Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики № 1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания
и индивидуальные задания

Минск 2009

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики № 1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания и индивидуальные задания для студентов-заочников

Минск 2009

УДК 519.6(075.4)
~~ББК 22.19я7~~
Ч 67

Составители:
О. Р. Габасова, А. В. Грекова, В. С. Марцинкевич, З. Н. Примичева, Г. А. Романюк, Е. А. Федосик

Рецензенты:
В. И. Юринок, В. В. Павлов

Издание разработано в соответствии с рабочей программой курса «Прикладная математика» ФИТР БНТУ. В нем изложено начало методов вычислений для основных разделов численных методов: прямые и итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, интерполирование, численное интегрирование и дифференцирование, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, линейное программирование, численное решение уравнений с частными производными. В начале каждой темы приведены краткие теоретические сведения по рассматриваемому вопросу, которые иллюстрируются решениями типовых задач. В каждом разделе даны индивидуальные задания. Издание предназначено для самостоятельного изучения численных методов студентами-заочниками, но может быть использовано и при проведении занятий на дневных отделениях, где изучаются методы вычислений.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ........ 5
   1.1. Метод Гаусса........ 5
   1.2. Метод простой итерации........ 7
   1.3. Метод Зейделя........ 13
Индивидуальное задание № 1........ 15

2. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ........ 17
   2.1. Интерполирование алгебраическими многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа........ 17
   2.2. Конечные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона........ 22
   2.3. Интерполирование сплайнами........ 27
Индивидуальное задание № 2........ 33

3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ........ 38
   3.1. Метод средних прямоугольников........ 38
   3.2. Формула трапеций........ 40
   3.3. Формула Симпсона (метод параболических трапеций)........ 41
   3.4. Формула Ньютона (правило трех восьмых)........ 43
   3.5. Правило Рунге (двойной пересчет)........ 44
   3.6. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (квадратурные формулы Гаусса)........ 45
Индивидуальное задание № 3........ 47

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ........ 50
   4.1. Численное решение нелинейных уравнений........ 50
   4.2. Итерационные методы решения нелинейных уравнений........ 53
   4.3. Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений........ 62
Индивидуальное задание № 4........ 69

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. 72
5.1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. . . . 72
Индивидуальное задание № 5. 78

6. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. 79
6.1. Графическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования. 79
6.2. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. 88
Индивидуальное задание № 6 97

7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. 100
7.1. Метод сеток для уравнения параболического типа. 100
7.2. Метод сеток для уравнения гиперболического типа. . . . 108
Индивидуальное задание № 7. 114

Литература. 116

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Метод Гаусса

Метод Гаусса является наиболее распространенным методом решения систем линейных алгебраических уравнений. В его основе лежит идея последовательного исключения неизвестных. Существуют различные вычислительные схемы, реализующие этот метод. Рассмотрим одну из них – схему единственного деления.

Пусть дана невырожденная система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $b_i, a_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n$ – действительные числа, а значит, система (1.1) имеет единственное решение.

Переставляя, если необходимо, уравнения и изменяя места неизвестных, можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и приведем его к виду

$$x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{1n+1}, \tag{1.2}$$

где $b_{ij} = a_{1j} / a_{i1}, j = 2, 3, \ldots, n, b_{1,n+1} = b_1 / a_{i1}$.

Умножая обе части уравнения (1.2) последовательно на $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ и вычитая соответственно из второго, третьего, ..., n-го уравнения системы (1.1), исключим слагаемые, содержащие x_1, во всех уравнениях этой системы, начиная со второго. В результате получим систему, порядок которой на единицу меньше порядка исходной системы. Аналогично преобразуем полученную систему. В результате n-кратного повторения указанного преобразования приведем систему (1.1) к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{1,n+1}, \\ \qquad x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_{2,n+1}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = b_{n,n+1}. \end{cases}$$

Приведение исходной системы к такому виду называется прямым ходом метода Гаусса. Обратным ходом метода Гаусса называют последовательное нахождение неизвестных в порядке $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Чтобы упростить все записи, преобразования совершают не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и из свободных членов.

Пример 1.1. Используя компактную схему Гаусса, найдите решение системы

$$\begin{cases} 3{,}1x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3{,}5x_2 + x_3 = 4{,}5, \\ x_1 + x_2 + 4{,}1x_3 = 5. \end{cases}$$

Вычисления производите с округлением до четырех знаков после запятой. Результат проверьте подстановкой.

Решение.

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
I	1	3,1	1	1	4
	2	1	3,5	1	4,5
	3	1	1	4,1	5
II	1	1	0,3226	0,3226	1,2903
	2		3,1774	0,6774	3,2097
	3		0,6774	3,7774	3,7097
III	2		1	0,2132	1,0102
	3			3,6330	3,0254
IV	3			1	0,8328
V				1	0,8328
			1		0,8326
		1			0,7530

Таким образом, $x_1 = 0{,}7530$, $x_2 = 0{,}8326$, $x_3 = 0{,}8328$.

Подставляя найденные значения неизвестных в исходную систему, получим

$$\begin{cases} 3{,}1 \cdot 0{,}7530 + 0{,}8326 + 0{,}8328 = 3{,}9997, \\ 0{,}7530 + 3{,}5 \cdot 0{,}8326 + 0{,}8328 = 4{,}4999, \\ 0{,}7530 + 0{,}8326 + 4{,}1 \cdot 0{,}8328 = 5{,}00008. \end{cases}$$

Абсолютные величины разностей между свободными членами исходной системы и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных не превосходят 0,0003, т.е. абсолютная погрешность вычислений в данном примере $\Delta \le 0{,}0005$, что вполне допустимо, а значит, три знака после запятой в записи полученных значений неизвестных являются верными значащими цифрами.

1.2. Метод простой итерации

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (1.1). Обозначим $A = (a_{ij})$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, $b = (b_1,\ldots,b_n)^T$, $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$. Тогда систему (1.1) можно переписать в векторно-матричной форме

$$Ax = b. \tag{1.3}$$

Пусть $x^* = \left(x_1^*, x_2^* \ldots, x_n^*\right)^T$ – точное решение системы (1.3). Предположим, что система (1.3) каким-либо образом приведена к виду

$$x = Cx + f, \tag{1.4}$$

где $C = (c_{ij})$, $i, j = 1,2,\ldots n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$.

В качестве начального приближения $x^{(0)}$ возьмем произвольный вектор и построим рекуррентную последовательность векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ по формуле

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + f, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Если выполнено одно из следующих условий:

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|C_{ij}\right|\le\alpha<1 \tag{1.5}$$

или

$$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|C_{ij}\right|\le\beta<1, \tag{1.6}$$

то последовательность $\left(x^{(k)}\right)$ сходится при любом начальном приближении $x^{(0)}$, т.е. существует $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$ при $\forall x^{(0)}\in \mathsf{R}^n$, при этом, если выполнено условие (1.5), то справедлива оценка погрешности приближенного решения $x^{(k)}$

$$\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(*)}-x^{(k)}\right|\le\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)}-x^{(k-1)}\right|,$$

в случае, когда выполняется условие (1.6), имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^*-x_i^{(k)}\right|\le\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}\right|.$$

Отсюда, требуя, чтобы $\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)}-x^{(k-1)}\right|\le\varepsilon$ или $\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}\right|\le\varepsilon$, получим формулу, позволяющую устанавливать момент прекращения итерационного процесса при достижении заданной точности ε:

$$\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)}-x^{(k-1)}\right|\le\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\alpha}\quad\text{или}\quad\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}\right|\le\frac{\varepsilon(1-\beta)}{\beta}$$

соответственно.

На практике итерационный процесс можно заканчивать, когда $\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)}-x^{(k-1)}\right|\le\varepsilon$, полагая, что $x^{(k)}$ – приближенное решение системы (1.3) с заданной точностью ε.

В качестве начального приближения $x^{(0)}$ можно брать любой вектор. Иногда выбирают $x^{(0)}=f$.

Существуют различные способы приведения системы (1.3) к виду (1.4). Рассмотрим сначала один из этих способов. Предположим, что диагональные элементы матрицы A отличны от нуля, т.е. $a_{ii}\ne 0,\quad i=1,2,\ldots,n$. Преобразуем систему (1.3), решая каждое i-е уравнение этой системы относительно x_i, получим:

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}a_{ij}x_j\right),\quad i=1,2,\ldots,n,$$

где элементы матрицы C определяются равенствами

$$c_{ij}=\begin{cases}-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i\ne j,\\ 0, \quad i=j, & i,j=1,2,\ldots,n.\end{cases}$$

При этом условие (1.5) или (1.6) будет выполнено, если диагональные элементы матрицы A удовлетворяют условию

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ij}|\quad\text{или}\quad|a_{jj}|>\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}|a_{ij}|$$

соответственно.

Второй способ приведения системы (1.3) к виду (1.4) рассмотрим на следующем примере.

Пример 1.2. Решите систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795, \\ -0{,}11x_1 + 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849, \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398, \end{cases}$$

произведя три итерации. Промежуточные вычисления ведите с округлением до пяти знаков после запятой. Укажите погрешность полученного результата.

Решение. Так как диагональные элементы матрицы A близки к единице, а абсолютные величины всех остальных – значительно меньше единицы, то данную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}795 - 0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}10x_3, \\ x_2 = 0{,}849 + 0{,}11x_1 - 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3, \\ x_3 = 1{,}398 + 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}04x_3. \end{cases}$$

Метод простой итерации, применимый к последней системе, сходится, так как выполнено условие (1.5):

$$\alpha = \max_{1 \le i \le 3} \sum_{j=1}^{n} \left| C_{ij} \right| = \max\{0{,}17;0{,}19;0{,}27\} = 0{,}27 < 1.$$

Взяв в качестве начального вектора $x^{(0)}$ столбец свободных членов, последовательные приближения будем строить в виде

$$x_1^{(k)} = 0{,}795 - 0{,}02x_1^{(k-1)} + 0{,}05x_2^{(k-1)} + 0{,}10x_3^{(k-1)},$$
$$x_2^{(k)} = 0{,}849 + 0{,}11x_1^{(k-1)} - 0{,}03x_2^{(k-1)} + 0{,}05x_3^{(k-1)},$$
$$x_3^{(1)} = 1{,}398 + 0{,}11x_1^{(k-1)} + 0{,}12x_2^{(k-1)} - 0{,}04x_3^{(k-1)},$$

$$k = 1,2,\ldots.$$

Отсюда при $k = 1$ получим

$$x_1^{(1)} = 0{,}795 - 0{,}0159 + 0{,}04245 + 0{,}1398 = 0{,}96135 \approx 0{,}961,$$
$$x_2^{(1)} = 0{,}849 + 0{,}08745 - 0{,}02547 + 0{,}0699 = 0{,}98088 \approx 0{,}981,$$
$$x_3^{(1)} = 1{,}398 + 0{,}08745 + 0{,}10188 - 0{,}05592 = 1{,}53141 \approx 1{,}531.$$

При $k = 2$ имеем

$$x_1^{(2)} = 0{,}97793 \approx 0{,}978, \quad x_2^{(2)} = 1{,}00183 \approx 1{,}002, \quad x_3^{(2)} = 1{,}56019 \approx 1{,}560.$$

Следовательно, при $k = 3$

$$x_1^{(3)} = 0{,}98154 \approx 0{,}982, \quad x_2^{(3)} = 1{,}00452 \approx 1{,}005, \quad x_3^{(3)} = 1{,}56342 \approx 1{,}563,$$

а значит, оценка погрешности приближенного решения $x^{(3)}$ имеет вид

$$\max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^* - x_i^{(3)} \right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(3)} - x_i^{(2)} \right| = \frac{0{,}27}{1 - 0{,}27} \cdot 0{,}04 < 1{,}5 \cdot 10^3.$$

Пример 1.3. Примените метод простой итерации, указав рекуррентные соотношения, по которым строятся последовательные приближения, если

$$\begin{cases} 2x_1 - 1{,}8x_2 + 0{,}4x_3 = 1, & \text{(I)} \\ 3x_1 + 2x_2 - 1{,}1x_3 = 0, & \text{(II)} \\ x_1 - x_2 + 7{,}3x_3 = 0. & \text{(III)} \end{cases}$$

Решение. В уравнениях (I) и (II) нет диагонального преобладания, в (III) – есть, его оставляем неизменным. Добьемся диагонального преобладания в уравнении (I). Для этого умножим (I) на α, (II) – на β, сложим оба уравнения и в полученном уравнении выберем α и β так, чтобы было диагональное преобладание. Имеем

$$(2\alpha + 3\beta)x_1 + (2\beta - 1{,}8\alpha)x_2 + (0{,}4\alpha - 1{,}1\beta)x_3 = \alpha.$$

Взяв $\alpha = \beta = 5$, получим $25x_1 + x_2 - 3{,}5x_3 = 5$.

Чтобы достигнуть диагонального преобладания в уравнении (II), поступим аналогично: умножим (I) на $(-\gamma)$, II – на δ. Тогда

$$(3\delta - 2\gamma)x_1 + (2\delta + 1{,}8\gamma)x_2 + (-1{,}1\delta - 0{,}4\gamma)x_3 = -\gamma .$$

Положив $\delta = 2, \gamma = 3$, имеем $0 \cdot x_1 + 9{,}4x_2 - 3{,}4x_3 = -3$.

В результате получим систему

$$\begin{cases} 25x_1 + x_2 - 3{,}5x_3 = 5, \\ 9{,}4x_2 - 3{,}4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 7{,}3x_3 = 0, \end{cases}$$

в которой есть диагональное преобладание по строкам. Разделяя каждое уравнение на соответствующий диагональный элемент и округляя, если необходимо, до двух знаков после запятой, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}04x_2 - 0{,}14x_3 = 0{,}2, \\ x_2 - 0{,}36x_3 = -0{,}32, \\ 0{,}14x_1 - 0{,}14x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}04x_2 + 0{,}14x_3 + 0{,}2, \\ x_2 = 0{,}36x_3 - 0{,}32, \\ x_3 = -0{,}14x_1 + 0{,}14x_2, \end{cases}$$

для которой $\alpha = \max\{0{,}18; 0{,}36; 0{,}28\} = 0{,}36 < 1$, а значит, метод простой итерации, применимый к последней системе, сходится.

Следовательно, последовательные приближения будем строить в виде

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = -0{,}04x_2^{(k-1)} + 0{,}14x_3^{(k-1)} + 0{,}2, \\ x_2^{(k)} = 0{,}36x_3^{(k-1)} - 0{,}32, \\ x_3^{(k)} = -0{,}14x_1^{(k-1)} + 0{,}14x_2^{(k-1)}, \end{cases}$$

$k = 1,2,\ldots$, взяв в качестве $x^{(0)}$, например, $x^{(0)} = (0{,}2;-0{,}32;0)^T$.

1.3. Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации. Он заключается в том, что при вычислении неизвестного x_i, $i > 1$ k-го приближения используются уже вычисленные ранее неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ этого приближения. При этом последовательные приближения метода Зейделя, примененные к системе (1.4), строятся в виде

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = c_{11}x_1^{(k-1)} + c_{12}x_2^{(k-1)} + \dots + c_{1n-1}x_{n-1}^{(k-1)} + c_{1n}x_n^{(k-1)} + f_1, \\ x_2^{(k)} = c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k-1)} + \dots + c_{2n-1}x_{n-1}^{(k-1)} + c_{2n}x_n^{(k-1)} + f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \dots + c_{nn-1}x_n^{(k)} + c_{nn}x_n^{(k-1)} + f_n, \end{cases}$$

$k = 1,2,\dots$. Рекомендации к применению метода Зейделя и условия его сходимости те же, что и для метода простой итерации.

Пример 1.4. Для системы

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11{,}33, \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32, \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42 \end{cases}$$

известны приближенные значения неизвестных, полученные с тремя значащими цифрами методом Гаусса: $x_1 \approx 4{,}67$, $x_2 \approx 7{,}62$, $x_3 \approx 9{,}05$. Уточните методом Зейделя решения так, чтобы значения неизвестных $x_i^{(k)}$ и $x_i^{(k-1)}$ отличались не более чем на $5 \cdot 10^{-4}$. Вычисления производите с округлением до пяти знаков после запятой.

Решение. Приведем данную систему к виду

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}(11{,}33 + x_2 + x_3), \\ x_2 = \frac{1}{6}(32 + x_1 + x_3), \\ x_3 = \frac{1}{6}(42 + x_1 + x_2). \end{cases}$$

Так как $\alpha = \max\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3} < 1$, то метод Зейделя, примененный к построенной системе, сходится.

Взяв в качестве начального приближения полученные методом Гаусса значения $x_1^{(0)} = 4{,}67$, $x_2^{(0)} = 7{,}62$, $x_3^{(0)} = 9{,}05$, последовательные приближения будем строить в виде

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{6}\left(11{,}33 + x_2^{(k-1)} + x_3^{(k-1)}\right),$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{6}\left(32 + x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}\right),$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{6}\left(42 + x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right),$$

$$k = 1,2,\ldots .$$

Отсюда при $k = 1$ имеем

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6}(11{,}33 + 7{,}62 + 9{,}05) = 4{,}66667,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(32 + 4{,}66667 + 9{,}05) = 7{,}61945,$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}(42 + 4{,}66667 + 7{,}619445) = 9{,}04769.$$

При $k = 2$ получим

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{6}(11{,}33 + 7{,}61945 + 9{,}04769) = 4{,}66619,$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{6}(32 + 4{,}66619 + 9{,}04769) = 7{,}61898,$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{6}(42 + 4{,}66619 + 7{,}61898) = 9{,}04753.$$

Найдем $\max\limits_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(2)} - x_i^{(n)}\right|$, тогда

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(2)} - x_i^{(n)}\right| = \max_{1\le i\le 3}\{0{,}00048;\ 0{,}00046;\ 0{,}00016\} = 0{,}00048.$$

Следовательно,

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^* - x_i^{(2)}\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} = \max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = \frac{1/3}{2/3}\cdot 0{,}00048 < 2{,}5\cdot 10^{-4},$$

а значит, приближенным решением с указанной точностью $\varepsilon = 2{,}5\cdot 10^{-4}$ можно взять $x^{(2)} = (4{,}666;\ 7{,}619;\ 9{,}048)^T$.

Индивидуальное задание № 1

Задание 1.1. Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Составьте программу, которая реализует алгоритм одного из прямых методов для решения системы линейных алгебраических уравнений порядка n и вычисляет одновременно обратную матрицу для матрицы системы. Примените составленную программу к данной системе.

Номер варианта	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	2	3	4	5	6
1	1	0,21	– 0,45	– 0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	– 0,35	– 0,25	1,83
2	1	– 3	0,5	0,5	– 56,5
	2	0,5	– 6,0	0,5	– 100
	3	0,5	0,5	– 3	– 210

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6
3	1	0,45	– 0,94	– 0,15	– 0,15
	2	– 0,01	0,34	0,06	0,31
	3	– 0,35	0,05	0,63	0,37
4	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,03	0,34	0,10	0,32
5	1	– 0,2	1,60	– 0,10	0,30
	2	– 0,30	0,10	– 1,50	0,40
	3	1,20	– 0,20	0,30	– 0,60
6	1	0,30	1,20	– 0,20	– 0,60
	2	– 0,10	– 0,20	1,60	0,30
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
7	1	0,20	0,44	0,81	0,74
	2	0,58	– 0,29	0,05	0,02
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
8	1	6,36	11,75	10	– 41,4
	2	7,42	19,03	11,75	– 49,49
	3	5,77	7,48	6,36	– 27,67
9	1	– 9,11	1,02	– 0,73	– 1,25
	2	7,61	6,25	– 2,32	2,33
	3	– 4,64	1,13	– 8,88	– 3,75
10	1	– 9,11	– 1,06	– 0,67	– 1,56
	2	7,61	6,35	– 2,42	2,33
	3	– 4,64	1,23	– 8,88	– 3,57
11	1	1,02	– 0,73	– 9,11	– 1,25
	2	6,25	– 2,32	7,62	2,33
	3	1,13	– 8,88	4,64	– 3,75
12	1	0,06	0,92	0,03	– 0,82
	2	0,99	0,01	0,07	0,66
	3	1,01	0,02	0,99	– 0,98
13	1	0,10	– 0,07	– 0,96	– 2,04
	2	0,04	– 0,99	– 0,85	– 3,73
	3	0,91	1,04	0,19	– 1,67

Окончание таблицы

1	2	3	4	5	6
14	1	0,62	0,81	0,77	– 8,18
	2	0,03	– 1,11	– 1,08	0,08
	3	0,97	0,02	– 1,08	0,06
15	1	0,63	– 0,37	1,76	–9,29
	2	0,90	0,99	0,05	0,12
	3	0,13	– 0,95	0,69	0,69

Задание 1.2. Составьте программу, которая реализует алгоритм метода простой итерации и метода Зейделя решения линейной системы порядка n. Примените составленную программу к данной системе и сравните полученные результаты. Вычисления производите до достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$ или до тех пор, пока число итераций не превысит 10^4.

2. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

2.1. Интерполирование алгебраическими многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа

2.1.1. Постановка задачи

Предположим, что при изучении некоторого процесса установлено существование функциональной зависимости между величинами x и y; при этом функция $y = f(x)$ остается неизвестной, но на основании эксперимента мы знаем ее значения в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[a,b]$. Естественно попытаться найти такую функцию, которая представляла бы неизвестную функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ приближенно. Часто в качестве приближающих функций берутся многочлены. Многочлены являются функциями простой природы: для вычисления их значений нужно выполнить конечное число арифметических операций, производная и неопределенный интеграл от многочлена сами являются многочленами. Существуют различные способы приближения функций многочленами. Одним из таких методов является метод интерполяции, который сводится к следующему.

Требуется построить многочлен $L_n(x)$ степени не выше n, который в $n+1$ заданных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, называемых узлами интерполяции, принимал бы заданные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$, т.е. искомый многочлен $L_n(x)$ должен удовлетворять равенствам $L_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

В указанной постановке задача интерполирования всегда имеет единственное решение.

2.1.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Искомым многочленом является многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} y_k =$$

$$= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} +$$

$$+ \ldots + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

Коэффициенты многочлена Лагранжа имеют степень ровно n, обращаются в 1 при $x = x_k$ и в 0 во всех других узлах x_i $(i \neq k)$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа можно записать в более компактной форме, если ввести обозначение $w(x) = (x - x_0) \times$ $\times (x - x_1)\ldots(x - x_n)$. Так как $w'(x) = \sum_{i=0}^{n} (x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$, а $w'(x_k) = (x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)$, то $L_n(x) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)} y_k .$$

Пример 2.1. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий в данных точках заданные значения. Провести проверку результата.

x	y
1,45	3,14
1,36	4,15
1,14	5,65

Решение. Таким многочленом является интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\ + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \qquad (2.1)$$

Здесь

$$L_2(x) = 3{,}14 \frac{(x - 1{,}36)(x - 1{,}14)}{(1{,}45 - 1{,}36)(1{,}45 - 1{,}14)} + 4{,}15 \frac{(x - 1{,}45)(x - 1{,}14)}{(1{,}36 - 1{,}45)(1{,}36 - 1{,}14)} + \\ + 5{,}65 \frac{(x - 1{,}45)(x - 1{,}36)}{(1{,}14 - 1{,}45)(1{,}14 - 1{,}36)} = 112{,}5448\left(x^2 - 2{,}5x + 1{,}5504\right) - \\ - 209{,}596\left(x^2 - 2{,}59x + 1{,}653\right) + 82{,}8446\left(x^2 - 2{,}81x + 1{,}972\right) = \\ = -14{,}2066x^2 + 28{,}6983x - 8{,}6031.$$

Таким образом, $L_2(x) = -14{,}21x^2 + 28{,}7x - 8{,}6$.

Проведем проверку результата в узлах интерполирования:

$$L_2(1{,}45) = -29{,}877 + 41{,}615 - 8{,}6 = 3{,}138 \approx 3{,}14,$$
$$L_2(1{,}36) = -26{,}283 + 39{,}032 - 8{,}6 = 4{,}149 \approx 4{,}15,$$
$$L_2(1{,}14) = -18{,}467 + 32{,}718 - 8{,}6 = 5{,}651 \approx 5{,}65.$$

2.1.3. Практическое применение интерполирования. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа

Интерполяционные формулы обычно используются при нахождении неизвестных значений $f(x)$ для промежуточных значений аргумента. При этом различают интерполирование в узком смысле, когда x находится между x_0 и x_n, и экстраполирование, когда x находится вне отрезка $[x_0, x_n]$.

В узлах интерполирования значения функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Лагранжа совпадают. Если же значение x не совпадает ни с одним из узлов интерполяции, то возникает вопрос о величине разности $f(x)-L_n(x)$, т.е. о погрешности, которую мы допускаем, заменяя $f(x)$ на $L_n(x)$ в точках, отличных от узлов интерполяции. Обозначим погрешность метода интерполяции (остаточный член) $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$.

Для него справедлива оценка для любых $x \in [a,b]$:

$$R_n(x) \le \frac{|w(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \tag{2.2}$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

В оценку входит величина M_{n+1}. Вычисление ее на практике бывает сложным или вовсе невозможным, если функция $f(x)$ задана таблично. Трудность этой задачи увеличивается с возрастанием n.

При оценке погрешности результатов должны учитываться как погрешность метода интерполяции (остаточный член), так и погрешности округления при вычислениях.

Пример 2.2. Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x)=\sqrt{x}$ по таблице значений

x	100	121	144
y	10	11	12

и проверить результат, оценив погрешность вычисления $\sqrt{115}$.

Решение. Подставляя данные в формулу (2.1), получим

$$L_2(x)=10\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}+11\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}+$$

$$+12\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}=\frac{10}{924}\left(x^2-265x+17424\right)-$$

$$-\frac{11}{483}\left(x^2-244x+14400\right)+\frac{12}{1012}\left(x^2-221x+121000\right)=$$

$$=x^2\left(\frac{10}{924}-\frac{11}{483}+\frac{12}{1012}\right)+x\left(\frac{10}{924}(-265)+\frac{11}{483}\cdot 244+\frac{12}{1012}(-221)\right)+$$

$$+\left(\frac{10}{924}\cdot 17424-\frac{11}{483}\cdot 14400+\frac{12}{1012}12100\right)=$$

$$=\frac{1}{21252}\left(-2x^2+1454x+87120\right)$$

Проверим правильность полученного результата:

$$L_2(100)=\frac{1}{21252}(-20000+145400+87120)=10,$$

$$L_2(121)=\frac{1}{21252}(-29282+175934+87120)=11,$$

$$L_2(144)=\frac{1}{22152}(-41472+209376+87120)=12.$$

По условию имеем три узла, $n+1=3$, откуда $n=2$. Тогда $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $y'''=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, откуда $M_3=\max|y'''|=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{100^5}}=$ $=\frac{3}{8}\cdot 10^{-5}$ при $100\le x\le 144$.

По формуле (2.2) получим

$$\left|R_3(115)\right| \le \frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{3!}\left|(115-100)(115-121)(115-144)\right| =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot 10^{-5}\cdot 15\cdot 6\cdot 29 \approx 1{,}6\cdot 10^{-3}.$$

$$L_2(115) = \frac{1}{21252}\left(-26450+167210+87120\right) = 10{,}7228.$$

$$\sqrt{115} = 10{,}7238.$$

Полученный результат при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа соответствует оценке (2.2).

2.2. Конечные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона

2.2.1. Конечные разности

Узлы интерполяции называются равноотстоящими, если $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = \text{const}\ \left(i = 0,1,\ldots,n-1\right)$.

Конечными разностями функции $y = f(x)$ называются разности вида

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \text{ – конечные разности первого порядка,}$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \text{ – конечные разности второго порядка,}$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \text{ – конечные разности третьего порядка,}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \text{ – конечные разности } k\text{-го порядка.}$$

Для вычисления разностей удобно использовать горизонтальную таблицу конечных разностей.

Пример 2.3. Составить таблицу разностей до четвертого порядка включительно для функции $y = e^x$ на интервале $[0;1]$ с шагом $h = 0{,}1$.

Решение. Составим таблицу для функции $y = e^x$, беря значение e^x с пятью верными значащими цифрами.

k	x	$y = e^x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0,0	1,0000	0,1052	0,0110	0,0013	– 0,0002
1	0,1	1,1052	0,1162	0,0123	0,0011	0,0005
2	0,2	1,2214	0,1285	0,0134	0,0016	0,0000
3	0,3	1,3499	0,1419	0,0150	0,0016	0,0000
4	0,4	1,4918	0,1569	0,0166	0,0016	– 0,0001
5	0,5	1,6487	0,1735	0,0182	0,0018	0,0002
6	0,6	1,8221	0,1917	0,0200	0,0024	– 0,0002
7	0,7	2,0138	0,2117	0,0224	0,0022	
8	0,8	2,2255	0,2341	0,0246		
9	0,9	2,4596	0,2587			
10	1,0	2,7183				

2.2.2. Первая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования вперед)

Введем вспомогательную переменную $q = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тогда

$$N(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 . \quad (2.3)$$

В формуле используется верхняя горизонтальная строка таблицы конечных разностей. Остаточный член формулы (2.3) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (2.4)$$

где ξ – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ и точку x.

Число n желательно выбирать так, чтобы разности $\Delta^n y_i$ были практически постоянными.

Формула (2.3) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к началу таблицы x_0.

При $n=1$ и $n=2$ из формулы (2.3) получаем частные случаи: линейная интерполяция

$$y(x)=y_0+q\Delta y_0, \tag{2.5}$$

квадратичная интерполяция

$$y(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0. \tag{2.6}$$

Пример 2.4. По данной таблице значений функции $y=\dfrac{1}{x}$, пользуясь линейной интерполяцией, найти $\dfrac{1}{2{,}718}$.

x	y	Δy
2,70	0,3704	– 0,0028
2,72	0,3676	– 0,0026
2,74	0,3650	

Решение. Определяем $\Delta y_0=-0{,}0028$, $h=0{,}02$; $x_0=2{,}70$, $x=2{,}718$;

$$q=\frac{2{,}718-2{,}70}{0{,}02}=\frac{0{,}018}{0{,}2}=0{,}9.$$

По формуле (2.5) находим $\dfrac{1}{2{,}718}=0{,}3704-0{,}0028\cdot 0{,}9=0{,}3679$.

Оценим остаточный член. По формуле (2.4) при $n=1$ имеем $R_1(x)=h^2\dfrac{q(q-1)}{2!}f''(\xi)$, где $2{,}70<\xi<2{,}72$. Так как $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$, то $\left|R_1(2{,}718)\right|=(0{,}02)^2\dfrac{0{,}9\cdot 0{,}1}{(2{,}7)^3}\approx 0{,}2\cdot 10^{-5}$, остаточный член может повлиять только на шестой десятичный знак.

Пример 2.5. Используя таблицу значений функции $y = e^x$, по формуле квадратичной интерполяции вычислить $y = e^{3,62}$ и $y = e^{3,58}$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
3,60	36,598	1,877	0,095
3,65	38,475	1,972	0,102
3,70	40,447	2,074	
3,75	42,521		

Решение. Вычисляем разности до второго порядка.

Для $x = 3{,}62$ находим $q = \dfrac{3{,}62 - 3{,}60}{0{,}05} = 0{,}4$ и вычисляем по формуле (2.6):

$e^{3,62} = 36{,}598 + 0{,}4 \cdot 1{,}877 - \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{2} 0{,}095 = 37{,}338$. Остаточный член при $n = 2$ имеет вид $R_2(x) = h^3 \dfrac{q(q-1)(q-2)}{3!} f'''(\xi)$. Так как $f'''(x) = e^x$ и $3{,}60 < \xi < 3{,}70$, получаем $|R_2(3{,}62)| < (0{,}05)^3 \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}6}{6} e^{3,70} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-3}$, т.е. в ответе можем считать все цифры верными.

Для $x = 3{,}58$ находим $q = -0{,}02/0{,}05 = -0{,}4$ и по формуле (2.6)

$$e^{3,58} = 36{,}598 - 0{,}4 \cdot 1{,}877 + \frac{0{,}4 \cdot 1{,}4}{2} 0{,}095 = 35{,}874.$$

Для оценки остаточного члена имеем $3{,}58 < \xi < 3{,}70$, поэтому

$$|R_3(3{,}58)| < (0{,}05)^2 \frac{0{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot 2{,}4}{6} e^{3,70} \approx 10^{-3}.$$

Сравнивая остаточные члены при $x = 3{,}62$ и $x = 3{,}58$, замечаем, что экстраполяция при $x = 3{,}58$ дает менее точный результат.

2.2.3. Вторая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования назад)

$$N(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (2.7)$$

где $q = \dfrac{x - x_n}{h}$.

В формуле используется нижняя наклонная строка разностей.

Остаточный член формулы (2.7) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad (2.8)$$

где ξ – внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ и точку x. Формула (2.7) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к концу таблицы, т.е. к x_n.

Пример 2.6. Используя таблицу значений функции $y = \sin x$, найти $\sin 54^\circ$ и указать погрешность результата.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
30°	0,5000	0,0736	– 0,0044	– 0,0005
35°	0,5736	0,0692	– 0,0049	– 0,0005
40°	0,6428	0,0643	– 0,0054	– 0,0003
45°	0,7071	0,0589	– 0,0057	
50°	0,7660	0,0532		
55°	0,8192			

Решение. Составив таблицу разностей, видим, что третьи разности практически постоянны. Поэтому в формуле (2.7) достаточно взять четыре члена. Для вычисления $\sin 54^\circ$ имеем $q = \dfrac{54^\circ - 55^\circ}{5^\circ} = -0{,}2$. По формуле (2.7)

$$\sin 54^\circ = 0{,}8192 + (-0{,}2)0{,}0532 - \frac{(-0{,}2)\cdot 0{,}8}{2}0{,}0057 -$$

$$- \frac{(-0{,}2)\cdot 0{,}8\cdot 1{,}8}{2}0{,}0003 = 0{,}80903$$

Остаточный член при $n = 3$ имеет вид (формула (2.8))

$$R_3(x) = h^4 \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

Здесь $h = 5^\circ = 0{,}0873$, $q = -0{,}2$, $f^{(4)}(\xi) = \sin\xi \le 1$. Поэтому $R_3(54^\circ) \le$ $\le (0{,}087)^4 \dfrac{0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 1{,}8\cdot 2{,}8}{24} \approx 0{,}2\cdot 10^{-5}$, т.е. остаточный член может повлиять только на пятый десятичный знак. Поэтому окончательный результат записываем в виде $\sin 54^\circ = 0{,}8090$. Полученное значение полностью совпадает с табличным.

2.3. Интерполирование сплайнами

Увеличение степени интерполяционного многочлена далеко не всегда приводит к улучшению приближенного представления функции на всем отрезке $[a,b]$. Часто выгоднее разбить отрезок $[a,b]$ на части и приближать $y = f(x)$ на частях отрезка интерполяционными многочленами невысоких степеней. Такое интерполирование может быть названо сглаженным кусочным интерполированием, но его часто называют сплайн-интерполированием, используя английский термин. Сплайном называется гибкая деревянная рейка, позволяющая плавно соединять дуги разных кривых и по своей роли аналогичная лекалу.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и известны ее значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в системе узлов $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Назовем функцию $S_m(x)$ интерполяционным сплайном порядка m для функции $f(x)$, если выполнены следующие условия:

1) $S_m(x)$ является многочленом степени m на каждом из отрезков $[x_{n-1}, x_n]$;

2) $S_m(x) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$;

3) на всем отрезке $[a,b]$ $S_m(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $m-1$:

$$S_m^{(k)}[x_{n-1}, x_n] = S_m^{(k)}[x_n, x_{n+1}],\ k = 1,2,\ldots,m-1,$$

т.е. в узлах интерполирования должны совпадать значения как самих $S_m(x)$ слева и справа, так и их производных до порядка $m-1$.

Если $m \geq 2$, то для единственности $S_m(x)$ следует задать дополнительно еще $m-1$ условий, которые обычно задаются на концах отрезка $[a,b]$, либо произвольно, либо из дополнительной информации о поведении $f(x)$.

При $m=1$ получается известный метод ломаных.

При $m=2$ функция $y = f(x)$ аппроксимируется кусочно-квадратичными полиномами. Для простоты проиллюстрируем построение $S_2(x)$ в случае $n=3$. Определим $f(x) = S_2^i(x), i = 1,2$.

$$S_2^{(1)}(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1,$$
$$S_2^{(2)}(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2.$$

Чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и принимала в узлах заданные значения y_i, $i = 1,2,3$, необходимо

$$S_2^1(x_1) = y_1,\ S_2^1(x_2) = y_2,\ S_2^2(x_2) = y_2,\ S_2^2(x_3) = y_3. \qquad (2.9)$$

Чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в узлах, необходимо

$$\left(S_2^1(x_2)\right)' = \left(S_2^2(x_2)\right)'. \qquad (2.10)$$

Функция $f(x)$ определяется шестью коэффициентами полиномов $S_2^{(1)}(x)$ и $S_2^2(x)$. Равенства (2.9), (2.10) дают пять уравнений. Для однозначного определения $f(x)$ обычно указывается значение $f'(x)$ в некотором узле, например

$$\left(S_2^1(x_1)\right)' = d_1, \qquad (2.11)$$

где d_1 – некоторое заданное значение.

(2.9)–(2.11) представляют собой систему шести линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов $S_2^i(x), i = 1,2$, которая может быть решена методом исключения Гаусса.

Этот подход легко распространяется на произвольное число узлов.

При $m = 3$ получаем кубический сплайн. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}], i = 1,2,\ldots,n-1$ функция $S_3^i(x)$ представляется в виде

$$S_3^i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i,\ i = 1,2,\ldots,n-1. \qquad (2.12)$$

В случае задачи интерполирования или аппроксимации должны выполняться соотношения в узлах

$$S_3^i(x_i) = y_i,\ i = 1, 2,\ldots,n. \qquad (2.13)$$

Это n уравнений. Кроме того,

$$S_3^{i-1}(x_i) = S_3^i(x_i), \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)' = \left(S_3^i(x_i)\right)', \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)'' = \left(S_3^i(x_i)\right)''. \quad (2.14)$$

Это еще $3n-6$ уравнений. Для однозначного построения $S_3(x)$ нужно определить $4n-4$ коэффициента в (2.12). Еще два недостающих уравнения для так называемого естественного кубического сплайна задаются так:

$$\left(S_3(x_1)\right)'' = \left(S_3(x_n)\right)'' = 0. \qquad (2.15)$$

Сплайн $S_3(x)$ можно построить, решив линейную систему уравнений (2.13)–(2.15) относительно неизвестных коэффициентов в (2.12).

На практике используется другой подход. Строят трехдиагональную систему уравнений для значений вторых производных $S_3''(x)$ в узлах сетки. Саму функцию $S_3(x)$ определяют затем с помощью интегрирования. Введем обозначения

$$y_i = S_3^i(x_i) = S_3^{i-1}(x_i),\ y_i' = \left(S_3^i(x_i)\right)' = \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)',\ y_i'' = \left(S_3^i(x_i)\right)'' = \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)'',$$

в которых учтены условия (2.13) и (2.14).

Для нахождения y_i'' получается система $n-2$ линейных уравнений с $n-2$ неизвестными $y_2'',\ldots,y_{n-1}''$, кроме того $y_1''=y_n''=0$ из (2.15):

$$\begin{aligned} &y_{i-1}''h_{i-1} + 2y_i''(h_i + h_{i-1}) + y_{i+1}''h_i = \\ &= 6\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right],\ i = 2, 3, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Система легко решается методом исключения Гаусса.

После того, как значения y_i'' найдены, и так как нам известны величины y_i, значения первых производных в узлах сетки можно определить по формуле:

$$y_i' = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - y_{i+1}''\frac{h_i}{6} - y_i''\frac{h_i}{3},\ i = 1,2,\ldots,n-1\ . \tag{2.17}$$

Выражения для самих $S_3^i(x)$ можно получить из формулы

$$\begin{aligned} &S_3^i(x) = y_i + y_i'(x - x_i) + y_i''\frac{(x-x_i)^2}{2} + \\ &+ (y_{i+1}'' - y_i'')\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Если требуется вычислить $S_3(x)$ при некотором конкретном значении $\bar{x}$, то сначала необходимо определить отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, в котором лежит точка $\bar{x}$, а затем воспользоваться выражением для соответствующего полинома $S_3^i(x)$.

Пример 2.7. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	0	2	4
y	1,5	2,3	3,4

Построить интерполяционные сплайны: 1) первого, 2) второго, 3) третьего порядка; вычислить значение $f(x)$ при $x=1$. Сделать проверку результата.

Решение.

1. $S_1(x) = \begin{cases} S_1^{(1)}(x) = a_1 x + b_1, \\ S_2^{(2)}(x) = a_2 x + b_2. \end{cases}$

Должны выполняться соотношения $S_1^1(0)=1{,}5, S_1^1(2)=2{,}3, S_1^2(2)=2{,}3$, $S_2^2(4)=3{,}4$. Отсюда

$$\begin{cases} b_1 = 1{,}5 \\ 2a_1 + 1{,}5 = 2{,}3 \\ 2a_2 + b_2 = 2{,}3 \\ 4a_2 + b_2 = 3{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1{,}5 \\ a_1 = 0{,}4 \\ 2a_2 = 1{,}1 \\ b_2 = 1{,}2. \end{cases}$$

Таким образом:

$$S_1(x) = \begin{cases} S_1^{(1)}(x) = 0{,}4x + 1{,}5, & 0 \le x \le 2, \\ S_1^{(2)}(x) = 0{,}55x + 1{,}2, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Проверка. $S_1(0) = 1{,}5,\ S_1^1(2) = 2{,}3,\ S_1^2(2) = 2{,}3,\ S_1^2(4) = 3{,}4$.

2. $\begin{cases} S_2^1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \\ S_2^2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2. \end{cases}$ $\begin{cases} \left(S_2^1(x)\right)' = 2a_1 x + b_1, \\ \left(S_2^2(x)\right)' = 2a_2 x + b_2. \end{cases}$

Для построения кусочно-квадратичного полинома должны выполняться следующие соотношения: $S_2^1(0)=1{,}5$; $S_2^1(2)=2{,}3$; $S_2^2(2)=2{,}3$; $S_2^2(4)=3{,}4$; $\left(S_2^1(2)\right)'=\left(S_2^2(2)\right)'$.

Добавим еще одно соотношение $\left(S_2^1(0)\right)'=0$. Отсюда

$$\begin{cases} c_1=1{,}5 \\ 4a_1+2b_1+1{,}5=2{,}3 \\ 4a_2+2b_2+c_2=2{,}3 \\ 16a_2+4b_2+c_2=3{,}4 \\ 4a_1+b_1=4a_2+b_2 \\ b_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=0{,}2 \\ b_1=0 \\ c_1=1{,}5 \\ 4a_2+b_2=0{,}8 \\ 4a_2+2b_2+c_2=2{,}3 \\ 16a_2+4b_2+c_2=3{,}4. \end{cases}$$

Методом исключения Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0{,}8 \\ 4 & 2 & 1 & 2{,}3 \\ 16 & 4 & 1 & 3{,}4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$c_2=0{,}2; \quad b_2=1{,}3; \quad 4a_2+1{,}3=0{,}8 \Rightarrow a_2=-0{,}125.$$

Таким образом:

$$S_2(x)=\begin{cases} 0{,}2x^2+1{,}5, & 0\le x\le 2 \\ -0{,}125x^2+1{,}3x+0{,}2, & 2\le x\le 4. \end{cases}$$

Проверка.

$$S_2(0)=1{,}5;\ S_2^1(2)=2{,}3;\ S_2^2(2)=2{,}3;\ S_2^2(4)=3{,}4;$$

$$\left(S_2^1(2)\right)'=2\cdot 0{,}2\cdot 2=\left(S_2^2(2)\right)'=-2\cdot 0{,}125\cdot 2+1{,}3 \Rightarrow 0{,}8=0{,}8.\ \left(S_2^1(0)\right)'=0.$$

3. Здесь $n=3$; в формуле (2.16) $i=2$; $h_i=h=2$; $y_1=1{,}5$; $y_2=2{,}3$; $y_3=3{,}4$. Из формулы (2.15): $y_1''=y_3''=0$. Из формулы (2.16): $2y_2''\cdot 4=6\left(\dfrac{3{,}4-2{,}3}{2}-\dfrac{2{,}3-1{,}5}{2}\right)\Rightarrow y_2''=0{,}1125$.

Из формулы (2.17):

$$\begin{cases} y_1'=\dfrac{y_2-y_1}{h}-y_2''\dfrac{h}{6}-y_1''\dfrac{h}{3} \\ y_2'=\dfrac{y_3-y_2}{h}-y_3''\dfrac{h}{6}-y_2''\dfrac{h}{3} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y_1'=\dfrac{2{,}3-1{,}5}{2}-0{,}1125\dfrac{1}{3}=0{,}3625 \\ y_2'=\dfrac{3{,}4-2{,}3}{2}-0{,}1125\dfrac{2}{3}=0{,}475. \end{cases}$$

Из формулы (2.18):

$$S_3(x)=\begin{cases} S_3^1(x)=1{,}5+0{,}3625x+\dfrac{0{,}1125}{12}x^3,\ 0\le x\le 2; \\ S_3^2(x)=2{,}3+0{,}475(x-2)+0{,}1125\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{0{,}1125}{12}(x-2)^3,\ 2\le x\le 4. \end{cases}$$

Проверка.

$$S_3(0)=1{,}5;\ S_3^1(2)=1{,}5+0{,}725+0{,}075=2{,}3;\ S_3^2(2)=2{,}3;$$

$$S_3^2(4)=2{,}3+0{,}95+0{,}225-0{,}075=3{,}4;\ \left(S_3^1(2)\right)'=\left(S_3^2(2)\right)'=0{,}475.$$

Для вычисления значения $S_3(x)$ в точке $x=1$, заметим, что $0<1<2$ и используем для вычисления полином $S_3^1(x)=S_3^1(1)=$ $=1{,}5+0{,}3625+\dfrac{0{,}1125}{12}=1{,}8719$.

Индивидуальное задание № 2

Задание 2.1. По заданной таблице значений функции найдите формулу интерполяционного многочлена Лагранжа. Составьте программу, реализующую данную задачу. Постройте график интерполяционного многочлена Лагранжа и отметьте на нем узловые точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Вариант	x_0	x_1	x_2	x_3	y_0	y_1	y_2	y_3
1	– 1	0	3	4	3	5	2	– 6
2	2	3	5	6	4	1	7	2
3	0	2	3	5	– 1	– 4	2	– 8
4	7	9	13	15	2	– 2	3	– 4
5	– 3	– 1	3	5	7	– 1	4	– 6
6	1	2	4	7	– 3	– 7	2	8
7	– 1	1	2	4	4	9	1	6
8	2	4	5	7	9	– 3	6	– 2
9	– 4	– 2	0	3	2	8	5	10
10	– 1	1,5	3	5	4	– 7	1	– 8
11	2	4	7	8	– 1	– 6	3	12
12	– 9	– 7	– 4	– 1	3	– 3	4	– 9
13	0	1	4	6	7	– 1	8	2
14	– 8	– 5	0	2	9	– 2	4	6
15	– 7	– 5	– 4	– 1	4	– 4	5	10

Задание 2.2. Вычислите одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и оцените погрешность интерполяции. Составьте программу, реализующую данную задачу.

Вариант	Таблица	x
1	1	3,8
2	2	3,5
3	3	0.5
4	4	4,8
5	1	4,1
6	2	3,9
7	3	3,3
8	4	4,0
9	1	2,9
10	2	5,3
11	3	4,1
12	4	7,6
13	1	4,4
14	2	2,5
15	3	5,2

Таблица 1

x	$f(x) = (1/x) \cdot \lg x + x^2$
1,3	1,7777
2,1	4,5634
3,7	13,8436
4,5	20,3952
6,1	37,3387
7,7	59,4051
8,5	72,3593

Таблица 2

x	$f(x) = \ln 2{,}3x - 0{,}8/x$
1,2	0,3486
1,9	1,0537
3,3	1,7844
4,7	2,2103
5,4	2,3712
6,8	2,6322
7,5	2,7411

Таблица 3

x	$f(x) = 2{,}1 \cdot \sin 0{,}37x$
– 3,2	– 1,9449
– 0,8	– 0,6126
0,4	0,3097
2,8	1,8068
4,0	2,0913
6,4	1,4673
7,6	0,6797

Таблица 4

x	$f(x) = 1{,}7 \cdot \sqrt[3]{x} - \cos(0{,}4 - 0{,}7x)$
2,6	2,1874
3,3	2,8637
4,7	3,8161
6,1	3,8524
7,5	3,1905
8,2	2,8409
9,6	2,6137

Задание 2.3. Составьте интерполяционный многочлен Ньютона для функции из задания 2.1 с помощью программы для компьютера.

Задание 2.4. Дана таблица значений функции $y = \sin x$.

x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$
1,1	0,89121	1,6	0,99957	2,1	0,86321
1,2	0,93204	1,7	0,99166	2,2	0,80850
1,3	0,96356	1,8	0,97385	2,3	0,74571
1,4	0,98545	1,9	0,94630	2,4	0,67546
1,5	0,99749	2,0	0,90930	2,5	0,59847

Пользуясь первой или второй интерполяционными формулами Ньютона при $n = 2$, вычислите $\sin x$ для следующих значений аргумента x и укажите оценку остаточного члена R_2:

1) 1,151; 2) 1,218; 3) 1,345; 4) 1,421; 5) 1,538; 6) 1,609; 7) 1,732; 8) 1,849; 9) 1,929; 10) 2,031; 11) 2,173; 12) 2,218; 13) 2,313; 14) 2,437; 15) 2,478.

Задание 2.5. С помощью программы для компьютера уплотните часть таблицы заданной функции, пользуясь первой или второй интерполяционными формулами Ньютона.

Для выполнения задания 2.5 по заданной таблице значений функции с равноотстоящими значениями аргумента составьте таблицу конечных разностей и определите порядок интерполяционного полинома Ньютона. В зависимости от расположения участка $[a,b]$ уплотнения таблицы с шагом h относительно исходной таблицы выберите первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона. В программе необходимо совершить подсчет погрешности метода по выбранной формуле.

Вариант	Таблица	a	b	h
1	1	0,65	0,75	0,01
2	2	0,30	0,45	0,025
3	3	1,45	1,55	0,01
4	4	1,20	1,40	0,02
5	2	0,10	0,20	0,01
6	3	1,10	1,30	0,02
7	4	1,05	1,25	0,025
8	1	0,70	0,90	0,02
9	3	1,25	1,50	0,025
10	4	1,00	1,10	0,01
11	1	0,60	0,70	0,01
12	2	0,15	0,35	0,025
13	3	1,15	1,25	0,01
14	1	0,65	0,85	0,025
15	2	0,20	0,40	0,02

Таблица 1

x	$\sin x$
0,60	0,56464
0,65	0,60519
0,70	0,64422
0,75	0,68164
0,80	0,71736
0,85	0,75128
0,90	0,78333
0,95	0,81342
1,00	0,84147
1,05	0,86742
1,10	0,89121

Таблица 2

x	$\cos x$
0,05	0,99375
0,10	0,99500
0,15	0,99877
0,20	0,98007
0,25	0,96891
0,30	0,95534
0,35	0,93937
0,40	0,92106
0,45	0,90045
0,50	0,87758
0,55	0,85252

Таблица 3

x	$\sin x$
1,10	0,89121
1,15	0,91276
1,20	0,93204
1,25	0,94898
1,30	0,96356
1,35	0,97572
1,40	0,98545
1,45	0,99271
1,50	0,99749
1,55	0,99973
1,60	0,99957

Таблица 4

x	$\cos x$
1,00	0,54090
1,05	0,49757
1,10	0,45360
1,15	0,40849
1,20	0,36236
1,25	0,31532
1,30	0,26750
1,35	0,21901
1,40	0,16997
1,45	0,12050
1,50	0,07074

Задание 2.6. Для функции из задания 2.1 вычислите коэффициенты и составьте формулу кубического сплайна. Результат интерполирования проверьте путем вычисления значений сплайна в узловых точках. Постройте график кубического сплайна и отобразите на нем узловые точки.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В некоторых случаях, когда невозможно найти первообразную от заданной функции $f(x)$ (ее нельзя выразить через элементарные функции), или вычисление требует слишком громоздких действий, или $f(x)$ задана таблично (или графически), определенный интеграл вычисляется приближенно.

Рассмотрим несколько основных методов решения этой задачи.

3.1. Метод средних прямоугольников

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция. Пусть для простоты $f(x) \geq 0$. Как известно, геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что он выражает площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частичных отрезков точками $x_i = a + \frac{b-a}{n}i, i = 1,2,\ldots,n-1$.

Величину $h = \frac{b-a}{n}$ назовем шагом разбиения. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем середину – точку $c_k = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ и вычислим $f(c_k) = \bar{y}_k$. Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей всех n прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) называется формулой средних прямоугольников.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (3.1) оценивается формулой

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot M_2, \qquad (3.2)$$

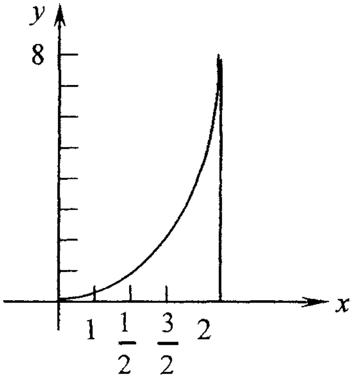
где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a,b]$.

Пример 3.1. Вычислить $\int\limits_0^2 x^3 dx$ по формуле средних прямоугольников, разбив отрезок интегрирования $[0,2]$ на 4 части.

Решение.

$$a = x_0 = 0;\ b = x_4 = 2,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2},\ f(x) = x^3,$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{8};\ x_2 = 1, y_2 = 1;\ x_3 = \frac{3}{2}, y_3 = \frac{27}{8};\ x_4 = 2, y_4 = 8.$$



По формуле (3.1):

$$c_1 = \frac{1}{4}, \bar{y}_1 = \frac{1}{64};\ c_2 = \frac{3}{4}, \bar{y}_2 = \frac{27}{64};\ c_3 = \frac{5}{4}, \bar{y}_3 = \frac{125}{64};\ c_4 = \frac{7}{4}, \bar{y}_4 = \frac{343}{64},$$

$$\int\limits_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) \approx 3{,}875.$$

Оценка погрешности по формуле (3.2) дает:

$$f(x) = 3x^2;\quad f''(x) = 6x;\quad M_2 = 12,\quad |R_n| \le \frac{(2-0)^3}{24 \cdot 4^2} \cdot 12 = 0{,}25\,.$$

Точное значение интеграла $\int\limits_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4$.

3.2. Формула трапеций

На каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной. Тогда площадь всей криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (3.3)$$

Для погрешности формулы (3.3) справедлива оценка

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2, \qquad (3.4)$$

где $|f''(x)| \le M_2$ при $a \le x \le b$.

Пример 3.2. Вычислить интеграл примера 3.1 по формуле трапеций.

Решение. По формуле (3.3)

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) \approx 4{,}25 .$$

По формуле (3.4) $|R_n| \le \dfrac{(2-0)^3}{12 \cdot 4^2} \cdot 12 = 0{,}5$.

Пример 3.3. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ по формуле трапеций при $n = 10$ и оценить погрешность вычислений.

Решение. Оценим остаточный член $f(x) = e^{-x^2}$; $f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$. Наибольшее значение на отрезке $[0{,}1]$ $|f''(x)|$ принимает при $x = 0$. Тогда $|R_n| \le \dfrac{2 \cdot 0{,}1^2}{12} < 0{,}002$.

Проведем вычисление определенного интеграла с одним запасным знаком, т.е. с четырьмя знаками после запятой. Составим таблицу значений подынтегральной функции.

i	x_i	x_i^2	y_i
0	0	0	1,0000
1	0,1	0,01	0,9900
2	0,2	0,04	0,9608
3	0,3	0,09	0,9139
4	0,4	0,16	0,8521
5	0,5	0,25	0,7788
6	0,6	0,36	0,6977
7	0,7	0,49	0,6126
8	0,8	0,64	0,5273
9	0,9	0,81	0,4449
10	1,0	1,00	0,3679

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_{10}) + \sum_{i=1}^{9} y_i = 7{,}4620.$$

По формуле (3.3) получаем: $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0{,}1 \cdot 7{,}4620 \approx 0{,}7462$.

Округляя до трех знаков, получаем окончательный ответ: 0,746.

3.3. Формула Симпсона (метод параболических трапеций)

В формуле Симпсона заменяют график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке разбиения не отрезками прямых, как в формулах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол. Отрезок $[a,b]$ разбивают на $2n$ равных частей длиной $h = \dfrac{b-a}{2n}$. В точках деления вычисляют значения подынтегральной функции $f(x)$:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}.$$

В итоге

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big((y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+ \\ +2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\Big). \tag{3.5}$$

Для погрешности формулы (3.5) справедлива оценка

$$|R_n(x)| \le \frac{(b-a)h^4}{180}\cdot M_4, \tag{3.6}$$

где $\left|f^{IV}(x)\right| \le M_4$ при $a \le x \le b$.

Пример 3.4. Вычислить интеграл из примера 3.1 по формуле Симпсона.

Решение.

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{2}{6\cdot 2}\left(0+8+4\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right)+2\cdot 1\right)=4.$$

$$|R_n|=0.$$

Пример 3.5. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{x^2}dx$ по формуле Симпсона при $n=10$ и оценить остаточный член.

Решение. Для оценки остаточного члена найдем четвертую производную подынтегральной функции $y=e^{x^2}$:

$$y'=2xe^{x^2};\ y''=e^{x^2}\left(2+4x^2\right);\ y'''=e^{x^2}\left(8x^3+12x\right);$$

$$y^{IV}=4e^{x^2}\left(4x^4+12x^2+3\right).$$

Наибольшее значение на отрезке $[0,1]$ $y^{IV}(x)$ принимает при $x=1$: $M_4=4e\cdot 19\approx 76\cdot 2{,}718\approx 206{,}5894168$. Тогда $|R_n|\le\frac{(0{,}1)^4}{180}\times$

$\times 206{,}589416 \approx 0{,}000115$. Составим таблицу значений подынтегральной функции $y = e^{x^2}$, записывая ординаты с четными и с нечетными номерами в разные столбцы. В последней строке таблицы записываем результаты суммирования по этим столбцам.

i	x_i	x_i^2	Значения $y_i = e^{x_i^2}$		
			при $i=0, i=10$	при четном i	при нечетном i
0	0,0	0,00	1,0000		
1	0,1	0,01			1,0101
2	0,2	0,04		1,0408	
3	0,3	0,09			1,0942
4	0,4	0,16		1,1735	
5	0,5	0,25			1,2840
6	0,6	0,36		1,4333	
7	0,7	0,49			1,6323
8	0,8	0,64		1,8965	
9	0,9	0,81			2,2479
10	1,0	1,00	2,718		
Суммы			3,7183	5,5441	7,2685

По формуле Симпсона находим значение искомого интеграла, окончательный ответ округляем до четырех знаков:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{30}\left(3{,}7183 + 4\cdot 7{,}2685 + 2\cdot 5{,}5441\right) \approx 1{,}46268 \approx 1{,}4627 .$$

3.4. Формула Ньютона (правило трех восьмых)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left[y_0 + y_{3m} + 2(y_3 + y_6 + \ldots + y_{3m-3}) + \right.$$
$$\left. + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{3m-2} + y_{3m-1})\right],$$

где $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b-a}{3m}$.

Остаточный член имеет вид

$$R_3 = -\frac{3mh^5}{80} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{80} f^{(4)}(\xi),\ a < \xi < b. \qquad (3.7)$$

Заметим, что в формуле (3.7) число узлов обязательно равно $3m+1$, т.е. $n = 3m$.

Если функция $y = f(x)$ задана таблично, а ее производные найти затруднительно, то в предположении отсутствия быстро колеблющихся составляющих можно применять приближенные формулы для погрешностей, выраженные через конечные разности.

Для формулы трапеций $R_n \approx -\dfrac{b-a}{12}\Delta^2 y$;

для формулы Симпсона $R_n \approx -\dfrac{b-a}{180}\Delta^4 y$;

для формулы Ньютона $R_n \approx -\dfrac{b-a}{80}\Delta^4 y$.

3.5. Правило Рунге (двойной пересчет)

На практике, чтобы не проводить оценку модуля производной высокого порядка, поступают так: вычисляют определенный интеграл по выбранной формуле с шагами h_1 и $h_2 = \dfrac{h_1}{2}$ и приближенно находят ошибку численного интегрирования с помощью соотношения

$$\left| I - I_{\frac{h_1}{2}} \right| \approx \left| I_{h_1} - I_{\frac{h_1}{2}} \right|,$$

где I – точные значения определенного интеграла,

I_{h_1}, I_{h_2} – приближенные значения определенного интеграла, найденные по выбранной квадратурной формуле с шагами, равными h_1 и $h_2 = \dfrac{h_1}{2}$ соответственно.

Заметим, что если определенный интеграл вычислялся дважды по формуле Симпсона с шагами h_1 и $h_2 = \frac{h_1}{2}$, то ошибку численного интегрирования можно находить с помощью приближенной формулы

$$\left| I - I_{\frac{h_1}{2}} \right| \approx \frac{1}{15} \left| I_{h_1} - I_{\frac{h_1}{2}} \right|.$$

Для формулы трапеций

$$\left| I - I_{\frac{h_1}{2}} \right| \approx \frac{1}{3} \left| I_{h_1} - I_{\frac{h_1}{2}} \right|.$$

Если заданная точность после этих вычислений окажется недостигнутой, то шаг интегрирования еще раз уменьшаем вдвое и т.д.

3.6. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (квадратурные формулы Гаусса)

Квадратурные формулы Гаусса имеют вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_n(f). \qquad (3.8)$$

Формула (3.8) имеет $2n$ параметров A_i и x_i, поэтому при помощи выбора их можно сделать равенство точным для всяких алгебраических многочленов степени $2n-1$ или, что равносильно, чтобы оно было точным для степеней x от нулевой до $2n-1$. Числа A_i, x_i в этом случае определяются однозначно.

Абсциссы x_i и коэффициенты A_i квадратурных формул Гаусса при n, равном 4 и 5 приведены ниже.

n	x_i	A_i	$R_n(f)$
4	$-x_1 = x_4 = 0{,}861136312$ $-x_2 = x_3 = 0{,}339981044$	$A_1 = A_4 = 0{,}347854845$ $A_2 = A_3 = 0{,}652145155$	$R_4(f) \approx 2{,}88 \cdot 10^{-7} f^{(8)}(\xi)$ $-1 < \xi < 1$
5	$-x_1 = x_5 = 0{,}906179846$ $-x_2 = x_4 = 0{,}538469310$ $x_3 = 0$	$A_1 = A_5 = 0{,}236926885$ $A_2 = A_4 = 0{,}478628670$ $A_3 = 0{,}568888889$	$R_5(f) \approx 8{,}08 \cdot 10^{-4} f^{(10)}(\xi)$ $-1 < \xi < 1$

Неудобство применения квадратурной формулы Гаусса состоит в том, что абсциссы x_i и A_i – иррациональные числа. Этот недостаток искупается ее высокой точностью при сравнительно малом числе узлов интегрирования. В тех случаях, когда подынтегральная функция сложна и на вычисление ее значений в каждом узле интегрирования требуется много времени, применение формулы Гаусса особенно выгодно.

Получить оценку погрешности результата, используя формулу остаточного члена, для формул Гаусса удается очень редко, так как это связано с вычислением производных высоких порядков от подынтегральной функции.

При вычислении интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует сделать замену переменной $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$.

Тогда формула Гаусса будет иметь вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_n^*(f),$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $R_n^*(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} R_n(f)$.

Пример 3.6. Вычислить интеграл $I = \int\limits_1^3 \frac{dx}{1+x}$ по формуле Гаусса при $n = 4$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = \frac{1+3}{2} + \frac{3-1}{2}t \Rightarrow x = 2 + t$, $dx = dt$. Получим интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+3}$. Составим таблицу значений подынтегральной функции $\frac{1}{t+3}$.

i	t_i	$f(t_i)$	A_i
1	–0,861136312	0,467537976	0,347854845
2	–0,339981044	0,37593717	0,652145155
3	0,339981044	0,299402896	0,652145155
4	0,861136312	0,258991115	0,347854845

По формуле Гаусса при $n = 4$ находим $I = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3) + A_4 f(t_4) = 0{,}693146416$.

Точное значение интеграла $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+3} = ln(t+3)\Big|_{-1}^{1} = \ln 4 - \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2 = 0{,}69314718$.

Абсолютная погрешность составляет $7{,}6 \cdot 10^{-7}$.

Индивидуальное задание № 3

Задание 3.1. Вычислите интеграл от заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ при делении отрезка на 12 равных частей следующими способами: 1) по формуле прямоугольников; 2) по формуле трапеций; 3) по формуле Симпсона; 4) по формуле Ньютона (правилу трех восьмых). Произведите оценку погрешности методов интегрирования и сравните точность полученных результатов.

1) $\int_{0}^{1} 0{,}37 \cdot e^{\sin x} dx$; 2) $\int_{1}^{2} (0{,}5 + x \cdot \lg x) dx$; 3) $\int_{1}^{2} (x+1{,}9) \cdot \sin(x/3) dx$;

4) $\int_{2}^{3} \frac{1}{x} \cdot \ln(x+2) dx$; 5) $\int_{0}^{1} \frac{3\cos x}{2x+1{,}7} dx$; 6) $\int_{1{,}2}^{2{,}2} 2{,}6x^2 \ln x dx$;

7) $\int\limits_{-1}^{0} 4xe^{x^2}dx$; 8) $\int\limits_{-0,5}^{0,5} (3x^2 + \mathrm{tg}x)dx$; 9) $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^2 + \sin x}{x^2}dx$;

10) $\int\limits_{0,2}^{1,2} 3xe^{\cos x}dx$; 11) $\int\limits_{1,5}^{2,5} x^2\mathrm{tg}\frac{x}{2}dx$; 12) $\int\limits_{0,1}^{1,1} \sqrt{x}\cdot e^{-x}dx$;

13) $\int\limits_{1,4}^{2,4} 3{,}1x\ln^2 xdx$; 14) $\int\limits_{2,3}^{3,3} (x-0{,}8)\cdot\ln\frac{x}{2}dx$; 15 $\int\limits_{0}^{1} (x-3{,}1)\cdot e^{tgx}dx$.

Задание 3.2. Вычислите интеграл по формулам трапеций и Симпсона с заданной точностью ε, определяя шаг интегрирования h по оценке остаточного члена.

1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-4}$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^3}$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-4}$;

3) $\int\limits_{2}^{4} e^{\frac{1}{x}}dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-2}$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-4}$;

5) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x^2 dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-3}$; 6) $\int\limits_{0}^{1} \cos x^2 dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-3}$;

7) $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{3+\cos x}dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-4}$; 8) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x}dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-2}$;

9) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-2}$; 10) $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-2}$;

11) $\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-4}$; 12) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-2}$;

13) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-4}$; 14) $\int\limits_{0}^{2\pi} x\sin xdx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-4}$;

15 $\int\limits_{0}^{1,2} \ln(1+x^2)dx$, $\varepsilon = 0{,}5\cdot 10^{-2}$.

Задание 3.3. С помощью программы для компьютера вычислите значение данного интеграла по формулам трапеций и Симпсона с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-3}$, определяя шаг интегрирования с помощью двойного пересчета.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$; 3) $\int\limits_0^1 x\ln(x+1)dx$;

4) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}$; 5) $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x dx$; 6) $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^3 x}$;

7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}dx$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x}dx$; 9) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

10) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$; 11) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$; 12) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$;

13) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}$; 14) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx$; 15 $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}dx$.

Задание 3.4. Вычислите интеграл по квадратурной формуле Гаусса.

1) $\int\limits_1^3 x^{-1}e^x dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln(x+1)}$; 3) $\int\limits_1^2 e^{(x^{-2}-x^2)}dx$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}dx$; 6) $\int\limits_0^1 \cos(x^2+x+1)dx$;

7) $\int\limits_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 8) $\int\limits_{0,1}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-x}{\sin x}}dx$; 9) $\int\limits_0^1 \frac{x\cos x}{1+x^2}dx$;

10) $\int\limits_0^1 \frac{xe^x}{1+x^2}dx$; 11) $\int\limits_0^1 \frac{\cos x}{1+x}dx$; 12) $\int\limits_0^1 \frac{xe^{-x}}{1+x^2}dx$;

13) $\int\limits_0^\pi ch(\cos x)dx$; 14) $\int\limits_0^\pi e^{\cos x}\cos 2x dx$; 15) $\int\limits_0^\pi \cos(x-\sin x)dx$.

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Численное решение нелинейных уравнений

4.1.1. Отделение корней

Число ξ называется корнем уравнения

$$f(x)=0, \tag{4.1}$$

если $f(\xi)=0$. Здесь $f(x)$ – непрерывная функция в некотором конечном или бесконечном интервале.

По теореме Больцано–Коши: если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков ($f(a)\cdot f(b)<0$), то внутри $[a,b]$ существует по крайней мере один корень уравнения (4.1).

Корень будет единственным на (a,b), если $f'(x)$ не меняет знака на (a,b), то есть $f'(x)>0$ или $f'(x)<0$ при всех $x\in[a,b]$.

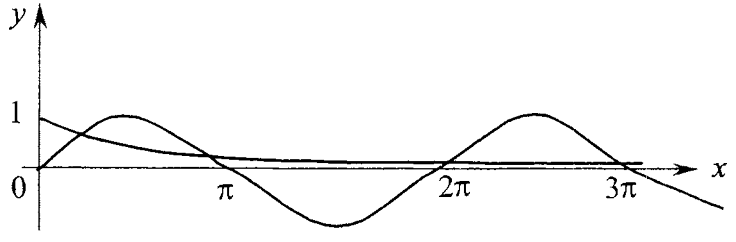
Для отделения корней используется также графический метод. Корнями уравнения (4.1) являются те значения x, при которых график функции $y=f(x)$ пересекает ось абсцисс. Если построение графика функции $f(x)$ вызывает затруднения, то уравнение (4.1) преобразуют к виду $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ так, чтобы графики функций $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ было по возможности легче построить. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями уравнения (4.1).

Пример 4.1. Отделить корни уравнения $x^3+x^2+x-6=0$.

Решение. Функция $y=x^3+x^2+x-6$ определена и непрерывна, а $f'(x)=3x^2+2x+1\geq 0$ для любых $x\in R$. Тогда данное уравнение имеет единственный действительный корень. Заметив, что $f(1)=-3$, а $f(2)=8$, мы можем утверждать, что единственный действительный корень исходного уравнения лежит на отрезке $[1,2]$.

Пример 4.2. Отделить корни уравнения $e^x \sin x - 1 = 0$.

Решение. Построить график функции $y = e^x \sin x - 1$ сравнительно трудно. Перепишем это уравнение следующим образом: $\sin x = e^{-x}$. Построив график функций $y = \sin x$ и $y = e^{-x}$, мы видим, что они пересекаются в бесчисленном числе точек. Следовательно, исходное уравнение имеет бесконечное множество действительных корней. Все они положительны.



Можно указать отрезки, на каждом из которых лежит один и только один корень исходного уравнения. Это отрезки $\left[2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[(4k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right]$, $k = 0,1,2,\ldots$ В частности, наименьший положительный корень уравнения расположен на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.1.2. Метод половинного деления

Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется только один корень, $f(x)$ – непрерывная функция и $f(a)\cdot f(b) < 0$. В середине отрезка $x_1 = \frac{a+b}{2}$ определяем знак функции $f(x)$, затем выбираем ту половину отрезка, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, и деление повторяется. Если требуется найти корень с точностью δ, то деление отрезка пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2δ. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью. В этом методе можно не вычислять значений функции $f(x)$, достаточно лишь определить знак значения функции. Алгоритм метода очень прост и надежен, однако скорость сходимости – линейная.

Пример 4.3. Методом половинного деления найти корень уравнения из примера 4.1 с точностью до 0,1.

Решение.

$$f(x)=x^3+x^2+x-6=0,\ x\in[1,2]$$

$$f(1)=-3<0,\ f(2)=8>0.$$

$x_1=\dfrac{1+2}{3}=1{,}5,\quad f(1{,}5)>0\Rightarrow$ выбираем $[1;1{,}5]$, так как $f(1)<0$, $f(1{,}5)>0$. Далее $x_2=\dfrac{1+1{,}5}{2}=1{,}25,\quad f(1{,}25)<0$. Выбираем $[1{,}25;1{,}5]$. $x_3=\dfrac{1{,}25+1{,}5}{2}=1{,}375$, $f(1{,}375)<0$. $[1{,}375;1{,}5]$, $x_4=\dfrac{1{,}375+1{,}5}{2}=1{,}4375$, $f(1{,}4375)>0$. $[1{,}375;1{,}4375]$, $x_5=\dfrac{1{,}375+1{,}4375}{2}=1{,}40625$, $f(1{,}40625)>$ >0 $[1{,}375;1{,}40625]$, $x_6=\dfrac{1{,}375+1{,}40625}{2}=1{,}3906$, $f(1{,}3906)=1{,}3906^3+$ $+1{,}3906^2+1{,}3906-6=0{,}0135$.

В качестве корня возьмем $\xi=1{,}3906\approx1{,}39$.

Проверка:

$$1{,}39^3+1{,}39^2+1{,}39-6=0,$$
$$2{,}6856+1{,}9321+1{,}39-6=0,$$
$$0{,}0077\approx0;\quad 0{,}0=0.$$

4.2. Итерационные методы решения нелинейных уравнений

4.2.1. Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Заменим уравнение (4.1) эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x). \tag{4.2}$$

Предположим, что выбрано некоторое начальное приближение x_0 корня уравнения (4.2). Определим итерационную последовательность x_n по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Если на отрезке $[a,b]$, содержащем x_0 и все последующие приближения x_n, функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(x)$ и

$$|\varphi'(x)| \le q < 1, \tag{4.4}$$

то итерационная последовательность (4.3) сходится к единственному на отрезке $[a,b]$ корню уравнения (4.2).

Скорость сходимости метода итерации зависит от величины q: чем меньше q, тем быстрей сходимость. Следовательно, при практическом нахождении корней методом итераций нужно стремиться представить уравнение (4.1) в форме (4.2) так, чтобы производная $\varphi'(x)$ в окрестности корня по абсолютной величине была возможно меньше.

4.2.2. Практический критерий сходимости (когда надо прекращать итерации)

Если $-1 < \varphi'(x) < 0$ для любых $x \in [a,b]$, то корень уравнения ξ находится между двумя последующими итерациями x_n и x_{n+1}. В этом случае итерации нужно прекращать, если два последующих приближения x_n и x_{n+1} совпадают между собой с заданной точностью ε. Если же $0 < \varphi'(x) < 1$ для любых $x \in [a,b]$, то последовательность x_n

сходится к ξ монотонно, вблизи корня итерации сходятся примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$.

Итерации можно прекращать, если выполняется условие $\left|\frac{q}{1-q}(x_n - x_{n-1})\right| = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}|} < \varepsilon$.

Пример 4.4. Найти корни уравнения

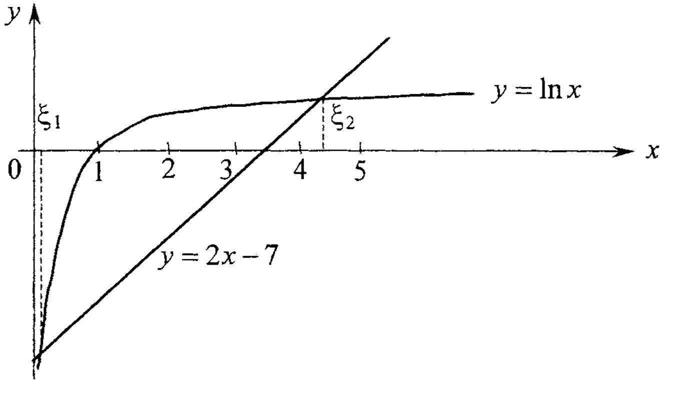
$$2x - \ln x - 7 = 0 \tag{4.5}$$

с тремя верными значащими цифрами.

Решение.

1. *Отделение корней.*

Представим уравнение (4.5) в виде $2x - 7 = \ln x$ и применим к нему графический метод решения уравнения. Построим графики функций $y = 2x - 7$ и $y = \ln x$.



Из рисунка видно, что уравнение (4.5) имеет два корня ξ_1 и ξ_2, причем $0 < \xi_1 < 1$ и $3 < \xi_2 < 5$. Сузим второй интервал, для чего вычислим приближенные значения.

x	3	4	5
$f(x)$	–2,099	–0,386	1,391

Из таблицы видно, что $4 < \xi_2 < 5$.

2. *Вычисление корней методом простой итерации.*

Для этого представим (4.5) в виде (4.2). Это можно сделать многими способами, например

$$x = \frac{1}{2}(7 + \ln x) \tag{4.6}$$

или $\ln x = 2x - 7$, откуда

$$x = e^{2x-7}. \tag{4.7}$$

Оценим $\varphi'(x)$ в окрестности корней ξ_1 и ξ_2. Для уравнения (4.6) имеем $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2x}$ и, следовательно, при $0 < x < 1$ $\varphi'(x)$ не ограничена. Поэтому вычисление корня ξ_1 с помощью уравнения (4.6) применять нельзя. Для уравнения (4.7) $0 < \varphi'(x) = 2e^{2x-7} < 2e^{-5}$ при $0 < x < 1$ и можно положить $q = 2e^{-5} = 0{,}0134\ldots$. Метод итераций в этом случае будет сходящимся.

Покажем, что для вычисления корня ξ_2 выгодно применять уравнение (4.6). Действительно, из (4.6) $0 < \varphi'(x) = \dfrac{1}{2x} < \dfrac{1}{8}$ при $4 < x < 5$. Можно положить $q = \dfrac{1}{8}$; следовательно, в этом случае метод простых итераций сходится.

Перейдем к вычислению корней.

Вычислим корень ξ_1. Так как $0 < \xi_1 < 1$, то положим $x_0 = 1$ и вычислим $x_1 = e^{2\cdot1-7} = e^{-5} = 0{,}006738\ldots$, найдем $x_2 = e^{2\cdot0{,}006738-7} = 0{,}000924\ldots$; $x_3 = e^{2\cdot0{,}00924-7} = 0{,}000914\ldots$; $x_4 = 0{,}000914$.

Следовательно, $\xi_1 = 0{,}000914$ с точностью до 10^{-6}, так как $|\xi_1 - x_4| \le |x_4 - x_3| < 10^{-6}$.

Вычислим ξ_2. Так как $4 < \xi_2 < 5$, то в качестве x_0 можно взять число 4 или 5. Но так как $f(4) = -0{,}386$, а $f(5) = 1{,}391$, то разумно взять $x_0 = 4$. Применяем метод итераций к уравнению (4.6) и находим $x_1 = \frac{1}{2}(7 + \ln 4) = 4{,}1931475$. Вычисляем $x_2 = \frac{1}{2}(7 + \ln 4{,}1931475) =$ $= 4{,}216726$. Находим аналогично $x_3 = \frac{1}{2}(7 + \ln 4{,}216726) = 4{,}21953$. Так как $|\xi_2 - x_3| \le |x_3 - x_2| = 0{,}002804\ldots < 0{,}003$, то, округляя x_3, получим $\xi_2 = 4{,}22$ с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

4.2.3. Метод Ньютона (метод касательных)

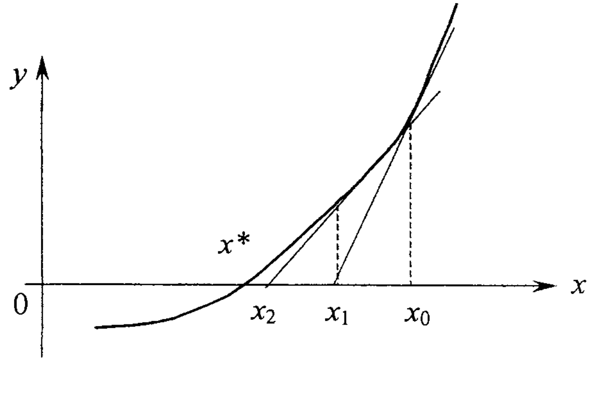
Метод Ньютона применяется к решению уравнения

$$f(x) = 0, \tag{4.7}$$

где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Для начала вычислений требуется задание одного начального приближения x_0. Последующие приближения вычисляются по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{4.8}$$

Геометрически x_{n+1} является значением абсциссы точки пересечения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$ с осью абсцисс.



Если $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, то погрешности на n-м и $(n+1)$-м шагах связаны соотношением $x^*-x_{n+1}=-\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^*-x_n)^2$, $\xi_n\in[x^*,\ x_n]$, т.е. сходимость метода Ньютона квадратичная, если $f'(x)\neq 0$.

4.2.4. Условия сходимости метода

Метод Ньютона всегда сходится, если начальное приближение x_0 взято достаточно близко к корню. Если же $|f(x)\cdot f''(x)|<[f'(x)]^2$, то метод Ньютона сходится для любого начального приближения.

Теорема. Если $f'(x_n)$ и $f''(x_n)$ на отрезке $[a,b]$, содержащем единственный корень уравнения (4.7), сохраняют определенные знаки, то метод Ньютона всегда сходится, если начальное приближение $x_0\in[a,b]$ и удовлетворяет условию

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0. \qquad (4.9)$$

Замечание. За начальное приближение в методе Ньютона может быть взят тот из концов отрезка $[a,b]$, который удовлетворяет условию (4.9).

Пример 4.5. Найти методом Ньютона на отрезке $[-1;\ 0]$ решение уравнения $f(x)=x^3+3x^2-1=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

Решение. Возьмем $x_0=-0{,}5$. Все вычисления занесем в таблицу.

$f'(x)=3x^2+6x$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	–0,5	–0,375	–2,25	–0,16667
1	–0,66667	0,03704	–2,666667	0,01389
2	–0,65278	0,00020	–2,63832	0,00008
3	–0,65270	–0,00001	–2,63814	0,000004

$x^*=-0{,}65270$.

Когда $f'(x^*)=0$, наблюдается замедление скорости сходимости (линейная). Для построения итерационной последовательности в случае p-кратных корней рекомендуется метод вида

$$x_{n+1}=x_n-p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=1,2,\ldots \tag{4.10}$$

Пример 4.6. Уравнение $x^2=0$ имеет двукратный корень $x^*=0$. Если, начиная с $x_0=2$, следующие приближения находить по методу Ньютона (4.8), то $x_{n+1}=0{,}5x_n$ и точность $\varepsilon=10^{-7}$ достигается лишь на 24-й итерации. По алгоритму (4.10) при $p=2$ для того же $x_0=2$ получим $x_1=0$.

Часто при неудачном выборе начального приближения x_0 нет монотонного убывания последовательности $|f(x_n)|$. В этом случае вычисления можно проводить по модифицированному методу Ньютона

$$x_{n+1}=x_n-\alpha_n\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{4.11}$$

а сомножители α_n $(0<\alpha_n\le 1)$ выбирать так, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x_{n+1})|<|f(x_n)|. \tag{4.12}$$

Например, для выбора α_n часто используется метод деления отрезка пополам: $\alpha_n^{(0)}=1,\ \alpha_n^{(1)}=\frac{1}{2},\ \alpha_n^{(2)}=\frac{1}{2^2},\ldots,\alpha_n^{(s)}=\frac{1}{2^s}$. При выполнении неравенства

$$\left|f\left(x_n-\alpha_n^{(s)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\right|<|f(x_n)| \tag{4.13}$$

полагаем $\alpha_n=\alpha_n^{(s)}$ и x_{n+1} находим по формуле (4.11).

Пример 4.7. Вычислить по методу Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ корень уравнения $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, начиная с $x_0 = 0{,}7$.

Решение. Находя x_1 по формуле (4.8) при $n = 0$, получаем

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1}; \quad x_1 = 0{,}7 - \frac{0{,}7^3 - 0{,}7 - 1}{3 \cdot 0{,}7^2 - 1} \Rightarrow x_1 = 3{,}587.$$

$$f(x_0) = f(0{,}7) = -1{,}357, \quad f(x_1) = f(3{,}587) = 41{,}565.$$

Неравенство (4.12) для $n = 0$ не выполнено. Возьмем $\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{2}$ и получим

$$x_0^{(1)} = x_0 - \alpha_0^{(1)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}; \quad x_0^{(1)} = 0{,}7 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1{,}357)}{0{,}47} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^{(1)} = 2{,}144; \quad f\left(x_0^{(1)}\right) = 2{,}144^3 - 2{,}144 - 1 = 6{,}712;$$

снова уменьшим α:

$$\alpha_0^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad x_0^{(2)} = x_0 - \frac{1}{4} \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1}; \quad x_0^{(2)} = 0{,}7 - \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}7^3 - 0{,}7 - 1}{3 \cdot 0{,}7^2 - 1} = 1{,}422;$$

$$f\left(x_0^{(2)}\right) = f(1{,}422) = 1{,}422^3 - 1{,}422 - 1 = 0{,}453.$$

Следовательно, можно взять $\alpha = \frac{1}{4}$, подставить в формулу (4.11) и найти

$$x_1 = 0{,}7 - \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}7^3 - 0{,}7 - 1}{3 \cdot 0{,}7^2 - 1} = 1{,}4218.$$

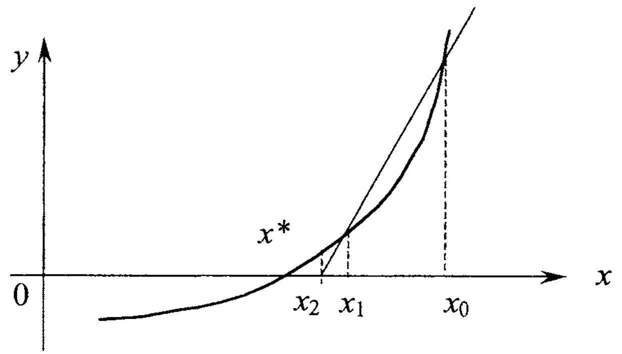
Далее по формуле (4.8) последовательно вычисляем $x_2 = 1{,}3324$, $x_3 = 1{,}3247$. Заданная точность достигнута. Если вычисления проводить только по формуле (4.8) и $x_0 = 0{,}7$, то заданная точность достигается на шестой итерации.

4.2.5. Метод секущих

В методе Ньютона на каждом шаге нужно вычислять значения функции и производной. Вычисление $f'(x)$ может быть трудоемким. Можно вообще избежать вычисления производной, если заменить ее первой разделенной разностью, найденной по двум последним итерациям. Это означает, что касательная заменяется секущей. В этом случае имеем итерационный процесс вида

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n). \tag{4.14}$$

В данном процессе для вычисления очередного приближения необходимо знать два предыдущих. Процесс является примером двухшагового метода.



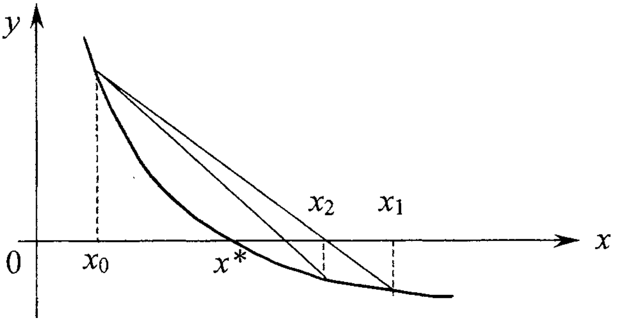
Скорость сходимости метода секущих вблизи корня определяется соотношением

$$x_{n+1} - x^* \approx (x_n - x^*)^{1,62} \left(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right)^{0,62}.$$

Отсюда видно, что в методе Ньютона ошибка убывает быстрее, поскольку у него скорость сходимости квадратичная. Однако в методе Ньютона приходится считать как значения функции, так и значения производной, а в методе секущих – только значения функции.

4.2.6. Метод хорд

Сущность метода состоит в замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через концы отрезков, в которых $f(x)$ имеет противоположные знаки.



Итерационный процесс строится так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0), \quad n = 1,2,\ldots.$$

Метод является двухшаговым, т.е. для получения следующего приближения нужно знать значения $f(x)$ в двух точках, и требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца выбирается тот, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$. Тогда последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня, где $f(x)$ имеет знак, противоположный $f''(x)$. Сходимость метода хорд – односторонняя и монотонная. Так как на каждом шаге итерационного процесса за приближенное значение корня x_{n+1} принимается корень интерполяционного многочлена первой степени, то метод хорд называется еще методом линейной интерполяции.

Если в методе секущих (4.14) вместо точки x_{n-1} взять x_0, получим метод хорд.

4.3. Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений

4.3.1. Метод простой итерации для системы двух уравнений

Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0, \end{cases} \tag{4.15}$$

где хотя бы одна из функций F_i, $i=1,2$ нелинейная. Требуется найти действительные корни этой системы с заданной степенью точности. Предположим, что система (4.15) допускает лишь изолированные корни. Число этих корней и их приближенные значения можно установить, построив кривые $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$ и определив координаты их точек пересечения.

Для применения метода итераций система (4.15) приводится к виду

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,y), \\ y=\varphi_2(x,y). \end{cases} \tag{4.16}$$

Функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ называются итерирующими. Алгоритм решения задается формулами

$$\begin{cases} x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n), \\ y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n), \end{cases} \quad n=0,\,1,\,2,..., \tag{4.17}$$

где x_0, y_0 – некоторое начальное приближение.

Теорема. Пусть в некоторой замкнутой окрестности $R(a \le x \le A$, $b \le y \le B)$ имеется одно и только одно решение $x=\varepsilon$, $y=\eta$ системы (4.16). Если

1) функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в R;

2) начальные приближения x_0, y_0 и все последующие приближения $x_n, y_n (n=1,2,...)$ принадлежат R;

3) в R выполнены неравенства

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1, \\ \left|\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1, \end{cases} \tag{4.18}$$

то процесс последовательных приближений (4.17) сходится к решению $x = \zeta$, $y = \eta$ системы, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \zeta$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$.

Эта теорема остается верной, если условие (4.18) заменить условием

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| \le q_1 < 1, \\ \left|\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1. \end{cases} \tag{4.19}$$

Оценка погрешности n-го приближения дается неравенством

$$|\zeta - x_n| + |\eta - y_n| \le \frac{M}{1-M}\left(|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|\right),$$

где M – наибольшее из чисел q_1, q_2, входящее в неравенства (4.18) или (4.19). Сходимость метода итераций считается хорошей, если $M < \dfrac{1}{2}$, при этом $\dfrac{M}{1-M} < 1$, так что если в двух последовательных приближениях совпадают, скажем, первые три десятизначных знака после запятой, то ошибка последнего приближения не превосходит 0,001.

Пример 4.8. Для системы

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{cases}$$

найти положительные корни с тремя верными знаками.

Решение. Для применения метода итераций запишем данную систему в виде (4.16):

$$x = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2} \equiv \varphi_1(x, y),$$

$$x = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3} \equiv \varphi_2(x, y).$$

Рассмотрим квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Если точка (x_0, y_0) находится в этом квадрате, то имеем $0 < \varphi_1(x_0, y_0) < 1$ и $0 < \varphi_2(x_0, y_0) < 1$.

Так как $0 < (x_0^3 + y_0^3)/6 < \frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6} < (x_0^3 - y_0^3)/6 < \frac{1}{6}$, то при любом выборе точки (x_0, y_0) последовательность (x_n, y_n) остается в квадрате. Более того, точки (x_n, y_n) остаются в прямоугольнике $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$, $\frac{1}{6} < y < \frac{1}{2}$ (так как $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$). Для точек этого прямоугольника имеем из формулы (4.19)

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{25/36 + 1/4}{2} = \frac{34}{72} < 1,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \left|-\frac{y^2}{2}\right| < \frac{34}{72} < 1.$$

Следовательно, существует единственное решение в указанном прямоугольнике, и оно может быть найдено методом итераций. Полагая $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, получим по формуле (4.17)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1/8 + 1/8}{6} = 0{,}542 \\ y_1 = \frac{1}{3} + \frac{1/8 - 1/8}{6} = 0{,}333 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{0{,}19615}{6} = 0{,}533 \\ y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}1223}{6} = 0{,}354 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_3 = 0{,}533 \\ y_3 = 0{,}351 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_4 = 0{,}532 \\ y_4 = 0{,}351 \end{cases}.$$

Так как здесь $q_1 = q_2 = \dfrac{34}{72} < 0{,}5$, то совпадение первых трех десятичных знаков свидетельствует о достижении требуемой точности. Таким образом, можно принять $\zeta = 0{,}532$, $\eta = 0{,}351$.

Замечание. Вместо рассмотренного итерационного процесса (4.17) иногда удобнее использовать построение итерирующих функций для системы (4.16) методом Зейделя:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_{n+1}, y_n) \end{cases}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots .$$

Для преобразования системы (4.15) к виду (4.16) можно использовать следующий прием. Положим

$$\varphi_1(x, y) = x + \alpha F_1(x, y) + \beta F_1(x, y),$$

$$\varphi_2(x, y) = y + \gamma F_2(x, y) + \delta F_2(x, y) \quad (\alpha\delta \neq \beta\gamma).$$

Коэффициенты α, β, γ, δ найдем как приближенные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 + \alpha \dfrac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \\ \alpha \dfrac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \beta \dfrac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0, \\ \gamma \dfrac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \delta \dfrac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \\ 1 + \gamma \dfrac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \delta \dfrac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

При таком выборе параметров условие (4.18) будет соблюдено, если только частные производные функций $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ изменяются не очень быстро в окрестности (x_0, y_0).

Пример 4.9. Выбрать подходящие итерирующие функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ для системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x^3-y=0 \end{cases} \text{ при } x_0=0{,}8,\ y_0=0{,}55.$$

Решение. Будем искать функции φ_1 и φ_2 в виде

$$\varphi_1(x,y)=x+\alpha(x^2+y^2-1)+\beta(x^3-y),$$

$$\varphi_2(x,y)=y+\gamma(x^2+y^2-1)+\delta(x^3-y).$$

Для определения параметров α, β, γ, δ составим систему (4.20). Имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x}=1{,}6,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y}=1{,}1,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial x}=1{,}92,\quad \frac{\partial F_2}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial y}=-1.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{aligned} 1+1{,}6\alpha+1{,}92\beta&=0\\ 1{,}1\alpha-\beta&=0\\ 1{,}6\gamma+1{,}92\delta&=0\\ 1+1{,}1\gamma-\delta&=0. \end{aligned}$$

Решая, получим $\alpha\approx-0{,}3$, $\gamma\approx-0{,}5$, $\beta\approx-0{,}3$, $\delta\approx0{,}4$. Таким образом, $\varphi_1(x,y)=x-0{,}3(x^2+y^2-1)-0{,}3(x^3-y)$, $\varphi_2(x,y)=y-0{,}5(x^2+y^2-1)+$ $+0{,}4(x^3-y)$.

Метод итераций распространяется на системы n уравнений с n неизвестными.

4.3.2. Метод Ньютона для системы двух уравнений

Пусть дана система

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ G(x,y)=0. \end{cases} \qquad (4.21)$$

Согласно методу Ньютона, последовательные приближения вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{1}{J(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix}=x_n-\dfrac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n,y_n)}, \\ y_{n+1}=y_n-\dfrac{1}{J(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix}=y_n-\dfrac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n,y_n)}, \end{cases} \qquad (4.22)$$

где

$$\Delta_x^{(n)}=\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix}, \quad \Delta_y^{(n)}=\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix},$$

а якобиан

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} F'_x(x_n,y_n) & F'_y(x_n,y_n) \\ G'_x(x_n,y_n) & G'_y(x_n,y_n)\end{vmatrix}\neq 0\,.$$

Начальные приближения x_0, y_0 определяются грубо приближенно (графически, прикидкой и т.п.). Метод Ньютона эффективен только при достаточной близости начального приближения к решению системы.

Пример 4.10. Найти вещественные корни системы

$$\begin{cases} F(x,y)=2x^3-y^2-1=0, \\ G(x,y)=xy^3-y-4=0. \end{cases}$$

Решение. Графическим путем находим приближенные значения $x_0=1{,}2$ и $y_0=1{,}7$. Вычисляя якобиан в точке (1,2; 1,7), имеем

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}6x^2-2y & \\ y^3 & 3xy^2-1\end{vmatrix},\quad J(1{,}2;\,1{,}7)=\begin{vmatrix}8{,}64 & -3{,}40\\ 4{,}91 & 9{,}40\end{vmatrix}=97{,}910.$$

По формуле (4.22) получаем

$$x_1=1{,}2-\frac{1}{97{,}910}\begin{vmatrix}-0{,}434 & -3{,}40\\ 0{,}1956 & 9{,}40\end{vmatrix}=1{,}2+0{,}0349=1{,}2349,$$

$$y_1=1{,}7-\frac{1}{97{,}910}\begin{vmatrix}8{,}64 & -0{,}434\\ 4{,}91 & 0{,}1956\end{vmatrix}=1{,}7-0{,}0390=1{,}6610.$$

Продолжая этот процесс с полученными значениями x_1 и y_1, получим $x_2=1{,}2343$, $y_2=1{,}6615$ и т.д. Сделать еще одну-две итерации.

Пример 4.11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}F(x,y)=\cos(0{,}4y+x^2)+x^2+y^2-1{,}6=0,\\ G(x,y)=1{,}5x^2-\dfrac{y^2}{0{,}36}-1=0.\end{cases}$$

Решение. Графически находим приближенные значения $x_0=1{,}04$, $y_0=0{,}47$. Дальнейшее приближение найдем по формулам (4.22). Все вычисления поместим в таблицу.

x	1,04	1,03864
y	0,47	0,47173
F	–0,00084	0,00000
G	0,00879	0,00002
F'_x	0,09364	0,09483
F'_y	0,55801	0,56172
G'_x	3,12	3,11592
G'_y	–2,61111	–2,62072
Δ_x	–0,00271	0,00001

Δ_y	0,00344	0,00000
J	–1,98549	–1,99889
$-\dfrac{\Delta_x}{J}$	–0,00136	0,00000
$-\dfrac{\Delta_y}{J}$	0,00173	0,00000

Ответ: $x = 1{,}03864$, $y = 0{,}471173$.

Метод Ньютона распространяется на системы n уравнений с n неизвестными.

Индивидуальное задание № 4

Задание 4.1. Отделите графически один из корней данного нелинейного уравнения и уточните его с помощью программы для компьютера с точностью 10^{-3}:

1) методом половинного деления;
2) методом простой итерации;
3) методом хорд;
4) методом Ньютона (касательных);
5) комбинированным методом.

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
1	2	3
1	$(0{,}2x)^3 = \cos x$	
2	$x - 10\sin x = 0$	
3	$2^{-x} = \sin x$	при $x < 10$
4	$2^x - 2\cos x = 0$	при $x > -10$
5	$\lg(x+5) = \cos x$	при $x < 5$
6	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$	

Окончание таблицы

1	2	3
7	$x\sin x - 1 = 0$	
8	$8\cos x - x = 6$	
9	$\sin x - 0{,}2x = 0$	
10	$10\cos x - 0{,}1x^2 = 0$	
11	$2\lg(x+7) - 5\sin x = 0$	
12	$4\cos x + 0{,}3x = 0$	
13	$5\sin 2x = \sqrt{1-x}$	
14	$1{,}2x^4 + 2x^3 - 24{,}1 = 13x^2 + 14{,}2x$	
15	$2x^2 - 5 = 2^x$	

Задание 4.2. Отделите графически один из корней данной нелинейной системы и уточните его с помощью программы для компьютера с точностью 10^{-3}:

1) методом простой итерации;

2) методом Ньютона.

1. $\begin{cases} x_2 - \sin x_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 = -1, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 0, \quad x_1, x_2, x_3 > 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1^3 - x_2 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 = 0{,}1, \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 = -0{,}2, \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 0{,}3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 \cos x_1 - x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_2 - 2x_1e^{-x_1} = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 < 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0, \quad x_2 < 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2\sin x_1 + x_2 = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3^2 = 1, \\ x_1^2 + 2x_2^2 - x_3 = 0, \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 = 1, \quad x_1, x_2 > 0, \quad x_3 < 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_2 - \sqrt{x_1 + 1} = 0, \\ x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 = -1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_2 - 0{,}5\ln(x_1 + 1) = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x_1}{1 + 2x_1^2} - 2x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1 < 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} e^{x_1} + 2{x_2}^2 = 4, \\ {x_1}^2 + 3{x_2}^2 = 1, \quad x_1 > 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_2 + 1{,}5\cos(x_1 - 1) = 1, \\ 0{,}4{x_1}^2 + 0{,}6{x_2}^2 = 1, \quad x_2 > 0. \end{cases}$

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

5.1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Численные методы решения задачи Коши

$$y' = f(x,y), \tag{5.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{5.2}$$

позволяют найти решение в виде таблицы: в точках $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, называемых узлами сетки, нужно найти приближения $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, для значений точного решения $y(x)$. Везде в дальнейшем через y_n обозначается приближенное решение задачи Коши (5.1), (5.2) в узле x_n. На практике, как правило, решение $y(x)$ нужно найти на каком-то конечном отрезке $[x_0, x_0 + H]$.

5.1.1. Метод Эйлера

Приближенные значения $y_n \approx y(x_n)$ вычисляются последовательно по формулам

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{5.3}$$

где $h = x_{n+1} - x_n$ – шаг сетки.

При этом искомая интегральная кривая $y(x)$, проходящая через точку (x_0, y_0), заменяется ломаной в точках (x_n, y_n). Каждое звено ломаной имеет направление, совпадающее с направлением интегральной кривой, которая проходит через точку (x_n, y_n). Поэтому метод Эйлера часто называют методом ломаных.

Для оценки погрешности метода на практике пользуются двойным пересчетом: расчет на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ повторяют с шагом $h/2$ и оценивают погрешность более точного решения y_{n+1}^* (при шаге $h/2$) по формуле

$$|y_{n+1}^* - y(x_{n+1})| \approx |y_{n+1}^* - y_{n+1}|.$$

Пример 5.1. Применяя метод Эйлера, составить на отрезке $[0, 1]$ таблицу значений решения уравнений $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ с начальным условием $y(0) = 1$, выбрав шаг $h = 0{,}2$.

Решение. Здесь $f(x, y) = y - \dfrac{2x}{y}$. По формуле (5.3)

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}2\left(y_n - \frac{2x_n}{y_n}\right), \quad x_n = 0 + 0{,}2n,$$

$$y_0(0) = 1,$$

$$y_1(0{,}2) = 1 + 0{,}2\left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right) = 1{,}2,$$

$$y_2(0{,}4) = 1{,}2 + 0{,}2\left(1{,}2 - \frac{2 \cdot 0{,}2}{1{,}2}\right) = 1{,}3733,$$

$$y_3(0{,}6) = 1{,}3733 + 0{,}2\left(1{,}3733 - \frac{2 \cdot 0{,}4}{1{,}3733}\right) = 1{,}5316,$$

$$y_4(0{,}8) = 1{,}5316 + 0{,}2\left(1{,}5316 - \frac{2 \cdot 0{,}6}{1{,}5316}\right) = 1{,}6812,$$

$$y_5(1{,}0) = 1{,}6812 + 0{,}2\left(1{,}6812 - \frac{2 \cdot 0{,}8}{1{,}6812}\right) = 1{,}8271.$$

Для сравнения полученного результата найдем точное решение исходного уравнения. Это уравнение Бернулли, его решение будем искать в виде $y = uv$.

$$u'v - uv' - uv = -\frac{2x}{uv},\ u'v - u(v' - v) = -\frac{2x}{uv},\ v' - v = 0,\ \frac{dv}{dx} = v,\ \frac{dv}{v} = dx,$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int dx,\ \ \ln|v| = x,\ \ v = e^x,\ \ \frac{du}{dx}\cdot e^x = -\frac{2x}{ue^x},\ \ udu = -2xe^{-2x}dx,$$

$$\int udu = -\int 2xe^{-2x}dx,\ \frac{u^2}{2} = e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + C,\ u^2 = e^{-2x}(2x+1) + 2C,$$

$$u = \sqrt{e^{-2x}(2x+1) + 2C},\ y = e^x\sqrt{e^{-2x}(2x+1) + 2C},\ 1 = \sqrt{1 + 2C},$$

$$1 = 1 + 2C,\ \ C = 0,\ \ y = \sqrt{2x+1}.$$

Составим таблицу.

i	x_n	y_n	Точное решение $y = \sqrt{2x+1}$
0	0	1,0000	1,0000
1	0,2	1,2000	1,1832
2	0,4	1,3733	1,3416
3	0,6	1,5316	1,4832
4	0,8	1,6812	1,6125
5	1,0	1,8271	1,7301

Из таблицы видно, что абсолютная погрешность составляет $0{,}0951$, т.е. относительная погрешность составляет $5{,}2\,\%$.

5.1.2. Метод Рунге–Кутта

Одним из самых распространенных методов решения задачи Коши является метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности. Данный метод описывается следующими соотношениями:

$$\Delta y_{n+1} = y_n + \Delta y_n ,$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{6}(K_1^{(n)} + 2K_2^{(n)} + 2K_3^{(n)} + K_4^{(n)}),$$

где $K_1^{(n)} = hf(x_n, y_n)$, $K_2^{(n)} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1^{(n)}}{2}\right)$,

$$K_3^{(n)} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2^{(n)}}{2}\right), \quad K_4^{(n)} = hf\left(x_n + h, y_n + K_3^{(n)}\right).$$

Все вычисления удобно располагать в таблице.

i	x	y	$K = hf(x,y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

Порядком (или степенью) точности метода Рунге–Кутта называют такое число s, для которого погрешность приближенного равенства $\Delta y_n \approx y(x_{n+1}) - y(x_n)$ будет величиной порядка h^{s+1}. Для нашего метода погрешность будет величиной порядка h^5.

5.1.3. Порядок заполнения таблицы

1. Записываем в первой строке таблицы данные значения x_0, y_0.

2. Вычисляем $f(x_0, y_0)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_1^{(0)}$.

3. Записываем во второй строке таблицы $x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$.

4. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_2^{(0)}$.

5. Записываем в третьей строке таблицы $x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$.

6. Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_3^{(0)}$.

7. Записываем в четвертой строке таблицы $x_0 + h,\ y_0 + K_3^{(0)}$.

8. Вычисляем $f\left(x_0 + h,\ y_0 + K_3^{(0)}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_4^{(0)}$.

9. В столбец Δy записываем числа $K_1^{(0)}$, $2\,K_2^{(0)}$, $2\,K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$.

10. Суммируем числа, стоящие в столбце Δy, делим на 6 и заносим в таблицу в качестве Δy_0.

11. Вычисляем $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. Затем все вычисления продолжаем в том же порядке, принимая за начальную точку (x_1, y_1).

Заметим, что шаг сетки можно менять при переходе от одной точки к другой. Для контроля правильности выбора шага h вычисляют дробь

$$\theta = \left|\frac{K_2^{(n)} - K_3^{(n)}}{K_1^{(n)} - K_2^{(n)}}\right|.$$

Величина θ не должна превышать нескольких сотых, в противном случае шаг следует уменьшить. Оценка погрешности метода очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного пересчета по формуле

$$| y_n^* - y(x_n) | \approx \frac{| y_n^* - y_n |}{15},$$

где $y(x_n)$ – значение точного решения уравнения (5.1) в точке x_n, а y_n^*, y_n – приближенные значения, полученные с шагом $h/2$ и h.

Пример 5.2. Методом Рунге–Кутта найти решение уравнения $y' = \frac{2}{x} y + x$ с начальным условием $y(1) = 0$ на отрезке $[1; 1{,}5]$, приняв шаг $h = 0{,}1$.

Решение. Решение и результаты вычислений приведены в таблице.

i	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$K = hf(x_n, y_n)$	Δy_n
0	1	0	1	0,1	0,1
	1,05	0,05	1,145238	0,114524	0,229048
	1,05	0,057262	1,159071	0,115907	0,231814
	1,1	0,115907	1,310740	0,131074	0,131074
					0,115323
1	1,1	0,115323	1,309678	0,130968	0,130968
	1,15	0,180807	1,464447	0,146445	0,292889
	1,15	0,188546	1,477906	0,147791	0,295581
	1,20	0,263114	1,638523	0,163852	0,163852
					0,147215
2	1,2	0,262538	1,637563	0,163756	0,163756
	1,25	0,344416	1,801066	0,180107	0,360213
	1,25	0,352591	1,814146	0,181415	0,362829
	1,3	0,443953	1,983005	0,198301	0,198301
					0,180805
3	1,3	0,443388	1,982135	0,198214	0,198214
	1,35	0,542495	2,153696	0,215370	0,430739
	1,35	0,551073	2,166404	0,216640	0,433281
	1,4	0,660028	2,342897	0,234290	0,234290
					0,216087
4	1,4	0,659475	2,342107	0,234211	0,234211
	1,45	0,776580	2,521146	0,252115	0,504229
	1,45	0,785533	2,533493	0,253349	0,506699
	1,50	0,912824	2,717099	0,271701	0,271701
					0,252807
5	1,5	0,912283			

Индивидуальное задание № 5

Задание 5.1. Численно решите дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ с данным начальным условием $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a,b]$ с шагом $h = 0{,}1$:

1) методом Эйлера;

2) методом Рунге–Кутта четвертого порядка точности.

Результаты сравните со значениями точного решения.

Вариант	$f(x,y)$	x_0	y_0	a	b
1	$x+y$	0	0,8	0	1
2	$x+\cos y$	1,8	2	1,8	2,8
3	e^x+y	0	1,2	0	1
4	$xy+\sin x$	0	2	0	1
5	$x+3\sin y/3$	1,6	2	1,6	2,6
6	e^{x+y}	0	–1	0	1
7	$xy+e^x$	–1	0,5	–1	0
8	$x+y^2$	–2	0	–2	–1
9	$\sin(x-y)$	1	3	1	2
10	$\cos(x+y)$	2	0	2	3
11	$y+\cos x$	2	0	2	3
12	x^2+y	1	0	1	2
13	$x+e^y$	1	–1	1	2
14	$x+\sin y$	1,5	3	1,5	2,5
15	x^2+y^2	0	0	0	1

6. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1. Графическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования

6.1.1. Основная задача линейного программирования

Задана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6.1}$$

и линейная функция $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ относительно неизвестных. Требуется найти такое неотрицательное решение $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \dots,$ $x_n \geq 0$ заданной системы (6.1), при котором функция z принимает минимальное значение.

Система (6.1) – это система ограничений данной задачи. Система, в которой все ограничения представляют собой уравнения, называется системой канонического вида.

В математической постановке основной задачи линейного программирования выделяются три составные части: целевая функция, система ограничений и условия неотрицательности переменных.

Во многих задачах ограничения, которые наложены на переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ задаются в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \tag{6.2}$$

Любую задачу с ограничениями вида (6.2) можно привести к ограничениям вида (6.1). Для этого добавим к левой части первого неравенства некоторую неотрицательную величину x_{n+1}, к левой части второго неравенства – неотрицательную переменную x_{n+2} и т.д., к левой части m-го неравенства – неотрицательную переменную x_{n+m}. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Каждое решение системы неравенств (6.2) удовлетворяет системе уравнений (6.3) и наоборот.

В том случае, если ограничения заданы в виде неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases} \qquad (6.4)$$

можно отнять от левых частей первого, второго, ..., m-го неравенств соответственно неотрицательные переменные x_{n+1}, x_{n+2},..., x_{n+m}. В результате получим систему ограничений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

Между задачами минимизации и максимизации существует связь. Очевидно, неотрицательное решение, минимизирующее линейную функцию Z, одновременно максимизирует линейную функцию $-Z$, ибо $\min Z = -\max(-Z)$.

Оптимальное решение (если оно вообще существует) не обязательно единственно, возможны случаи, когда существует бесчисленное множество оптимальных решений.

6.1.2. Графическая интерпретация задачи линейного программирования

Рассмотрим систему неравенств (6.4). Каждое из неравенств определяет некоторое полупространство, а пересечение (общая часть) m полупространств определяет некоторую область M в n-мерном пространстве. Область M является выпуклой, так как выпукло любое из образующих ее полупространств. Эта область, являющаяся пересечением конечного числа полупространств, может быть ограниченной и неограниченной. Ограниченную область называют выпуклым многогранником, а неограниченную – многогранной областью.

Рассмотрим систему неравенств с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + C_1 \ge 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + C_2 \ge 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx_1 + b_mx_2 + C_m \ge 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Первое неравенство определяет некоторую полуплоскость P_1, второе – полуплоскость P_2, m-е – полуплоскость P_m. В прямоугольной системе координат x_1Ox_2 прямые $a_kx_1 + b_kx_2 + C_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$ разбивают всю плоскость на две полуплоскости, в одной из которых выполняется неравенство $a_kx_1 + b_kx_2 + C_k \ge 0$, а в другой – неравенство $a_kx_1 + b_kx_2 + C_k \le 0$. Сами прямые считаются принадлежащими каждой из двух указанных полуплоскостей. Область решений каждого неравенства определим подстановкой начала координат.

Если какая-либо пара чисел (x_1, x_2) удовлетворяет всем неравенствам системы (6.5), то соответствующая точка $A(x_1, x_2)$ принадлежит пересечению (общей части) полуплоскостей $P_1, P_2, \dots, P_m$. Пересечение конечного числа полуплоскостей есть многоугольная область M (рис. 6.1).

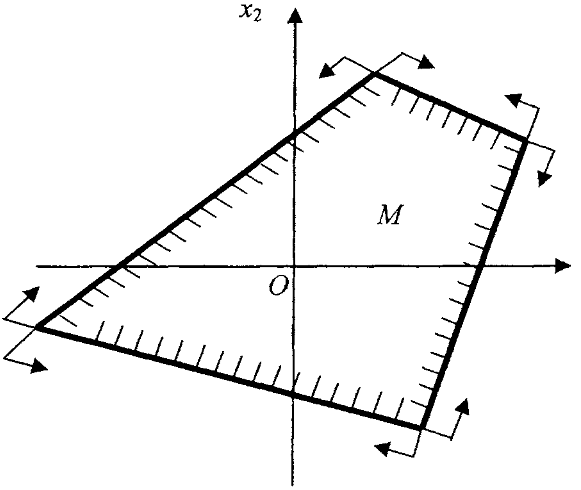


Рис. 6.1

Возможен случай, когда нет ни одной точки, принадлежащей одновременно всем рассматриваемым полуплоскостям, т.е. область «пуста». Это означает, что система (6.5) несовместна.

Пример 6.1. Найти область решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 9, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ \qquad x_2 \leq 5. \end{cases}$$

Решение. Заменив знаки неравенств на знаки равенств, получим систему уравнений четырех прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 9, \text{ (I)} \\ 2x_1 - 3x_2 = 8, \text{ (II)} \\ -x_1 + x_2 = 2, \text{ (III)} \\ \qquad x_2 = 5. \text{ (IV)} \end{cases}$$

Учтем также условия целочисленности: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Областью решений системы неравенств является многоугольник $ABCD$ (рис. 6.2).

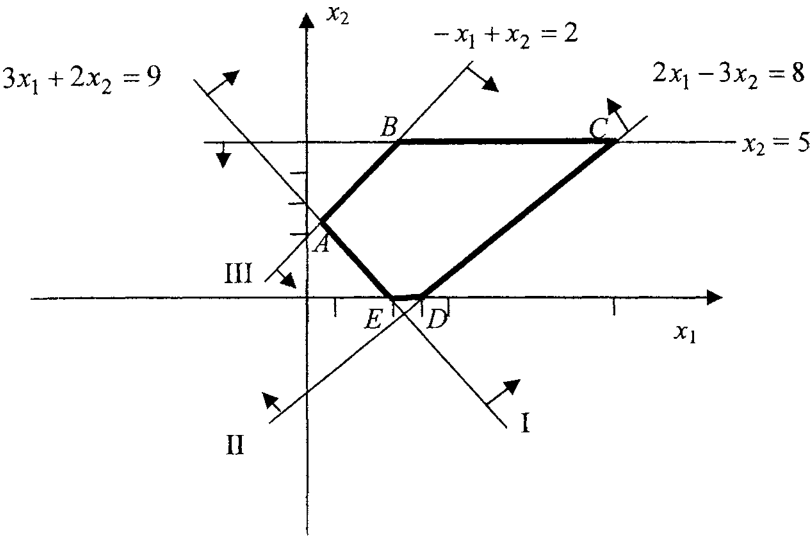


Рис. 6.2

Пример 6.2. Найти область решений данной системы неравенств:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 4. \end{cases}$$

Решение. Заменив знаки неравенств на знаки равенств, получим систему уравнений трех прямых:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 10, & \text{(I)} \\ x_1 + x_2 = 5, & \text{(II)} \\ 2x_1 - x_2 = 4. & \text{(III)} \end{cases}$$

Построим эти прямые. Найдем точки пересечения (рис. 6.3).

$$A:\begin{cases} I \\ II \end{cases};\begin{cases} -x_1+2x_2=10 \\ x_1+x_2=5 \end{cases} \Rightarrow A(0;5),$$

$$B:\begin{cases} I \\ III \end{cases};\begin{cases} -x_1+2x_2=10 \\ 2x_1-x_2=4 \end{cases} \Rightarrow B(6;\,8),$$

$$C:\begin{cases} II \\ III \end{cases};\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1-x_2=4 \end{cases} \Rightarrow C(3;\,2).$$

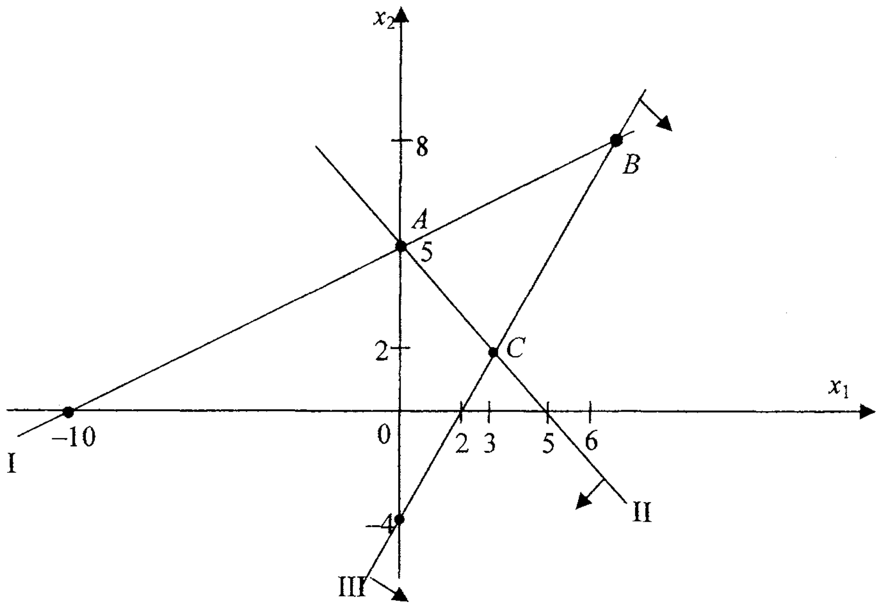


Рис. 6.3

В данном случае не существует ни одной точки, общей для всех трех полуплоскостей. Это означает, что данная система неравенств не имеет решения (несовместна).

6.1.3. Графическое решение задачи линейного программирования

Пусть задана система m линейных неравенств с двумя неизвестными x_1 и x_2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \geq 0, \end{cases} \tag{6.6}$$

а также линейная функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 . \tag{6.7}$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы (6.6)

$$x_1 \geq 0 , \quad x_2 \geq 0 \tag{6.8}$$

выбрать такое, которое обращает линейную форму (6.7) в максимум.

Область решений систем (6.6), (6.8) есть некоторая выпуклая многоугольная область на плоскости.

Приравняем выражение для Z к какой-либо постоянной

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c . \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) на плоскости определяет прямую линию, в точках которой функция принимает одно и то же фиксированное значение, а именно: c. Такая прямая называется прямой уровня функции Z, отвечающей значению c. Если для Z принять другую постоянную, получим другую линию уровня.

Равенство (6.9) геометрически представляет собой семейство параллельных прямых. Будем перемещать прямую MN параллельно самой себе в направлении увеличения Z (или в направлении уменьшения Z, если требуется вычислить минимум линейной формы).

При этом возможны два случая. Параллельное перемещение приводит прямую в такое положение, когда у нее окажется одна общая точка с многоугольником – вершина. Координаты этой точки дают максимум функции (6.7). Может оказаться, что прямая будет параллельна одной из сторон многоугольника. В таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны BC многоугольника (рис. 6.4).

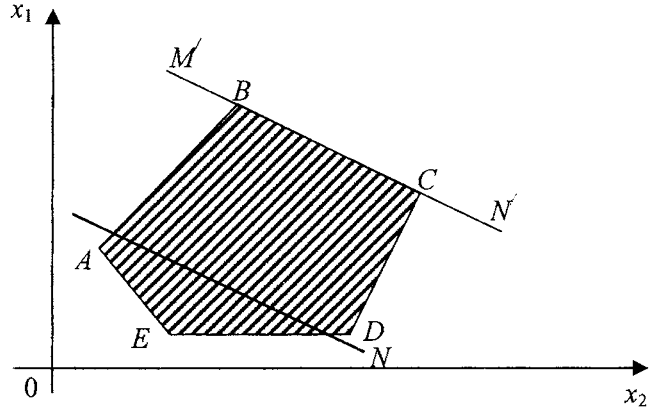


Рис. 6.4

Пример 6.3. Решить графически. Найти $\min Z = 2x_1 - 10x_2$ при следующих ограничениях: $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

Решение. Заменив знаки неравенств, получим уравнения четырех прямых:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, & \text{(I)} \\ x_1 - 5x_2 = -5, & \text{(II)} \\ x_1 = 0, & \text{(III)} \\ x_2 = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Областью решений данной системы неравенств является неограниченная фигура. Точки $O(0;0)$, $A(x_1;x_2)$ являются вершинами полученной области решений. Так как $A(x_1;x_2)$ – точка пересечения двух прямых I и II, то для нахождения ее координат решаем систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - 5x_2 = -5 \end{cases} \quad x_1 = x_2 = \frac{5}{4}, \quad A = \left(\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right).$$

Вычисляем значения функции Z в точках $O(0;0)$ и $A\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)$:

$$Z_A = 2\cdot\frac{5}{4} + (-10)\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{2} - \frac{25}{2} - 10;$$

$$Z_0 = 2\cdot 0 - 10\cdot 0 = 0.$$

Отсюда $Z_{\min} = 10$ в $A\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)$ (рис. 6.5).

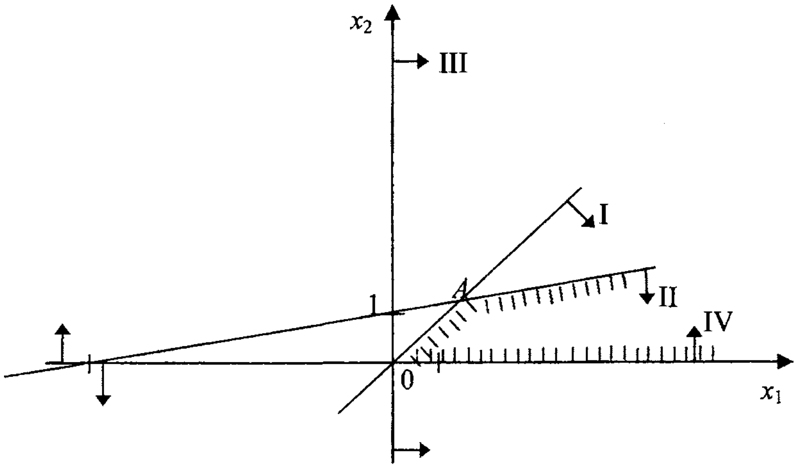


Рис. 6.5

6.2. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП: $\min Z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{6.10}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

В более компактной форме систему ограничений можно представить в виде

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \ldots + \vec{A}_n x_n = \vec{B},$$

где $\vec{A}_j$ – j-й вектор-столбец, координатами которого являются коэффициенты при неизвестном x_j; $\vec{B}$ – вектор-столбец свободных членов системы ограничений.

Будем называть решением (планом) ЗЛП вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений задачи и условию $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. План задачи, для которого линейная форма достигает минимума (или максимума), является оптимальным.

Пусть система ограничений (6.10) имеет предпочтительный вид, т.е. при неотрицательной правой части $b_i \geq 0$ левая часть каждого уравнения содержит одну переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения-равенства – с коэффициентом, равным нулю. Начальный опорный такой ЗЛП имеет вид $\vec{x}_0 = (b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; 0; \ldots; 0)$. Значение целевой функции $z(\vec{x}_0) = \vec{c}_Б \cdot \vec{B} = \Delta_0$. Обозначим $\Delta_j = \vec{c}_Б \vec{A}_j - \vec{c}_j$, где $\vec{c}_Б = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

Если все $\Delta_j \le 0$, то опорный план $\vec{x}_0$ оптимален. Пусть существует j_0, для которого $\Delta_j > 0$. Вектор-столбец $\vec{A}_j$, для которого $\Delta_{j_0} > 0$, называется разрешающим, соответствующая переменная x_{j_0} – перспективной. Вектор $\vec{A}_j$ следует ввести в новый базис. Невырожденный план задачи должен содержать ровно m компонент, поэтому необходимо определить, какой вектор нужно вывести из базиса. Для этого среди отношений $\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}$ $(i = 1,2,...,k)$ найдем наименьшее симплексное отношение $\Theta = \min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}$ – минимальное отношение координат b_i исходного плана соответственно к положительным элементам a_{ij_0} разрешающего столбца. Если это условие выполняется при нескольких i, то в качестве i_0 можно выбрать любое. Строку i_0 называют разрешающей, элемент $a_{i_0 j_0}$ – разрешающим (или ключевым). Переменная x_{i_0}, присутствующая в базисе, является неперспективной, ее следует вывести из базиса. Новый базис будет состоять из переменных $x_1, x_2, ..., x_{i_0 - 1}, x_{j_0}, x_{i_0 + 1}, ..., x_n$. В результате получаем новый опорный план $\vec{x}_1$ лучший (нехудший) $\vec{x}_0$, в котором переменная x_{i_0} заменена на x_{j_0}. Далее процесс повторяется. Проверяем, является ли план $\vec{x}_1$ оптимальным. Если да, то задача решена. Если нет, то переходим к нехудшему опорному плану $\vec{x}_2$, смежному с $\vec{x}_1$ и т.д.

Преобразование ЗЛП к новому базису назовем симплексным преобразованием.

Правила перехода к следующей симплексной таблице.

1. Элементы строки i_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, деленным на разрешающий элемент:

$$b'_{i_0} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}, \quad a'_{i_0 j} = \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

2. Элементы разрешающего столбца j_0 новой таблицы равны нулю, за исключением $a'_{i_0 j_0}=1$: $a'_{ij_0}=0\ (i\neq i_0)$, $a'_{i_0 j_0}=1$.

3. Чтобы найти любой другой элемент новой симплексной таблицы, нужно воспользоваться правилом прямоугольника. Для этого в исходной таблице выделяют прямоугольник, вершинами которого служат нужные для вычисления элементы. Диагональ, содержащую разрешающий и искомый элементы новой таблицы, называют главной, а другую – побочной. Чтобы получить элемент $a'_{ij_0}\ (i=i_0, j\neq j_0)$ новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и полученное число разделить на разрешающий элемент, выделенный рамкой. Это правило прямоугольника (рис. 6.6).

$$b'_i=\frac{b_i a_{i_0 j_0}-b_{i_0}a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}},\ a'_{ij}=\frac{a_{ij}a_{i_0 j_0}-a_{i_0 j}a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}},\quad \left(i\neq i_0, j\neq j_0\right).\ (6.11)$$

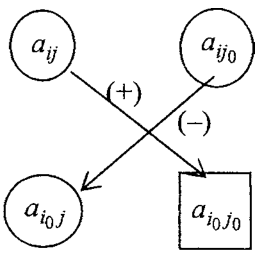


Рис. 6.6

4. По этому же правилу могут быть вычислены все элементы индексной строки $\Delta'_j (j=1,2,...,n)$ и новое значение целевой функции

$$\Delta'_j=\frac{\Delta_j\cdot a_{i_0 j_0}-\Delta_{j_0}\cdot a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}},\ \Delta'_0=\frac{\Delta_0\cdot a_{i_0 j_0}-\Delta_{j_0}\cdot b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}.\qquad (6.12)$$

Шаг симплексного метода, позволяющий перейти от одного опорного плана к другому нехудшему, называется итерацией. Таким образом, симплексный метод является итерационным методом последовательного улучшения плана.

Пример 6.4. Найти минимум линейной формы $Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ при условиях

$$\begin{cases} \underline{x_1} + 3x_2 - x_3 \qquad + 2x_5 \qquad = 7, \\ \quad - 2x_2 + 4x_3 + \underline{x_4} \qquad\qquad = 2, \\ \quad - 4x_2 + 3x_3 \quad + 8x_5 + \underline{x_6} = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, ..., 6).$$

Решение. Задача поставлена в каноническом виде. Система ограничений имеет предпочтительный вид, так как каждое уравнение содержит переменную с коэффициентом, равным единице, которая во все остальные уравнения входит с коэффициентом, равным нулю. Это переменные x_1, x_4, x_6. Они и составят базис. Заносим условие задачи в симплексную таблицу.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			0	1	–3	0	2	0
x_1	0	7	1	3	–1	0	2	0
x_4	0	2	0	–2	4	1	0	0
x_6	0	10	0	–4	3	0	8	1
$z_j - c_j$		0	0	–1	3	0	–2	0

В столбце БП записываем базисные переменные. Столбец $\vec{C}_Б$ содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Для нашего случая $c_1 = 0, c_4 = 0, c_6 = 0$. Столбец $\vec{B}$ – столбец свободных членов системы ограничений b_i. Основное поле таблицы занимают коэффициенты a_{ij} системы ограничений. Остановимся подробнее на заполнении индексной строки $z_j - c_j$. Здесь расположено значение функции цели для начального опорного плана $\vec{x}_0$, т.е. $Z(\vec{x}_0) = \Delta_0 = \vec{C}_Б \cdot \vec{B}$ и оценки индексной строки $\Delta j = \vec{C}_Б \vec{A}_j - c_j$:

$$\Delta_0 = 0 \cdot 7 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 10 = 0;$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) - 1 = -1;$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 - (-3) = 3;$$

$$\Delta_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + -0 = 0;$$

$$\Delta_5 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 8 - 2 = -2;$$

$$\Delta_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

Свободные переменные полагаем равными нулю: $c_1 = c_4 = c_6 = 0$, значение линейной формы равно нулю.

Поскольку отыскивается минимум задачи, оптимальный план будет достигнут, когда $z_j - c_j \le 0$. В данном случае одна оценка $z_3 - c_3 = 3 > 0$. Эта оценка соответствует столбцу при переменной x_3. Этот столбец и назначим разрешающим. Для определения разрешающей строки находим минимальное симплексное отношение:

$$\Theta = \min_{a_{ij_0} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij_0}} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{4}, \frac{10}{3} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Оно соответствует второй строке, которая и будет разрешающей. Следовательно, элемент $a_{23} = 4$ – разрешающий. Переменную x_4 выведем из базиса, а x_3 введем в базис. Разрешающую строку делим на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца заполняем нулями, кроме $a_{23} = 1$, а все остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			0	1	–3	0	2	0
x_1	0	$\frac{15}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	2	0
x_3	–3	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	$\frac{17}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1
$z_j - c_j$		$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	–2	0

Например, $b_1' = \frac{7 \cdot 4 - 2 \cdot (-1)}{4} = \frac{15}{2}$, $b_3' = \frac{10 \cdot 4 - 2 \cdot 3}{4} = \frac{17}{2}$, $a_{11}' = \frac{1 \cdot 4 - 0 \cdot (-1)}{4} = 1$ и т.д. (итерация 1). По этому же правилу заполняются оценки индексной строки, например:

$$\Delta_0 = \frac{0 \cdot 4 - 2 \cdot 3}{4} = \frac{-3}{2}, \quad \Delta_1 = \frac{0 \cdot 4 - 0 \cdot 3}{4} = 0,$$

$$\Delta_2 = \frac{-1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3}{4} = \frac{1}{2}, \ldots, \quad \Delta_5 = \frac{4 \cdot 0 - 3 \cdot 0}{4} = 0.$$

Так как существует положительная оценка $\Delta_2 = \frac{1}{2} > 0$, опорный план $x_1 = \left(\frac{15}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; 0; \frac{17}{2}\right)$, соответствующий значению линейной формы, равному $-\frac{3}{2}$, неоптимален. Введем в базис x_2. Минимальное симплексное отношение $\Theta = \min\limits_{a_{i2}>0} \frac{b_i}{a_{i2}} = \frac{15}{2} : \frac{5}{2} = 3$ соответствует первой строке. Разрешающий элемент $a_{12} = \frac{5}{2}$. Переходим к следующему опорному плану $\vec{x}_2$. Для этого разрешающую строку $i=1$ делим на разрешающий элемент $a_{12}=\frac{5}{2}$. Разрешающий столбец $j_0=2$ заполняем нулями, кроме $a_{12}=1$. Остальные элементы симплексной таблицы (итерация 2) пересчитываем по правилу прямоугольника (6.11), (6.12) аналогично предыдущему.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			0	1	–3	0	2	0
x_2	1	3	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0
x_3	–3	2	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0
x_6	0	16	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	10	1
z_j-c_j		–3	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0

Для второй итерации критерий оптимальности выполняется, т.к. $\Delta_j<0$. Опорный план $\vec{x}_2$ оптимален. Следовательно, не существует нового допустимого решения системы линейных уравнений, при котором линейная форма задачи принимала бы меньшее значение, чем $z(\vec{x}_2)=-3$, т.е. минимум линейной формы $z_{\min}=-3$ достигается при плане $x_2=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(0,3,2,0,0,16)$.

Пример 6.5. Найти максимум линейной формы $z=4x_1+2x_2$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 \le 5, \\ 2x_1+x_2\le 14, \\ x_1+x_2\le 10, \\ \quad x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 5, \\ 2x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad = 14, \\ x_1 + x_2 \quad + x_5 \quad = 10, \\ \quad x_2 \quad + x_6 = 8, \end{cases} \qquad x_j \ge 0 \ (j = 1,2,...,6),$$

$$z = 4x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 .$$

Заносим условие задачи в симплексную таблицу.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	2	0	0	0	0
x_3	0	5	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0
x_4	0	14	2	1	0	1	0	0
x_5	0	10	1	1	0	0	1	0
x_6	0	8	0	1	0	0	0	1
$z_j - c_j$		0	–4	–2	0	0	0	0

Индексная строка заполнялась следующим образом:

$$\Delta_0 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 14 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 8 = 0,$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 4 = -4,$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 2 = 2,$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0 \text{ и т.д.}$$

Две оценки отрицательны, $\min_j (z_j - c_j) = z_1 - c_1 = -4$.

Введем в базис x_1. Минимальное симплексное отношение $\Theta = \min\left\{\frac{5}{1}, \frac{14}{2}, \frac{10}{5}\right\} = 5$ соответствует первой строке. Разрешающий элемент $a_{11} = 1$.

Переходим к следующему опорному плану. Разрешающий столбец $j_0 = 1$ заполняем нулями, кроме $a_{11} = 1$. Остальные элементы симплексной таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника (6.11), (6.12).

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	2	0	0	0	0
x_1	4	5	1	0	1	0	0	0
x_4	0	4	0	$\boxed{1}$	–2	1	0	0
x_5	0	5	0	1	–1	0	1	0
x_6	0	8	0	1	0	0	0	1
$z_j - c_j$		20	0	–2	4	0	0	0

Для этого плана критерий оптимальности не выполняется, т.к. $z_2 - c_2 = -2 < 0$. Эта оценка соответствует столбцу при переменной x_2. Находим минимальные симплексное отношение $\Theta = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{8}{1}\right\} = 4$.

Оно соответствует переменной x_4. Переменную x_2 выведем из базиса, а x_4 введем в базис.

БП	$\vec{C}_Б$	$\vec{B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			4	2	0	0	0	0
x_1	4	5	1	0	1	0	0	0
x_2	2	4	0	1	–2	1	0	0
x_5	0	1	0	0	1	–1	1	0
x_6	0	4	0	0	2	–1	0	1
$z_j - c_j$		28	0	0	0	2	0	0

Опорный план $\vec{x}_2$ оптимален, т.к. критерий оптимальности выполняется: все $\Delta_j = z_j - c_j \geq 0$. Следовательно, не существует нового допустимого решения системы линейных уравнений, при котором линейная форма приняла бы большее значение, чем $z(\vec{x}_2)=28$, т.е. максимум линейной формы $z_{\max}=28$ достигается при плане $\vec{x}_2=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(5,4,\ 0,0,\ 1,\ 4)$.

Индивидуальное задание № 6

Задание 6.1. Найдите минимум (или максимум) линейной функции при следующих ограничениях:

1. $$z=2x_1-10x_2\to\min \qquad \begin{cases} x_1-x_2\ge 0,\\ x_1-5x_2\ge -5,\\ x_1\ge 0,\\ x_2\ge 0;\end{cases}$$

2. $$z=3x_1+4x_2\to\max \qquad \begin{cases} 2x_1+x_2\le 16,\\ x_1+x_2\le 10,\\ 0\le x_1\le 7,\\ 0\le x_2\le 6;\end{cases}$$

3. $$z=x_1-x_2\to\min \qquad \begin{cases} x_1+x_2\le 12,\\ 3x_1-x_2\ge 6,\\ 3x_1+4x_2\ge 0,\\ x_1\ge 0,\\ x_2\ge 0;\end{cases}$$

4. $$z=x_1 4x_2\to\min \qquad \begin{cases} x_1+2x_2\le 4,\\ x_1\le 3,\\ x_1-2x_2\ge -1,\\ x_1\ge 0,\\ x_2\ge 0;\end{cases}$$

5. $$z=2x_1-x_2\to\min \qquad \begin{cases} 2x_1-x_2\le 12,\\ x_1+x_2\ge 6,\\ x_1+3x_2\ge 1,\\ x_1\ge 0,\\ x_2\ge 0;\end{cases}$$

6. $$z=x_1+2x_2+3\to\min \qquad \begin{cases} x_1+2x_2\le 4,\\ x_1\le 2,\\ x_2\le 1,\\ x_1\ge 0,\\ x_2\ge 0;\end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

7. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 40, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 0 \le x_2 \le 3; \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

8. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$z = -x_1 + 4x_2 \to \max$$

9. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

10. $$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15, \\ x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$z = 5x_1 + 7x_2 \to \max$$

11. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 19, \\ 0 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 6; \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

12. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 0 \le x_2 \le 3; \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 \to \max$$

13. $$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + x_2 \to \min$$

14. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$z = 5x_1 + 6x_2 \to \min$$

15. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задание 6.2. Решите симплекс-методом следующую задачу линейного программирования при условии, что все переменные неотрицательны.

1. $z = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36; \end{cases}$$

2. $z = 2x_1 - 6x_2 + 3x_5 \to \max$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18; \end{cases}$$

3. $z = 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 15x_4 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 \le 25, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10, \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 26; \end{cases}$$

4. $z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7; \end{cases}$$

5. $z = x_1 + x_2 + x_4 - x_3 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 + x_6 \le 4, \\ x_2 - 2x_5 - x_6 \le 5, \\ -x_3 + 3x_5 - x_6 \le 7, \\ x_3 - x_4 - 4x_1 + 4x_2 \ge -3; \end{cases}$$

6. $z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le 2, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 3; \end{cases}$$

7. $z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 5x_5 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 5x_5 \le 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 \le 5, \\ x_1 + x_3 + x_5 \le 9; \end{cases}$$

8. $z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5, \\ x_1 - 4x_4 - 2x_3 \le 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \le 2; \end{cases}$$

9. $z = 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 17, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 \le 6; \end{cases}$$

10. $z = 2x_3 - x_4 \to \min$
$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8, \\ 2x_3 + x_5 \le 10; \end{cases}$$

11. $z = x_2 - x_1 \to \min$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5; \end{cases}$$

12. $z = -x_1 + x_2 - x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5, \\ 2x_2 + x_2 \le 3, \\ x_3 + 2x_4 \le 6; \end{cases}$$

13. $z = 2x_1 - x_2 + x_3 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 \le 5, \\ x_2 + 2x_3 + \le 7, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 \le 3; \end{cases}$$

14. $z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max$
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5; \end{cases}$$

15. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 \le 2. \end{cases}$$

7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

7.1. Метод сеток для уравнения параболического типа

7.1.1. Общие сведения

Идея метода сеток заключается в следующем: 1) область непрерывного изменения независимых переменных заменяется конечным множеством точек, называемым сеткой; 2) производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются конечно-разностными отношениями, что позволяет дифференциальное уравнение свести к системе алгебраических уравнений; 3) на основании граничных условий устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах области.

Пусть для функции двух переменных $u(x,t)$ с областью существования $\overline{D}$ аргументы x и t заключены внутри соответствующих отрезков $0 \le x \le \ell$, $0 \le t \le T$. Множество точек на плоскости xOy с координатами $x_i = ih$, $t_j = j\tau$, $(i = 0, 1, 2, ..., N; j = 0, 1, 2, ..., N_0)$ называется равномерной сеткой в области $\overline{D}$, а сами точки – узлами сетки. Значения функции $u(x,t)$ в узлах сетки $(ih, j\tau)$ будем обозначать $u(x_i, t_j) = u_i^j$. В каждом узле частные производные заменяются разностными отношениями:

а) производные первого порядка (правая разностная производная)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \sim \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \sim \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau};$$

б) производные второго порядка

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \sim \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{ij} \sim \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2}.$$

Закон написания разностных уравнений и разностных граничных условий называется разностной схемой. Разностные схемы должны удовлетворять условиям устойчивости и сходимости. Точность схемы определяется погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения, краевых и начальных условий.

7.1.2. Постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а именно: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующему уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = f(x) \quad (0 < x < s) \tag{7.2}$$

и краевым условиям

$$u(0,t)=\varphi(t)\,,\quad u(s,t)=\psi(t)\,. \tag{7.3}$$

К задаче (7.1)–(7.3) приводит, в частности, задача о распространении тепла в однородном стержне длины s. Путем введения новой переменной $\tau=a^2t$ уравнение (7.1) приводится к виду $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, поэтому в дальнейшем примем $a=1$.

7.1.3. Разностные схемы

Построим в полуполосе $t\geq 0$, $0\leq x\leq s$ два семейства параллельных прямых: $x=ih$, $t=j\tau$. Приближенно заменим в каждом внутреннем узле (x_i,t_j) производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij}\approx\dfrac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}$, а производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ одним из двух разностных отношений

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij}\approx\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij}\approx\frac{u_i^{j}-u_i^{j-1}}{\tau}.$$

Тогда для уравнения (7.1) при $a=1$ получаем два типа конечно-разностных уравнений

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}, \tag{7.4}$$

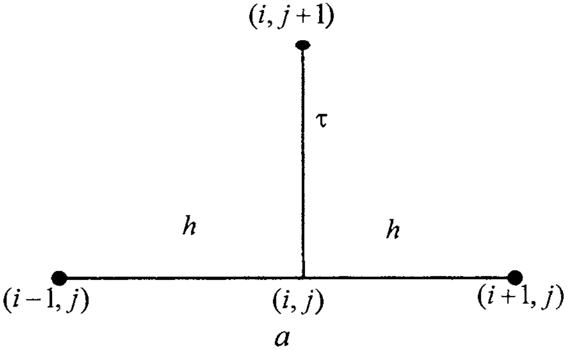
$$\frac{u_i^{j}-u_i^{j-1}}{\tau}=\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}. \tag{7.5}$$

Обозначив $\sigma = \dfrac{\tau}{h^2}$, приводим эти уравнения к виду

$$u_i^{j+1} = (1-2\sigma)u_i^j + \sigma(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j), \tag{7.6}$$

$$(1+2\sigma)u_i^j - \sigma(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1} = 0. \tag{7.7}$$

Для составления уравнения (7.4) была использована схема узлов, данная на рис. 7.1, *а* – явная схема, для уравнения (7.5) – схема узлов, данная на рис. 7.1, *б* – неявная схема.



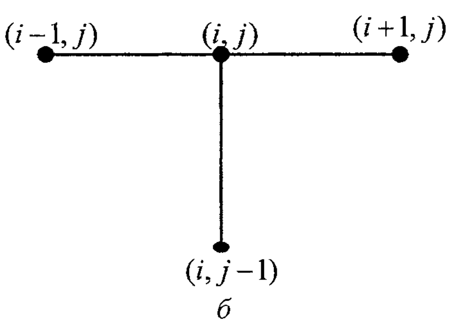


Рис. 7.1

При выборе числа σ в уравнениях (7.6), (7.7) следует учитывать два обстоятельства:

1) погрешность замены дифференциального уравнения разностным должна быть наименьшей;

2) разностное уравнение должно быть устойчивым.

Доказано, что уравнение (7.6) будет устойчивым при $0 < \sigma \le \frac{1}{2}$, а уравнение (7.7) – при любом σ. Наиболее удобный вид уравнение (7.6) имеет при $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$u_i^{j+1} = \frac{u_{i-1}^j + u_{i+1}^j}{2} \tag{7.8}$$

и при $$\sigma = \frac{1}{6}:\ u_i^{j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1}^j + 4u_i^j + u_{i+1}^j) \tag{7.9}$$

7.1.4. Оценки погрешностей

Оценки погрешностей приближенных решений, полученных из уравнений (7.7)–(7.9) в полосе $0 \le x \le s$, $0 \le t \le T$ соответственно имеют следующий вид:

$$|u - \tilde{u}| \le \frac{T}{3} M_1 h^2, \tag{7.10}$$

$$|u - \tilde{u}| \le \frac{T}{135} M_2 h^4, \tag{7.11}$$

$$|u - \tilde{u}| \le T\left(\frac{\tau}{2} + \frac{h^2}{12}\right) M_1,$$

где $\tilde{u}$ – точное решение задачи (7.1) – (7.3).

$$M_1 = \max\{|f_{(x)}^{(4)}|, |\varphi''(t)|, |\psi''(t)|\} \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le s,$$

$$M_2 = \max\{|f_{(x)}^{(6)}|, |\varphi^{(4)}(t)|, |\psi^{(4)}(t)|\} \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le s.$$

Из приведенных оценок погрешностей видно, что уравнение (7.9) дает более высокую точность решения по сравнению с уравнением (7.8). Но уравнение (7.8) имеет более простой вид. Кроме того, шаг τ по аргументу t для уравнения (7.9) должен быть значительно меньше, что приводит к большему объему вычислений. Уравнение (7.7) дает меньшую точность, но при этом шаги τ и h выбираются независимо друг от друга. Уравнения (7.8) и (7.9) позволяют вычислить значения функции $u(x,t)$ на каждом слое по явным формулам через значения на предыдущем слое. Уравнение (7.7) (неявная схема) этим свойством не обладает.

Пример 7.1. Используя разностное уравнение (7.8), найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.12}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \sin \pi x (0 \le x \le 1), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \ (0 \le t \le 0{,}025). \tag{7.13}$$

Решение. Выберем по аргументу $x = ih$ шаг $h = 0{,}1$. Так как $\sigma = \frac{1}{2}$, получаем по аргументу t шаг $\tau = h^2/2 = 0{,}005$. Записываем в таблицу начальные и краевые значения. Учитывая их симметрию, заполняем таблицу только для $x = 0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Значения функции $u(x,t)$ на первом слое находим, используя значения на начальном слое и краевые условия, по формуле (7.8) при $j = 0$:

$$u_i^1 = \frac{u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0}{2}.$$

Таким образом, получаем

$$u_1^1 = \frac{1}{2}(u_2^0 + u_0^0) = \frac{1}{2}(0{,}5878 + 0) = 0{,}2939,$$

$$u_2^1 = \frac{1}{2}(u_3^0 + u_1^0) = \frac{1}{2}(0{,}8090 + 0{,}3090) = 0{,}5590$$

и т.д. Записываем полученные значения $u_i^1 (i=1,2,3,4,5)$ во вторую строку таблицы. После этого переходим к вычислению значений на втором слое по формуле (7.8) при $j=1$:

$$u_i^2 = \frac{u_{i+1}^1 + u_{i-1}^1}{2}.$$

j	t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,3090	0,5878	0,8090	0,9511	1,0000
1	0,005	0	0,2939	0,5590	0,7699	0,9045	0,9511
2	0,010	0	0,3795	0,5316	0,7318	0,8602	0,9045
3	0,015	0	0,2658	0,5056	0,6959	0,8182	0,8602
4	0,020	0	0,2528	0,4808	0,6619	0,7780	0,8182
5	0,025	0	0,2404	0,4574	0,6294	0,7400	0,7780
$\widetilde{u}(x,t)$	0,025	0	0,2414	0,4593	0,6321	0,7431	0,7813
$\lvert\widetilde{u}-u\rvert$	0,025	0	0,0010	0,0019	0,0027	0,0031	0,0033

Подобным образом последовательно определяем значения u_i^j при $t=0{,}005$; 0,010; 0,015; 0,020; 0,025. В двух последних строках таблицы приведены значения точного решения задачи $\widetilde{u}(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$ и модуля разности $|\widetilde{u}-u|$ при $t=0{,}025$.

Для сравнения приведем оценку погрешности, полученную по формуле (7.10). Для данной задачи $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $f^{(4)}(x)=\pi^4\sin\pi x$, следовательно, $M_1=\pi^4$.

Таким образом, получаем

$$|\widetilde{u}-u| \le \frac{0{,}025}{3}\pi^4 h^2 = \frac{0{,}025}{3}\cdot 97{,}22\cdot 0{,}01 = 0{,}0081.$$

Пример 7.2. Используя уравнение (7.9), найти решение задачи (7.12), (7.13) при $0\le t\le 0{,}01$. Дать оценку погрешности полученного решения.

Решение. Выберем по аргументу x шаг $h = 0{,}1$. Так как для формулы (7.9) $\sigma = 1/6$ получаем по аргументу t шаг $\tau = \dfrac{0{,}01}{6} \approx 0{,}0017$. Заносим в таблицу начальные и краевые значения. В силу симметрии решения достаточно заполнить таблицу для $0 \le x \le 0{,}5$. Затем приступаем к вычислениям по формуле (7.9). Для первого слоя при $j = 1$ получаем $u_i^1 = \dfrac{1}{6}(u_0^0 + 4u_1^0 + u_2^0)$.

j	x / t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,309017	0,587785	0,809017	0,951057	0,000000
1	0,0017	0	0,303976	0,578196	0,795818	0,935541	0,983686
2	0,0033	0	0,299017	0,568763	0,782835	0,920278	0,967638
3	0,0050	0	0,294138	0,559484	0,770063	0,905264	0,951852
4	0,0067	0	0,289339	0,550356	0,757500	0,890495	0,936322
5	0,0083	0	0,284619	0,541377	0,745142	0,875967	0,921046
6	0,0100	0	0,279976	0,532545	0,732982	0,861676	0,906019
$\widetilde{u}(x,t)$	0,01	0	0,279975	0,532544	0,732984	0,861675	0,906018

Откуда последовательно находим

$$u_1^1 = \frac{1}{6}(0 + 4 \cdot 0{,}309017 + 0{,}587785) = 0{,}303976,$$

$$u_2^1 = \frac{1}{6}(0{,}309017 + 4 \cdot 0{,}587785 + 0{,}809017) = 0{,}578196,$$

....

$$u_5^1 = \frac{1}{6}(0{,}951057 + 4 \cdot 1 + 0{,}951057) = 0{,}983686.$$

Вычисления для последующих слоев проводятся аналогично. Для оценки погрешности по формуле (7.11) при $t = 0{,}001$ имеем $\varphi(t) = \psi(t) = 0$, $f^{(6)}(x) = \pi^6 \sin \pi x$, $M_2 = \pi^2$. Таким образом, $|u - \widetilde{u}| = \dfrac{0{,}01}{135}\pi^6 h^4 \approx \dfrac{0{,}01}{135} 958{,}6 \cdot 10^{-4} \approx 7 \cdot 10^{-6}$.

В последней строке таблицы приведены значения точного решения $\tilde{u} = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ при $t = 0{,}01$. Сравнение показывает, что погрешность полученного решения не превосходит $2 \cdot 10^{-6}$.

7.2. Метод сеток для уравнения гиперболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения колебания струны, заключающуюся в отыскании функции, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.14}$$

а также начальным условиям

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = \Phi(x) \quad (0 \le x \le s) \tag{7.15}$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(s,t) = \psi(t). \tag{7.16}$$

Так как введение переменной $\tau = at$ приводит уравнение (7.14) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.17}$$

то в дальнейшем можно принять $a = 1$.

Построив в полуполосе $t \ge 0$, $0 \le x \le s$ два семейства параллельных прямых $x = ih$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$, $t = j\tau$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$, заменяем производные в уравнении (7.17) разностными отношениями.

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

Обозначив $\alpha = \tau / h$, получим разностное уравнение (шаблон на рис. 7.2)

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \alpha^2 (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j). \tag{7.18}$$

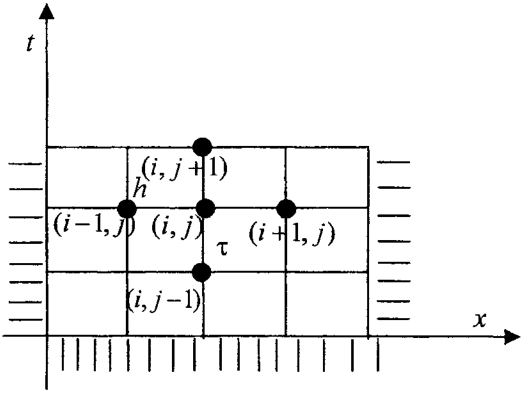


Рис. 7.2

Доказано, что при $\alpha \le 1$ это разностное уравнение устойчиво. В частности, при $\alpha = 1$ уравнение (7.18) имеет наиболее простой вид

$$u_i^{j+1} = u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - u_i^{j-1}. \tag{7.19}$$

Оценка погрешности приближенного решения полученного уравнения (7.18) в полосе $0 \le x \le s$, $0 < t \le T$ имеет вид

$$|\widetilde{u} - u| \le \frac{h^2}{12}[(M_4 h + 2M_3)T + T^2 M_4], \tag{7.20}$$

где $\widetilde{u}$ – точное решение, $M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|, \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|\right\}$, ($k = 3,4$).

Для получения уравнения (7.18) была использована схема узлов, отмеченных на рисунке. Эта схема является явной, так как уравнение (7.18) позволяет найти значение функции $u(x,t)$ на слое t_{j+1}, если известны значения на двух предыдущих слоях. Для того, чтобы найти приближенное решение задачи (7.14)–(7.16), необходимо знать значения решения на двух начальных слоях. Их можно найти из начальных условий одним из следующих способов.

Первый способ. Заменяем в начальном условии (7.15) производную $u_t(x,0)$ разностным отношением $\dfrac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \Phi(x_i) = \Phi_i$; для определения значений $u(x,t)$ на слоях $j=0$, $j=1$, получаем $u_i^0 = f_i$, $u_i^1 = f_i + \tau\Phi_i$.

Оценка погрешности значений u_i^1 в этом случае имеет вид

$$|\tilde{u}_i^1 - u_i^1| \le \frac{\alpha h}{2} M_2,$$

где $M_2 = \max\left\{\left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\right\}$.

Второй способ. Заменяем производную $u_t(x,0)$ разностным отношением $\dfrac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\tau}$, где u_i^{-1} – значение функции $u(x,t)$ на слое $j=-1$. Тогда из начальных условий (7.15) будем иметь

$$u_i^0 = f_i, \quad \frac{u_i^1 - u_i^1}{2\tau} = \Phi_i \tag{7.21}$$

Напишем разностное уравнение (7.19) для слоя $j=0$:

$$u_i^1 = u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0 - u_i^{-1}. \tag{7.22}$$

Исключив из уравнений (7.21), (7.22) значения u_i^{-1}, получим

$$u_i^0 = f_i,\ u_i^1 = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + \tau\Phi_i.$$

Оценка погрешности значений u_i^{-1} имеет вид

$$|\tilde{u}_i^1 - u_i^1| \le \frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3,$$

где $M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|, \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|\right\}$ $(k = 3,4)$.

Этот способ вычисления начальных значений рассмотрен в примере.

Третий способ. Если функция $f(x)$ имеет конечную вторую производную, то значения u_i^1 можно определить с помощью формулы Тейлора

$$u_i^1 \approx u_i^0 + \tau \frac{\partial u_i^0}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial u_i^0}{\partial t^2}. \tag{7.23}$$

Используя уравнение (7.17) и начальные условия (7.15), можем записать $u_i^0 = f_i$, $\frac{\partial u_i^0}{\partial t} = \Phi_i$, $\frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x^2} = f_i''$.

Тогда по формуле (15) будем иметь $u_i^1 \approx f_i + \tau\Phi_i + \frac{\tau^2}{2} f_i''$.

Погрешность значений u_i^1, полученных по этой формуле, имеет порядок $0(\tau^3)$.

Замечание. Аналогичным образом применяется метод сеток при решении смешанной краевой задачи для неоднородного уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$.

В этом случае разностное уравнение имеет вид

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \alpha^2(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \alpha^2 h^2 F_{ij}.$$

Пример 7.3. Методом сеток найти решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0{,}2x(1-x)\sin \pi x,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

Решение. Возьмем квадратную сетку с шагом $h = \tau = 0{,}05$. Значения $u(x,t)$ на двух начальных слоях найдем вторым способом. Учитывая, что $\Phi(x) = 0$ и $f(x) = 0{,}2x(1-\sin \pi x)$, будем иметь следующее:

$$\begin{cases} u_i^0 = f_i \\ u_i^1 = \dfrac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) \\ (i = 0,1,2,...,10). \end{cases} \qquad (7.24)$$

Порядок заполнения таблицы.

1. Вычисляем значения $u_i^0 = f(x_i)$ при $x_i = ih$ и записываем в первую строку (она соответствует значению $t_0 = 0$).

2. По формуле (7.24) находим u_i^1, используя значения u_i^0 из первой строки. Результаты записываем во вторую строку таблицы.

3. Вычисляем значения u_i^j на последующих слоях по формуле (7.19). При $j = 1$ последовательно получаем

$$u_1^2 = u_2^1 + u_0^1 - u_1^0 = 0{,}0065 + 0 - 0{,}015 = 0{,}0050,$$
$$u_{22} = u_{31} + u_{11} - u_{20} = 0{,}0122 + 0{,}0028 - 0{,}0056 = 0{,}0094,$$

....

$$u_{10}^2 = u_{11}^1 + u_9^1 - u_{10}^0 = 0{,}0478 + 0{,}0478 - 0{,}0500 = 0{,}0456.$$

Вычисления при $j = 2, 3, ...10$ проводятся аналогично. В последней строке таблицы приведены значения точного решения при $t = 0{,}5$.

t_j \ x_i	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0	0,0015	0,0056	0,0116	0,0188	0,0265	0,0340	0,0405	0,0457	0,0489	0,0500
0,05	0	0,0028	0,0065	0,0122	0,0190	0,0264	0,0335	0,0398	0,0447	0,0478	0,0489
0,10	0	0,0050	0,0094	0,0139	0,0198	0,0260	0,0322	0,0377	0,0419	0,0447	0,0456
0,15	0	0,0066	0,0124	0,0170	0,0209	0,0256	0,0302	0,0343	0,0377	0,0397	0,0405
0,20	0	0,0074	0,0142	0,0194	0,0228	0,0251	0,0277	0,0302	0,0321	0,0335	0,0338
0,25	0	0,0076	0,0144	0,0200	0,0236	0,0249	0,0251	0,0255	0,0260	0,0262	0,0265
0,30	0	0,0070	0,0134	0,0186	0,0221	0,0236	0,0227	0,0209	0,0196	0,0190	0,0186
0,35	0	0,0058	0,0112	0,0155	0,0186	0,0199	0,0194	0,0168	0,0139	0,0120	0,0115
0,40	0	0,0042	0,0079	0,0112	0,0133	0,0144	0,0140	0,0124	0,0092	0,0064	0,0054
0,45	0	0,0021	0,0042	0,0057	0,0070	0,0074	0,0074	0,0064	0,0042	0,0026	0,0013
0,50	0	–0,0001	–0,0001	0,0000	–0,0002	0,0000	–0,0002	–0,0001	–0,0002	–0,0002	–0,002
$\tilde{u}(x_i,0,5)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Индивидуальное задание № 7

Задание 7.1. Найдите приближенное решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, удовлетворяющее условиям $u(x,0)=f(x)$, $u(0,t)=\varphi(t)$, $u(1,t)=\psi(t)$, для значений $0\le t\le T$, взяв по аргументу x шаг $0\le t\le T$. В вариантах 1–8 используйте разностное уравнение (13.8), в вариантах 9–15 – разностное уравнение (13.9).

1–4. $f(x)=(ax^2+b)\sin\pi x$, $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $T=0{,}02$, где

1. $a=1{,}1$, $b=1{,}1$; **2.** $a=1{,}3$, $b=1{,}2$; **3.** $a=1{,}5$, $b=1{,}4$; **4.** $a=1{,}5$, $b=1{,}5$;

5–8. $f(x)=e^{-bx}\sin ax$, $\varphi(t)=0$, $\psi(t)=e^{-b}\sin a$, $T=0{,}02$, где

5. $a=\pi/12$, $b=0{,}1$; **6.** $a=\pi/4$, $b=0{,}2$; **7.** $a=\pi/3$, $b=0{,}4$; **8.** $a=\pi/3$, $b=0{,}5$;

9–12. $f(x)=(ax^2+b)e^{-x}$, $\varphi(t)=b$, $\psi(t)=(a+b)e^{-1}$, $T=0{,}01$, где

9. $a=1{,}1$, $b=2{,}1$; **10.** $a=1{,}3$, $b=2{,}3$; **11.** $a=1{,}5$, $b=2{,}4$; **12.** $a=1{,}5$, $b=2{,}5$;

13–15. $f(x)=x\cdot(1-x)(ax^4+b)$, $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $T=0{,}01$, где

13. $a=0{,}5$, $b=0{,}5$; **14.** $a=0{,}7$, $b=1$; **15.** $a=0{,}9$, $b=0{,}7$.

Задание 7.2. Найдите приближенное решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$, $u(0,t)=\varphi(t)$, $u(1,t)=\psi(t)$, для значений $0\le t\le 0{,}5$, $0\le x\le 1$, взяв по аргументу x шаг $h=0{,}1$.

1–5. $f(x)=(ax^2+1{,}1)\cdot\sin\pi x$, $g(x)=0$, $\varphi(t)=\psi(t)=0$, где

1. $a=1{,}1$; **2.** $a=1{,}2$; **3.** $a=1{,}3$; **4.** $a=1{,}4$; **5.** $a=1{,}5$;

6–10. $f(x)=\begin{cases}\frac{a}{b}x, & x\in[0,b],\\ \frac{+a}{1-b}(1-x), & x\in[b,1],\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}c, & x\in[d,l],\\ 0, & x\in[0,d], \text{ или } x\in[l,1]\end{cases}$

$\varphi(t)=\psi(t)=0$, где

6. $a = 1$, $b = 0{,}05$, $c = 1{,}5$, $d = 0{,}05$, $l = 0{,}45$; **7.** $a = 2$, $b = 0{,}1$, $c = 1{,}6$, $d = 0{,}1$, $l = 0{,}5$;

8. $a = 3$, $b = 0{,}15$, $c = 1{,}7$, $d = 0{,}15$, $l = 0{,}55$; **9.** $a = 4$, $b = 0{,}2$, $c = 1{,}8$, $d = 0{,}2$, $l = 0{,}6$;

10. $a = 5$, $b = 0{,}25$, $c = 1{,}9$, $d = 0{,}25$, $l = 0{,}65$;

11–15. $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, b], \\ \dfrac{2a}{c-b}(x-b), & x \in \left[b, \dfrac{b+c}{2}\right], \\ \dfrac{2a}{b-c}(x-c), & x \in \left[\dfrac{b+c}{2}, c\right], \\ 0, & x \in [c, 1], \end{cases} \quad g(x) = 0,$$

$\varphi(t) = \psi(t) = 0$, где

11. $a = 1$, $b = 0{,}05$, $c = 0{,}45$; **12.** $a = 2$, $b = 0{,}1$, $c = 0{,}5$; **13.** $a = 3$, $b = 0{,}15$, $c = 0{,}55$;

14. $a = 4$, $b = 0{,}2$, $c = 0{,}6$; **15.** $a = 5$, $b = 0{,}25$, $c = 0{,}65$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов, В. И. Вычислительные методы: в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976, 1977. – Т. 1. – 1976; Т. 2. – 1977.

2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975.

3. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Наука, 1970.

4. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М.: Наука, – 1972.

5. Сборник задач по методам вычислений / под ред. П. И. Монастырного. – Минск: Изд-во БГУ, 1983.

6. Самусенко, А. В. Практикум на ЭВМ по численным методам в режиме пакета MATHCAD / А. В. Самусенко, В. С. Мастяница, И. С. Щукина. – Минск: Изд-во БГУ, 1996.

7. Плис, А. И. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999.

8. Федосик, Е. А. Элементы числовых методов / Е. А. Федосик. – Минск: Изд-во БНТУ, 2006.

9. Практикум по численным методам / сост.: А. В. Грекова, Л. И. Кучерявенко, В. С. Марцинкевич, Е. А. Федосик. – Минск: Изд-во БНТУ, 2006.

Учебное издание

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов-заочников

С о с т а в и т е л и:
ГАБАСОВА Ольга Рафаиловна
ГРЕКОВА Анна Валентиновна
МАРЦИНКЕВИЧ Василий Станиславович и др.

Редактор И.Ю. Никитенко
Компьютерная верстка Н.А. Школьниковой

Подписано в печать 30.04.2009.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 6,8. Уч.-изд. л. 5,32. Тираж 200. Заказ 209.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.