

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ, ПИТАЮЩИХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Кандидаты техн. наук, доценты **СТРИЖНЕВ А. Г.**, **ПЕТРЕНКО Ю. Н.**,  
инж. **ЛЕДНИК Г. В.**

*Белорусский национальный технический университет*

Для питания электродвигателя переменного тока используют различные типовые формы напряжений. К ним относят (рис. 1) неполную синусоиду, одно- и многократную ШИМ последовательность [1, 2].

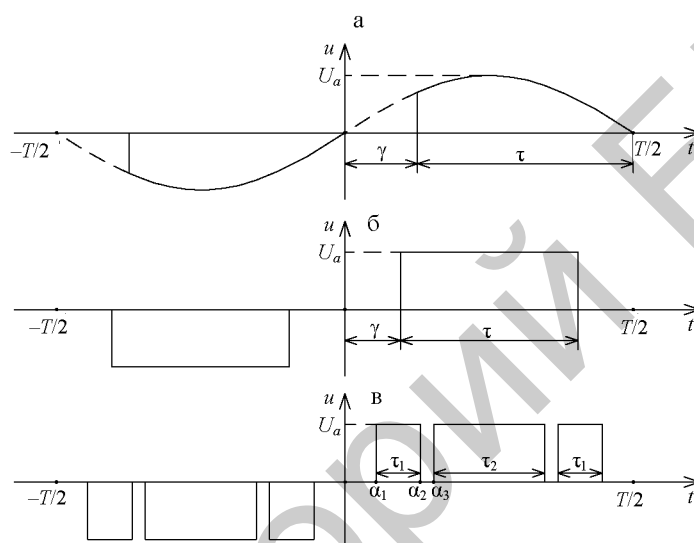


Рис. 1. Типовые формы напряжений: а – неполная синусоида; б – однократная ШИМ последовательность; в – многократная ШИМ последовательность

Типовые напряжения отличаются не только формой, но и гармоническим составом, который требуется определить и проанализировать.

**Напряжение неполной синусоидальной формы.** Напряжение неполной синусоидальной формы (рис. 1а) содержит в полупериоде одну неполную полуволну и характеризуется параметрами:  $\tau$  – длительность укороченной полуволны;  $\gamma = \frac{T}{2} - \tau$  – пауза между укороченными полуволнами;

$\omega = 2\pi/T$  – частота следования.

Напряжение (рис. 1а) может быть представлено рядом Фурье [3]

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (1)$$

где  $U_n = \frac{a_n}{\sin \varphi_n}$  – амплитуда гармоники;  $\varphi_n = \arctg(a_n / b_n)$  – начальная фаза;

за;  $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos n\omega t dt$ ;  $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin n\omega t dt$  – коэффициенты;  $n$  – номер гармоники ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Для напряжения (рис. 1а) определены коэффициенты [4]:

$$a_1 = -\frac{2U_a \sin^2 \omega \gamma}{T \omega};$$

$$a_n = \frac{U_a (1 - \cos n\pi)}{T \omega} \left\{ \frac{[1 - \cos(1-n)\omega \gamma]}{n-1} - \frac{[1 - \cos(1+n)\omega \gamma]}{n+1} \right\};$$

$$b_1 = U_a \left( 1 - \frac{2\gamma}{T} + \frac{\sin 2\omega \gamma}{T \omega} \right); b_n = \frac{U_a (1 - \cos n\pi)}{T \omega} \left[ \frac{\sin(1+n)\gamma \omega}{1+n} - \frac{\sin(1-n)\gamma \omega}{1-n} \right]. \quad (2)$$

Регулирование скорости электродвигателя можно осуществить путем изменения длительности укороченной полуволны

$$\tau^* = \frac{T}{2q}, \quad (3)$$

где  $q$  – параметр регулирования ( $q = 1 - \infty$ ).

При этом происходит изменение паузы  $\gamma^*$  между укороченными полуволнами

$$\gamma^* = \frac{T}{2} - \tau^* = \frac{T(q-1)}{2q}. \quad (4)$$

Подставляя формулу (4) в выражения (2), получим:

$$a_1 = -\frac{U_a}{\pi} \sin^2 \left( 1 - \frac{1}{q} \right) \pi; b_1 = U_a \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{2\pi} \sin \left( 1 - \frac{1}{q} \right) 2\pi \right);$$

$$a_n = \frac{U_a (1 - \cos n\pi)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{n-1} \left[ 1 - \cos(1-n) \left( 1 - \frac{1}{q} \right) \pi \right] - \frac{1}{n+1} \left[ 1 - \cos(1+n) \left( 1 - \frac{1}{q} \right) \pi \right] \right\};$$

$$b_n = \frac{U_a (1 - \cos n\pi)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{n-1} \left[ \sin(1-n) \left( 1 - \frac{1}{q} \right) \pi \right] + \frac{1}{n+1} \left[ \sin(1+n) \left( 1 - \frac{1}{q} \right) \pi \right] \right\}. \quad (5)$$

Используя выражения (1), (5), с помощью системы MathCad построен график (рис. 2а), из которого следует, что в диапазоне регулирования ( $q = 1 - 6$ ) присутствуют только нечетные гармоники с номерами  $n = 1, 3, 5$ . Ближайшая к основной гармоника с номером  $n = 3$  имеет амплитуду не более 33 %, а гармоника с номером  $n = 5$  – не более 14 %. Гармоники с номерами  $n = 3, 5$  в начале регулирования ( $q = 1 - 1,4$ ) имеют отрицательную амплитуду и ослабляют действие основной первой ( $n = 1$ ) гармоники. Гармоники, начиная со второй, имеют частоты, кратные их номеру  $n$  относительно частоты  $\omega$  первой основной гармоники. Глубину регулирования для данной формы напряжения можно оценить параметром ( $q_P \approx 2,25$ ), при котором амплитуда первой гармоники уменьшается на 50 %.

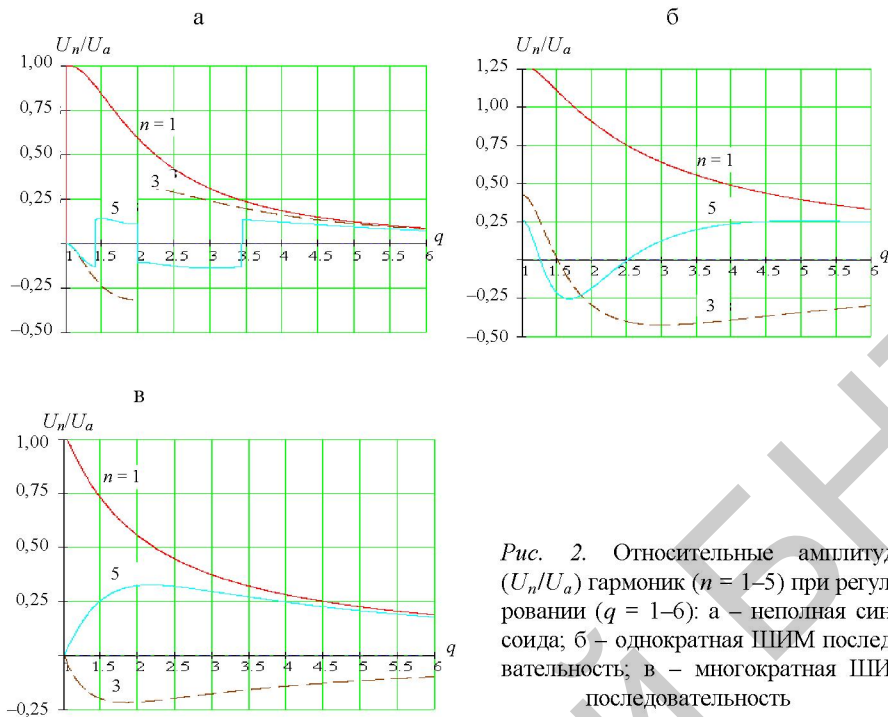


Рис. 2. Относительные амплитуды ( $U_n/U_a$ ) гармоник ( $n = 1-5$ ) при регулировании ( $q = 1-6$ ): а – неполная синусоида; б – однократная ШИМ последовательность; в – многократная ШИМ последовательность

**Напряжение однократной ШИМ последовательности** (рис. 1б) содержит в полупериоде один импульс постоянной амплитуды  $U_a$  и характеризуется параметрами:  $\gamma = T/4 - \tau/2$  – фазовый угол ШИМ импульса, отсчитанный от начала полупериода;  $\tau$  – длительность ШИМ импульса;  $\omega = 2\pi/T$  – частота следования.

Напряжение (рис. 1б) может быть представлено рядом Фурье (3)

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin n\omega t, \quad (6)$$

где  $U_n$  – амплитуда гармоники;  $n$  – номер гармоники ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Выражение для определения амплитуды  $n$ -й гармоники

$$U_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} U_a \sin n\omega t dt = \frac{4U_a}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\omega \tau_i}{2}. \quad (7)$$

Регулирование скорости электродвигателя можно осуществить путем изменения длительности импульсов (ШИМ регулирование)

$$\tau^* = \frac{T}{2q}, \quad (8)$$

где  $q$  – параметр регулирования ( $q = 1-\infty$ ).

Подставляя формулу (8) в (7), получим выражение для определения амплитуды  $n$ -й гармоники при регулировании

$$U_n^* = \frac{4U_a}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2q}. \quad (9)$$

С помощью системы MathCad и выражения (9) построен график (рис. 2б), из которого следует, что в диапазоне регулирования ( $q = 1-6$ ) присутствуют только нечетные гармоники с номерами  $n = 1, 3, 5$ . Ближайшая к основной гармоника с номером  $n = 3$  имеет начальную амплитуду не более 43 %, а гармоника с номером  $n = 5$  – не более 26 %. В начале регулирования ( $q = 1$ ) амплитуда 1-й гармоники превышает на 27 % номинальное значение, что не всегда допустимо. Целесообразно начинать регулирование со значения параметра  $q = 1,5$ , при котором начальная длительность импульса  $\tau^* = T/3$  и амплитуда 1-й гармоники всего на 11 % превышает номинальное значение. Гармоники, начиная со второй, имеют частоты, кратные их номеру  $n$  относительно частоты  $\omega$  первой основной гармоники. Глубину регулирования можно оценить параметром ( $q_p \approx 3,8$ ), при котором амплитуда первой гармоники уменьшается на 50 %. У данной формы напряжения показатель глубины регулирования лучше, чем у неполной синусоиды ( $q_p \approx 2,25$ ).

**Напряжение многократной ШИМ последовательности.** Напряжение, имеющее форму многократной ШИМ последовательности, в общем виде в полупериоде содержит два и более импульса постоянной амплитуды и различной длительности. Существуют различные формы многократной ШИМ последовательности [2], к одной из которых относят многократную неравномерную ШИМ. Отличительной особенностью данной ШИМ является то, что для исключения высших гармоник низкого порядка фронты импульсов выходного напряжения нужно формировать в определенных специально подобранных некратных углах (долях полупериода). При этом число исключаемых из спектра высших гармоник, ближайших к основной, будет примерно равно количеству импульсов, содержащихся в полупериоде повторения неравномерной ШИМ последовательности.

Для примера рассмотрим неравномерную однополярную ШИМ последовательность (рис. 1в) с тремя импульсами ( $\alpha_1 = 22^\circ 43'$ ;  $\alpha_2 = 37^\circ 51'$ ;  $\alpha_3 = 46^\circ 49'$ ) в полупериоде [2].

Последовательность ШИМ импульсов (рис. 1в), имеющих постоянную амплитуду  $U_a$ , характеризуется параметрами:  $\gamma_i = \varphi_i - \tau_i / 2$  – фазовый угол  $i$ -го ШИМ импульса, отсчитанный от начала полупериода;  $\varphi_i$  – центральный фазовый угол  $i$ -го ШИМ импульса, отсчитанный от начала полупериода;  $\tau_i$  – длительность  $i$ -го ШИМ импульса;  $\omega = 2\pi/T$  – частота следования.

Многократная ШИМ последовательность (рис. 1в) может рассматриваться как сумма однократных ШИМ последовательностей, для которой ряд Фурье

$$u(t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin n\omega t, \quad (10)$$

где  $U_n$  – амплитуда гармоники;  $n$  – номер гармоники ( $n = 1, 2, 3, \dots$ );  $i$  – номер импульса в полупериоде ( $i = 1, 2, 3$ ).

Используя (7)–(9) применительно к формуле (10), получим выражение для определения амплитуды  $n$ -й гармоники при регулировании

$$U_n^* = \frac{4U_a}{n\pi} \left[ \sin n\omega\tau_1 \sin \frac{n\omega\tau_1^*}{2} + \sin n\omega\varphi_2 \sin \frac{n\omega\tau_2^*}{2} + \sin n\omega\varphi_3 \sin \frac{n\omega\tau_1^*}{2} \right], \quad (11)$$

где  $\omega = 2\pi/T$ ;  $\varphi_1 = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)/2 = 30,283^\circ = 0,084T$ ;  $\varphi_2 = 90^\circ = 0,25T$ ;  $\varphi_3 = 180^\circ - \varphi_1 = 149,717^\circ = 0,416T$ ;  $\tau_1^* = \tau_1/q$ ;  $\tau_2^* = \tau_2/q$ ;  $\tau_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) = 15,133^\circ = 0,042T$ ;  $\tau_2 = 2(90^\circ - \alpha_3) = 86,033^\circ = 0,239T$ .

После подстановки и несложных преобразований (11) примет вид

$$U_n^* = \frac{4U_a}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \left[ 2 \sin \frac{0,042n\pi}{q} \cos 0,332n\pi + \sin \frac{0,239n\pi}{q} \right]. \quad (12)$$

С помощью системы MathCad и выражения (12) построен график (рис. 2в), из которого следует, что в диапазоне регулирования ( $q = 1-6$ ) присутствуют только нечетные гармоники с номерами  $n = 1, 3, 5$ . Ближайшая к основной гармоника с номером  $n = 3$  имеет амплитуду не более 22 %, а гармоника с номером  $n = 5$  – не более 32 %. Гармоники, начиная со второй, имеют частоты, кратные их номеру  $n$  относительно частоты первой  $\omega$  основной гармоники. Глубину регулирования можно оценить параметром ( $q_P \approx 2,25$ ), при котором амплитуда первой гармоники уменьшается на 50 %. У данной формы напряжения показатель глубины регулирования такой же, как у неполной синусоиды ( $q_P \approx 2,25$ ).

**Оценка качества различных форм напряжений.** Качество выходного напряжения, т. е. приближение его формы к синусоидальной, принято характеризовать коэффициентом несинусоидальности [2]

$$K_{нс} = \frac{U_{\text{ВЫХ } 1}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_{\text{ВЫХ } n}^2}}, \quad (13)$$

где  $U_{\text{ВЫХ } 1}$  – амплитуда напряжения основной (первой) гармоники;  $U_{\text{ВЫХ } n}$  – то же высшей гармоники.

С помощью выражения (13) для гармоник, имеющих номера  $n = 1-5$ , построен график (рис. 3), из которого следует, что в процессе регулирования коэффициент несинусоидальности не остается постоянным, а изменяется. В начале регулирования ( $q = 1-1,3$ ) напряжение неполной синусоиды (рис. 3, кривая 1) имеет большее значение коэффициента  $K_{нс}$ , которое затем уменьшается. При дальнейшем регулировании ( $q = 1,3-4,7$ ) большее значение коэффициента  $K_{нс}$  имеет однократная ШИМ последова-

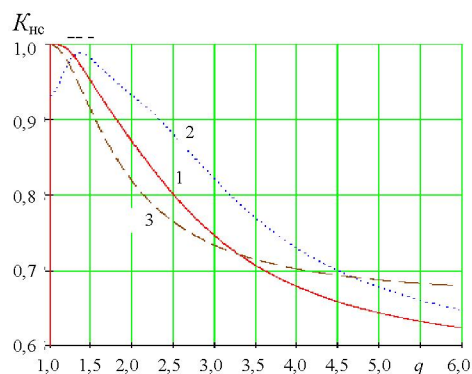


Рис. 3. Коэффициент несинусоидальности при регулировании ( $q = 1-6$ ): 1 – неполная синусоида; 2 – однократная ШИМ последовательность; 3 – то же многократная

тельность (рис. 3, кривая 2). Многократная неравномерная ШИМ последовательность (рис. 3, кривая 3) имеет большее значение коэффициента  $K_{nc}$  в сравнении с напряжением однократной ШИМ последовательности при регулировании в пределах  $q = 1-1,25$  и  $q = 4,7-6,0$ .

### ВЫВОД

Предлагаемый подход позволяет не только определить гармонический состав типовых форм напряжений, питающих обмотки электродвигателя переменного тока, но и провести их сравнительный и качественный анализ. Полученные выражения амплитуды  $n$ -й гармоники при регулировании можно использовать для моделирования работы электродвигателя переменного тока.

### ЛИТЕРАТУРА

1. К о в ч и н, С. А. Теория электропривода: учеб. для вузов / С. А. Ковчин, Ю. А. Сабинин. – СПб.: Энергоатомиздат, 1994. – 496 с.
2. М о и н, В. С. Стабилизированные транзисторные преобразователи / В. С. Моин. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 376 с.
3. Б а с к а к о в, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов по спец. «Радиотехника»; 2-е изд., перераб. и доп. / С. И. Баскаков. – М.: Высш. шк., 1988. – 448 с.
4. Б р о н ш т е й н, И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Наука., 1964. – 608 с.
5. С т р у к т у р ы систем управления автоматизированным электроприводом / О. П. Ильин [и др.]. – Минск: Наука и техника, 1978. – 368 с.

Представлена кафедрой  
информационных систем  
и технологий МИДО

Поступила 10.05.2010

УДК 621.311

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО РАСХОДА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ НА ЕЕ ТРАНСПОРТИРОВКУ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БЛОК-СТАНЦИЙ

Канд. техн. наук, доц. ПАВЛОВЕЦ В. В.

*Белорусский национальный технический университет*

При финансовых расчетах за электроэнергию между электроснабжающей организацией и потребителем (абонентом), имеющим на своем балансе собственную электростанцию (блок-станцию) и осуществляющим перетоки электроэнергии в обоих направлениях в пределах расчетного периода при распо-