

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ВИБРОЗАЩИТЫ МАШИН

к.т.н. **Кудин В.В.**, к.т.н. **Авсиевич А.М.**, к.т.н. **Кудин М.В.**, маг. **Иванов А.Ю.**
Белорусский национальный технический университет, Минск

Виброзащита машин – это совокупность методов и средств уменьшения вибраций машины от внешних или внутренних источников вибровозмущения. Одним из распространенных методов виброзащиты является виброизоляция, заключающаяся в том, что между защищенным объектом 1 и источником вибровозмущения 2 устанавливается упругий элемент – виброизолятор 3 (рис.1).

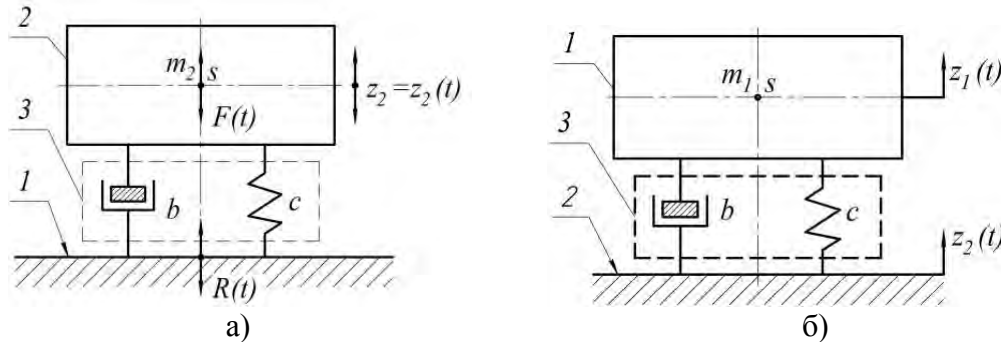


Рисунок 1. – Схемы виброзащиты
а) с силовым возмущением; б) с кинематическим возмущением

Различают две схемы виброизоляции: с динамическим или силовым вибровозмущением (рис. 1, а), когда источник вибровозмущения 2 создает переменную силу $F(t)$, передаваемую через виброизолятор 3 на защищаемый объект 1; с кинематическим вибровозмущением (рис. 1, б), когда вибровозмущение $z_2(t)$ источника 2 через виброизолятор 3 передается на защищаемый объект 1.

Виброизолирующее устройство 3 представляет важнейшую часть виброзащитной системы, назначение которой состоит в создании такого режима движения, инициируемое заданными возмущениями, при которых реализуется цель виброзащиты объекта.

Параметры виброизолятора, как и любого упругого звена, определяются по его динамической характеристике $R_z(z, \dot{z})$, представляющей зависимость силы реакции R_z виброизолятора от его деформации z и скорости \dot{z} деформирования. В общем случае динамическая характеристика $R(z, \dot{z})$ является нелинейной функцией. Однако при анализе малых колебаний объекта вблизи положения равновесия можно производить линеаризацию и ограничиться линейной зависимостью реакции R_z от перемещения z и скорости \dot{z} .

$$R_z = c_z \cdot z + b_z \cdot \dot{z} \quad (1)$$

Виброизолятор с линейной характеристикой (1) называется линейным, параметры которого (c_z – коэффициент жесткости, b_z – коэффициент сопротивления) являются постоянными. В случае $b_z = 0$ зависимость (1) описывает характеристику линейного идеального упругого элемента (пружины), а при $c_z = 0$ – характеристику линейного вязкого демпфера. Таким образом, модель виброизолятора 3 с характеристикой (1) можно представить в виде параллельного соединения пружины с c_z и демпфера с b_z .

Рассмотрим виброизоляцию с динамическим (силовым) вибровозмущением. Объект, как твердое тело (корпус станка, прибор и т.п.) установленный на упругих

амортизаторах, опирающихся на неподвижное основание (рис. 2), представляет собой колебательную систему, обладающую шестью степенями свободы и шестью частотами собственных колебаний, которые во избежание резонанса с частотами возмущения сил $F(t)$ должны быть заранее определены расчетным путем.

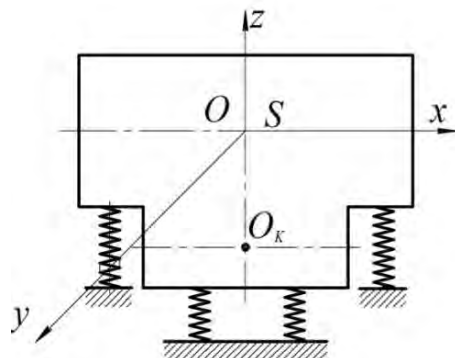


Рисунок 2. – Схема объекта виброзащиты

Малые колебания рассматриваемой системы характеризуются: а) тремя линейными смещениями центра масс объекта x_s, y_s, z_s ; б) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – тремя углами поворота относительно осей x, y, z неподвижной системы координат с началом в центре масс S . При этом упругие свойства виброизолятора характеризуются соответственно коэффициентами жесткости c_x, c_y, c_z в направлении осей x, y, z .

Если пренебречь массой виброизоляторов, их демпфированием и гироскопическими эффектами, возникающими при колебаниях, то дифференциальные уравнения собственных колебаний такой системы можно записать при помощи уравнения Лагранжа 2-го рода [1].

Потенциальную энергию системы как функцию координат смещения центров жесткости виброизоляторов представится в виде

$$U = \frac{1}{2} (\sum c_x \delta_1^2 + \sum c_y \delta_1^2 + \sum c_z \delta_1^2), \quad (2)$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – составляющие смещения центра O_k жесткости виброизолятора, имеющего координаты x, y, z .

Кинетическая энергия системы $T = T_{II} + T_B$, где $T_{II} = \frac{m(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + \dot{z}_s^2)}{2}$ – кинетическая энергия при поступательном движении центра масс, m – масса объекта,

$T_B = \frac{1}{2} (I_x \dot{\varphi}_1^2 + I_y \dot{\varphi}_2^2 + I_z \dot{\varphi}_3^2) - I_{xy} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - I_{xz} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 - I_{yz} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3$ – кинетическая энергия при вращательном движении системы относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс объекта; $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$ – моменты инерции и центробежные моменты инерции объекта относительно осей x, y, z .

Обозначим γ_1, γ_2 и γ_3 – углы образованные осью вращения с осями x, y, z .

Проекция угловой скорости ω на оси координат

$$\dot{\varphi}_1 = \omega \cdot \cos \gamma_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega \cdot \cos \gamma_2, \quad \dot{\varphi}_3 = \omega \cdot \cos \gamma_3.$$

Момент инерции относительно мгновенной оси вращения

$$I = I_x \cos^2 \gamma_1 + I_y \cos^2 \gamma_2 + I_z \cos^2 \gamma_3 - 2I_{xy} \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - 2I_{yz} \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 - 2I_{xz} \cos \gamma_3 \cos \gamma_1. \quad (3)$$

С помощью уравнения Лагранжа 2-го рода получим шесть взаимосвязанных дифференциальных уравнений собственных колебаний объекта виброзащиты

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11}\ddot{x}_s + \alpha_{11}x_s + \alpha_{15}\varphi_2 + \alpha_{16}\varphi_3 &= 0 \\ \beta_{11}\ddot{y}_s + \alpha_{22}y_s + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3 &= 0 \\ \beta_{11}\ddot{z}_s + \alpha_{33}z_s + \alpha_{34}\varphi_1 + \alpha_{35}\varphi_2 &= 0 \\ \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{45}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{46}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{24}y_s + \alpha_{34}z_s + \alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{45}\varphi_2 + \alpha_{46}\varphi_3 &= 0 \\ \beta_{45}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{15}x_s + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{55}\varphi_2 + \alpha_{56}\varphi_3 &= 0 \\ \beta_{46}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{16}x_s + \alpha_{26}y_s + \alpha_{46}\varphi_1 + \alpha_{56}\varphi_2 + \alpha_{66}\varphi_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\beta_{11}, \dots, \alpha_{66}$ – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами объекта и упругой системы виброизоляции.

Решение системы (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} x_s &= A_1 \cos(\omega t + \psi), \quad y_s = A_2 \cos(\omega t + \psi), \quad z_s = A_3 \cos(\omega t + \psi), \\ \varphi_1 &= A_4 \cos(\omega t + \psi), \quad \varphi_2 = A_5 \cos(\omega t + \psi), \quad \varphi_3 = A_6 \cos(\omega t + \psi), \end{aligned}$$

где $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ – значение амплитуд соответствующего параметра;

$\omega = k$ – круговая частота собственных колебаний; ψ – начальная фаза колебаний.

Подставляя эти решения в систему (4) и предполагая, что система допускает решения отличное от нуля, то определитель системы (4) равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & \alpha_{22} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{26} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} - \beta_{33}\omega^2 & \alpha_{34} & \alpha_{35} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} - \beta_{44}\omega^2 & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 \\ \alpha_{15} & 0 & \alpha_{35} & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{55} - \beta_{55}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & 0 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 & \alpha_{66} - \beta_{66}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Развернув определитель (5), получим уравнение шестой степени относительно ω^2 , решение которого возможно численным методом с помощью ЭВМ, что позволяет осуществить моделирование колебательного процесса при виброзащите, в частности моделирование собственных колебаний объекта виброзащиты. Рассмотрим некоторые частные случаи [3].

1-й случай: объект устанавливается без перекоса виброизоляторов, имеющих одинаковые жесткости c_z , т.е. осадка всех виброизоляторов будет одинаковой, при этом центр масс (т. S) и центр жесткости (т. O_K) лежат на одной вертикальной линии. Моделирование этого колебательного процесса позволит определить собственную частоту в направлении оси Z .

2-й случай: объект установлен без перекосов на равножесткостных виброизоляторах и расположенных в одной плоскости. В этом случае система упрощается до пяти уравнений, что позволит смоделировать колебательный процесс и определить пять собственных частот.

3-й случай: соблюдаются условия двух предыдущих случаев и центробежные моменты инерции равны 0. В этом случае оси x, y, z являются главными центральными осями инерции объекта и система дифференциальных уравнений моделирующих колебательный процесс объекта виброзащиты распадается на три независимых группы, одна из которых позволяет рассмотреть колебания вокруг оси OZ с частотой ω_2 . Два других уравнения описывают сложные колебания объекта в плоскости XZ . Третья группа уравнений описывает сложные колебания объекта в плоскости YZ .

Моделирование вынужденных колебаний объекта виброзащиты производится на системе дифференциальных уравнений вида (4), частное решение которых представляется как

$$x_{s_i} = A_{x_i} \cos(p_{ji} + \varphi_i), \quad y_{s_i} = A_{y_i} \cos(p_{ji} + \varphi_i).$$

При этом периодические функции $F(t)$ и $M(t)$ раскладывается в ряд Фурье и представляются в виде суммы гармоник [2].

Оценка эффективности виброзащиты объекта осуществляется [1]: а) коэффициентом виброизоляции K_R б) коэффициентом динамичности K_X . Условие эффективности виброзащиты задается неравенствами $K_R < 1, K_X < 1$.

Анализ эффективности в этом случае зависит от демпфирующих диссипативных свойств системы. Так эффективность виброзащиты по критерию $K_R < 1$ обеспечивается при любом уровне в частотном диапазоне $Z = P/\omega_z \geq \sqrt{2}$. При этом наилучший эффект достигается если демпфирование отсутствует (Рис. 3). Эффективность виброзащиты по критерию $K_X < 1$ обеспечивается в том же диапазоне при любых значениях $\nu = n/\omega_z$. В случае, если $\nu = \sqrt{2}/2$ виброзащита эффективна в частотном диапазоне (рис. 4).

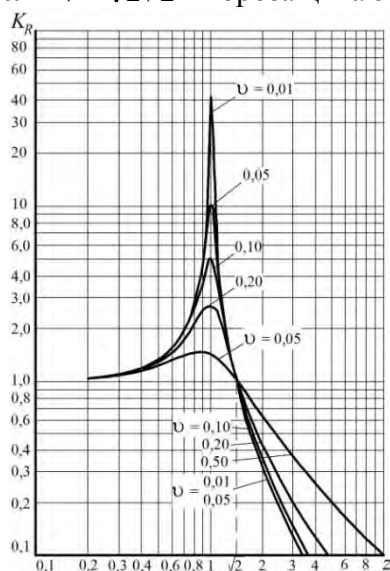


Рисунок 3. Зависимость $K_R(z)$

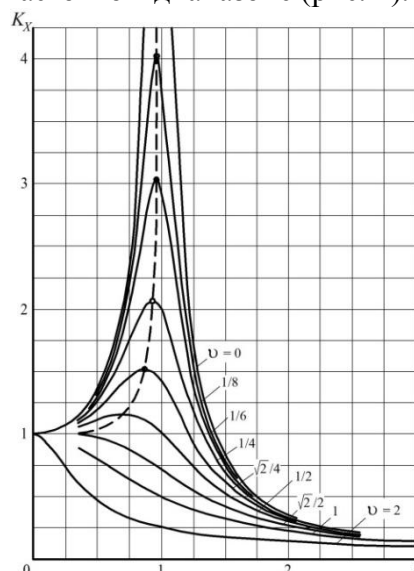


Рис. 4 Зависимость $K_X(z)$

РЕЗЮМЕ

Представлено математическое и компьютерное моделирование колебательного процесса объекта виброзащиты при внешнем силовом воздействии. Рассмотрены частные случаи компоновки элементов виброзащиты. Приведены критерии эффективности виброзащиты в зависимости от частотных диапазонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации в технике : справочник : в 6 т./ под ред. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. Т. 6: Защита от вибраций и ударов. – 456 с.
2. Астахов, Э. И. Колебания в машинах и методы их устранения : учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / Э.И. Астахов, В.В. Кудин. – Минск: БГПА, 1997. – 130 с.
3. Ильинский, В.С. Защита РЭА и прецизионного оборудования от динамических воздействий/ В.С. Ильинский. – М. : Радио и связь, 1982. – 296 с.

SUMMARY

The mathematical and computer modeling of oscillatory process of object vibration protection under external forces impact is presented. Particular cases of vibration protection elements assembling are considered. Criteria of vibration protection efficiency on different frequency bands are given.

E-mail: ausi@tut.by

Поступила в редакцию 03.11.2014