varphi(y) + \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ – произвольная дифференцируемая функция, зависящая только от x, $\varphi(y)=\int \varphi_1(y)dy$.

Ответ: $u(x,y)=\varphi(y)+\psi(x)$.

Пример 1.3. Решить дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=x^2-y.$

Решение.

$$\int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy=\int\left(x^2-y\right)dy, \frac{\partial u}{\partial x}=x^2\int dy-\int ydy=x^2y-\frac{y^2}{2}+\varphi_1(x).$$

Полученное уравнение интегрируем по x, считая y постоянным:

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}dx=\int\left(x^2y-\frac{y^2}{2}+\varphi_1(x)\right)dx=\frac{x^3y}{3}-\frac{y^2x}{2}+\varphi(x)+\psi(y),$$

где $\varphi(x)=\int \varphi_1(x)dx, \psi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Ответ: $u(x,y)=\dfrac{x^3y}{3}-\dfrac{y^2x}{2}+\varphi(x)+\psi(y)$.

Задание 1.1. Найти общее решение дифференциального уравнения в частных производных:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x^2+y$, б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=e^{x+y}$, в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$

Ответ: а) $u(x,y)=\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{yx^2}{2}+x\varphi_1(y)+\varphi_2(y)$;
б) $u(x,y)=e^{x+y}+\varphi_1(y)+\varphi_2(x)$; в) $u(x,y)=y^3+y\varphi(x)+\psi(x)$.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Для упрощения записей ниже будем использовать обозначения

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u_x, \frac{\partial u}{\partial y}=u_y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_{xx}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=u_{xy}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_{yy}.$$

Пример 1.4. Привести к каноническому виду уравнение

$$y^2u_{xx} - 2xy\,u_{xy} + x^2u_{yy} = 0\,.$$

Решение. Здесь $A = y^2, B = -2xy, C = x^2$. Так как $B^2 - 4AC = = 4x^2y^2 - 4y^2x^2 = 0$ то данное уравнение параболического типа на всей плоскости XOY. Из уравнения характеристик $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}$ или $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{2y^2} = -\frac{x}{y}$ получим единственный интеграл

$$ydy + xdx = 0, \int ydy + \int xdx = 0, x^2 + y^2 = C\,.$$

Сделаем замену переменных $\xi = x^2 + y^2, \eta = x$. (В качестве η можно было бы взять и любую другую дважды дифференцируемую функцию, не выражающуюся через $x^2 + y^2$).

Вычислим отдельно

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \xi_x = 2x, \frac{\partial\xi}{\partial y} = \xi_y = 2y, \frac{\partial\eta}{\partial x} = \eta_x = 1, \frac{\partial\eta}{\partial y} = \eta_y = 0,$$
$$\xi_{xx} = 2, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 2, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Тогда, используя формулы из лекции №1, получим

$$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = 2u_\xi x + u_\eta,\ u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = 2u_\xi y\,,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} = u_{\xi\xi}\cdot(2x)^2 +$$
$$+2u_{\xi\eta}\cdot 2x\cdot 1 + u_{\eta\eta}\cdot 1^2 + u_\xi\cdot 2 + u_\eta\cdot 0 = 4x^2u_{\xi\xi} + 4xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi,$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} =$$
$$= u_{\xi\xi}\cdot 2x\cdot 2y + u_{\xi\eta}(2x\cdot 0 + 2y\cdot 1) + u_{\eta\eta}\cdot 1\cdot 0 + u_\xi\cdot 0 + u_\eta\cdot 0 =$$
$$= 4\,xy\,u_{\xi\xi} + 2y\,u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} =$$

$$= u_{\xi\xi}\cdot(2y)^2 + 2u_{\xi\eta}\cdot 2y\cdot 0 + u_{\eta\eta}\cdot 0 + u_\xi\cdot 2 + u_\eta\cdot 0 = 4y^2u_{\xi\xi} + 2u_\xi.$$

Подставляем значения u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} в дифференциальное уравнение

$$y^2\left(4x^2u_{\xi\xi}+4xu_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi}\right)-2xy\left(4xyu_{\xi\xi}+2yu_{\xi\eta}\right)+x^2\left(4y^2u_{\xi\xi}+2u_{\xi}\right)=0,$$
$$\left(4x^2y^2-8x^2y^2+4x^2y^2\right)u_{\xi\xi}+\left(4xy^2-4xy^2\right)u_{\xi\eta}+y^2u_{\eta\eta}+\left(2y^2+2x^2\right)u_{\xi}=0,$$
$$y^2u_{\eta\eta}+\left(2y^2+2x^2\right)u_{\xi}=0.$$

Выразим x^2 и y^2 через ξ и η: $x^2=\eta^2, y^2=\xi-x^2=\xi-\eta^2.$

Окончательно получим

$$\left(\xi-\eta^2\right)u_{\eta\eta}+2\xi^2u_{\xi}=0, u_{\eta\eta}=\frac{2\xi^2}{\eta^2-\xi}u_{\xi}.$$

Ответ: $u_{\eta\eta}=\dfrac{2\xi^2}{\eta^2-\xi}u_{\xi}.$

Пример 1.5. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-\cos^2 x\,u_{yy}-\cos x\,u_{y}=0.$$

Решение. Имеем $A=1, B=-2\sin x, C=-\cos^2 x$. Так как $B^2-4AC=$ $=4\sin^2 x+4\cos^2 x=4,$ то данное уравнение относится к гиперболическому типу и имеет два семейства характеристик.

Согласно лекции №1 их характеристические уравнения имеют вид

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\sin x\pm 2}{2}, dy=(-\sin x\pm 1)dx.$$

Общими интегралами этих уравнений являются

$$x+y-\cos x=C_1, x-y+\cos x=C_2.$$

Это и есть уравнения характеристик для данного дифференциального уравнения. Сделаем замену переменных

$$\xi=x+y-\cos x,\ \eta=x-y+\cos x\ .$$

С учётом этих равенств имеем:

$$u_x=u_{\xi}\xi_x+u_{\eta}\eta_x=u_{\xi}(1+\sin x)+u_{\eta}(1-\sin x),\ u_y=u_{\xi}\xi_y+u_{\eta}\eta_y=u_{\xi}-u_{\eta};,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} =$$
$$= u_{\xi\xi}\cdot(1+\sin x)^2 + 2u_{\xi\eta}\cdot\cos^2 x + u_{\eta\eta}(1-\sin x)^2 + u_\xi\cdot\cos x - u_\eta\cdot\cos x;$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} =$$
$$= u_{\xi\xi}\cdot(1+\sin x) + u_{\xi\eta}(-1-\sin x + 1 - \sin x) + u_{\eta\eta}\cdot(\sin x - 1);$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} =$$
$$= u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Подставляя эти производные в данное уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

Решением этого уравнения является функция вида

$$u = G(\xi) + F(\eta) = G(x + y - \cos x) + F(x - y + \cos x),$$

где G, F – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Задания для индивидуальной самостоятельной работы

Задание 1.2. Привести уравнение к каноническому виду, предварительно определив тип уравнения.

1.	$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0.$	16.	$u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} + u_x + 5u_y = 0.$
2.	$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0.$	17.	$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_x + 5u_y = 0.$
3.	$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 2u_y = 0.$	18.	$u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 2u_x - 10u_y = 0.$
4.	$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 0.$	19.	$4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 10u_x + 5u_y = 0.$
5.	$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0.$	20.	$25u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} - 15u_x + 3u_y = 0.$
6.	$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x - 3u_y = 0.$	21.	$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + 5u_x + 15u_y = 0.$
7.	$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x - 6u_y = 0.$	22.	$25u_{xx} + 10u_{xy} + 4u_{yy} + 20u_x + 4u_y = 0.$
8.	$9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 9u_x - 3u_y = 0.$	23.	$u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} + 5u_x + 20u_y = 0.$
9.	$u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x - 4u_y = 0.$	24.	$u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 5u_x - 25u_y = 0.$
10.	$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x - 4u_y = 0.$	25.	$u_{xx} + 12u_{xy} + 36u_{yy} + u_x + 26u_y = 0.$

11.	$16u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}-8u_x-2u_y=0.$	26.	$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+6u_x-6u_y=0.$
12.	$4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+8u_x+4u_y=0.$	27.	$u_{xx}-12u_{xy}+36u_{yy}+2u_x-12u_y=0.$
13.	$u_{xx}-8u_{xy}+16u_{yy}+3u_x-12u_y=0.$	28.	$36u_{xx}+12u_{xy}+u_{yy}+18u_x+3u_y=0.$
14.	$9u_{xx}+6u_{xy}+u_{yy}-12u_x-4u_y=0.$	29.	$u_{xx}+14u_{xy}+49u_{yy}+2u_x+14u_y=0.$
15.	$16u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}-16u_x-4u_y=0.$	30.	$36u_{xx}-12u_{xy}+u_{yy}+18u_x-3u_y=0.$

Задание 1.3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду.

1.	$4u_{xx}+8u_{xy}+3u_{yy}=0.$	2.	$3u_{xx}+8u_{xy}+4u_{yy}=0.$
3.	$3u_{xx}+4u_{xy}+4_{yy}=0.$	4.	$u_{xx}+4u_{xy}+3u_{yy}=0.$
5.	$16u_{xx}+16u_{xy}+3u_{yy}=0.$	6.	$3u_{xx}+16u_{xy}+16u_{yy}=0.$
7.	$25u_{xx}+20u_{xy}+3u_{yy}=0.$	8.	$u_{xx}+8u_{xy}+12u_{yy}=0.$
9.	$12u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}=0.$	10.	$49u_{xx}+28u_{xy}+3u_{yy}=0.$
11.	$64u_{xx}+32u_{xy}+3u_{yy}=0.$	12.	$3u_{xx}+20u_{xy}+25u_{yy}=0.$
13.	$u_{xx}+3u_{xy}+2u_{yy}=0.$	14.	$2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}=0.$
15.	$u_{xx}+12u_{xy}+27u_{yy}=0.$	16.	$u_{xx}+16u_{xy}+48u_{yy}=0.$
17.	$u_{xx}+20u_{xy}+75u_{yy}=0.$	18.	$u_{xx}+24u_{xy}+108u_{yy}=0.$
19.	$u_{xx}-2u_{xy}+147u_{yy}=0.$	20.	$u_{xx}+32u_{xy}+192u_{yy}=0.$
21.	$u_{xx}+36u_{xy}+243u_{yy}=0.$	22.	$3u_{xx}+28u_{xy}+49u_{yy}=0.$
23.	$3u_{xx}+32u_{xy}+64u_{yy}=0.$	24.	$27u_{xx}+12u_{xy}+u_{yy}=0.$
25.	$48u_{xx}+16u_{xy}+u_{yy}=0.$	26.	$75u_{xx}+20u_{xy}+u_{yy}=0.$
27.	$108u_{xx}+24u_{xy}+u_{yy}=0.$	28.	$147u_{xx}+28u_{xy}+u_{yy}=0.$
29.	$192u_{xx}+32u_{xy}+u_{yy}=0.$	30.	$4u_{xx}+3u_{xy}-u_{yy}=0.$

Практическое занятие №2

2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим метод нахождения решения уравнения теплопроводности

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},\ \ 0 < x < l, 0 < t < \infty \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l\ , \tag{2}$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0, \end{cases} 0 < t < \infty\ . \tag{3}$$

Уравнение (1) является уравнением параболического типа и описывает процесс распространения тепла $u(x,t)$ в однородном теплоизолированном с боков стержне длины l , α^2 коэффициент температуропроводности.

Пример 2.1. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности на отрезке

$$u_t = 4u_{xx}, 0 < x < 2, 0 < t < \infty\ , \tag{4}$$

$$u(x,0) = \sin^3 2\pi x, 0 \le x \le 2\ , \tag{5}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(2,t) = 0, \end{cases} 0 < t < \infty\ . \tag{6}$$

Решение. Будем искать решение уравнения (3.4) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t)\ , \tag{7}$$

причём $u(0,t) = u(2,t) = 0$, т.е. $X(0) = X(2) = 0$. Для этого подставляем функцию $u(x,t) = X(x)T(t)$ в уравнение (4) и разделяем переменные $\dfrac{T'}{4T} = \dfrac{X''}{X}$. Поскольку левая часть уравнения зависит только от t , а правая часть только от x, то равенство возможно, если обе части равны одной и той же величине, которая, как показано в лекции, должна быть только отрицательной. Обозначим её через $-\lambda^2$, т.е. $\frac{T'}{4T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$. Следовательно, функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}&a)\, X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\, X(0)=X(2)=0,\\ &б)\, T'(t)+4\lambda^2 T(t)=0.\end{aligned}$$

Решаем задачу *а*). Уравнение $X''(x)+\lambda^2 X(x)=0$ имеет общее решение

$$X(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x),$$

При $x=0$ получаем $X(0)=A\sin(\lambda\cdot 0)+B\cos(\lambda\cdot 0)$. С учётом граничного условия $X(0)=0$ устанавливаем, что $B=0$.

При $x=2$ получаем $X(2)=A\sin(2\lambda)$. С учётом граничного условия $X(2)=0$ и того, что $A\neq 0$ (иначе $X(x)\equiv 0$), имеем

$$\sin 2\lambda=0,\ 2\lambda_n=\pi n,\ \lambda_n=\frac{\pi n}{2},\ n=1,2,\dots.$$

Ненулевое решение примет вид $X_n=A_n\sin\frac{\pi n x}{2}$, $n=1,2,\dots$, где A_n – произвольные постоянные.

Решаем задачу б). При $\lambda_n=\frac{\pi n}{2}$ имеем $T'+4\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 T=0$, или $T'+\pi^2 n^2 T=0$. Общее решение этого уравнения есть

$$T_n=C_n e^{-\pi^2 n^2 t},\quad n=1,2,\dots.$$

где C_n – произвольные постоянные.

Итак, частные решения (7) уравнения (4) имеют вид

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=A_nC_ne^{-\pi^2n^2t}\sin\frac{\pi n x}{2}=B_ne^{-\pi^2n^2t}\sin\frac{\pi n x}{2},\quad n=1,2,\dots,$$

где $B_n=A_nC_n$. Вследствие линейности и однородности уравнения теплопроводности сумма частных решений $u_n(x,t)$ также является решением уравнения (1)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\pi^2 n^2 t}\sin\frac{\pi n x}{2}, \tag{8}$$

Предположим, что ряд (8) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно. Тогда находим коэффициенты B_n такие, что $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию (5), которое запишем в виде $u(x,0)=\sin^3 2\pi x=\frac{3}{4}\sin 2\pi x-\frac{1}{4}\sin 6\pi x$. Полагая в (8) $t=0$, получаем

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\pi^2 n^2 0}\sin\frac{\pi n x}{2}=\frac{3}{4}\sin 2\pi x-\frac{1}{4}\sin 6\pi x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{\pi n x}{2}=\frac{3}{4}\sin 2\pi x-\frac{1}{4}\sin 6\pi x..$$

Отсюда $A_4=\frac{3}{4},\ A_{12}=-\frac{1}{4},\ A_1=A_2=A_3=0,\ A_n=0,\ n=\overline{5{,}11}$ и $n\geq 13$. Подставляя эти коэффициенты в формулу (8), получаем ответ.

Ответ: $u(x,t)=\frac{3}{4}e^{-16\pi^2 t}\sin 2\pi x-\frac{1}{4}e^{-144\pi^2 t}\sin 6\pi x$

Пример 2.2. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности на отрезке

$$u_t=4u_{xx}, 0<x<6, 0<t<\infty, \tag{9}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}x/3, 0\leq x\leq 3,\\ 6-x,\ 3<x\leq 6,\end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases}u(0,t)=0,\\ u(6,t)=0,\end{cases} 0<t<\infty. \tag{11}$$

Решение. Первые пять шагов решения в точности соответствуют шагам примера 2.1 с учётом конкретного вида граничных условий.

1. $u(x,t)=X(x)T(t)$, $\frac{T'}{4T}=\frac{X''}{X}$, $\frac{T'}{4T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$,

а) $X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, X(0)=X(6)=0,$ б) $T'+4\lambda^2 T=0$

2. $X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$, $X(0) = A\sin(\lambda\cdot 0) + B\cos(\lambda\cdot 0) = 0$,

$B = 0$, $X(6) = A\sin(6\lambda) = 0$, $\sin 6\lambda = 0, 6\lambda_n = \pi n, \lambda_n = \dfrac{\pi n}{6}, n = 1,2,\dots$

$X_n = A_n \sin\dfrac{\pi n x}{6}$, $n = 1,2,\dots$

3. $T' + 4\left(\dfrac{\pi n}{6}\right)^2 T = 0, T' + \dfrac{\pi^2 n^2}{9} T = 0$, $T_n = C_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{9}}$, $n = 1,2,\dots$

4. $u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = A_n C_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{9}} \sin\dfrac{\pi n x}{6} = B_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{9}} \sin\dfrac{\pi n x}{6}$,

$n = 1,2,\dots$, где $B_n = A_n C_n$.

5. $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{9}} \sin\frac{\pi n x}{6} \qquad (12)$$

6. Выберем коэффициенты B_n таким образом, чтобы функция (12) удовлетворяла начальному условию (10). Подставляя (12) в (10), получим разложение функции $\varphi(x)$ ***в ряд Фурье по синусам***.

Отсюда $B_n = \dfrac{2}{6}\displaystyle\int_0^6 \varphi(x)\sin\dfrac{\pi n x}{6}dx = \dfrac{1}{3}\int_0^3 \dfrac{x}{3}\sin\dfrac{\pi n x}{6}dx + \dfrac{1}{3}\int_3^6 (6-x)\sin\dfrac{\pi n x}{6}dx$.

Вычислим оба эти интеграла методом интегрирования по частям:

$$B_n = \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{36}{\pi^2 n^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{6}\right) - \frac{6}{\pi n}x\cdot\cos\left(\frac{\pi n x}{6}\right)\right)\Bigg|_0^3 + \frac{1}{3}\left(-\frac{36}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{6}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{36}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{6}\right) + \frac{6}{\pi n}x\cdot\cos\left(\frac{\pi n x}{6}\right)\right)\Bigg|_3^6 = \frac{16}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\cdot k}\cos\pi k = (-1)^k\dfrac{2}{\pi}, & n = 2k, \\ \dfrac{16}{\pi^2(2k+1)^2}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k\dfrac{16}{\pi^2(2k+1)^2}, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}e^{-\frac{(2k)^2\pi^2 t}{9}}\sin\frac{2k\pi x}{6} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 t}{9}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{6} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}e^{-\frac{4\pi^2 k^2 t}{9}}\sin\frac{\pi k x}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 t}{9}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{6}.$$

Задания для индивидуальной самостоятельной работы

Задание 2.1. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности на отрезке.

1.	$u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$ $u(x,0) = \sin^3 2\pi x - \sin 4\pi x,$ $u(0,t) = u(2,t) = 0.$	2.	$u_t = 16u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2/3, 0 \le x \le 3/2, \\ 3 - x,\ 3/2 < x \le 3, \end{cases}$ $u(0,t) = u(3,t) = 0.$
3.	$u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$ $u(x,0) = 4\sin^3 3\pi x + 2\sin 6\pi x,$ $u(0,t) = u(3,t) = 0.$	4.	$u_t = u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2, \quad 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, 1 < x \le 2, \end{cases}$ $u(0,t) = u(2,t) = 0.$
5.	$u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$ $u(x,0) = 16\sin^3 \pi x - 3\sin 2\pi x,$ $u(0,t) = u(1,t) = 0.$	6.	$u_t = 25u_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/5, 0 \le x \le 5/2, \\ 5 - x, \quad 5/2 < x \le 5, \end{cases}$ $u(0,t) = u(5,t) = 0.$
7.	$u_t = 4_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$ $u(x,0) = 8\sin^3 4\pi x - 2\sin 6\pi x,$ $u(0,t) = u(2,t) = 0.$	8.	$u_t = 16u_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2/2, 0 \le x \le 2, \\ 3 - x,\ 2 < x \le 4, \end{cases}$ $u(0,t) = u(4,t) = 0.$
9.	$u_t = u_{xx}/4,\ 0 < x < 1/2,\ t > 0,$ $u(x,0) = \sin^3 \pi x + 4\sin 2\pi x,$ $u(0,t) = u(1/2,t) = 0.$	10.	$u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/5, 0 \le x \le 5/2, \\ 5 - x, \quad 5/2 < x \le 5, \end{cases}$ $u(0,t) = u(5,t) = 0.$
11.	$u_t = u_{xx}/9,\ 0 < x < 3,\ t > 0,$ $u(x,0) = 8\sin^3 3\pi x - 4\sin 12\pi x,$ $u(0,t) = u(3,t) = 0.$	12.	$u_t = u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/3, 0 \le x \le 3/2, \\ 3 - x, \quad 3/2 < x \le 3, \end{cases}$ $u(0,t) = u(3,t) = 0.$
13.	$u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$ $u(x,0) = 2\sin^3 \pi x + \sin 4\pi x,$ $u(0,t) = u(4,t) = 0.$	14.	$u_t = 25u_{xx},\ 0 < x < 8,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2/4, 0 \le x \le 4, \\ 8 - x,\ 4 < x \le 8, \end{cases}$ $u(0,t) = u(8,t) = 0.$

15.	$u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 1/2,\ t > 0,$ $u(0,t) = u(1/2,t) = 0,$ $u(x,0) = 8\sin^3 \pi x - \sin 2\pi x.$	16.	$u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \end{cases}$ $u(0,t) = u(2,t) = 0.$
17.	$u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1/3,\ t > 0,$ $u(0,t) = u(1/3,t) = 0,$ $u(x,0) = 2\sin^3 2\pi x - \sin \pi x.$	18.	$u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/5, & 0 \le x \le 5/2, \\ 5 - x, & 5/2 < x \le 5. \end{cases}$ $u(0,t) = u(5,t) = 0.$
19.	$u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$ $u(x,0) = 4\sin^3 2\pi x - \sin 2\pi x,$ $u(0,t) = u(1,t) = 0.$	20.	$u_t = 25u_{xx},\ 0 < x < 6,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2/3, & 0 \le x \le 3, \\ 6 - x, & 3 < x \le 6, \end{cases}$ $u(0,t) = u(6,t) = 0.$
21.	$u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1/2,\ t > 0,$ $u(x,0) = 4\sin^3 \pi x - \sin 2\pi x,$ $u(0,t) = u(1/2,t) = 0.$	22.	$u_t = u_{xx},\ 0 < x < 12,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2/6, & 0 \le x \le 6, \\ 12 - x, & 6 < x \le 12, \end{cases}$ $u(0,t) = u(12,t) = 0.$
23.	$u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$ $u(x,0) = 6\sin^3 4\pi x - \sin \pi x,$ $u(0,t) = u(1,t) = 0.$	24.	$u_t = 16u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 9 - x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$ $u(0,t) = u(2,t) = 0.$
25.	$u_t = u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$ $u(x,0) = 4\sin^3 \pi x - \sin 2\pi x,$ $u(0,t) = u(2,t) = 0.$	26.	$u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 6,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2/3, & 0 \le x \le 3, \\ 6 - x, & 3 < x \le 6. \end{cases}$ $u(0,t) = u(6,t) = 0,$
27.	$u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$ $u(x,0) = 16\sin^3 2\pi x - 2\sin \pi x,$ $u(0,t) = u(1,t) = 0.$	28.	$u_t = 36u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2/3, & 0 \le x \le 53/2, \\ 3 - x, & 3/2 < x \le 3, \end{cases}$ $u(0,t) = u(3,t) = 0.$
29.	$u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$ $u(x,0) = \sin^3 2\pi x - \sin \pi x,$ $u(0,t) = u(1,t) = 0.$	30.	$u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 8,\ t > 0,$ $u(x,0) = \begin{cases} x^2/4, & 0 \le x \le 4, \\ 58 - x, & 4 < x \le 8, \end{cases}$ $u(0,t) = u(8,t) = 0.$

Практическое занятие №3

3.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ МЕТОДОМ Д'АЛАМБЕРА

Рассмотрим уравнение свободных колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

где $u(x,t)$ – смещение точки струны, имеющей координату x, относительно положения равновесия в момент времени t. Здесь $a^2 = \frac{T}{\rho}$, T – натяжение, ρ – линейная плотность струны.

Будем искать решение задачи Коши для бесконечной струны $-\infty < x < \infty$, то есть когда на колебания, возникающие в середине струны, концы струны влияния практически не оказывают.

Для определения закона колебаний струны необходимо знать в начальный момент положения точек струны и их скорость. Эти параметры определяются начальными условиями

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),$$

где $f(x), g(x)$ – заданные функции.

Пример 3.1. Найти решение волнового уравнения $u_{tt} = 4u_{xx}$ для бесконечной струны $(-\infty < x < \infty, t > 0)$ при начальных условиях

$$u(x,0) = e^{-x^2}, u_t(x,0) = \sin 2x .$$

Решение. 1. Заменим независимые переменные x и t пространственно-временными координатами, учитывая, что $a = 2$, $\xi = x + 2t$, $\eta = x - 2t$. Выражения для производных функции $u(x,y)$ в новых координатах примут вид (см. Практическое занятие №1)

$$u_x = u_\xi + u_\eta,\ u_t = 2\left(u_\xi + u_\eta\right),$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},\ u_{tt} = 4\left(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right).$$

Подставляя эти формулы для производных в волновое уравнение, получим

$$4\left(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right)=4\left(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right), u_{\xi\eta}=0 .$$

2. Двумя последовательными интегрированиями (сначала по переменной ξ, а затем по η), получим общее решение уравнения $u_{\xi\eta}=0$ в виде $u(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$, где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ – произвольные функции своих аргументов, которые будем считать дважды дифференцируемыми (см. Пример 1.2).

3. Возвращаясь к старым координатам x и t, подставим $\xi=x+2t$, $\eta=x-2t$ в общее решение, получим $u(x,t)=\varphi(x-2t)+\psi(x+2t)$.

4. Подставим общее решение, содержащее две произвольные функции в начальные условия, чтобы найти конкретные выражения для произвольных функций φ и ψ

$$\varphi(x)+\psi(x)=e^{-x^2}, -2\varphi'(x)+2\psi'(x)=\sin 2x .$$

Проинтегрировав последнее равенство на отрезке $\left[x_0,x\right]$, получаем:

$$-2\varphi(x)+2\psi(x)=\int_{x_0}^{x}\sin 2t dt+C ,$$

$$-2\varphi(x)+2\psi(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 2x_0+C ,$$

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 2x_0-\frac{C}{2} .$$

Система для определения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ примет вид

$$\begin{cases}\varphi(x)+\psi(x)=e^{-x^2},\\ \varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 2x_0-\frac{C}{2}\end{cases}.$$

Получаем следующие выражения для функций

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 2x_0-\frac{C}{4}, \psi(x)=\frac{1}{2}e^{-x^2}-\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 2x_0+\frac{C}{4}$$

Решение задачи Коши принимает вид:

$$u(x,t)=\varphi(x-2t)+\psi(x+2t)=\frac{1}{2}e^{-(x-2t)^2}+\frac{1}{8}\cos 2(x-2t)-\frac{1}{8}\cos 2x_0-\frac{C}{4}+$$

$$+\frac{1}{2}e^{-(x+2t)^2}-\frac{1}{8}\cos 2(x+2t)+\frac{1}{8}\cos 2x_0+\frac{C}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-(x-2t)^2}+e^{-(x+2t)^2}\right)+\frac{1}{8}\left(\cos 2(x-2t)-\cos 2(x+2t)\right).$$

Итак, $u(x,t)=\frac{1}{2}\left(e^{-(x-2t)^2}+e^{-(x+2t)^2}\right)+\frac{1}{8}\left(\cos 2(x-2t)-\cos 2(x+2t)\right)$.

Решение такого вида принято называть ***формулой д'Аламбера***.

Задания для индивидуальной самостоятельной работы

Задание 3.1. Решить задачу Коши для волнового уравнения $(-\infty<x<\infty,\ t>0)$

1.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2}, u_t(x,0)=0.$	2.	$u_{tt}=4u_{xx}$, $u(x,0)=x(x-2), u_t(x,0)=\sin x.$
3.	$u_{tt}=9u_{xx}$, $u(x,0)=x^2, u_t(x,0)=\sin x.$	4.	$u_{tt}=2u_{xx}$, $u(x,0)=\cos x, u_t(x,0)=5x.$
5.	$u_{tt}=3u_{xx}$, $u(x,0)=e^{-x^2}, u_t(x,0)=0.$	6.	$u_{tt}=2u_{xx}$, $u(x,0)=\dfrac{\sin x}{x}, u_t(x,0)=0.$
7.	$u_{tt}=4u_{xx}$, $u(x,0)=e^x, u_t(x,0)=4x.$	8.	$u_{tt}=2u_{xx}$, $u(x,0)=\sin x, u_t(x,0)=6.$
9.	$u_{tt}=3u_{xx}$, $u(x,0)=x, u_t(x,0)=\cos x.$	10.	$u_{tt}=9u_{xx}$, $u(x,0)=\cos x, u_t(x,0)=\sin x.$
11.	$u_{tt}=3u_{xx}$, $u(x,0)=\sin x, u_t(x,0)=\cos x.$	12.	$u_{tt}=5u_{xx}$, $u(x,0)=x(x-2), u_t(x,0)=e^x.$
13.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=e^{-x}, u_t(x,0)=7.$	14.	$u_{tt}=4u_{xx}$, $u(x,0)=\dfrac{\sin x}{x}, u_t(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2}.$

15.	$u_{tt}=5u_{xx}$, $u(x,0)=\frac{x}{1+x^2}, u_t(x,0)=\sin x.$	16.	$u_{tt}=3u_{xx}$, $u(x,0)=\frac{1}{1+x^2}, u_t(x,0)=\cos x.$
17.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=e^{-x^2}, u_t(x,0)=\frac{x}{1+x^2}.$	18.	$u_{tt}=5u_{xx}$, $u(x,0)=e^{-x^2}, u_t(x,0)=\frac{1}{\operatorname{ch} x}.$
19.	$u_{tt}=3u_{xx}$, $u(x,0)=\frac{1}{\operatorname{ch} x}, u_t(x,0)=\frac{1}{1+x^2}.$	20.	$u_{tt}=2u_{xx}$, $u(x,0)=\frac{1}{1+x^2}, u_t(x,0)=\frac{x^2}{1+x^6}.$
21.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=e^{-x^2}, u_t(x,0)=xe^{-x^2}.$	22.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=0, u_t(x,0)=xe^{-x^2}.$
23.	$u_{tt}=3u_{xx}$, $u(x,0)=0, u_t(x,0)=\frac{1}{\operatorname{ch} x}.$	24.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=0, u_t(x,0)=\frac{1}{1+x^2}.$
25.	$u_{tt}=3u_{xx}$, $u(x,0)=e^{-x^2}, u_t(x,0)=0.$	26.	$u_{tt}=6u_{xx}$, $u(x,0)=\sin x, u_t(x,0)=1.$
27.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=0, u_t(x,0)=\cos x.$	28.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=x, u_t(x,0)=-x.$
29.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=e^{-x}, u_t(x,0)=\sin 2x.$	30.	$u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=x^2, u_t(x,0)=0.$

Пример 3.2. Используя формулу д’Аламбера

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(z)dz$$

для решения $u(x,t)$ задачи Коши

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<\infty, t>0$$
$$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x),$$

найти решение уравнения при начальных условиях:

а) $u_{tt}=u_{xx}$, если $u(x,0)=x^2$, $u_t(x,0)=0$;

б) $u_{tt} = 4u_{xx}$, если $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x$;

в) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, если $u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 1$.

Решение: а) Так как $a = 1,\ f(x) = 0,\ g(x) = x^2$, то

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2} = x^2 + t^2.$$

б) Так как $a = 2,\ f(x) = x,\ g(x) = 0,$ то

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} z dz = \frac{1}{8} z^2 \Big|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{8}\left[(x+2t)^2 - (x-2t)^2\right] = xt.$$

в) Так как $f(x) = 1,\ g(x) = \sin x,$ то

$$u(x,t) = \frac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} dz = \sin x \cos at + t.$$

Пример 3.3. Пользуясь формулой д’Аламбера из Примера 2.2, проверить, что в случае нечетности обеих функций $f(x)$ и $g(x)$ $u(0,t) = 0,$ а в случае их четности $u_x(0,t) = 0.$

Решение: 1) если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ нечетные, то

$$u(0,t) = \frac{f(-at) + f(at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} g(z) dz = 0,$$

так как $f(-at) = -f(at)$ и определенный интеграл от нечетной функции по симметричному относительно $x = 0$ промежутку равен 0.

2) если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ четные, то

$$u_x(0,t) = \frac{f'(-at) + f'(at)}{2} + \frac{g(at) - g(-at)}{2a} = 0,$$

так как $f'(-at) = -f'(at)$ и $g(-at) = g(at)$.

Пример 3.4. Пользуясь утверждениями примера 3.3 подходящим образом продолжить данные на всю прямую $-\infty < x < \infty$ и решить задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0$$
$$u(0,t) = 0, u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x).$$

Решение: Продолжим начальные данные $f(x)$ и $g(x)$ на всю ось x нечетно, то есть построим функции

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0, \\ -g(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$

$$U(x,0) = F(x),\ U_t(x,0) = G(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$U(x,t) = \frac{F(x+at) + F(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} G(z)dz.$$

В силу нечетности функций $F(x)$ и $G(x)$ имеем $U(0,t) = 0$ (см. Пример 3.3), причем для всех $x > 0$ $U(x,0) = F(x) = f(x)$, $U_t(x,0) = G(x) = g(x)$.

Значит, функция $U(x,t)$ при $x \ge 0, t \ge 0$ удовлетворяет всем условиям исходной задачи и, следовательно, является ее решением, то есть $u(x,t) = U(x,t)$. Выражая функцию $U(x,t)$ при $x \ge 0, t \ge 0$ через $f(x)$ и $g(x)$ исходной задачи, получим

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(z)dz,\ x > 0, t < \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{f(x+at) - f(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} g(z)dz,\ \ x > 0, t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

3.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ, ЗАКРЕПЛЁННОЙ НА КОНЦАХ, МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Рассмотрим задачу колебаний конечной струны, закреплённой в точках x=0 и x=l. В математической постановке она состоит в решении волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$, при начальных условиях

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),$$

и при краевых условиях $u(0,t) = u(l,t) = 0, t \geq 0.$ Эту задачу также называют *первой смешанной задачей для волнового уравнения на отрезке*.

Пример 3.5. Найти смещение точек струны, закрепленной на концах x=0 и x=l, от оси абсцисс, если в начальный момент времени струна имела форму параболы, проходящей через точки $(0,0)$ и $(l,0)$, с вершиной в точке $(l/2,h)$, а начальные скорости отсутствуют.

Решение: $u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=\dfrac{4hx(l-x)}{l^2},\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=u(l,t)=0$.

Пусть $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$, тогда волновое уравнение можно записать в виде:

$$X(x)\cdot T''(t) = X''(x)T(t).$$

Разделяя переменные, получим $\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$

1) $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$ С учетом граничных условий $X(0) = 0, X(l) = 0$. Отсюда $A = 0,$ $X(l) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x = B\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$

Так как $B \neq 0,$ то $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ и $\sqrt{\lambda} = \dfrac{k\pi}{l},$ $k = 1,2,\ldots$. Тогда $X(x) = B\sin\dfrac{k\pi}{l}x.$

2) $T''(t)+\lambda T(t)=0$, $T(t)=C\cos\sqrt{\lambda}t+D\sin\sqrt{\lambda}t=C\cos\dfrac{k\pi t}{l}+D\sin\dfrac{k\pi t}{l}$.

Решениями будут функции

$$u_k(x,t) = \sin\frac{k\pi}{l}x \cdot \left(a_k \cos\frac{k\pi t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi t}{l}\right), \quad k = 1,2,\ldots$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Следовательно, используя начальное условие, получим

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \text{ где}$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{4hx(l-x)}{l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{8h}{l^2}\int_0^l \left(lx - x^2\right)\sin\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} lx - x^2 = u_1 & \sin\dfrac{k\pi x}{l}dx = dv_1 \\ (l-2x)dx = du_1 & v_1 = \dfrac{-l}{k\pi}\cos\dfrac{k\pi x}{l} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{8h}{l^2}\left(lx - x^2\right)\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l + \frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{8h}{k\pi l^2}\left| \begin{matrix} l - 2x = u_2 & \cos\dfrac{k\pi x}{l}dx = dv_2 \\ -2dx = du_2 & \dfrac{l}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi x}{l} = v_2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l + \frac{16h}{k^2\pi^2 l}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{16h}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l =$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1 - (-1)^k\right].$$

Используя второе начальное условие, можно записать $u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}b_k \sin\frac{k\pi x}{l} = 0,$ откуда $b_k = 0.$ Тогда решение исходной задачи имеет вид $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]\cos\frac{k\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$

Если $k=2n$, то $1-(-1)^k = 0$, если $k = 2n+1,$ то $1-(-1)^k = 2,$ следовательно, ответ запишется в виде:

Ответ: $u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$

Задание 3.2. Найти решение уравнения $u_{tt}=u_{xx}$, если $u|_{t=0}=x$, $u_t|_{t=0}=-x.$

Ответ: $u(x,t)=x(1-t)$.

Задание 3.3. Найти решение уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$, если $u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=\cos x$.

Ответ: $u(x,t)=\frac{\cos x\cdot\sin at}{a}.$

Задание 3.4. Найти решение уравнения $u_{tt}=u_{xx}$, если $u|_{t=0}=\sin x$, $u_t|_{t=0}=\cos x.$

Ответ: $u(x,t)=-\sin x.$

Задание 3.5. Решить краевую задачу для волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(0,t)=u(l,t)=0$, ,$u(x,0)=0, u_t(x,0)=1.$

Ответ: $u(x,t)=\frac{2l}{\pi^2a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$

Задание 3.6. Решить краевую задачу для волнового уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ u(0,t)=u(l,t)=0,$$

$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi\left(x-\frac{l}{2}\right)}{h}, & \left|x-\frac{l}{2}\right|<\frac{h}{2}\\ 0, & \left|x-\frac{l}{2}\right|>\frac{h}{2}\end{cases}.$$

Ответ: $$u(x,t)=\frac{4hl^2}{\pi^2a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi k}{2}\cos\frac{k\pi h}{l}}{l^2-k^2h^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi at}{l}.$$

Задание 3.7. Решить краевую задачу для волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(0,t)=u(l,t)=0$, $u(x,0)=0, u_t(x,0)=\sin\frac{2\pi x}{l}$.

Ответ: $u(x,t)=\frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi at}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}$.

Задания для индивидуальной самостоятельной работы

Задание 3.8. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке

1.	$u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(2-x),$ $u(0,t)=u(2,t)=0.$	2.	$u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$ $u(x,0)=x(x-1), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u(1,t)=0.$
3.	$u_{tt}=2u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(1-x),$ $u(0,t)=u(1,t)=0.$	4.	$u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$ $u(x,0)=x(x-1), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u(1,t)=0.$
5.	$u_{tt}=3u_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(3-x),$ $u(0,t)=u(3,t)=0.$	6.	$u_{tt}=4u_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$ $u(x,0)=x(x-3), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u(3,t)=0.$
7.	$u_{tt}=4u_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(2-x),$ $u(0,t)=u(2,t)=0.$	8.	$u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx},\ 0<x<\frac{1}{2},\ t>0,$ $u(x,0)=x\left(x-\frac{1}{2}\right), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u\left(\frac{1}{2},t\right)=0.$
9.	$u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx},\ 0<x<4,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(4-x),$ $u(0,t)=u(4,t)=0.$	10.	$u_{tt}=9u_{xx},\ 0<x<\frac{3}{2},\ t>0,$ $u(x,0)=x\left(x-\frac{3}{2}\right), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u\left(\frac{3}{2},t\right)=0.$

11.	$u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(3-x),$ $u(0,t)=u(3,t)=0.$	12.	$u_{tt}=16u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$ $u(x,0)=x(x-1), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u(1,t)=0.$
13.	$u_{tt}=16u_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(2-x),$ $u(0,t)=u(2,t)=0.$	14.	$u_{tt}=16u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$ $u(x,0)=x(x-1), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u(1,t)=0.$
15.	$u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(3-x),$ $u(0,t)=u(3,t)=0.$	16.	$u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$ $u(x,0)=x(x-3), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u(3,t)=0.$
17.	$u_{tt}=9u_{xx},\ 0<x<\frac{1}{2},\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x\left(\frac{1}{2}-x\right),$ $u(0,t)=u\left(\frac{1}{2},t\right)=0.$	18.	$u_{tt}=4u_{xx},\ 0<x<\frac{1}{2},\ t>0,$ $u(x,0)=x\left(x-\frac{1}{2}\right), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u\left(\frac{1}{2},t\right)=0.$
19.	$u_{tt}=9u_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(2-x),$ $u(0,t)=u(2,t)=0.$	20.	$u_{tt}=\frac{4}{9}u_{xx},\ 0<x<\frac{2}{3},\ t>0,$ $u(x,0)=x\left(x-\frac{2}{3}\right), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u\left(\frac{2}{3},t\right)=0.$
21.	$u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(3-x),$ $u(0,t)=u(3,t)=0.$	22.	$u_{tt}=4u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$ $u(x,0)=x(x-1), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u(1,t)=0.$
23.	$u_{tt}=\frac{4}{9}u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(1-x),$ $u(0,t)=u(1,t)=0.$	24.	$u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx},\ 0<x<\frac{1}{2},\ t>0,$ $u(x,0)=x\left(x-\frac{1}{2}\right), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u\left(\frac{1}{2},t\right)=0.$

25.	$u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx},\ 0<x<\frac{3}{2},\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x\left(\frac{3}{2}-x\right),$ $u(0,t)=u\left(\frac{3}{2},t\right)=0.$	26.	$u_{tt}=4u_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$ $u(x,0)=x(x-2), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u(2,t)=0.$
27.	$u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(2-x),$ $u(0,t)=u(2,t)=0.$	28.	$u_{tt}=9u_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$ $u(x,0)=x(x-3), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u(3,t)=0.$
29.	$u_{tt}=\frac{9}{4}u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$ $u(x,0)=0, u_t(x,0)=x(21-x),$ $u(0,t)=u(1,t)=0.$	30.	$u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<\frac{3}{2},\ t>0,$ $u(x,0)=x\left(x-\frac{3}{2}\right), u_t(x,0)=0,$ $u(0,t)=u\left(\frac{3}{2},t\right)=0.$

Практическое занятие №4

4.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КРУГЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Рассмотрим метод нахождения решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге, то есть метод нахождения функции $u(r,\varphi)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа внутри круга радиуса R с центром в полюсе полярной системы координат и граничному условию на окружности

$$u\big|_{r=R} = f(\varphi), \tag{1}$$

где $f(\varphi)$ – заданная функция, непрерывная на окружности.

Пример 4.1. Решить краевую задачу для уравнения $\Delta u = 0$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$, если на границе круга $u = \sin^3\varphi$.

Решение: Уравнение Лапласа в полярных координатах (r,φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{2}$$

1. Частное решение уравнения в соответствии с методом Фурье будем искать в виде

$$\vartheta(r,\varphi) = R(r)\cdot \Phi(\varphi),$$

причем $|R(0)| < \infty$ и $\Phi(\varphi)$ периодическая с периодом 2π.

Подставляя $\vartheta(r,\varphi)$ в уравнение (2) и разделяя переменные, получим

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R} = -\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} = \lambda = \mathrm{const}.$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

а) $\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$

б) $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0,\ \ |R(0)| < \infty$

2. Решаем задачу (а).

Общее решение уравнения $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\,\varphi} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\,\varphi}, \tag{3}$$

где A и B – константы.

Это решение периодично при $\lambda \geq 0$ и имеет период 2π при $\lambda = n^2\,(n = 0,1,...)$.

Если $\lambda = \lambda_0 = 0, \Phi_0(\varphi) = A_0$.

Если $\lambda = \lambda_n = n^2, \Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,\ (n = 1,2,...)$.

3. Решаем задачу (б).

Если $\lambda = \lambda_0 = 0$, $r^2R'' + rR' = 0$. Общее решение этого уравнения $R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r$. Так как $|R_0(0)| < \infty$, то $D_0 = 0$.

Если $\lambda = \lambda_n = n^2$, $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$.

Общее решение этого уравнения

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n},\ \ (n = 1,2,...).$$

Так как $|R_n(0)| < \infty$, то $D_n = 0$.

4. Вспомогательные решения имеют вид:

$\vartheta_0(r,\varphi) = C_0A_0 = a_0$,

$\vartheta_n(r,\varphi) = C_n r^n\left(A_n\cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = r^n\left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right)$.

5. Тогда решение исходной задачи ищем в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(a_n\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right).$$

6. Используя граничное условие $u(1,\varphi)=\sin^3\varphi=\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{1}{4}\sin 3\varphi$,

имеем $u(1,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$. Отсюда

$a_0 = 0, a_n = 0, b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = 0,\ b_3 = -\frac{1}{4}, b_n = 0\ (n \ge 4)$. В результате $u(r,\varphi) = \frac{3}{4} r \sin\varphi - \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varphi$.

Ответ: $u(r,\varphi) = \frac{3}{4} r \sin\varphi - \frac{1}{4} r^3 \sin 3\varphi$.

Пример 4.2. Решить краевую задачу $\Delta u = 0, 0 \le r < r_0$,

$$u\big|_{r=r_0} = a\cos^3\varphi + b\sin^3\varphi + p\cos\varphi + q\sin\varphi + c.$$

Решение: Проводим преобразования, аналогичные примеру 4.1 до момента нахождения коэффициентов a_0, a_n и b_n.

Представим граничное условие в виде

$$u(r_0,\varphi) = c + \frac{3a+p}{4}\cos\varphi + \frac{3b+q}{4}\sin\varphi + \frac{a}{4}\cos 3\varphi - \frac{a}{4}\sin 3\varphi.$$

Тогда

$$u(r_0,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) =$$

$$= c + \frac{3a+p}{4}\cos\varphi + \frac{3b+q}{4}\sin\varphi + \frac{a}{4}\cos 3\varphi - \frac{a}{4}\sin 3\varphi$$

Следовательно, $a_0 = c, a_1 = \frac{1}{r_0}\left(\frac{3a}{4} + p\right),\ a_2 = 0,\ \ a_3 = \frac{a}{4r_0^{\,3}}$,

$a_n = 0$, при $n \ge 4$, $b_1 = \frac{1}{r_0}\left(\frac{3b}{4} + q\right), b_2 = 0$, $b_3 = -\frac{b}{4r_0^{\,3}}, b_n = 0$ при $n \ge 4$.

Ответ:

$$u(r,\varphi) = c + \frac{r}{r_0}\left[\left(\frac{3a}{4} + p\right)\cos\varphi + \left(\frac{3b}{4} + q\right)\sin\varphi\right] + \frac{r^3}{r_0^{\,3}}\left(\frac{a}{4}\cos 3\varphi - \frac{b}{4}\sin 3\varphi\right).$$

Задания для индивидуальной самостоятельной работы

Задание 4.1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

1.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi$	2.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = -4\cos^3\varphi + \sin\varphi + 7$
3.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = 4\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi +$ $+\cos\varphi + 2$	4.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 4,$ $u\big\|_{r=4} = 4\cos^3\varphi + \sin^3\varphi +$ $+2\cos\varphi + 3$
5.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 3,$ $u\big\|_{r=3} = 12\sin^3\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi$	6.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi - 2\cos\varphi$
7.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 3,$ $u\big\|_{r=3} = 3\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi - 3\cos\varphi$	8.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = \cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi + \sin\varphi$
9.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = \cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi -$ $-3\cos\varphi + 2\sin\varphi$	10.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 3,$ $u\big\|_{r=3} = 9\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi - 2\cos\varphi$
11.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi - \cos\varphi$	12.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 4,$ $u\big\|_{r=4} = 4\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi + 8$
13.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = 3\cos^3\varphi + 5\sin^3\varphi - 2\cos\varphi$	14.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = 5\cos^3\varphi - 3\sin^3\varphi - 2\cos\varphi$
15.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = \cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi -$ $-5\cos\varphi + \sin\varphi$	16.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = \cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi -$ $-\cos\varphi + \sin\varphi$
17.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = 3\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi +$ $+5\sin\varphi - 6$	18.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = \cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi +$ $+5\sin\varphi - 2$
19.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 4,$ $u\big\|_{r=4} = 6\cos^3\varphi - 5\sin^3\varphi - \sin\varphi$	20.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi$
21.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = 3\cos^3\varphi + 5\sin^3\varphi -$ $-2\sin\varphi + 5$	22.	$\Delta u = 0, 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = \cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi -$ $-\cos\varphi + \sin\varphi$
23.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = 4\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi + 2\sin\varphi$	24.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 3,$ $u\big\|_{r=3} = -2\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi + 6$
25.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 1,$ $u\big\|_{r=1} = 12\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + 3\cos\varphi$	26.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 3,$ $u\big\|_{r=3} = 3\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \cos\varphi + 5$

27.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = \cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi - \sin\varphi$	28.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = -4\cos^3\varphi + \sin\varphi - 7$
29.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 3,$ $u\big\|_{r=3} = \cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi + 3\sin\varphi$	30.	$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,$ $u\big\|_{r=2} = 4\cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi + \cos\varphi$

4.2. ПОСТРОЕНИЕ И РЕШЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Пример 4.3. Одна из граней прямоугольного бруса поддерживается при заданной температуре $T = f(y)$, а на остальных гранях $T = 0$. Требуется найти температуру в произвольной точке внутри бруса.

Решение. Из симметрии бруса ясно, что температура от Z не зависит и можно ограничиться рассмотрением сечения в плоскости OXY. Задача состоит в определении функции $T = T(x, y)$, удовлетворяющей уравнению стационарной теплопроводности

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

и двум парам граничных условий

$$T\big|_{x=0} = 0,\ \ T\big|_{x=a} = f(y), \tag{5}$$

$$T\big|_{y=0} = 0,\ \ T\big|_{y=b} = 0. \tag{6}$$

Решение ищем методом разделения переменных

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y)\,. \tag{7}$$

Подставляя (7) в уравнение (4), получим для нахождения $X(x)$ уравнение

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0\,, \tag{8}$$

решение которого

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}\,. \tag{9}$$

Для нахождения $Y(y)$ с учетом граничных условий (6) приходим к краевой задаче

$$Y''(y)+\lambda^2 Y(y)=0\,, \tag{10}$$

$$Y(0)=Y(b)=0\,. \tag{11}$$

Решая уравнение (10), получаем

$$Y(y)=C\cos\lambda y+D\sin\lambda y\,. \tag{12}$$

Константы C, D, λ находим из граничных условий (5)

$$Y(0)=C=0\,,\ Y(b)=D\sin\lambda b=0\,.$$

Отсюда получаем, учитывая, что $D\neq 0, \lambda b=\pi n$ или

$$\lambda n=\frac{\pi n}{b},\quad n=1,2,3,... \tag{13}$$

Подставляя полученные собственные значения в равенства (9) и (12) и учитывая (7), получим набор частных решений уравнения (4), удовлетворяющих граничным условиям (6)

$$T_n(x,y)=\left(M_n e^{\frac{\pi nx}{b}}+N_n e^{-\frac{\pi nx}{b}}\right)\sin\frac{\pi ny}{b} \tag{14}$$

Решения уравнения, удовлетворяющие условиям (5), и (6), ищем в виде ряда

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n e^{\frac{\pi nx}{b}}+N_n e^{-\frac{\pi nx}{b}}\right)\sin\frac{\pi ny}{b}\,. \tag{15}$$

Константы M_n и N_n находим таким образом, чтобы найденное решение (15) удовлетворяло граничным условиям (5):

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n+N_n\right)\sin\frac{\pi ny}{b}\,,\ \ f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_n e^{\frac{\pi na}{b}}+N_n e^{-\frac{\pi na}{b}}\right)\sin\frac{\pi ny}{b}\,.$$

Отсюда видно, что постоянные множители $\left(M_n + N_n\right)$ и $\left(M_n e^{\frac{\pi na}{b}} + N_n e^{-\frac{\pi na}{b}}\right)$ $(n = 1,2,3,...)$ являются коэффициентами разложения в ряд Фурье функций 0 и $f(y)$. Значит

$$\begin{cases} M_n + N_n = 0, \\ M_n e^{\frac{\pi na}{b}} + N_n e^{-\frac{\pi na}{b}} = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b f(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy \end{cases}.$$

Отсюда, учитывая, что $\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{b}a = \dfrac{e^{\frac{\pi n}{b}a} - e^{-\frac{\pi n}{b}a}}{2}$, находим

$$M_n = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi na}{b}} \cdot \frac{1}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy,\ N_n = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi na}{b}} \cdot \frac{1}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (15), после несложных преобразований получаем

$$T(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b f(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi nx}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi na}{b}}\sin\frac{\pi ny}{b}.$$

При условии, что ряд сходится, можно утверждать, что его сумма удовлетворяет всем условиям задачи и является ее решением.

Ответ: $T(x,y) = \dfrac{2}{b}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b f(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi nx}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi na}{b}}\sin\frac{\pi ny}{b}$.

Пример 4.4. Начальная температура однородного шара $0 \le r < R$ радиуса R с центром в начале координат равна T. Найти температуру шара для случаев, когда:

а) поверхность шара поддерживается при температуре, равной нулю;

б) внутрь шара через его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности q.

Решение:

а) $u_t = a^2 \Delta u$, где $\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$, $0 \le r < R$, $u(R,t) = 0$,

$|u(0,t)| < \infty$, $t > 0$, $u(r,0) = T$, $0 \le r < R$.

Перейдем к функции $\vartheta(r,t) = r\,u(r,t)$, тогда задача примет вид:

$\vartheta_t = a^2 \vartheta_{rr}, 0 < r < R, t > 0$, $\vartheta(0,t) = \vartheta(R,t) = 0, t > 0, \vartheta(r,0) = Tr, 0 < r < R$.

Методом Фурье получаем решение преобразованной задачи, тогда решение исходной задачи имеет вид:

$$u(r,t) = \frac{2RT}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{kr}e^{-\left(\frac{k\pi a}{R}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi r}{R}.$$

б) $u_t = a^2 \Delta u$, $0 \le r < R$, $t > 0$, $\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$, $ku_r(R,t) = q$,

$t > 0$, $u(r,0) = T$, $0 \le r < R$.

Пример 4.5. Найти стационарное распределение температуры в тонком стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня поддерживается температура u_0 и u_l.

Решение. Математическая модель задачи представляет собой задачу Дирихле для одномерного случая:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(0,t) = u_0,\ \ u(l,t) = u_l \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(0) = u_0, u(l) = u_l.$$

Общее решение одномерного уравнения Лапласа имеет вид $u = Ax + B$. Учитывая краевые условия, получим $u = \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0$.

Ответ: $u = \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0$.

Пример 4.6. Найти стационарное распределение температуры на однородной тонкой круглой пластинке радиуса R, верхняя половина которой поддерживается при температуре 1°, а нижняя — при температуре 0°.

Решение: Математическая модель задачи имеет вид:

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0,\ u(r,\varphi)\big|_{r=R}=\begin{cases}0, -\pi<\varphi<0,\\ 1, 0\le\varphi\le\pi.\end{cases}$$

Распределение температуры в этом случае выражается интегралом

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau,$$

где при $-\pi<\tau<0,\ f(\tau)=0$, при $0<\tau<\pi,\ f(\tau)=1$.

1) Пусть точка расположена в верхнем полукруге, то есть $0<\varphi<\pi$, тогда $\tau-\varphi\in(-\varphi;\pi-\varphi)$ и этот интервал не содержит точек $\pm\pi$. Применим подстановку $\operatorname{tg}\frac{\tau-\varphi}{2}=t$, $d\tau=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos(\tau-\varphi)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\operatorname{tg}\varphi/2}^{\operatorname{ctg}\varphi/2}\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2+(R+r)^2t^2}dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}t\right)\Bigg|_{-\operatorname{tg}\varphi/2}^{\operatorname{ctg}\varphi/2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\frac{R+r}{R-r}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}{1-\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2}+n=$$

$=-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\varphi}+n$, где n следует выбрать из физического смысла задачи. Т.к. функция u при $0<\varphi<\pi$ удовлетворяет неравенствам $\frac{1}{2}<u<1$, а $-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\varphi}<0$, то следует выбрать $n=1$. Отсюда $u=1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\varphi}, 0<\varphi<\pi$.

2) Пусть точка расположена в нижнем полукруге, то есть $\pi<\varphi<2\pi$, тогда $\tau-\varphi\in(-\varphi;\pi-\varphi)$ содержит точку $-\pi$ и не содержит 0. Произведем замену $\operatorname{ctg}\frac{\tau-\varphi}{2}=t, \cos(\tau-\varphi)=\frac{t^2-1}{t^2+1}, d\tau=-\frac{2dt}{1+t^2}$.

В результате получим

$$u(r,\varphi) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\operatorname{ctg}\varphi/2}^{\operatorname{tg}\varphi/2} \frac{R^2 - r^2}{(R+r)^2 + (R-r)^2 t^2}\,dt =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

Аналогично случаю 1), получаем $u = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2 - r^2}{2Rr\sin\varphi}, \pi < \varphi < 2\pi$, так как $\sin\varphi < 0$, то $0 < u < 1/2$. **Ответ:**

$u = 1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2 - r^2}{2Rr\sin\varphi}, \varphi \in (0;\pi)$ $u = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2 - r^2}{2Rr\sin\varphi}, \varphi \in (\pi;2\pi)$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 4.2. Построить математические модели следующих процессов.

Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \le x \le s, 0 \le y \le p$ с жестко закрепленным краем для случаев, когда:

а) начальное отклонение мембраны равно $\sin\frac{\pi x}{s}\sin\frac{\pi y}{p}$, а начальная скорость равна 0;

б) в начальный момент $t = 0$ мембрана получает поперечный сосредоточенный импульс I в точке $(x_0, y_0), 0 < x_0 < s, 0 < y_0 < p$, а начальное положение – состояние покоя;

в) колебания вызваны непрерывно распределенной по мембране поперечной силой с плотностью $f(x,y,t) = e^{-t}x\sin\frac{2\pi y}{p}$.

Ответ:

а) $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), 0 < x < s, 0 < y < p, t > 0$,

$u(0,y,t) = u(s,y,t) = u(x,0,t) = u(x,p,t) = 0$, $t > 0$,

$u(x,y,0) = \sin\frac{\pi x}{s}\sin\frac{\pi y}{p}$, $u_t(x,y,0) = 0$, $0 < x < s, 0 < y < p$.

б) $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right),\ 0<x<s,\ 0<y<p,\ t>0$,

$u(0,y,t)=u(s,y,t)=u(x,0,t)=u(x,p,t)=0$, $t>0$, $u(x,y,0)=0$,

$u_t(x,y,0)=\frac{1}{\rho}\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(y-y_0\right)$, $0<x<s, 0<y<p$.

в) $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+\frac{1}{\rho}e^{-t}x\sin\frac{2\pi y}{p}, 0<x<s, 0<y<p, t>0$,

$u(0,y,t)=u(s,y,t)=u(x,0,t)=u(x,p,t)=0$, $t>0$,

$u(x,y,0)=u_t(x,y,0)=0$, $0<x<s, 0<y<p$.

Задание 4.3. Струна длиной l, закрепленная на концах в начальный момент времени взята посередине и отклонена от равновесного состояния на величину h и отпущена. Найти положение точки середины струны в момент времени t_0.

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x,0)=\begin{cases}\frac{2h}{l}x, & 0\le x\le\frac{l}{2},\\ \frac{2h(l-x)}{l}, & \frac{l}{2}\le x\le l,\end{cases}\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$

$$u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi at}{l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi at}{l}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}\cos\frac{5\pi at}{l}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{l}\cos\frac{7\pi at}{l}+\ldots\right),\quad u\left(\frac{l}{2},t_0\right)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi at_0}{l}.$$

Задание 4.4. Струна длиной l, закрепленная на концах в начальный момент времени находится в равновесном состоянии. По ней ударяют, придавая точкам струны скорость v_0 на расстоянии $\frac{h}{2}$ от ее середины, остальным точкам скорость не придавая. Определить форму струны для любого момента времени.

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x,0)=0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\begin{cases}v_0, & \left|x-\frac{l}{2}\right|<\frac{h}{2},\\ 0, & \left|x-\frac{l}{2}\right|>\frac{h}{2}.\end{cases}$

$$u(x,t)=\frac{4v_0t}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi h}{2l}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Задание 4.5. Струна длиной 3 *м*, закрепленная на концах, в начальный момент времени взята на расстоянии 2 *м* от левого конца и отклонена на расстояние 0,1 *м* вниз от равновесного состояния и отпущена, придавая точкам струны скорость 5 *м/с*. Составить математическую модель задачи.

Ответ:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0,t) = u(3,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} -0,05x; x \in [0;2], \\ 0,1x - 0,3;\ x \in (2;3], \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 5.$$

Литература

1. Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М.: Мир, 1985.

2. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) / В.Ф. Чудесенко. – М.: Высшая школа, 1983.

3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977.

4. Шило, А.Ф. Уравнения математической физики. Методические указания для студентов строительных специальностей втузов / А.Ф. Шило, Г.Л. Бахмат. – Минск, 1981.

5. Гусак, Е.И. Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / Е. И. Гусак. – Минск, 2000. – Т.2.

6. Ломовцев, Ф.Е. Уравнения математической физики: сборник задач / Ф.Е. Ломовцев. – Минск, 2009.

7. Араманович, И.Г., Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. – М., 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

УРАВНЕНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания
для студентов строительных специальностей

Технический редактор *Е. О. Германович*

Подписано в печать 21.09.2015. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 3,45. Тираж 70. Заказ 443.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.