

УДК 629.113.002.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ (КУЗОВНОЙ) ПОВЕРХНОСТИ

Фулади Реза, Андриянчик А.А.

Научный руководитель – Рейзина Г.Н., д. ф.-м. наук, профессор

Развитие теории математического моделирования привело к появлению инженерных задач, к которым относится моделирование технических систем. Рассмотрим метод построения одной математической модели – технической поверхности. Поверхность ищем в виде полинома двух переменных, приближающего к заданной экспериментальной зависимости по определенному критерию.

Постановка задачи

Даны k точек пространства своими декартовыми координатами x_i, y_i, z_i (где $i = 1, 2, 3, \dots, k$). Абсциссы и ординаты этих точек принадлежат области G . Требуется построить поверхность $z = p(x, y)$, где $p(x, y)$ – полином n -ой степени, выпуклый в области G и проходящий наиболее близко к заданным точкам.

Прикладной характер – это эластичный лист, принялший форму капота, должен представлять собой математическую поверхность. Отклонения которой от экспериментальных точек должны быть одного знака, например, положительными.

В общем виде:

$$z = \sum a_{pq} x^p y^q \quad (1)$$

где a_{pq} – неопределенные коэффициенты; P и q – целые неотрицательные числа.

Под отклонением h_i экспериментальной точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ от полинома (1) будем понимать величину

$$h_i = z_i - \sum a_{pq} x_i^p y_i^q \geq 0 \quad (2)$$

Требуется найти неопределенные коэффициенты a_{pq} при которых функция

$$F = \sum_{i=1}^k h_i \quad (3)$$

принимала бы наименьшее значение.

Одним из основных условий в решении этой задачи является определение формы многочлена (1) с неопределенными коэффициентами,

который был бы выпуклым в области G. Известно [1,2], что необходимым и достаточным условием выпуклости поверхности является неравенство:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad (4)$$

с учетом непрерывных вторых частных производных.

Из выражения (4) непосредственно следует, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ должны быть одного знака.

Для построения поверхности ориентировочно примем модель капота, на которой выбрано несколько фиксированных точек.

№	1	2	3	4	5	6
x	0	2	1	0	0	1.5
y	0	0	6	6	4	4
z	0	1	2	2	1	1.5

Строим выпуклый многочлен, аппроксимирующий экспериментальные точки в смысле минимума суммы положительных отклонений. Аппроксимирующий многочлен быть таким, чтобы в сечении плоскостью yOz была кубическая кривая; в сечении плоскостью xOz – парабола; в сечении плоскостью $y=6$ – прямая.

Аппроксимирующий полином будем искать в виде

$$Z = ax^2(6-y)^2 + b(6-y)^3 + cy^3 + dy^2 + (e-f)y + g_1 - g_2, \quad (5)$$

где $a, b, c, d, e, f, g_1, g_2$ – неотрицательные неопределенные коэффициенты.

Многочлен (5) удовлетворяет требованиям поставленной задачи в указанных сечениях. Чтобы этот многочлен был выпуклым, необходимо и достаточно выполнения условия (4).

После преобразований аппроксимирующий многочлен имеет вид:

$$ax^2 + 3b(6-y) + 3cy + d - 4ax^2 > 0.$$

Отсюда

$$18b + d + 3cy - 3by - 3ax^2 > 0. \quad (6)$$

Функция $18b + d + 3cy - 3by$ – монотонная и поэтому принимает наибольшее и наименьшее значения на концах интервала $(0,6)$. Эти значения таковы: $18b + d$ при $y=0$; $18b + d$ при $y=6$. Функция $3ax^2$

принимает в точках капота наибольшее значение при $x=2$, т.е. $12a$. Поэтому потребуем выполнения неравенств:

$$\begin{cases} 18b + d - 12a \geq 0; \\ 18c + d - 12a \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

При выполнении этих неравенств будет выполняться неравенство (6) и, следовательно, полином (5) будет выпуклым.

Теперь можно переходить непосредственно к аппроксимационной задаче.

Запишем отклонения (2) экспериментальных точек (табл.1) от полинома (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = -(216b + g_1 - g_2); \\ h_2 = 1 - (144a + 216b + g_1 - g_2); \\ h_3 = 2 - (216c + 36d + 6e - 6f + g_1 - g_2); \\ h_4 = 2 - (216c + 36d + 6e - 6f + g_1 - g_2); \\ h_5 = 1 - (3b + 64c + 16d + 4e - 4f + g_1 - g_2); \\ h_6 = 1.5 - (9a + 8b + 64c + 16d + 4e - 4f + g_1 - g_2); \end{array} \right. \quad (8)$$

Решив данную систему уравнений симплекс-методом, получим данные:

a	B	C	d	E	f	g_1	g_2
0.03	0	0	0.04	0.08	0	0	0
h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
0	0.5	0	0	0	0.46	0	0

Подставив полученные значения в уравнении (5), получим:

$$z = 0.003x^2 + (6 - y)^2 + 0.04y^2 + 0.08y$$

Используя математический пакет MathLab14, строим искомую поверхность

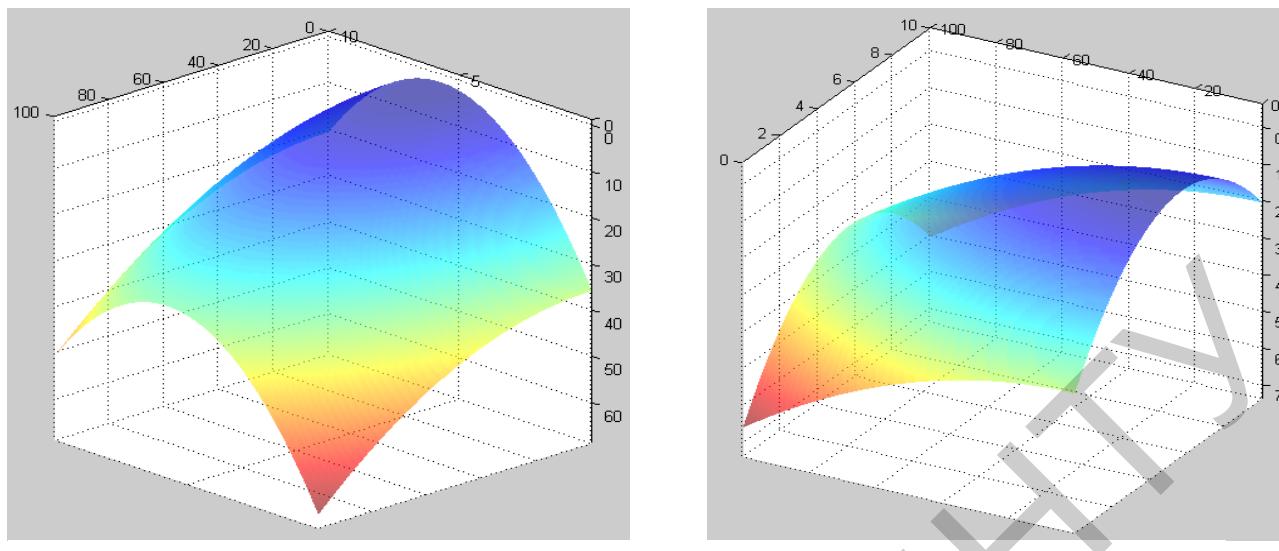


Рисунок 1. Кузовная поверхность (передняя часть кузова).

Методика моделирования и построения поверхности позволит снизить энергозатраты на производственное оборудование при изготовлении кузовных поверхностей.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.2, Наука, М., 1970.
2. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования, Наука, М., 1987.

УДК 519.245

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Белая О. В., Жидиков Г. А.

Научный руководитель – Метельский А. В., д. ф.-м. н., профессор.

Сущность метода Монте-Карло [1] состоит в следующем: требуется найти значение a некоторой исследуемой величины. Для этого выбирают случайную величину U с известным законом распределения, математическое ожидание которой равно a

$$M(U) = a.$$

Производят n независимых испытаний, в результате которых получают n значений случайной величины U . Вычисляют выборочную среднюю