УДК 681.511

НЕСЕНЧУК А. А., Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ КОНФИГУРАЦИИ КОРНЕВЫХ ПОРТРЕТОВ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

В статье выполняется исследование динамических свойств систем управления с параметрической неопределенностью интервального характера, динамика которых описывается семейством интервальных характеристически полиномов. Рассматривается математическая модель системы в форме корневого портрета, представленного семейством полей корневых траекторий. Устанавливаются асимптотические свойства, особенности и закономерности конфигурации корневых портретов интервальных систем, ветвей, начальных точек и асимптот корневых годографов.

The paper is aimed at investigation of dynamic properties of control systems with interval parametric uncertainty, which dynamics is described by the family of interval characteristic polynomials. The mathematical model of the system is considered in the form of root locus portrait, represented by the root locus fields family. Asymptotic properties, peculiarities and regularities of the interval systems root locus portraits configuration (location of their branches, initial points and asymptotes) are being discovered.

Введение

Многие технические объекты в структуре систем автоматического управления в процессе функционирования испытывают существенное влияние параметрической неопределенности, что отрицательно сказывается на эксплуатационных свойствах устройств, вызывает отклонения от установленных техническими требованиями характеристик. Это неизбежно влечет за собой снижение качества и даже может привести к потере системой устойчивости. Известно, что устойчивость и качество системы определяется в первую очередь расположением корней ее характеристического уравнения (корней системы) в плоскости корней (собственных частот) [1]. Однако вопросы миграции корней систем с неопределенностью в настоящее время мало изучены. Поэтому, установление закономерностей конфигурации, особенностей асимптотических свойств годографов корневых портретов систем [2, 3] позволит получить более полное представление о реакции системы на параметрические вариации и таким образом выявить возможности размещения корней таким образом, чтобы устранить или же уменьшить отрицательное влияние параметрических вариаций на качество функционирования системы, обеспечив тем самым ее робастность [1, 3].

В работе ставится задача исследования асимптотических свойств корневых портретов динамических систем с интервальной неопределенностью, установления ряда закономерностей динамики начальных точек, центров асимптот и ветвей корневых годографов портрета при условии значительных параметрических вариаций.

Начальные точки годографов интервального корневого портрета

Рассмотрим систему, динамика которой описывается интервальным семейством [3] характеристических уравнений (полиномов) вида

$$\sum_{j=0}^{n} a_j s^{n-j} = 0\,, \qquad (1)$$

где вектор коэффициентов $a = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n)$ принадлежит некоторому связному множеству $A \subset R^{n+1}$, $a \in A$, n – степень полинома (целое число); s – комплексное переменное, $s = \sigma + i\omega$. Коэффициенты (1) действительны и изменяются в пределах

$$\underline{a}_j \le a_j \le \bar{a}_j\,, \quad j = \overline{0, n}, \quad a_0 \ne 0, \qquad (2)$$

где $\underline{a}_j$ и $\bar{a}_j$ – соответственно минимальное и максимальное значения замкнутого интервала изменения коэффициента a_j.

Сделав в уравнении (1) замену переменного, $s = \sigma + i\omega$, запишем выражение относительно варьируемого коэффициента:

$$a_k = f(s) = -\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega), \quad (3)$$

где u и v – гармонические функции двух независимых действительных переменных σ и ω; $\phi(s)$ и $\psi(s)$ – некоторые полиномы от s.

Определение 1. Корневым годографом алгебраического уравнения относительно некоторого его коэффициента a_k $(j = k)$ или параметра динамической системы, описываемой этим уравнением, назовем корневой годограф этого уравнения, построенный, исходя из предположения, что параметром годографа является соответственно этот коэффициент a_k или параметр.

Определение 2. Корневым годографом динамической системы назовем корневой годограф характеристического уравнения этой системы.

Определение 3. Свободным корневым годографом динамической системы назовем корневой годограф этой системы относительно свободного члена ее характеристического уравнения.

Определение 4. Начальной точкой корневого годографа назовем точку, в которой начинается ветвь годографа и параметр годографа равен нулю.

Сформулируем утверждение, относящееся к расположению начальных точек свободных годографов корневого портрета интервальной системы в плоскости собственных частот.

Утверждение. Одна из начальных точек каждого корневого годографа семейства свободных годографов полинома (1), формирующего корневой портрет интервальной динамической системы, располагается в начале координат плоскости корней.

Справедливость утверждения следует из определения 3 свободного корневого годографа и формы характеристического уравнения (1) интервальной динамической системы (ИДС).

Центры асимптот и ветви годографов интервального корневого портрета

В ходе проведенного исследования интервальных систем установлено, что наиболее существенные изменения динамики портрета имеют место вблизи действительной оси $i\omega$ комплексной плоскости корней s и центров асимптот годографов, при переходе полюсов системы из комплексной плоскости s на действительную ось σ и обратно, а также в точках касании ветвей с действительной осью. Поэтому, наибольший интерес для исследования представляет та часть корневого портрета, которая находится в районе этой оси и центров асимптот. Следовательно, существенное значение имеет вопрос о расположении центров асимптот годографов семейства. Сформулируем теорему, позволяющую дать ответ на этот вопрос.

Теорема. Если C_a – множество координат $c_{a\,j}$ центров асимптот корневых годографов свободного корневого портрета интервальной динамической системы, описываемой характеристическим уравнением (1) степени n,

$$C_a = \{\, c_{a\,j} \,\}, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (4)$$

то

$$\sup C_a = -\, \underline{a}_1 / n, \quad (5)$$

$$\inf C_a = -\overline{a}_1 / n, \quad (6)$$

т. е.

$$c_{a\,j} \in C_a \subset [-\frac{\overline{a}_1}{n}, -\frac{\underline{a}_1}{n}], \quad (7)$$

где $[-\frac{\overline{a}_1}{n}, -\frac{\underline{a}_1}{n}]$ – отрезок на действительной оси σ.

Доказательство. Центр асимптот корневого годографа на оси σ определяется координатой c_a по формуле

$$c_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}, \quad (8)$$

где p_i и z_j – действительные координаты полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой системы соответственно (очевидно, что p_i представляют собой также координаты нулей (начальных точек ветвей годографов), а z_j – полюсов функции отображения (3)), n и m – число полюсов и число нулей передаточной функции разомкнутой системы.

Поскольку для свободных корневых годографов $m = 0$ и полином $\psi(s) = a_n$ (см. (3)), выражение (8) перепишем в виде

$$c_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n}. \quad (9)$$

По формулам Виета, позволяющим выразить коэффициенты полинома степени n через его корни, коэффициент при степени неизвестного $n - 1$, т. е. в данном случае коэффициент a_1 полинома (1), равен сумме корней полинома, взятой с обратным знаком:

$$a_1 = -\sum_{i=1}^{n} s_i. \quad (10)$$

Выражение (10) показывает, что сумма корней полинома вида (1) n-й степени зависит только от коэффициента при степени неизвестного n – 1, т. е. в нашем случае коэффициента a_1. Поскольку очевидно, что в полюсах p_i (т. е. в начальных точках годографа), где варьируемый коэффициент a_n равен 0, корни $\phi(s)$ (см. (3)), т. е. упомянутые полюсы p_i, совпадают с корнями s_i характеристического уравнения (1), то для начальных точек справедливо выражение $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$ и, таким образом, запишем

$$c_a = -\frac{a_1}{n}. \quad (11)$$

Поскольку для ИДС a_1 изменяется в интервале $\underline{a}_1 \le a_1 \le \overline{a}_1$, то минимально возможное $\underline{c}_{a_j}$ и максимально возможное $\overline{c}_{a_j}$ значения координаты центра асимптот для годографов семейства соответственно равны

$$\underline{c}_{a_j} = \inf C_a = -\frac{\overline{a}_1}{n}, \quad (12)$$

$$\overline{c}_{a_j} = \sup C_a = -\frac{\underline{a}_1}{n}, \quad (13)$$

т. е. множество координат центров асимптот семейства корневых годографов ИДС находится в интервале (7), что доказывает справедливость выражений (5)–(7) и рассматриваемой теоремы.

Следствие 1. Годографы семейства свободных корневых годографов динамической системы, описываемой характеристическим уравнением вида (1) степени n с постоянным коэффициентом a_1, стремятся к одним и тем же асимптотам.

Докажем справедливость следствия. Асимптоты корневого годографа, как известно, определяются двумя характеристиками:

– положением центра асимптот c_a (см. (11)) на действительной оси в плоскости комплексного переменного;

– числом N_a и углами φ_N, $N = 0, 1, ..., N_a - 1$, наклона асимптот годографа, определяемыми соответственно по формулам

$$N_a = n - m \quad (14)$$

и

$$\varphi_N = \frac{\pi}{n-m} N, \quad (15)$$

где n и m – число полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой системы соответственно.

Из выражений (12) – (13) следует, что центры асимптот семейства корневых годографов интервальной динамический системы, описываемой характеристическим уравнением (1) степени n с постоянным коэффициентом a_1 при (n – 1) – й степени неизвестного, расположены в одной точке. Углы наклона асимптот и их количество при переходе от годографа к годографу рассматриваемого семейства не изменяются, поскольку число (14) и углы наклона (15) асимптот корневых годографов определяются только числом полюсов n и нулей m передаточной функции разомкнутой системы. Справедливость следствия доказана.

Следствие 2. В случае, когда коэффициент a_1 семейства характеристических полиномов (1) интервальной системы положителен, множество центров асимптот семейства свободных корневых годографов этой системы располагается на левой (отрицательной) полуоси σ плоскости комплексного переменного в пределах отрезка (7).

Следствие 3. В случае расположения центра асимптот хотя бы одного корневого годографа семейства свободных корневых годографов интервальной системы на положительной полуоси σ плоскости комплексного переменного система является неустойчивой.

Следствие 4. Все ветви корневых годографов поля свободных корневых траекторий [2] полинома (1) степени $n > 2$, имеющего параметр поля, отличный от a_1, стремятся к одним и тем же асимптотам.

Следствие 4 иллюстрируется рис. 1, на котором представлено поле корневых траекторий [2] четвертого порядка. Параметром поля [3] здесь является коэффициент a_3.

Фрагментарное поле [3] корневых траекторий, изображенное на рис. 1, состоит из 15-ти годографов, ветви каждого из которых обозначены определенной цифрой, от 1 до 15. Из рис. 1 очевидно, что все ветви семейства корневых годографов данного поля корневых траекторий стремятся к одним и тем же четырем асимптотам данного семейства. Всего имеется 4 асимптоты, расположенные к действительной оси соответственно под углами 0°, 45°, 90° и 135°.

Выводы

В работе рассмотрен вопрос миграции корней характеристических уравнений динамиче-

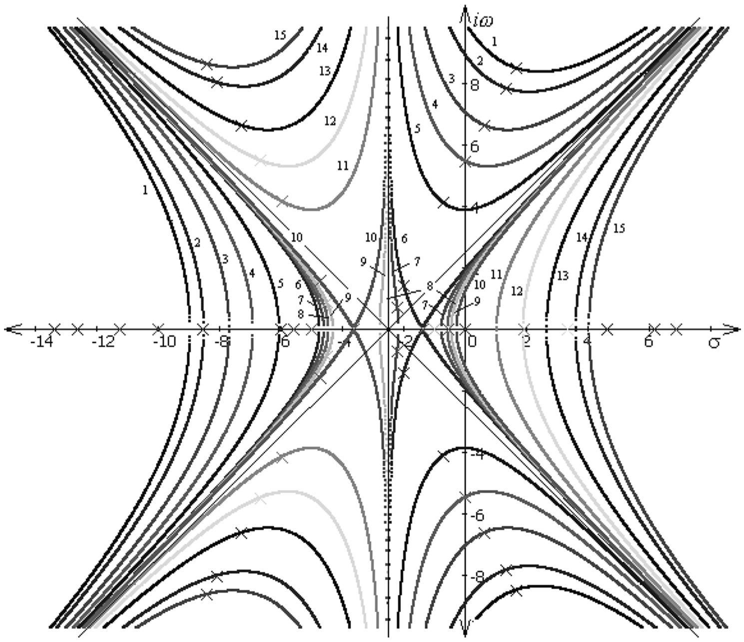

Рис. 1. Поле корневых траекторий ИДС четвертого порядка

ских систем с параметрической неопределенностью интервального характера, проведено исследование асимптотических свойств корневых портретов интервальных систем. В результате выполненного исследования установлен ряд закономерностей динамики начальных точек, центров асимптот и ветвей корневых годографов, формирующих корневые портреты.

Поскольку устойчивость и качество системы определяется в первую очередь расположением корней ее характеристического уравнения в плоскости корней (собственных частот), установление закономерностей конфигурации, особенностей асимптотических свойств годографов корневых портретов интервальных динамических систем позволяет получить более полное представление о реакции системы на параметрические вариации и таким образом выявить возможности размещения корней таким образом, чтобы устранить или же уменьшить отрицательное влияние параметрических вариаций на качество функционирования системы, обеспечив тем самым ее робастность.

Литература

1. **Дорф, Р.** Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2009. – 832 с.

2. **Римский, Г. В.** Автоматизация исследований динамических систем / Г. В. Римский, В. В. Таборовец. – Мн.: Наука и техника, 1978. – 334 с.

3. **Несенчук, А. А.** Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А. А. Несенчук. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.