технология, моделирование // Приборы и методы измерений, 2013 г., №2 (7). – С. 47-51.
3. В.В. Баркалин, Е.А. Белогуров, И.А. Таратын, В.В. Хатько, Я.И. Шукевич, Конечно-элементное моделирование термомеханических свойств нанопористых материалов // Нано- и микросистемная техника. – 2012. – № 1. – С. 18-24.

*УДК 535.36.*

# ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО РОДА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМ ОПТИКИ ДИСПЕРСНЫХ СРЕД

**Роговцов Н.Н.**
*Белорусский национальный технический университет*
*Минск, Республика Беларусь*

При решении разнообразных научно-технических проблем приходится сталкиваться с необходимостью построения корректных алгоритмов расчета различных специальных функций математической физики первого и второго родов. Использование рекуррентных формул для вычисления этих функций без учета общих математических свойств решений разностных уравнений (рекуррентные формулы позволяют находить частные решения таких уравнений при определенных дополнительных условиях) не всегда приводит к приемлемым по точности результатам. Это наиболее характерно для случая специальных функций, соответствующих большим значениям индексов.

Одним из наиболее эффективных методов расчета целого ряда указанных функций является использование теорий разностных уравнений, непрерывных дробей и алгоритма, предложенного в работах [1, 2]. Данный алгоритм позволяет эффективно решать характеристические уравнения теории переноса излучения. Аналитический алгоритм решения таких уравнений для случая фазовой функции, удовлетворяющей условию Гельдера, был рассмотрен в работе [1]. В работе [2] были построены качественная математическая теория и алгоритмы решения данных уравнений для квадратично суммируемых фазовых функций.

Кратко изложим алгоритм отыскания специальных функций второго рода такого вида:

$$\widetilde{Q}_{s,m}(\nu)=\int_{-1}^{1}\frac{P_{s,m}(\mu)}{1-i\nu\mu}d\mu, \qquad (1)$$

$s\in\{0,1,2,...\}=N_0,\ m\in\{0,...,s\}$.

Здесь $i$ - мнимая единица; $P_{s,m}(\mu)$ - присоединенная функция Лежандра; $\nu$ - число, которое не принадлежит подмножеству $[-i\infty,-i]\cup[i,+i\infty]$ замкнутой комплексной плоскости.

Используя (1) и рекуррентные формулы для присоединенных функций Лежандра [3], можно доказать, что последовательность

$$\left\{\widetilde{Q}_{s,m}(\nu)\right\}_{s\in\{m,m+1,...\}},$$

где $m\in N_0$, является решением следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} i\nu\widetilde{Q}_{m+1,m}(\nu)=(2m+1)\widetilde{Q}_{m,m}(\nu)-\\ -\int_{-1}^{1}P_{m,m}(\mu)d\mu,\\ 2i\nu\widetilde{Q}_{m+2,m}(\nu)+i\nu(2m+1)\widetilde{Q}_{m,m}(\nu)=\\ =(2m+3)\widetilde{Q}_{m+1,m}(\nu),\\ 3i\nu\widetilde{Q}_{m+3,m}(\nu)+i\nu(2m+2)\widetilde{Q}_{m+1,m}(\nu)=\\ =(2m+5)\widetilde{Q}_{m+2,m}(\nu),\\ .................................. \end{cases} \qquad (2)$$

Данная система, когда $\nu\notin[-i\infty,]\cup(i,+i\infty)$, имеет $\forall m\in N_0$ единственное решение в классе последовательностей $\{y_e\}_{l\in N_0}$, удовлетворяющих условию $\sum_{l=0}^{+\infty}(2(m+l)+1)\frac{l!}{(l+2)!}|y_l|^2<+\infty.$

Именно в этом классе и будет далее выписано строгое аналитическое решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2).

На основе подхода, развитого в работах [1,2], и использования свойств инвариантности формы систем типа (2) [4] можно показать, что единственное решение системы (2) в указанном выше классе имеет такой вид:

$$\widetilde{Q}_{m+l,m}(\nu)=\left((2m+1)\wp_0(\nu^2;m;0)\right)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\frac{(2m)!!m!!}{2^{m-1}m!(m+1)!!}\xi_m\Psi_l(\nu;m;0);m,l\in N_0. \qquad (3)$$

В (3) величины имеют следующий смысл: $\xi_m=1$, когда $m\in\{0,2,4,6,...\}$, и $\xi_m=\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если

$m \in \{1,3,5,7,...,\}; \wp_l\left(\nu^2; m; 0\right) =$
$= \left[1; \frac{q_l(m)\nu^2}{1}, \frac{q_{l+1}(m)\nu^2}{1}, ...\right]$ -
бесконечная непрерывная дробь, в которой

$$\forall l, m \in N_0$$
$$q_l(m) = (l+1)(l+1+2m) \cdot$$
$$\cdot \left[(2(l+m)+1)(2(l+m)+3)\right]^{-1};$$
$$\Psi_0(\nu; m; 0) = 1,$$
$$\Psi_l\left(\nu^2; m; 0\right) = (i\nu)^l \cdot$$
$$\cdot \prod_{r=1}^{l} (r+2m)\left((2(r+m)+1)\wp_r\left(\nu^2; m; 0\right)\right)^{-1}.$$

Для вычисления функций $\widetilde{Q}_{m+l,m}(\nu_l)$ на основе использования формулы (3) надо предложить эффективный алгоритм отыскания величин $\wp_l\left(\nu^2; m; 0\right)$.

Вычисление бесконечных непрерывных дробей $\wp_l\left(\nu^2; m; 0\right)$ для любых $l, m \in N_0$ можно осуществить с помощью следующей двучленной рекуррентной формулы

$$\wp_l\left(\nu^2; m; 0\right) = 1 + \frac{q_l(m)\nu^2}{\wp_{l+1}\left(\nu^2; m; 0\right)}. \tag{4}$$

При этом при использовании этой формулы полезно учесть, что

$$\lim_{l \to +\infty} \wp_{l+1}\left(\nu^2; m; 0\right) = 1 + \frac{4^{-1}\nu^2}{1 + \frac{4^{-1}\nu^2}{1 + ...}}. \tag{5}$$

Бесконечная непрерывная дробь, стоящая в правой части (5), может быть вычислена точно.

Следуя классической работе Л. Эйлера [5], можно доказать, что эта бесконечная дробь равна по величине

$$2^{-1}\left(1 + \sqrt{1+\nu^2}\right).$$

В ней следует выбирать ту ветвь квадратного корня, для которой он для $\nu \in (-\infty, +\infty)$ принимает неотрицательные значения.

Так как реальные вычисления можно проводить только для конечных значений индекса $l$, то в выражении (4) для достаточно больших $l$ следует заменить дробь $\wp_{l+1}\left(\nu^2; m; 0\right)$ на величину $2^{-1}\left(1 + \sqrt{1+\nu^2}\right)$, а затем находить значения бесконечных непрерывных дробей $\wp_l\left(\nu^2; m; 0\right)... \wp_0\left(\nu^2; m; 0\right)$ с помощью рекуррентной формулы (4).

Такой метод вычисления этих непрерывных дробей является устойчивым и эффективным для любых $\nu \notin [-i\infty, -i] \cup [i, +i\infty]$.

Данный кратко описанный алгоритм отыскания функций второго рода может быть использован также и при решении целого ряда проблем оптики дисперсных сред и астрофизики. В частности, этот алгоритм естественным образом встраивается в качестве составной части и в ряд методов, позволяющих находить плоское и сферическое альбедо планетных атмосфер.

Кроме этого описанный в данной работе алгоритм дает возможность корректно находить асимптотические решения краевых задач для уравнения переноса излучения для конечных и полубесконечных плоскопараллельных дисперсных сред для тех случаев, когда эти среды являются консервативно или почти консервативно рассеивающими.

Такого рода ситуации реализуются, например, при построении моделей для исследования видимого и коротковолнового участков спектра излучения в атмосферах Земли и планет-гигантов.

В заключение отметим, что предложенный выше алгоритм допускает конструктивные обобщения, позволяющие эффективно рассчитывать и другие специальные функции второго рода, широко используемые при решении целого ряда научно-технических проблем.


1. Роговцов Н.Н.: О решении характеристического уравнения теории переноса излучения в замкнутой форме. В сборнике «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление» (под ред. А.А. Килбаса), Минск, Беларусь: МО РБ, БГУ. 1996. С. 305 – 312.
2. Rogovtsov N.N., Borovik F.N.: The characteristic equations of radiative transfer theory, in Light Scattering Reviews, vol.4 (Ed. by A.A. Kokhanovsky), Chichester, UK: Springer-Praxis. 2009. P. 347 – 429.
3. Никифоров, А.Ф., Уваров, В.Б.: Основы теории специальных функций. Москва, СССР: Наука. 1974.
4. Роговцов, Н.Н.: К решению задачи Коши для бесконечных систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс многофотонного бесстолкновительного возбуждения молекул, Дифференциальные уравнения, 1990, **26**, № 4, с. 600 - 607.
5. Eulero, L.: De fractionibus continuis observations, Comment. Acad. Sc. Petrop., 11 (1739), 32. 1750