



The methods of calculation of the prismatic steel slug temperature field at heating in furnace is stated. The numerical solution of quasi-linear equation of heat conduction with granite conditions of the third type taking into account temperature dependence of the main thermal-physical characteristics (firmness, specific heat capacity and heat conduction) is received. The coefficients of heat transfer, at which experimental data and calculated values have minimum deviation, are determined.

С. Л. ГАВРИЛЕНКО, С. В. ШИЛЬКО, ИММС НАН Беларуси, С. М. КАБИШОВ, БНТУ,  
Ю. М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ, ИТМО НАН Беларуси,  
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, Президиум НАН Беларуси

УДК 669.041

## РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПЛОТНОСТИ, ТЕПЛОЕМКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Адекватность физических и математических моделей термонапряженного состояния стальных слитков (заготовок) определяется полнотой учета трех основных факторов: 1) комбинации теплового воздействия и силового нагружения; 2) неоднородности структуры стали; 3) нелинейной зависимости теплофизических и деформационно-прочностных характеристик стали от температуры. В настоящей статье при численном решении уравнения теплопроводности учитываются экспериментальные температурные зависимости плотности, теплоемкости и теплопроводности, приведенные в [1–3]. Работа является развитием методики [4], в которой рассматривалась температурная зависимость коэффициента теплопроводности.

### Формулировка задачи

Рассмотрим математическую постановку задачи о распространении тепла в сечении стальной заготовки при нагреве в методической печи.

Она включает:

квазилинейное уравнение теплопроводности [5, 6]:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

начальные условия:  $u(x, y, 0) = u_0 = 393 \text{ K}$ ;

граничные условия 3-го рода, моделирующие распространение тепла по закону Ньютона:

$$\left.\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \alpha_1(u(x, y, t) - \theta(t)).$$

Здесь  $c(u)$  – зависимость удельной теплоемкости от температуры;  $\rho(u)$  – зависимость плотности от температуры;  $\kappa(u)$  – закон изменения теплопроводности;  $\theta(t)$  – закон изменения температуры в печи;  $\theta(t) = 1023 \text{ K} + 0,0975t$ ;  $\Gamma$  – граница сечения заготовки;  $\frac{\partial}{\partial n}$  – производная по внутренней нормали к границе сечения.

Делаем замену  $v(x, y, t) = \frac{1}{\kappa(u_0)u_0} \int_{u_0}^{u(x, y, t)} \kappa(\xi) d\xi$ , где  $\kappa(\xi) = 72,2 - 0,03\xi$  – зависимость теплопроводности

от температуры стали [1] (далее в решении будут использоваться теплофизические характеристики этой марки стали).

Интегрируя и решая квадратное уравнение, получаем зависимость безразмерной температуры от

новой переменной  $v$ :  $u(v) = 1 + \frac{\kappa(u_0) - \sqrt{\kappa(u_0)^2 - 2B_0u_0\kappa(u_0)v}}{B_0u_0}$ .

Дифференцируя полученную зависимость по  $v$ , получаем выражение, используемое в расчете:

$$u'(v) = \frac{\kappa(u_0)}{\sqrt{\kappa(u_0)^2 - 2B_0 u_0 \kappa(u_0) v}}, \text{ где } u_0 - \text{ начальная температура; } \kappa(u_0) - \text{ теплопроводность при температуре } u_0; B_0 = 0,03 - \text{ модуль коэффициента пропорциональности в зависимости теплопроводности от температуры.}$$

Посредством сделанной замены получим следующую постановку задачи:

$$\varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad v(x, y, 0) = 0$$

с граничными условиями 3-го рода:  $\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \alpha_1(u(x, y, t) - \theta(t))$ .

Здесь приняты обозначения:  $\Gamma$  – граница области сечения;  $\frac{\partial}{\partial n}$  – производная по внутренней нормали к границе сечения;  $\theta(t)$  – температура окружающей среды (печи);  $\alpha_1 - \alpha_4$  – приведенные коэффициенты внешней теплоотдачи.

Описанную выше математическую постановку задачи целесообразно привести к безразмерному виду. Для этого используем следующие характерные константы:  $u_0 = 393 \text{ K}$ ,  $l_0 = 0,125 \text{ м}$ ,  $t_0 = 9 \cdot 10^4 \text{ с}$ ,  $\kappa(u_0) = 60,4 \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}$ . После приведения к безразмерному виду задача записывается в следующей формулировке:

$$\varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad v(x, y, 0) = 0, \quad x, y \in [0; 1], \quad t \in [0; 0,04],$$

$$\left. \frac{\partial u(v(x, y, t))}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \alpha_1(\theta(t) - u(v(x, y, t))), \quad \theta(t) = 2,6 + 22,32t, \quad \varphi'(v) = \frac{l_0^2}{t_0} \frac{c(u_0 u(v)) \rho(u_0 u(v))}{\kappa(u_0 u(v))}.$$

### Построение сеточного аналога

Рассмотрим сеточный аналог уравнения теплопроводности при  $i, j = 0, \dots, 10$ , получаемый при дискретизации сечения призматической заготовки в виде  $10 \times 10$  разбиений с количеством узлов  $11 \times 11$  (рис. 1).

Для численного решения используем дискретный аналог безразмерной температуры и разностные схемы с весами [7]:

$$\varphi'(y_{ij}^{t+1}) \frac{y_{ij}^{t+1} - y_{ij}^t}{\tau} = \Lambda_x(\sigma y_{ij}^{t+1} + (1-\sigma)y_{ij}^t) + \Lambda_y(\sigma y_{ij}^{t+1} + (1-\sigma)y_{ij}^t).$$

Здесь  $\Lambda_x$  – разностный аналог второй производной, который вычисляется по следующей формуле:  $\Lambda_x y_{ij}^t = \frac{y_{i+1j}^t - 2y_{ij}^t + y_{i-1j}^t}{h^2}$ . Задавались параметры пространственно-временной дискретизации:  $h = 0,1$ ,  $\tau = 0,004$ .

Для наилучшей аппроксимации искомой функции дискретным аналогом полагаем  $\sigma = 0,5$ . Разностная схема, моделирующая решение задачи, имеет вид

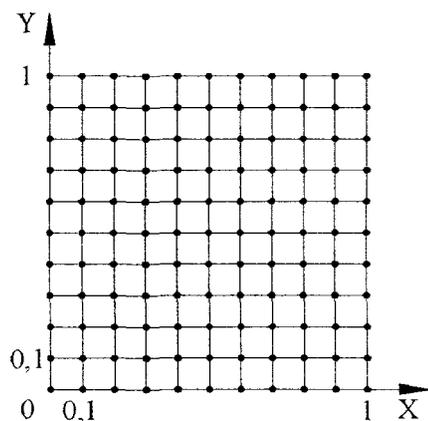


Рис. 1. Схема дискретизации сечения призмы

$$\varphi'(y_{ij}^{t+1}) \frac{y_{ij}^{t+1} - y_{ij}^t}{\tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{i+1j}^{t+1} - 2y_{ij}^{t+1} + y_{i-1j}^{t+1}}{h^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{y_{i+1j}^t - 2y_{ij}^t + y_{i-1j}^t}{h^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{y_{ij+1}^{t+1} - 2y_{ij}^{t+1} + y_{ij-1}^{t+1}}{h^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{y_{ij+1}^t - 2y_{ij}^t + y_{ij-1}^t}{h^2} \right).$$

Для аппроксимации граничных условий будем использовать следующие разностные аналоги:

$$\sigma \left( u'(y_{0j}^{t+1}) \frac{y_{1j}^{t+1} - y_{0j}^{t+1}}{h} - \alpha_1 u(y_{0j}^{t+1}) \right) + (1-\sigma) \left( u'(y_{0j}^t) \frac{y_{1j}^t - y_{0j}^t}{h} - \alpha_1 u(y_{0j}^t) \right) = \frac{1}{2} h \frac{l_0^2}{t_0} u'(y_{0j}^t) \frac{y_{0j}^{t+1} - y_{0j}^t}{\tau} - \alpha_1 \theta \left( (t + \frac{1}{2}) \tau \right),$$

$$\sigma \left( u'(y_{i0}^{t+1}) \frac{y_{i1}^{t+1} - y_{i0}^{t+1}}{h} - \alpha_1 u(y_{i0}^{t+1}) \right) + (1-\sigma) \left( u'(y_{i0}^t) \frac{y_{i1}^t - y_{i0}^t}{h} - \alpha_1 u(y_{i0}^t) \right) = \frac{1}{2} h \frac{l_0^2}{t_0} u'(y_{i0}^t) \frac{y_{i0}^{t+1} - y_{i0}^t}{\tau} - \alpha_1 \theta \left( (t + \frac{1}{2}) \tau \right),$$

$$\begin{aligned} & \sigma \left( -u'(y_{10j}^{t+1}) \frac{y_{10j}^{t+1} - y_{9j}^{t+1}}{h} - \alpha_1 u(y_{10j}^{t+1}) \right) + (1 - \sigma) \left( -u'(y_{10j}^t) \frac{y_{10j}^t - y_{9j}^t}{h} - \alpha_1 u(y_{10j}^t) \right) = \\ & = \frac{1}{2} h \frac{l_0^2}{t_0} u'(y_{10j}^t) \frac{y_{10j}^{t+1} - y_{10j}^t}{\tau} - \alpha_1 \theta \left( t + \frac{1}{2} \right) \tau, \\ & \sigma \left( -u'(y_{i10}^{t+1}) \frac{y_{i10}^{t+1} - y_{i9}^{t+1}}{h} - \alpha_1 u(y_{i10}^{t+1}) \right) + (1 - \sigma) \left( -u'(y_{i10}^t) \frac{y_{i10}^t - y_{i9}^t}{h} - \alpha_1 u(y_{i10}^t) \right) = \\ & = \frac{1}{2} h \frac{l_0^2}{t_0} u'(y_{i10}^t) \frac{y_{i10}^{t+1} - y_{i10}^t}{\tau} - \alpha_1 \theta \left( t + \frac{1}{2} \right) \tau. \end{aligned}$$

Аналогично сеточному аналогу уравнения теплопроводности с целью наилучшей аппроксимации граничных условий принимаем  $\sigma = 0,5$ .

После несложных математических преобразований получаем из сеточного аналога уравнения теплопроводности систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{2h^2} (y_{i+1j}^{t+1} + y_{i-1j}^{t+1} + y_{ij+1}^{t+1} + y_{ij-1}^{t+1}) - \left( \frac{2\tau}{h^2} + \varphi'(y_{ij}^{t+1}) \right) y_{ij}^{t+1} = \left( \frac{2\tau}{h^2} - \varphi'(y_{ij}^{t+1}) \right) y_{ij}^t - \\ & - \frac{\tau}{2h^2} (y_{i+1j}^t + y_{i-1j}^t + y_{ij+1}^t + y_{ij-1}^t), \quad i, j = 1, \dots, 9. \end{aligned}$$

Аналогично получаем систему линейных уравнений из сеточного аналога граничных условий 3-го рода:

$$\begin{aligned} & u'(y_{0j}^{t+1}) y_{1j}^{t+1} - \left( \frac{h^2 l_0^2}{\tau t_0} u'(y_{0j}^t) + u'(y_{0j}^{t+1}) \right) y_{0j}^{t+1} = \\ & = \alpha_1 h (u(y_{0j}^{t+1}) + u(y_{0j}^t)) + u'(y_{0j}^t) y_{1j}^t + \left( u'(y_{0j}^t) - \frac{h^2 l_0^2}{\tau t_0} u'(y_{0j}^t) \right) y_{0j}^t - 2\alpha_1 h \theta \left( t + \frac{1}{2} \right) \tau, \\ & \quad j = 0, \dots, 10, \\ & u'(y_{i0}^{t+1}) y_{i1}^{t+1} - \left( \frac{h^2 l_0^2}{\tau t_0} u'(y_{i0}^t) + u'(y_{i0}^{t+1}) \right) y_{i0}^{t+1} = \\ & = \alpha_1 h (u(y_{i0}^{t+1}) + u(y_{i0}^t)) + u'(y_{i0}^t) y_{i1}^t + \left( u'(y_{i0}^t) - \frac{h^2 l_0^2}{\tau t_0} u'(y_{i0}^t) \right) y_{i0}^t - 2\alpha_1 h \theta \left( t + \frac{1}{2} \right) \tau, \\ & \quad i = 1, \dots, 9, \\ & \left( \frac{h^2 l_0^2}{\tau t_0} u'(y_{10j}^t) + u'(y_{10j}^{t+1}) \right) y_{10j}^{t+1} - u'(y_{10j}^{t+1}) y_{9j}^{t+1} = \\ & = u'(y_{10j}^t) y_{9j}^t - \left( u'(y_{10j}^t) - \frac{h^2 l_0^2}{\tau t_0} u'(y_{10j}^t) \right) y_{10j}^t - \alpha_1 h (u(y_{10j}^{t+1}) + u(y_{10j}^t)) + 2\alpha_1 h \theta \left( t + \frac{1}{2} \right) \tau, \\ & \quad j = 0, \dots, 10, \\ & \left( \frac{h^2 l_0^2}{\tau t_0} u'(y_{i10}^t) + u'(y_{i10}^{t+1}) \right) y_{i10}^{t+1} - u'(y_{i10}^{t+1}) y_{i9}^{t+1} = \\ & = u'(y_{i10}^t) y_{i9}^t - \left( u'(y_{i10}^t) - \frac{h^2 l_0^2}{\tau t_0} u'(y_{i10}^t) \right) y_{i10}^t - \alpha_1 h (u(y_{i10}^{t+1}) + u(y_{i10}^t)) + 2\alpha_1 h \theta \left( t + \frac{1}{2} \right) \tau, \\ & \quad i = 1, \dots, 9. \end{aligned}$$

Для решения полученной нелинейной системы уравнений применяем метод итераций [8], подставляя в нелинейную часть известные значения  $y_{ij}^{(s)t+1}$ , а в линейные части соответственно  $y_{ij}^{(s+1)t+1}$ .

В итоге получим систему, включающую 121 линейное алгебраическое уравнение относительно  $y_{ij}^{(s+1)t+1}$  (из них 81 уравнение соответствует аппроксимации квазилинейного уравнения теплопроводности и 40 уравнений образуют сеточный аналог граничных условий 3-го рода).

Решая систему, находим численное значение решения для (s+1)-й итерации.

Система линейных алгебраических уравнений, полученная из сеточного аналога квазилинейного уравнения теплопроводности, имеет вид

$$\frac{\tau}{2h^2} \left( y_{i+1j}^{(s+1)t+1} + y_{i-1j}^{(s+1)t+1} + y_{ij+1}^{(s+1)t+1} + y_{ij-1}^{(s+1)t+1} \right) - \left( \frac{2\tau}{h^2} + \Phi'(y_{ij}^{(s)t+1}) \right) y_{ij}^{(s+1)t+1} = \left( \frac{2\tau}{h^2} - \Phi'(y_{ij}^{(s)t+1}) \right) y_{ij}^t - \frac{\tau}{2h^2} \left( y_{i+1j}^t + y_{i-1j}^t + y_{ij+1}^t + y_{ij-1}^t \right), i, j=1, \dots, 9.$$

Уравнения, найденные из одного из граничных условий, относительно (s+1)-й итерации:

$$u'(y_{0j}^{(s)t+1}) y_{1j}^{(s+1)t+1} - \left( \frac{h^2}{\tau} \frac{l_0^2}{t_0} u'(y_{0j}^t) + u'(y_{0j}^{(s)t+1}) \right) y_{0j}^{(s+1)t+1} = \alpha_1 h \left( u(y_{0j}^{(s)t+1}) + u(y_{0j}^t) \right) + u'(y_{0j}^t) y_{1j}^t + \left( u'(y_{0j}^t) - \frac{h^2}{\tau} \frac{l_0^2}{t_0} u'(y_{0j}^t) \right) y_{0j}^t - 2\alpha_1 h \theta \left( t + \frac{1}{2} \right) \tau, j=0, \dots, 10.$$

Значения s-итерации считаем известными, значения нулевой итерации принимаем равными значениям на предыдущем слое. Начальные условия:  $y_{ij}^0 = 0$ , где  $i, j = 0, \dots, 10$ .

### Численная апробация

Для реализации метода расчета температурного поля в сечении заготовки использовали программный продукт Mathcad 2001. Для приведения сеточных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений преобразуем сеточные значения в вектор по формуле  $x_{11+i+j} = y_{ij}^t$ . Система линейных алгебраических уравнений с определителем, отличным от нуля, решалась матричным методом [8]. Для получения отклонения значений на шагах (s+1) и (s), не превышающего 5%, требовалось не более пяти итераций.

В вычислениях использовали приведенные безразмерные коэффициенты внешней теплоотдачи  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , где  $\alpha_1$  соответствует коэффициенту для левой боковой грани,  $\alpha_2$  – верхней,  $\alpha_3$  – правой боковой,  $\alpha_4$  – нижней грани. Коэффициенты теплоотдачи для 10 моментов времени в интервале времени нагрева 0–60 мин с шагом 6 мин приведены в таблице, а расчетные значения температуры в контрольных точках сечения – на рис. 2–4.

Приведенные коэффициенты внешней теплоотдачи в зависимости от времени нагрева

Интервал времени, мин	Приведенные коэффициенты внешней теплоотдачи			
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
0	0,024	0,14	0,014	0,12
6	0,08	0,26	0,04	0,2
12	0,15	0,27	0,10	0,19
18	0,23	0,38	0,17	0,30
24	0,27	0,46	0,19	0,31
30	0,32	1,02	0,20	0,71
36	0,38	1,09	0,30	0,66
42	0,36	0,92	0,30	0,45
48	0,28	0,88	0,58	0,11
54	0,41	1,2	0,58	0,10

Расчет температурного поля сечения стальной заготовки по изложенной выше методике показал, что отличие расчетного распределения температуры от экспериментальных данных до времени нагрева 54 мин не превышает 2%. Увеличение погрешности до 4% имеет место для момента окончания нагрева ( $t = 60$  мин), что вызвано неточным заданием теплопроводности при высоких температурах.

Для расчета поля температур в 1-й сварочной, 2-й сварочной и томильной зонах необходимо использовать соответствующие зависимости для температуры печи и новые начальные условия в виде значений температур на предыдущем шаге, следуя описанному выше алгоритму. С учетом имеющихся экспериментальных данных подбираются приведенные коэффициенты внешней теплоотдачи на каждой грани сечения заготовки.

### Выводы

Разработанная методика численного решения квазилинейного уравнения теплопроводности с граничными условиями 3-го рода позволяет с приемлемой точностью найти температурное поле призматической стальной заготовки с учетом зависимости основных теплофизических характеристик (плотности, истинной теплоемкости и теплопроводности) от температуры.

### Литература

1. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике / Под ред. Б.Е. Неймарка. М.: Л.: Энергия, 1967.
2. Маковский В.А. Эмпирические формулы для выражения температурной зависимости теплофизических свойств стали // Сталь. 1972. №1. С. 87–89.
3. Тимошпольский В.И., Кабишов С.М., Калиневич Е.В., Вайс Р.Б. Анализ теплофизических свойств сталей с целью применения для решения нелинейных задач теории нагрева // Литье и металлургия. 2006. № 2. С. 17–22.
4. Тимошпольский В.И., Плескачевский Ю.М., Гавриленко С.Л., Шилько С.В. Численное решение задачи о нагреве заготовки с учетом температурной зависимости коэффициента теплопроводности // Литье и металлургия. 2006. № 2. С. 38–41.

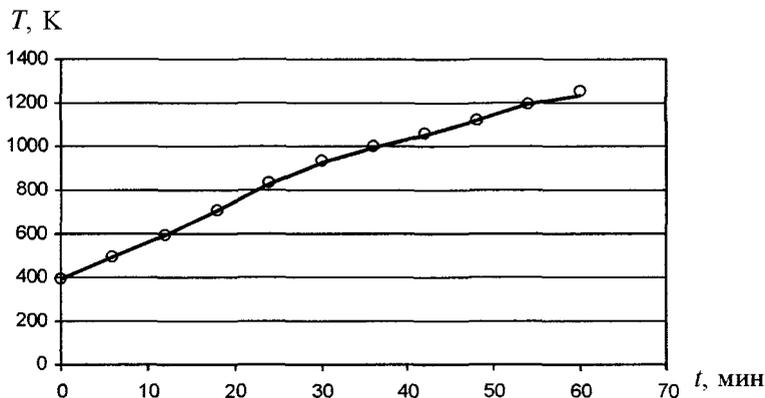


Рис. 2. Зависимость температуры от времени для точки «середина-верх». Сплошная линия – расчетные значения; о – экспериментальные данные

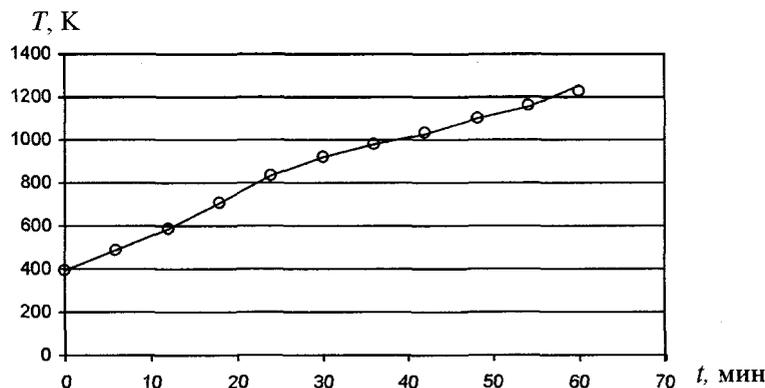


Рис. 3. Зависимость температуры от времени для точки «правый угол». Обозначения те же, что на рис. 2

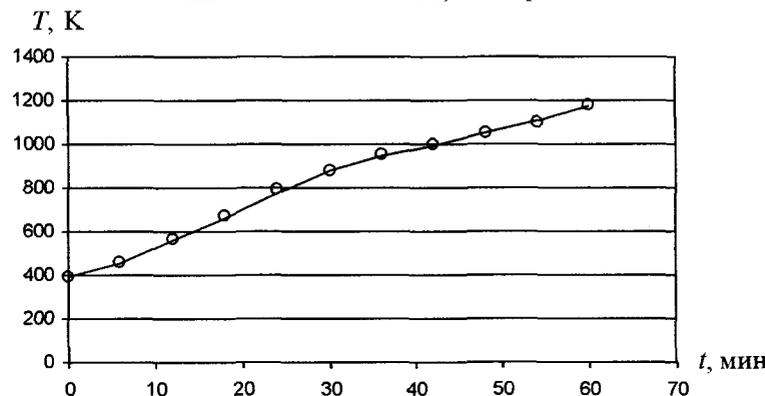


Рис. 4. Зависимость температуры от времени для центра сечения стальной заготовки. Обозначения те же, что на рис. 2

5. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы: В 2-х т. Т. 2. М.: Наука, 1973.
7. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.