
МЕТРОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

МЕТОД КАЛИБРОВКИ ГРАВИТАЦИОННОГО ГРАДИЕНТОМЕТРА НА ОСНОВЕ ВРАЩЕНИЯ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ

Джилавдари И. З.¹, Веряскин А.²

¹ Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь

² Gravitec Instruments Ltd. Trinity Research Labs.
School of Physics University of Western Australia, Australia

Предложен метод калибровки гравитационного градиентометра на основе вращения двух цилиндров, создающих гравитационное поле с однородным градиентом в относительно большой области пространства. Проводится сравнение гравитационных градиентов, создаваемых шаром и прямым цилиндром.

Введение

Один из распространенных способов калибровки гравитационных градиентометров (ГГ), предназначенных для измерений компонент тензора гравитационного потенциала, состоит в перемещении тела заданной простой формы и массы вблизи чувствительного элемента (ЧЭ) ГГ. При этом, как правило, используют тела сферической [1] или цилиндрической формы [2].

С телом цилиндрической формы иметь дело гораздо удобнее. Однако в этом случае возникают проблемы с расчетом компонент тензора гравитационного потенциала, которые в настоящее время разрешить не трудно, пользуясь современной вычислительной техникой.

Здесь имеется проблема другого рода. Гравитационное поле тела любой формы вне этого тела является неоднородным, так что сами компоненты тензора гравитационного потенциала (или градиенты гравитационного поля) изменяются в пространстве. В этом случае пронос тела вблизи ЧЭ не может обеспечить действие на ЧЭ гравитационного поля с заданным значением градиента силы тяжести, хотя так действовали в [3].

Одним из способов уменьшения погрешности, связанной с неоднородностью градиентов, является учет более высоких производных гравитационного потенциала [4]. Однако этот способ является, по крайней мере, неудобным, и здесь трудно получить оценку допускаемой погрешности.

Поэтому был предложен другой способ калибровки, а именно способ измерения градиентов в шаровой полости внутри однородного эллипсоида, где градиенты постоянны [4]. И этот способ трудно считать идеальным, поскольку для размещения приборов требуется иметь тело эллипсоидальной формы больших размеров.

Кроме того, здесь трудно получить высокую точность измерений, поскольку трудно обеспечить необходимую степень однородности самого эллипсоида [4].

В данной работе предлагается метод калибровки ГГ путем вращения двух тел цилиндрической формы вокруг ЧЭ ГГ, в котором с погрешностью, которую легко вычислить, обеспечиваются условия однородности градиента гравитационного поля в некотором объеме пространства. Кроме того, в данной работе проводится сравнение между собой градиентов гравитационных полей шара и цилиндра.

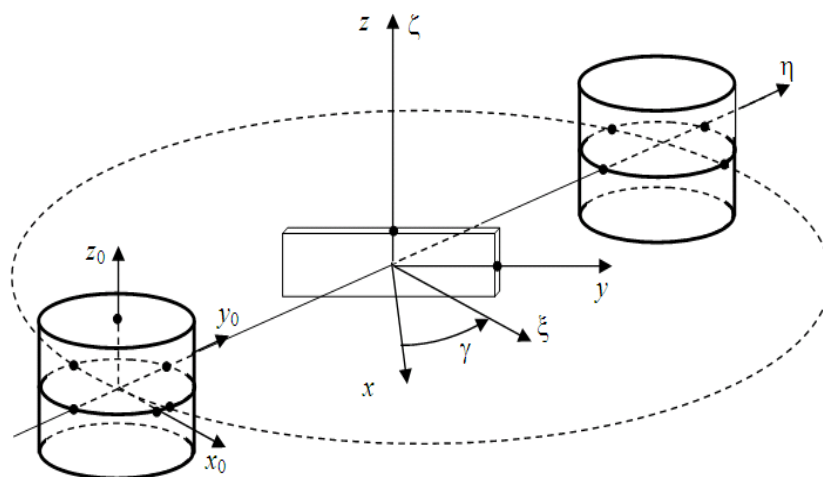


Рисунок 1 – Схема калибровки гравитационного градиентометра с упруго подвешенным чувствительным элементом

Вывод основных соотношений и теоретическое моделирование

Предположим, что ГГ содержит ЧЭ в виде тонкой прямоугольной пластины и калибровка осуществляется по схеме, показанной на рисунке 1. Здесь два одинаковых цилиндра радиусом a и высотой h вращаются вокруг оси z неподвижной системы координат xuz . Оси цилиндров расположены на расстоянии $\frac{1}{2}Na$ от оси вращения, где N – некоторое число. С цилиндрами связана система координат $\xi\eta\zeta$, ось ζ которой совпадает с осью z . ЧЭ расположен в плоскости yz системы координат xuz и имеет следующие размеры: длина L , высота Δz и толщина Δx .

Рассчитаем сначала момент силы, действующий на ЧЭ в случае гравитационного поля, в котором градиенты можно считать однородными. Если ЧЭ статически и динамически сбалансирован (в последнем случае центробежные моменты инерции равны нулю), то момент силы, действующей на него относительно оси z со стороны вращающихся цилиндров:

$$M(\gamma) = \left[\frac{1}{2}(\Gamma_{\eta\eta} - \Gamma_{\xi\xi}) \sin 2\gamma + \Gamma_{\xi\eta} \cos 2\gamma \right] (I_{yy} - I_{xx}), \quad (1)$$

где I_{xx} и I_{yy} – осевые моменты инерции ЧЭ, вычисляемые в системе координат xuz , и $\Gamma_{\xi\xi}$; $\Gamma_{\eta\eta}$ и $\Gamma_{\xi\eta}$ – компоненты тензора гравитационного потенциала $W(\xi, \eta, \zeta)$, вычисляемые в системе координат $\xi\eta\zeta$ [5].

В плоскости $\eta\zeta$ компонента $\Gamma_{\xi\eta} = 0$ при любом ζ . Разность осевых моментов инерции $I_{yy} - I_{xx} = m \frac{L^2 - (\Delta x)^2}{12} \equiv I$. Поэтому:

$$M(\gamma) = \frac{1}{2} I (\Gamma_{\eta\eta} - \Gamma_{\xi\xi}) \sin 2\gamma = \frac{1}{2} I \Gamma(\eta) \sin 2\gamma. \quad (2)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемой системе тел момент $M(\gamma)$ в гравитационном поле с однородными компонентами Γ_{ij} определяется значением градиента $\Gamma(\eta) = \Gamma_{\eta\eta} - \Gamma_{\xi\xi}$.

Рассмотрим теперь момент силы $M(\gamma)$, действующий на ЧЭ в гравитационном поле, в котором компоненты Γ_{ij} изменяются. В системе двух цилиндров, представленной на рисунке 1, потенциалы гравитационного поля левого W_1 и правого W_2 цилиндров даются формулой:

$$W_{1,2}(\xi, \eta, \zeta) = G \cdot \rho \times \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\sqrt{a^2-x_0^2}}^{\sqrt{a^2-x_0^2}} \frac{dx_0 dy_0 dz_0}{\sqrt{(\xi - x_0)^2 + \left(\eta \pm \frac{1}{2} N \cdot a - y_0\right)^2 + (\zeta - z_0)^2}}, \quad (3)$$

где G – гравитационная постоянная; ρ – плотность материала цилиндров; $x_0 y_0 z_0$ – система координат, связанная с каждым из цилиндров и ось z_0 которой совпадает с осью цилиндра, а оси x_0 и y_0 параллельны осям ξ и η , соответственно, и находятся с ними в одной плоскости (рисунок 1).

Потенциал обоих цилиндров, вычисленный в системе координат $\xi\eta\zeta$:

$$W(\xi, \eta, \zeta) = W_1(\xi, \eta, \zeta) + W_2(\xi, \eta, \zeta). \quad (4)$$

Компоненты тензора гравитационного потенциала вычисляются простым дифференцированием: $\Gamma_{\xi\xi} = \frac{d^2W}{d\xi^2}$, $\Gamma_{\eta\eta} = \frac{d^2W}{d\eta^2}$.

На рисунке 2 представлены зависимости градиента $\Gamma(\eta) = \Gamma_{\eta\eta}(\eta) - \Gamma_{\xi\xi}(\eta)$ для случая, когда $\rho = 11,34 \text{ г/см}^3$ (свинец), $N = 6,855$; $a = 0,09 \text{ м}$ и $h = 0,625a$, рассчитанные в плоскости $\eta\zeta$ для ряда значений расстояния ζ от оси плоскости вращения цилиндров до плоскости $xу$: кривая 1 – $\zeta = 0$; кривая 2 – $\zeta/a = 1,5$; кривая 3 – $\zeta/a = 2,85$; кривая 4 – $\zeta/a = 4$. В этом случае масса каждого цилиндра $m = 16,23 \text{ кг}$.

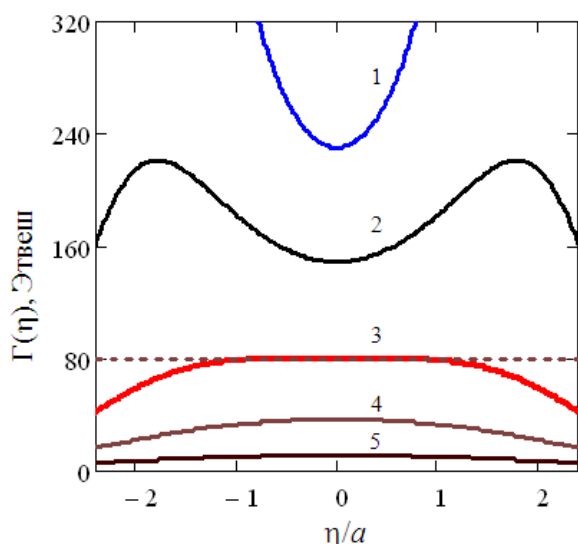


Рисунок 2 – Зависимость градиента $\Gamma(\eta) = \Gamma_{\eta\eta}(\eta) - \Gamma_{\xi\xi}(\eta)$ от высоты ζ плоскости вращения цилиндров над плоскостью $xу$: 1 – $\zeta = 0$; 2 – $\zeta = 1,4a$; 3 – $\zeta = 2,86a$; 4 – $\zeta = 3,4a$; 5 – $\zeta = 5a$

Из рисунка 2 видно, что существует такая геометрия системы, в которой параметр $\Gamma(\eta)$ остается практически постоянным в интервале значений $-1 < \eta/a < 1$ (кривая 3). Для кривой 3 максимальное значение $\Gamma(\eta) \approx 80$ Этвеш.

Представляется очевидным, что калибровку ГГ с помощью вращающихся цилиндров необходимо проводить именно для такой геометрии системы при условии, что размеры ЧЭ не превосходят размеры области с постоянным градиентом. Необходимо установить, к чему может привести нарушение этого условия.

Для этого рассчитаем момент силы, действующий на ЧЭ в системе отсчета $xуz$, не

вводя понятие тензора гравитационного потенциала. В этой системе отсчета проекция dM элементарного момента силы на ось z , действующего на ЧЭ, определяется формулой [5]:

$$dM = dm(g_{yx} - g_{xy}), \quad (5)$$

где dm – элемент ЧЭ, расположенный в точке с координатами x и y этого ЧЭ.

Считая, что толщина и высота ЧЭ существенно меньше его длины, так что изменением гравитационного поля в пределах толщины и высоты ЧЭ можно пренебречь, найдем, что полный момент:

$$M = \rho_0 \Delta x \Delta z \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (g_{yx} - g_{xy}) dy, \quad (6)$$

где ρ_0 – плотность материала ЧЭ, и координаты x и y , а также компоненты g_x и g_y , получены из координат ξ и η и компонент $g_\xi = \frac{dW}{d\xi}$ и

$g_\eta = \frac{dW}{d\eta}$ путем использования известной связи

между координатами и компонентами векторов в системах координат $\xi\eta\zeta$ и $xуz$: $x = \xi \cos \gamma - \eta \sin \gamma$, $y = \xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma$ [5].

Результаты расчета зависимости $M(\gamma)$ в пределах одного оборота цилиндров при той же геометрии системы цилиндров, для которой была получена кривая 3 на рисунке 2, представлены в виде сплошной линии на рисунке 3. При этом параметры ЧЭ были следующие: длина $L/a = 0,7$, толщина $\Delta x = 5 \text{ мм}$ и высота $\Delta z = 1,5 \text{ см}$, плотность $\rho_0 = 7,8 \text{ г/см}^3$. На рисунке 3 максимальное значение момента $M_{\max} \approx 3,857 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Для того, чтобы отчетливо продемонстрировать влияние изменения параметра $\Gamma(\eta)$ в пределах ЧЭ, рассчитаем зависимость $M(\gamma)$ при той же геометрии калибровочной системы, но для гипотетического случая, когда $L/a = 4,44$. Результат показан на рисунке 4. Здесь максимальное значение момента $M_{\max} \approx 1,121 \cdot 10^{-9} \text{ Н}\cdot\text{м}$.

На рисунке 3 в виде отдельных точек показаны также результаты расчетов момента $M(\gamma)$, где вместо формулы (6) использовалась более точная формула, включающая интегрирование по x и z в пределах ЧЭ. Видно хорошее совпадение этих результатов с результатами расчетов по приближенной формуле (6), хотя максимальные значения немного отличаются.

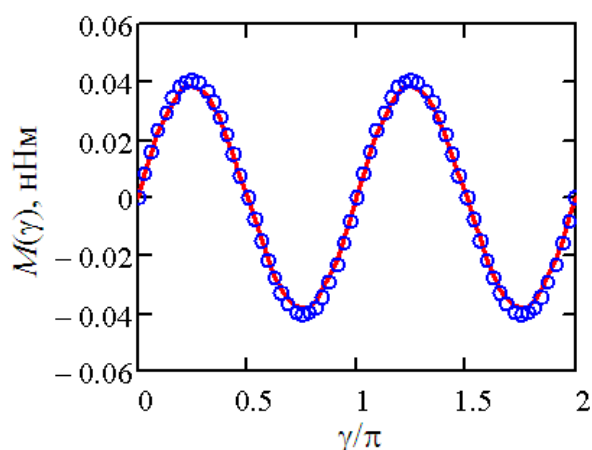


Рисунок 3 – Результаты расчета зависимости момента силы $M(\gamma)$, действующего на ЧЭ от угла поворота γ системы двух цилиндров в случае ЧЭ с длиной $L/a = 0,7$. Сплошная линия – по приближенной формуле (6), линия из отдельных точек – по точной формуле, включающей интегрирование по x и z

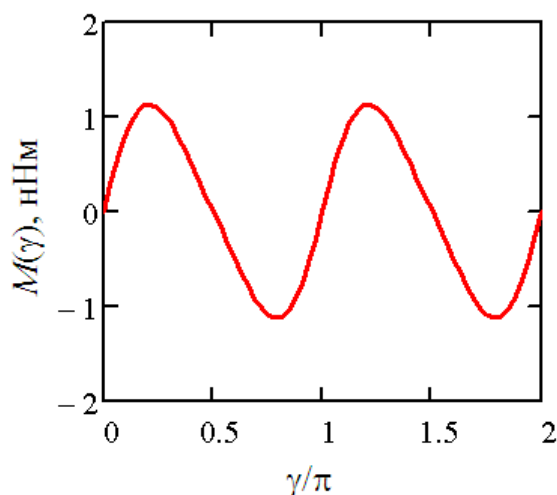


Рисунок 4 – Результаты расчета зависимости момента силы $M(\gamma)$, действующего на ЧЭ от угла поворота γ системы двух цилиндров в случае ЧЭ с длиной $L/a = 4,44$ по формуле (6).

Из рисунков 3 и 4 следует, что в случае, когда размеры ЧЭ не превышают размеров области, где градиент $\Gamma(\eta)$ остается однородным, зависимость момента силы от угла поворота цилиндров, действующего на ЧЭ, меняется по закону, близкому к гармоническому. Наоборот, в случае, когда большая часть ЧЭ находится в поле с неоднородным градиентом, зависимость момента силы от угла поворота цилиндров искажается. Известно, что в этом случае

должно проявляться влияние гармоник от частоты вращения цилиндров [4].

Вычислим, пользуясь формулой (2), значение максимального момента силы, действующего на ЧЭ для распределения гравитационного поля, показанного кривой 3 на рисунке 2. В случае короткого ЧЭ, когда $L/a = 0,7$, момент инерции $I \approx 9,736 \cdot 10^{-4}$ кгм², в случае ЧЭ с длиной $L/a = 4,44$ момент инерции $I \approx 0,031$ кгм². Учитывая, что градиент $\Gamma(\eta) \approx 80 \cdot 10^{-9}$ с⁻², найдем, что в случае короткого ЧЭ момент силы $M(\gamma)_{\max} \approx 3,895 \cdot 10^{-11}$ Н·м, а в случае длинного ЧЭ момент силы $M(\gamma)_{\max} \approx 1,248 \cdot 10^{-9}$ Н·м. Сравнивая эти значения с аналогичными значениями, полученными из формулы (6) выше ($M_{\max} \approx 3,857 \cdot 10^{-11}$ Н·м и $M_{\max} \approx 1,121 \cdot 10^{-9}$ Н·м, соответственно), увидим, что в случае короткого ЧЭ результаты отличаются на 1 %, а в случае длинного ЧЭ эти результаты отличаются на 10 %.

Для того чтобы более четко представить себе точную геометрию участка с однородным значением градиента, на рисунке 5 показана зависимость $\Gamma(\eta)$ для кривой 3 на рисунке 2 в более мелком масштабе. Отсюда видно, что значение $\Gamma \approx 80$ Этвеш можно считать однородным лишь с некоторой погрешностью. Найдем эту погрешность. Будем считать, что нам необходимо иметь значение 80 Этвеш на участке от η_1 до η_2 и найдем погрешность $\Delta\Gamma$, с которой выполняется это условие, по формуле:

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Gamma(\eta) - 80| d\eta. \quad (7)$$

Пусть $\eta_1 = -0,7a$ и $\eta_2 = 0,7a$. Тогда из (7) получим $\Delta\Gamma = 0,025$ Этвеш.

Отсюда $\Delta\Gamma/\Gamma \approx 3,1 \cdot 10^{-4}$. Несколько увеличив параметр ζ и уменьшив значение N , зависимость $\Gamma(\eta)$ в виде седла можно сгладить, однако за счет уменьшения интервала $\eta_2 - \eta_1$, в котором градиент $\Gamma(\eta)$ можно считать однородным с заданной погрешностью.

Обратим также внимание на следующую интересную особенность: при расчетах зависимости $\Gamma(\eta)$ изменение значения радиуса цилиндров a (которое приводит к изменению массы цилиндров и расстоянию $N \cdot a$ между осями цилиндров) никак не влияет на эту зависимость, в том числе и на его максимальное значение, если отношения параметров h/a и ζ/a , а также параметр N остаются постоянными.

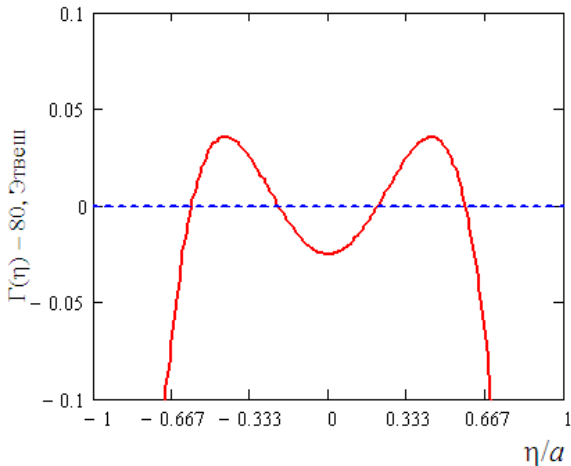


Рисунок 5 – Зависимость градиента $\Gamma(\eta)$ вблизи однородного значения $\Gamma(\eta)=80$ Этвеш для кривой 3, показанной на рисунке 2

С другой стороны, численный анализ показал, что для данной пары цилиндров, подбирая значения параметров ζ и N , на участке между заданными значениями η , например, от $\eta_1 = -0,7a$ до $\eta_2 = 0,7a$, можно получить непрерывное множество однородных значений градиентов Γ . В этом случае связь между $\lg\Gamma$ и $\lg N$ или $\lg\Gamma$ и $\lg\zeta$, а также между параметрами N и ζ с высокой степенью точности (с коэффициентами корреляции $-0,9998$, $-0,9997$ и $0,9999$, соответственно) имеет вид прямых (рисунок 6). На рисунке 6а в виде сплошной линии показана зависимость $\lg\Gamma$ от $\lg N$ и, в виде пунктирной линии показана зависимость $\lg\Gamma$ от $\lg\zeta$, причем значения, представленные в виде отдельных кружков, были получены при значениях градиента Γ , равных 1, 10, 20, 40, 60, 80, 100 и 200 Этвеш. Эти же значения Γ , показанные в виде кружков на рисунке 6б, связывают между собой параметры N и ζ . Наличие этих зависимостей позволяет облегчить вычисление параметров N и ζ для любого наперед заданного однородного значения Γ .

Рассмотрим теперь вопрос о возможных преимуществах, которые, на первый взгляд, могло бы дать использование тел сферической формы. Для этого сравним градиенты $\Gamma(\eta)=\Gamma_{\eta\eta}(\eta)-\Gamma_{\xi\xi}(\eta)$ гравитационных полей шара и цилиндра.

Легко рассчитать потенциал тела сферической формы. Если шар массой m расположен в начале системы координат $\xi\eta\zeta$, то потенциал гравитационного поля в области вне шара дается формулой [5]:

$$W(\xi, \eta, \zeta) = G \frac{m}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}} \quad (8)$$

В этой же системе координат потенциал гравитационного поля цилиндра определяется по формуле (3), в которой $N=0$:

$$W(\xi, \eta, \zeta) = G \cdot \rho \times \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x_0^2}}^{\sqrt{a^2-x_0^2}} \frac{dx_0 dy_0 dz_0}{\sqrt{(\xi-x_0)^2 + (\eta-y_0)^2 + (\zeta-z_0)^2}}, \quad (9)$$

где координаты $x_0 y_0 z_0$ относятся к области пространства, занятой цилиндром (рисунок 1).

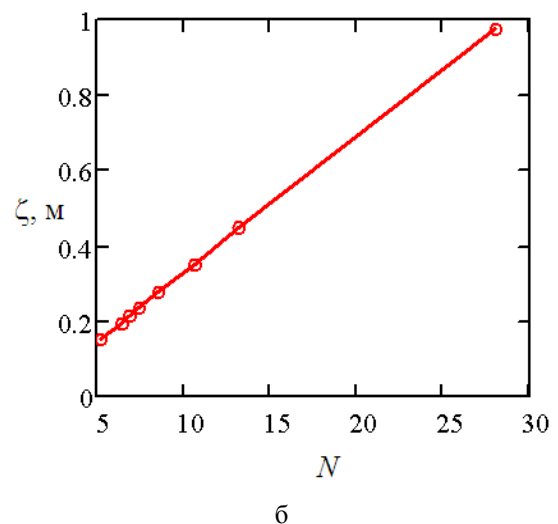
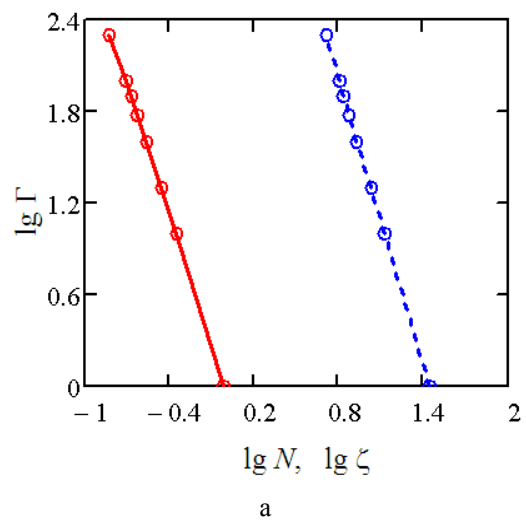


Рисунок 6 – Зависимость между параметрами Γ , ζ и N , обеспечивающими наличие области с заданным значением градиента Γ , в системе двух цилиндров с неизменными радиусами и высотой. Сплошные и пунктирные линии – линейная аппроксимация соответствующих зависимостей

Вычислим и сравним между собой градиент $\Gamma(\eta)$ шара и цилиндра при $\xi=0$ и $\zeta=0$, предполагая, что масса шара равна массе цилиндра и оба тела выполнены из одного материала – свинца ($\rho=11,34$ г/см³). Если h – высота цилиндра и a – его радиус, то, очевидно, что радиус R шара должен выбираться из условия:

$$R = \left(\frac{3a^2h}{4} \right)^{1/3}. \tag{10}$$

Из формул (8) – (10) найдем, что в случае шара и цилиндра, соответственно:

$$\Gamma(\eta) \equiv \Gamma_s(\eta) = G\rho \frac{4\pi R^3}{\eta^3}. \tag{11}$$

$$\Gamma(\eta) \equiv \Gamma_c(\eta) = 3G\rho \times \int_{-\frac{h-a}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\sqrt{a^2-x_0^2}}^{\sqrt{a^2-x_0^2}} \int_{-\sqrt{x_0^2+(\eta-y_0)^2+z_0^2}}^{5/2} dy_0 dx_0 dz_0. \tag{12}$$

На рисунках 7 а–в, где пунктирная линия относится к шару, представлены результаты расчетов по формулам (11) и (12) при $a = 0,15$ м для следующих трех случаев: на рисунке 7а имеем $h/a = 0,5$ (тогда $R/a = 0,721$, $m = 68,118$ кг); на рис. 7б имеем $h/a = 2$ (тогда $R/a = 1,145$, $m = 240,473$ кг) и на рисунке 7в имеем $h/a = 1,3$ (тогда $R/a = 0,992$, $m = 156,308$ кг).

Из рисунка 7 видно, что градиенты $\Gamma(\eta)$ для шара и цилиндра могут быть весьма близкими между собой, даже вблизи поверхности тел. Поэтому шар не имеет заметных преимуществ по сравнению с цилиндром.

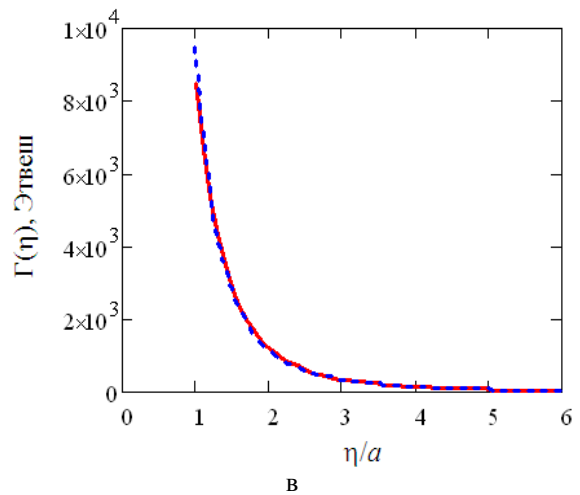
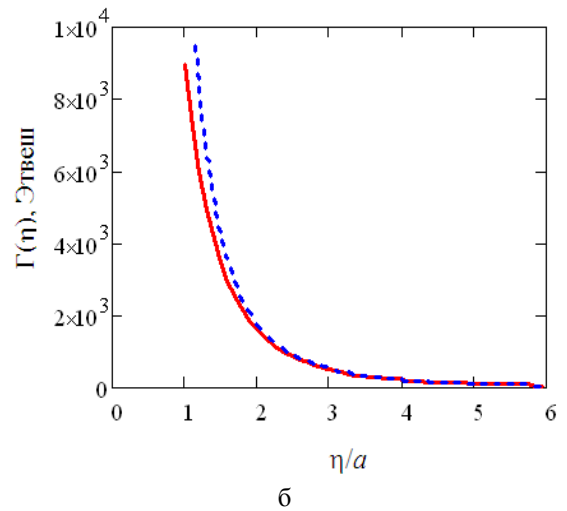
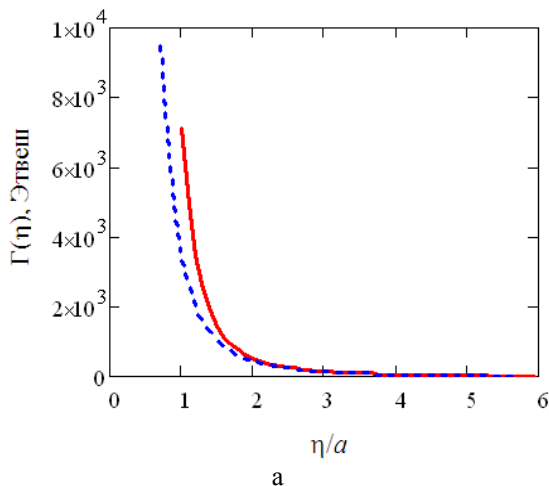


Рисунок 7 – Соотношение между градиентами шара (пунктирная линия) и цилиндра (сплошная линия), имеющими одинаковую массу

Заключение

Разработан метод калибровки гравитационных градиентометров с помощью двух цилиндров, расположенных диаметрально противоположно относительно измерительной оси градиентометра.

Показано, что с помощью этой системы можно создавать с заданной погрешностью гравитационное поле, имеющее постоянный градиент области пространства, в которой расположен чувствительный элемент градиентометра.

Значение градиента можно менять в широком интервале, не меняя формы и массы цилиндров. С другой стороны, заданное распределение значений градиента может быть получено

путем подобных преобразований геометрии системы.

Вращение цилиндров позволяет модулировать значения градиента во времени с частотой, равной удвоенной частоте вращения.

Список использованных источников

1. Metzger, E. H. Recent gravity gradiometer developments / E. H. Metzger // AIAA Conference on Guidance and Control, Hollywood, USA, 8–10 August 1977. – Hollywood, 1977. – P. 306–310.
2. Veryaskin, A. On the combined gravity gradient components modelling for applied geophysics / A. Veryaskin, W. McRae // Journal Of

- Geophysics And Engineering. – 2008. – № 5. – P. 1–9.
3. Anstie, J. Preparation for flight testing the VK1 gravity gradiometer / J. Anstie [et al.] // Airborne Gravity 2010: Abstracts from the ASEG-PESA Workshop, Australia 2010 / Geoscience Australia and the Geological Survey of New South Wales, Geoscience Australia; edited by Richard Lane. – Canberra, 2010. – P. 5–12.
4. Колосницын, Н.И. О калибровке гравитационных градиентометров с помощью градиентных мер / Н.И. Колосницын // Измерительная техника. – 1992. – № 12. – С. 55–57.
5. Грушинский, Н.П. Основы гравиметрии / Н. П. Грушинский. – М. : Наука, 1983. – 352 с.

Gilavdary I. Z., Veryaskin A.

Calibration method for gravity gradiometers by means of two rotating cylinders

The problem of maintaining a constant gravitational gradient in a relatively large volume of space is considered. This provides a well defined input signal to a gravity gradiometer for the purpose of its calibration. A comparison between gravitational gradients created by straight cylinders and spheres is also provided.

Поступила в редакцию 21.10.2010.