

РАСЧЕТ НАГРЕВА МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛ

Докт. техн. наук, проф. ЕСЬМАН Р. И.

Белорусский национальный технический университет

Современные многослойные материалы составляют широкую гамму изделий, которые используют в своем составе волокнистые, полимерные материалы, включающие неорганические и органические наполнители, углеродные волокна и углекомпозиаты, углепластики, силиконовые и фторкаучуковые композиты, металло- и стеклокерамические теплоизоляционные материалы, ткани на кремниевой основе и др. Особое место в ряду многослойных строительных материалов занимают сухие смеси и новые технологии получения гипсокартонных и гипсоволокнистых изделий со специальными свойствами.

Технологии получения многослойных материалов включают в себя процессы нагревания, термообработки и сушки изделий. При разработке математических моделей термообработки изделий необходимо учитывать теплофизические особенности процесса нестационарного теплообмена в многослойной стенке. Отдельные слои могут претерпевать фазовые или химические превращения (отвердевания терморезактивных смол, гипсовых наполнителей, кристаллизации, спекания, диссоциации, испарения или конденсации в пористых теплозащитных материалах и т. д.). В данной работе анализ теплопереноса проводится с учетом фазовых превращений в отдельных слоях и зависимостей их теплофизических характеристик от температуры.

Определяем распределение температуры при нагреве многослойных тел прямоугольного сечения для каждого момента времени. В этих условиях температурное поле многослойной стенки описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений переноса теплоты (ввиду нелинейности потоков теплоты и граничных условий) с соответствующими краевыми условиями. Изменение температуры по сечению (вдоль координат x , y) в любой момент времени для каждого слоя многослойной стенки определяется из решения системы дифференциальных уравнений теплопроводности

$$c_i(T_i)\rho_i(T_i)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i(x,y,t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i(x,y,t)}{\partial y}\right], \quad (1)$$

где i – индекс, определяющий принадлежность уравнения и параметров к различным слоям многослойной стенки, $i = 1, 2, \dots, n$; $c_i(T_i)$ – удельная теплоемкость i -го слоя как функция температуры; $\rho_i(T_i)$ – плотность материала i -го слоя как функция температуры; $\lambda_i(T_i)$ – коэффициент теплопроводности i -го слоя как функция температуры.

В качестве примера введем следующие обозначения по слоям: 1 – металлическая или металлокерамическая матрица; 2 – неметаллическое покрытие (керамика, стекло- или базальтоволокнистые материалы); 3 – слой,

в котором происходят фазовые или химические превращения (термо-реактивные смолы, гипс); 4, 5 – неметаллические слои со специальными свойствами (углепластик, армированный углерод, термостойкие покрытия и т. д.). Количество и материалы слоев могут быть различными в соответствии со служебными характеристиками и функциональными особенностями многослойной стенки.

На границах слоев теплофизические параметры как температурные функции терпят разрыв. В этом случае система дифференциальных уравнений (1) может быть сведена к одному уравнению теплопроводности с разрывными коэффициентами, записанному в следующем виде:

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y}\right]. \quad (1^*)$$

Уравнение (1*) определено в области: $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$.

Граничные условия для дифференциального уравнения (1*) запишем:

$$\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_{i-1}\left(T_{i-1}\frac{\partial T_{i-1}}{\partial x}\right), \quad x = x_i; \quad (2)$$

$$\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_{i-1}\left(T_{i-1}\frac{\partial T_{i-1}}{\partial y}\right), \quad y = y_i;$$

$$T_i = T_{i-1}. \quad (3)$$

Условия сопряжения (2), (3) определены на общих границах слоев.

В соответствии с условием задачи принимаем, что теплообмен на внешней поверхности многослойной стенки происходит по закону Ньютона – Рихмана. Тогда с учетом симметричной модели граничные условия представим следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad (4)$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha(T - T_c) \quad \text{при } x = a; \quad \lambda\frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha(T - T_c) \quad \text{при } y = b. \quad (5)$$

Начальные условия имеют вид

$$T_i(x, y, 0) = T_{i_0} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Для слоя 3 решается задача с фазовыми превращениями с подвижной границей фаз. На границе раздела фаз (в слое 3) запишем условия фазового перехода [1]:

$$T'_3 = T''_3 = T_\phi(\xi, t);$$

$$\lambda'_3\frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial x} - \lambda''_3\frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial x} = \rho_3 r \frac{d\xi}{dt} \quad \text{при } x = \xi;$$

$$\lambda_3' \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial y} - \lambda_3'' \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial y} = \rho_3 r \frac{d\xi}{dt} \text{ при } y = \xi,$$

где T_ϕ – температура фронта фазовых превращений; ρ_3 – плотность материала; r – удельная теплота фазового перехода.

Линейный источник при координате $x = \xi$ представим с помощью δ -функции Дирака. При этом воспользуемся основным свойством δ -функции [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - \xi)dx = f(\xi).$$

Для решения задачи фазового перехода (задачи Стефана) применяется метод сглаживания: δ -функция заменяется δ -образной функцией $\delta(T - T_\phi, \Delta)$, отличной от нуля лишь на интервале $(T_\phi - \Delta, T_\phi + \Delta)$ и удовлетворяющей условию нормировки:

$$\int_{T_\phi - \Delta}^{T_\phi + \Delta} \delta(T - T_\phi, \Delta) dT = 1.$$

В период фазового перехода уравнение (1*) распадается на два, описывающие теплопроводности в жидкой и твердой фазах с добавлением условий на границе раздела фаз ξ .

Сглаживая на интервале $(T_\phi - \Delta, T_\phi + \Delta)$ функции $\delta_3'(T)$, $\delta_3''(T)$, $c_3''(T)$, $\lambda_3'(T)$, $\lambda_3''(T)$, например при линейной зависимости между значениями в твердой фазе при $T < T_\phi - \Delta$ и в жидкой фазе при $T > T_\phi + \Delta$, получим квазилинейное уравнение, по форме совпадающее с дифференциальным уравнением (1*). Для решения полученного квазилинейного уравнения можно использовать разностные методы.

Из граничных условий (2) видно, что температурные функции на границе слоев не имеют разрывов, а претерпевают разрыв первые производные. Этот факт дает возможность рассматривать систему сопряженных тел как стенку с теплофизическими свойствами, зависящими от координаты и температуры и терпящими разрыв на границе слоев.

Учитывая это обстоятельство, а также вводя безразмерные переменные, перепишем систему дифференциальных уравнений и краевые условия в безразмерных переменных:

$$a^2 c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \text{ при } 0 \leq x \leq \bar{a}_0; \quad 0 \leq y \leq \bar{b}_0; \quad (7)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} \text{ при } x = \bar{a}_0; \quad 0 \leq y \leq \bar{b}_0; \quad (8)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y} \text{ при } x = b_0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; \quad (11)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha a v \text{ при } x = 1; \quad (12)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha a v \text{ при } y = \bar{b}; \quad (13)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = u_0 \text{ при } t = 0; \\ v = v_0 \text{ при } t = 0; \end{array} \right\} \quad (14)$$

где u и v – безразмерные температуры.

Условия сопряжения:

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad u = v; \quad (15)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad u = v.$$

Введем общую прямоугольную сетку, равномерную по каждой из осей, причем предположим, что контактные поверхности $x = \bar{a}_0$ и $y = \bar{b}_0$ лежат на узлах сетки. Пусть N_1 и N_2 – число узлов по горизонтали и вертикали соответственно, тогда шаг по горизонтали $h_1 = 1/N_1$, а по вертикали – $h_2 = \bar{b}/N_2$.

Предположим, что горизонтальная строка узлов на контактной поверхности имеет номер M_1 , а вертикальный столбец – M_2 . Будем решать задачу на фиктивной сетке с узлами:

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)h_1; \quad y_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)h_2$$

при $i = -1, 0, \dots, N_1$; $j = -1, 0, \dots, N_2$.

Неявные конечно-разностные уравнения, соответствующие выражениям (7)–(15), на узлах фиктивной сетки на шеститочечном шаблоне [1] в момент времени $t = (l+1)\tau$ имеют вид:

$$\begin{aligned} a^2 c_{i,j}^{(1)} \rho_{i,j}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i,j}^l}{\tau} = & \frac{1}{h_1} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{(1)} \frac{u_{i+1,j}^{l+1} - u_{i,j}^{l+1}}{h_1} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i-1,j}^{l+1}}{h_1} \right) + \\ & + \frac{1}{h_2} \left(\lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{u_{i,j+1}^{l+1} - u_{i,j}^{l+1}}{h_2} - \lambda_{i,j-\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i,j-1}^{l+1}}{h_2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, M_1 - 1$; $j = 0, 1, 2, \dots, M_2 - 1$; $l = 0, 1, 2, \dots$;

$$a^2 c_{i,j}^{(2)} \rho_{i,j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,j}^l}{\tau} = \frac{1}{h_1} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i+1,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,j}^{l+1}}{h_1} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{i-1,j}^{l+1}}{h_1} \right) + \frac{1}{h_2} \left(\lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,j+1}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,j}^{l+1}}{h_2} - \lambda_{i,j-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,j-1}^{l+1}}{h_2} \right),$$

где

$$\left. \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1; \\ j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2, \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1 - 1; \\ j = 0, 1, 2, \dots, M_2 - 1, \end{array} \right\} l = 0, 1, 2;$$

$$\begin{aligned} -\lambda_{M_1-\frac{1}{2},j}^{(1)} \frac{u_{M_1,j}^{l+1} - u_{M_1,j-1}^{l+1}}{h_1} &= -\lambda_{M_1-\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{M_1,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{M_1-1,j}^{l+1}}{h_1} = \\ &= \kappa_j \left(\frac{u_{M_1,j}^{l+1} + u_{M_1,j-1}^{l+1}}{2} - \frac{\mathbf{v}_{M_1,j}^{l+1} + \mathbf{v}_{M_1-1,j}^{l+1}}{2} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $j = -1, 0, 1, \dots, M_2 - 1$;

$$\begin{aligned} -\lambda_{i,M_2-\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{u_{i,M_2}^{l+1} - u_{i,M_2-1}^{l+1}}{h_2} &= -\lambda_{i,M_2-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,M_2}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,M_2-1}^{l+1}}{h_2} = \\ &= \kappa_i \left(\frac{u_{i,M_2}^{l+1} + u_{i,M_2-1}^{l+1}}{2} - \frac{\mathbf{v}_{i,M_2}^{l+1} + \mathbf{v}_{i,M_2-1}^{l+1}}{2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $i = -1, 0, 1, \dots, M_1 - 1$.

Аппроксимацию остальных граничных и начальных условий запишем:

$$\left. \begin{array}{l} u_{0,j}^{l+1} = u_{-1,j}^{l+1} \quad \text{при } j = -1, 0, 1, \dots, M_2; \\ \mathbf{v}_{0,j}^{l+1} = \mathbf{v}_{-1,j}^{l+1} \quad \text{при } j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2; \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_{i,0}^{l+1} = u_{i,-1}^{l+1} \quad \text{при } i = -1, 0, 1, \dots, M_1; \\ \mathbf{v}_{i,0}^{l+1} = \mathbf{v}_{i,-1}^{l+1} \quad \text{при } i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1; \end{array} \right\}$$

$$-\lambda_{N_1-\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{N_1,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{N_1-1,j}^{l+1}}{h_1} = \alpha_j a \frac{\mathbf{v}_{N_1,j}^{l+1} + \mathbf{v}_{N_1-1,j}^{l+1}}{2},$$

где $j = -1, 0, \dots, N_2$;

$$-\lambda_{i,N_2-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,N_2}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,N_2-1}^{l+1}}{h_2} = \alpha_i a \frac{\mathbf{v}_{i,N_2}^{l+1} + \mathbf{v}_{i,N_2-1}^{l+1}}{2}, \quad (20)$$

где $i = -1, 0, \dots, N_1$;

$$u_{i,j}^0 = u_0, \quad (21)$$

где $i = -1, 0, \dots, M_1$; $j = -1, 0, \dots, M_2$;

$$v_{i,j}^0 = v_0,$$

где $i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1$; $j = -1, 0, \dots, M_2$ или $i = -1, 0, \dots, N_1$; $j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2$.

Выражения (16)–(20) с учетом (21) дают $(N_1 + 2)(N_2 + 2) + 2(M_1 + M_2)$ алгебраических линейных уравнений для определения такого же количества неизвестных значений температур в узлах сетки. На каждом временном шаге $(\delta + 1)\tau$, $l = 0, 1, \dots$ решение их производится по методу продольно-поперечных направлений.

ВЫВОДЫ

В работе излагается методика численного решения задачи нагрева многослойных тел. Учитывается переменность теплофизических характеристик сопряженных слоев, их зависимость от температуры, а также перемещения фронта фазовых превращений в одном из слоев изделия. Эти обстоятельства делают задачу нестационарной теплопроводности нелинейной.

В процессе фазового перехода дифференциальное уравнение теплопроводности распадается на два уравнения, описывающих теплопроводность в жидкой и твердой фазах с добавлением условий на границе раздела фаз (задача Стефана). Вследствие введения в расчетную схему δ -функции Дирака решение задачи сводится к расчету квазилинейного уравнения теплопроводности численными методами. Для конечно-разностной аппроксимации производных на сетке вдоль каждого из направлений x и y используется шеститочечный шаблон [1]. В результате задача сводится к итерационной системе алгебраических уравнений.

Представленная методика позволяет рассчитывать многослойные изделия с заданными служебными характеристиками для различных отраслей народного хозяйства (энергетической, нефтехимической, машино- и приборостроительной и т. д.). Такие изделия являются результатом комбинированного сочетания отдельных компонентов и слоев с различными свойствами. Многослойные изделия имеют характеристики, отличающиеся от свойств составляющих, что позволяет получать изделия со специальными свойствами, повышенным качеством и эксплуатационными характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е с ь м а н, Р. И. Расчеты процессов литья / Р. И. Есьман, Н. П. Жмакин, Л. И. Шуб. – Минск: Вышэйш. шк., 1977. – 264 с.

Представлена кафедрой ПТЭ и ТТ

Поступила 29.12.2009