Равномерная устойчивость скалярного уравнения с запаздыванием

Шавель Н.А.
Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f\left(t,\ x_t\right),\ f\left(t, 0\right) \equiv 0,$$

где $x_t\left(\theta\right) = x\left(t+\theta\right), \theta \in \left[-r; 0\right], r \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что правая часть уравнения допускает оценку

$$-a\left(t\right)\mu\left(\varphi\right) \le f\left(t,\varphi\right) \le a\left(t\right)\mu\left(-\varphi\right),$$

где $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\mu\left(\varphi\right) = \max\left\{0,\ \max\limits_{-r\le\theta\le 0}\varphi\left(\theta\right)\right\}$, $\varphi \in C\left(\left[-r; 0\right]\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть для некоторых $\alpha \le \dfrac{3}{2}$ и непрерывной функции $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ имеют место условия

$$\int\limits_t^{t+r} a\left(s\right)ds \le \alpha + p\left(t\right),\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\quad \int\limits_{t-\Delta}^{t} a\left(s\right)p\left(s\right)ds \le 0,\ \forall t \ge r,$$

где $\Delta = \Delta\left(t\right) = \min\left\{r, \sup\left\{0 \le \tau \le t : \int\limits_{t-\tau}^{t} a\left(s\right)ds \le 1\right\}\right\}$.

Тогда дифференциальное уравнение равномерно устойчиво.

Замечание. Точной среди констант оценкой сверху величины $\int\limits_t^{t+r} a\left(s\right)ds$, обеспечивающей равномерную устойчивость дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = f\left(t,\ x_t\right)$, является число $\dfrac{3}{2}$. Введение в оценку $\int\limits_t^{t+r} a\left(s\right)ds$ функции $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ позволяет обеспечить равномерную устойчивость в ряде случаев, когда оценка $\int\limits_t^{t+r} a\left(s\right)ds \le \dfrac{3}{2}$ не имеет места для любых $t \in \mathbb{R}_+$.