УДК 517.4

Изоморфность алгебры непрерывных и периодических функций с периодом 1 алгебре непрерывных функций на окружности

Нифонтова Д.А.
Белорусский национальный технический университет

Свойства функционального оператора зависят от набора чисел h_k и от свойств коэффициентов a_k и достаточно сложные для исследования. Обычно рассматривают коэффициенты из определенного класса функций и фиксируют допустимые наборы чисел h_k.

При заданном классе коэффициентов и заданном наборе чисел h_k основной задачей является исследование банаховой алгебры, порожденной функциональными операторами, т.е. наименьшей C^* – подалгебры в алгебре *LB(X)* линейных ограниченных операторов в $X = L_2(\mathbb{R})$, содержащей рассматриваемые функциональные операторы.

Пусть А-алгебра непрерывных и периодических функций с периодом 1 на вещественной прямой $a(x+1) = a(x)$. Таким образом для любого $\tau \in \mathbb{R} : f_\tau(a) = a(\tau)$ является линейным и мультипликативным функционалом. Таким образом, $f_\tau = f_{\tau+k}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Имеет место, таким образом, соотношение $\tau \sim \tau + k$, которое является соотношением эквивалентности в факторпространстве $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, и M(А)= $\mathcal{S}^1$, так по теореме Гельфанда-Наймарка А $\cong C(\mathcal{S}^1)$.

Теперь построим в явном виде изоморфизм алгебры А в алгебру непрерывных функций на окружности. Пусть $\mathcal{S}^1 = \{z : |z| = 1\}$. Рассмотрим отображение, заданное формулой: $\mathbb{R} \ni t \xrightarrow{\varphi} z = e^{i2\pi t} \in \mathcal{S}^1$, где $\varphi^{-1}(1) = t \in \mathbb{Z}$, так как для $t \in \mathbb{Z} : e^{i2\pi t} = 1$. Следовательно,

$$\mathrm{C}(\mathcal{S}^1) \ni \hat{a}(z) \longrightarrow a(t) = \hat{a}\left(e^{i2\pi t}\right) \in \mathrm{A}. \tag{1}$$

При этом заметим, что

$$\left\|\hat{a}(z)\right\|_{\mathrm{C}(\mathcal{S}^1)} = \max\left|\hat{a}(z)\right| = \max\left|\hat{a}\left(e^{i2\pi t}\right)\right| \text{ и } \left\|a\right\|_{\mathrm{A}} = \max\left|a(t)\right| = \max\left|\hat{a}\left(e^{i2\pi t}\right)\right|,$$

что и доказывает унитарность отображения (1).

УДК 519.876.5+728.1.05