

**РЕКУРСИВНЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПЛОСКИХ  
АНТРОПОМОРФНЫХ СИСТЕМ В БЕЗОПОРНОЙ И ДВУХОПОРНОЙ ФАЗАХ  
ДВИЖЕНИЯ**

д.ф.-м.н. <sup>1</sup>Чигарев А.В., к.ф.-м.н. <sup>2</sup>Борисов А.В.

<sup>1</sup> Белорусский национальный технический университет, Минск  
<sup>2</sup> филиал ГОУВПО НИУ «Московский энергетический институт  
(Технический университет)» в г. Смоленске

**Введение**

Стержневые механические системы с шарнирами широко используются в технике с далекого прошлого. Во второй половине XX века, в связи с появлением новых конструкционных материалов сфера применения стержневых механических систем с шарнирами расширилась. Данная работа является частью развиваемого в настоящее время во всем мире направления, связанного с созданием экзоскелетов и антропоморфных роботов, которые строятся на основе механических систем.

Актуальной задачей является создание стержневой механической системы, которая бы по своим механическим свойствам, соответствовала бы максимально движениям опорно-двигательного аппарата человека.

Ранее в работах [1-5] были получены и исследованы уравнения движения для одноопорной фазы ходьбы. Предложена матричная форма записи и получены соответствующие обобщения элементов матриц. В данной статье разработаем аналогичные методы для одноопорной и двухопорной фаз ходьбы антропоида.

**Описание математической модели**

Одноопорная и двухопорная фазы движения описываются дифференциальными уравнениями, левая часть которых одинакова, а различаются только правые части. Поэтому рассмотрение данных двух фаз ходьбы будем проводить совместно.

Одноопорная фаза при антропоморфной ходьбе является основной и наиболее продолжительной. Двухопорную фазу, возникающую при смене ног обычно считают мгновенной. В реальности такая походка соответствует спортивной ходьбе. В случае перехода на бег возникает безопорная фаза движения. Однако, чтобы приблизить модель к реальности, требуется рассмотреть безопорную и двухопорную фазы движения.

Рассмотрим сначала безопорную фазу. Для отработки уравнений движения более удобны модели с ветвлением. Рассмотрим трехзвенный механизм (рисунок 1).

Рассматриваемая механическая системы имеет восемь степеней свободы. За обобщенные координаты, однозначно характеризующих положение, примем координаты прикрепления ног к корпусу  $x(t)$ ,  $y(t)$ , условно его можно назвать тазобедренный сустав  $B_1$ , три угла, которые, как и ранее, образуют звенья с горизонталью, отсчитываемые против часовой стрелки  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\varphi_3(t)$  и три переменных длины деформируемых звеньев  $l_1(t)$ ,  $l_2(t)$ ,  $l_3(t)$ . Моменты инерции звеньев, относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения обозначим  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$ ,  $I_3(t)$  соответственно. Они переменные и считаются функциями времени. В дальнейших записях аргумент  $t$  для краткости будем опускать.

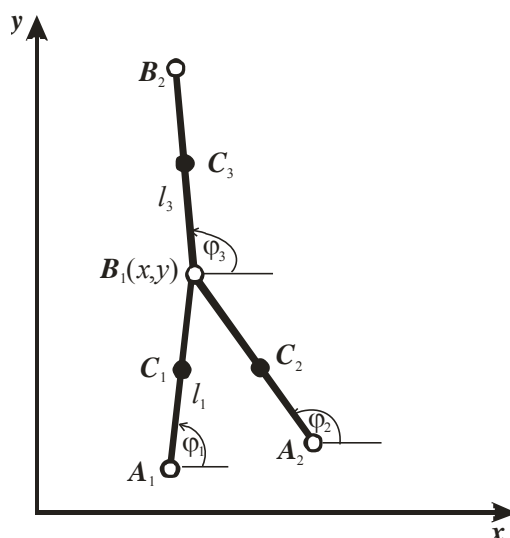


Рисунок 1. Схема кинематических звеньев трехзвенной стержневой механической системы в виде модели антропоморфного механизма в безопорной фазе

Запишем координаты центров масс звеньев в виде:

$$\begin{aligned}
 x_{C1} &= x + l_1(1 - n_1)\cos(\pi + \varphi_1), \\
 y_{C1} &= y + l_1(1 - n_1)\sin(\pi + \varphi_1), \\
 x_{C2} &= x + l_2(1 - n_2)\cos(\pi + \varphi_2), \\
 y_{C2} &= y + l_2(1 - n_2)\sin(\pi + \varphi_2), \\
 x_{C3} &= x + l_3n_3\cos\varphi_3, \\
 y_{C3} &= y + l_3n_3\sin\varphi_3.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Запишем дифференциальные уравнения движения механической системы в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате процедуры описанной, протестированной и отработанной ранее для одноопорной фазы движения [1,2], получаем дифференциальные уравнения движения (2)-(9). При свободном движении многозвенника в поле тяжести Земли правая часть уравнений движения равна нулю. И таким образом, уравнения составлены.

Рассмотрим двухопорную фазу движения. Она получается из уравнений движений для безопорной фазы, путем включения в правую часть уравнений неконсервативных сил (рисунок 2), действующих на экзоскелет.

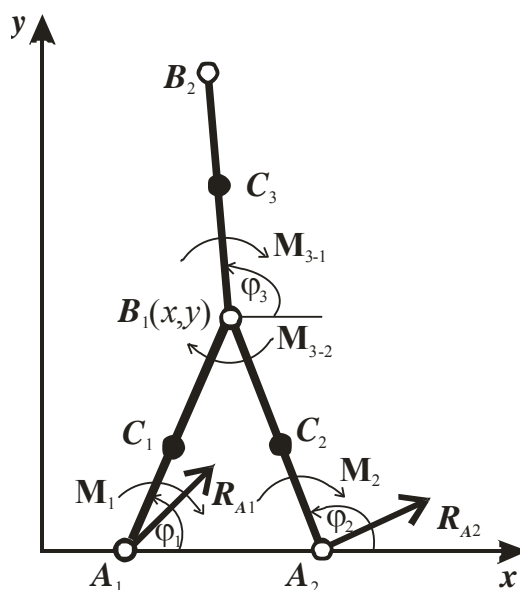


Рисунок 2. Схема трехзвенной стержневой механической системы в двухопорной фазе движения с действующими неконсервативными силами

В системе действуют моменты сил  $M_i$ , приложенные в каждом шарнире-суставе. Они являются внутренними силами. Действуют две внешние реакции  $R_{A1}$  и  $R_{A2}$ , приложенные соответственно в точках  $A_1$  и  $A_2$  контакта экзоскелета с опорой. Их проекции на оси координат обозначим:  $R_{A1x}$ ,  $R_{A1y}$ ,  $R_{A2x}$ ,  $R_{A2y}$ .

Обобщенные силы находим обычным образом из выражения для элементарной работы. Подставляя их в правые части соответствующих уравнений движения, получаем:

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} - m_1(n_1 - 1)l_1 \sin(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - m_2(n_2 - 1)l_2 \sin(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - \\ & - m_3 n_3 l_3 \sin(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 - m_1(n_1 - 1)l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 - m_2(n_2 - 1)l_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - \\ & - m_3 n_3 l_3 \cos(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 - 2m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - \\ & - 2m_3 n_3 \sin(\varphi_3) \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 + m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{l}_1 + m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) \ddot{l}_2 + \\ & + m_3 n_3 \cos(\varphi_3) \ddot{l}_3 = R_{A1x} + R_{A2x}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y} + m_1(n_1 - 1)l_1 \cos(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + m_2(n_2 - 1)l_2 \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \\ & + m_3 n_3 l_3 \cos(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 - m_1(n_1 - 1)l_1 \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 - m_2(n_2 - 1)l_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - \\ & - m_3 n_3 l_3 \sin(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 + g(m_1 + m_2 + m_3) + 2m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + \\ & + 2m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 + 2m_3 n_3 \cos(\varphi_3) \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 + m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \ddot{l}_1 + \\ & + m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) \ddot{l}_2 + m_3 n_3 \sin(\varphi_3) \ddot{l}_3 = R_{A1y} + R_{A2y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & - l_1 m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \ddot{x} + l_1 m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{y} + (I_1 + l_1^2 m_1(n_1 - 1)^2) \ddot{\varphi}_1 + \\ & + g l_1 m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) + 2l_1 m_1(n_1 - 1)^2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + \dot{I}_1 \dot{\varphi}_1 = -M_1 + M_{3-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & - l_2 m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) \ddot{x} + l_2 m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) \ddot{y} + (I_2 + l_2^2 m_2(n_2 - 1)^2) \ddot{\varphi}_2 + \\ & + g l_2 m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) + 2l_2 m_2(n_2 - 1)^2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 + \dot{I}_2 \dot{\varphi}_2 = -M_2 + M_{3-2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & - l_3 m_3 n_3 \sin(\varphi_3) \ddot{x} + l_3 m_3 n_3 \cos(\varphi_3) \ddot{y} + (I_3 + l_3^2 m_3 n_3^2) \ddot{\varphi}_3 + g l_3 m_3 n_3 \cos(\varphi_3) + \\ & + 2l_3 m_3 n_3^2 \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 + \dot{I}_3 \dot{\varphi}_3 = -M_{3-1} - M_{3-2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{x} + m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \ddot{y} - l_1 m_1(n_1 - 1)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \\ & + g m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) + m_1(n_1 - 1)^2 \ddot{l}_1 = -k_1 \Delta l_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) \ddot{x} + m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) \ddot{y} - l_2 m_2(n_2 - 1)^2 \dot{\varphi}_2^2 + \\ & + g m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) + m_2(n_2 - 1)^2 \ddot{l}_2 = -k_2 \Delta l_2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$m_3 n_3 \cos(\varphi_3) \ddot{x} + m_3 n_3 \sin(\varphi_3) \ddot{y} - l_3 m_3 n_3^2 \dot{\varphi}_3^2 + g m_3 n_3 \sin(\varphi_3) + m_3 n_3^2 \ddot{l}_3 = -k_3 \Delta l_3. \quad (9)$$

Таким образом, составлены дифференциальные уравнения движения экзоскелета из трех стержней в безопорной (с нулевой правой частью) и двухопорной фазах движения.

Рассмотрим модель экзоскелета с двухзвенным корпусом и двухзвенными конечностями в безопорной фазе движения (рисунок 3).

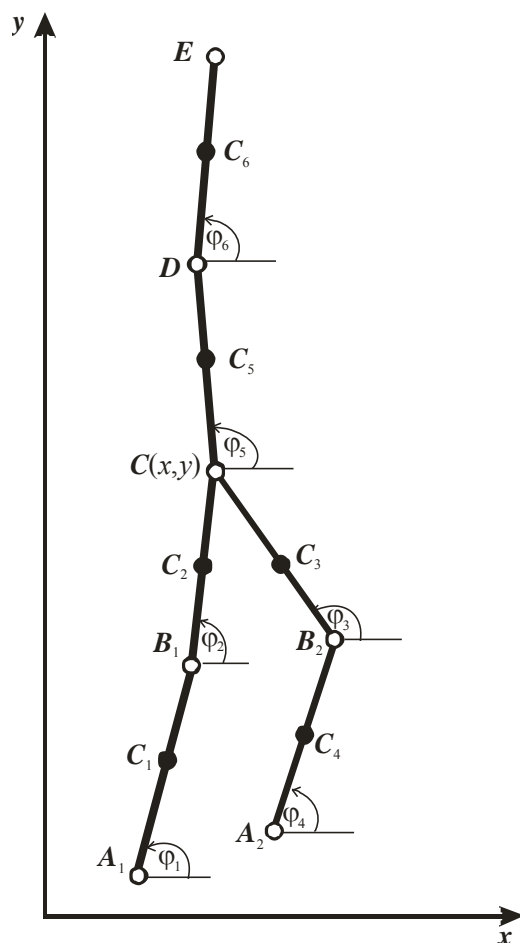


Рисунок 3. Схема кинематических звеньев шестизвенной стержневой механической системы в виде модели антропоморфного механизма в безопорной фазе

Рассматриваемая механическая системы имеет  $2n + 2$ , где  $n$  – число звеньев, то есть четырнадцать степеней свободы. За обобщенные координаты, однозначно характеризующих положение, примем, как и ранее, координаты тазобедренного сустава  $C(x(t), y(t))$ , шесть углов которые, образуют звенья с горизонталью, отсчитываемые против часовой стрелки  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\varphi_3(t)$ ,  $\varphi_4(t)$ ,  $\varphi_5(t)$ ,  $\varphi_6(t)$  и три переменных длины деформируемых звеньев  $l_1(t)$ ,  $l_2(t)$ ,  $l_3(t)$ ,  $l_4(t)$ ,  $l_5(t)$ ,  $l_6(t)$ . В дальнейших записях аргумент  $t$  для краткости будем опускать.

Запишем координаты центра масс звеньев в виде:

$$\begin{aligned}
 x_{C1} &= x + l_1(1 - n_1)\cos(\pi + \varphi_1) + l_2\cos(\pi + \varphi_2), \\
 y_{C1} &= y + l_1(1 - n_1)\sin(\pi + \varphi_1) + l_2\sin(\pi + \varphi_2), \\
 x_{C2} &= x + l_2(1 - n_2)\cos(\pi + \varphi_2), \\
 y_{C2} &= y + l_2(1 - n_2)\sin(\pi + \varphi_2), \\
 x_{C3} &= x + l_3(1 - n_3)\cos(\pi + \varphi_3), \\
 y_{C3} &= y + l_3(1 - n_3)\sin(\pi + \varphi_3), \\
 x_{C4} &= x + l_4(1 - n_4)\cos(\pi + \varphi_4) + l_3\cos(\pi + \varphi_3), \\
 y_{C4} &= y + l_4(1 - n_4)\sin(\pi + \varphi_4) + l_3\sin(\pi + \varphi_3), \\
 x_{C5} &= x + l_5n_5\cos\varphi_5, \\
 y_{C5} &= y + l_5n_5\sin\varphi_5, \\
 x_{C6} &= x + l_6n_6\cos\varphi_6 + l_5\cos\varphi_5, \\
 y_{C6} &= y + l_6n_6\sin\varphi_6 + l_5\sin\varphi_5.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Запишем дифференциальные уравнения движения механической системы в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате процедуры описанной,

протестированной и отработанной выше, получаем дифференциальные уравнения движения (11)-(24).

Аналогично предыдущему случаю, получим уравнения сразу и для двухопорной (рисунок 4) фазы движения.

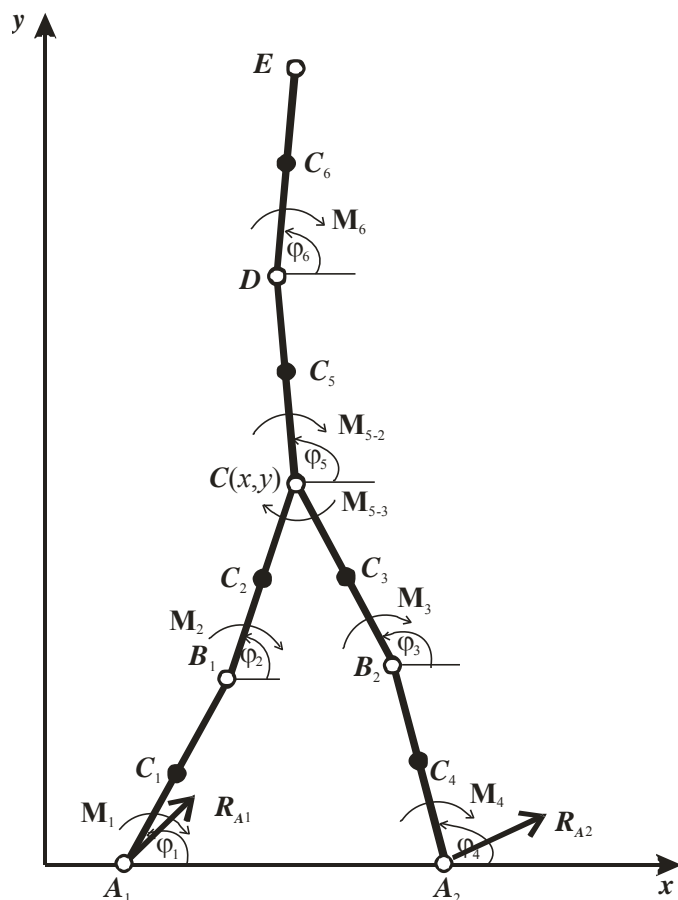


Рисунок 4. Схема шестизвенной стержневой механической системы в двухопорной фазе движения с действующими неконсервативными силами

В системе действуют моменты сил  $M_i$ , приложенные в каждом шарнире-суставе. Они являются внутренними силами. Действуют две внешние реакции  $R_{A1}$  и  $R_{A2}$ , приложенные соответственно в точках  $A_1$  и  $A_2$  контакта экзоскелета с опорой. Их проекции на оси координат обозначим:  $R_{A1x}$ ,  $R_{A1y}$ ,  $R_{A2x}$ ,  $R_{A2y}$ .

Обобщенные силы находим обычным образом из выражения для элементарной работы. Подставляя их в правые части соответствующих уравнений движения, получаем:

$$\begin{aligned}
 & (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) \ddot{x} - m_1(n_1 - 1)l_1 \sin(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + \\
 & + (m_1 + m_2 - m_2 n_2)l_2 \sin(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + (m_3 + m_4 - m_3 n_3)l_3 \sin(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 - \\
 & - m_4(n_4 - 1)l_4 \sin(\varphi_4) \ddot{\varphi}_4 - (m_6 + m_5 n_5)l_5 \sin(\varphi_5) \ddot{\varphi}_5 - m_6 n_6 l_6 \sin(\varphi_6) \ddot{\varphi}_6 - \\
 & - m_1(n_1 - 1)l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 + (m_1 + m_2 - m_2 n_2)l_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + \\
 & + (m_3 + m_4 - m_3 n_3)l_3 \cos(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 - m_4(n_4 - 1)l_4 \cos(\varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 - \\
 & - (m_6 + m_5 n_5)l_5 \cos(\varphi_5) \dot{\varphi}_5^2 - m_6 n_6 l_6 \cos(\varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 - 2m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + \\
 & + 2(m_1 + m_2 - m_2 n_2) \sin(\varphi_2) \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 + 2(m_3 + m_4 - m_3 n_3) \sin(\varphi_3) \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 - \\
 & - 2m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_4) \dot{l}_4 \dot{\varphi}_4 - 2(m_6 + m_5 n_5) \sin(\varphi_5) \dot{l}_5 \dot{\varphi}_5 - 2m_6 n_6 \sin(\varphi_6) \dot{l}_6 \dot{\varphi}_6 + \\
 & + m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{l}_1 - (m_1 + m_2 - m_2 n_2) \cos(\varphi_2) \ddot{l}_2 - (m_3 + m_4 - m_3 n_3) \cos(\varphi_3) \ddot{l}_3 + \\
 & + m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_4) \ddot{l}_4 + (m_6 + m_5 n_5) \cos(\varphi_5) \ddot{l}_5 + m_6 n_6 \cos(\varphi_6) \ddot{l}_6 = R_{A1x} + R_{A2x},
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) \ddot{y} + m_1(n_1 - 1)l_1 \cos(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - \\
& - (m_1 + m_2 - m_2 n_2)l_2 \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - (m_3 + m_4 - m_3 n_3)l_3 \cos(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 + \\
& + m_4(n_4 - 1)l_4 \cos(\varphi_4) \ddot{\varphi}_4 + (m_6 + m_5 n_5)l_5 \cos(\varphi_5) \ddot{\varphi}_5 + m_6 n_6 l_6 \cos(\varphi_6) \ddot{\varphi}_6 - \\
& - m_1(n_1 - 1)l_1 \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 + (m_1 + m_2 - m_2 n_2)l_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + \\
& + (m_3 + m_4 - m_3 n_3)l_3 \sin(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 - m_4(n_4 - 1)l_4 \sin(\varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 - \\
& - (m_6 + m_5 n_5)l_5 \sin(\varphi_5) \dot{\varphi}_5^2 - m_6 n_6 l_6 \sin(\varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + g(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) + \\
& + 2m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1)\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 - 2(m_1 + m_2 - m_2 n_2)\cos(\varphi_2)\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 - \\
& - 2(m_3 + m_4 - m_3 n_3)\cos(\varphi_3)\dot{l}_3\dot{\varphi}_3 + 2m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_4)\dot{l}_4\dot{\varphi}_4 + \\
& + 2(m_6 + m_5 n_5)\cos(\varphi_5)\dot{l}_5\dot{\varphi}_5 + 2m_6 n_6 \cos(\varphi_6)\dot{l}_6\dot{\varphi}_6 + m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1)\ddot{l}_1 - \\
& - (m_1 + m_2 - m_2 n_2)\sin(\varphi_2)\ddot{l}_2 - (m_3 + m_4 - m_3 n_3)\sin(\varphi_3)\ddot{l}_3 + m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_4)\ddot{l}_4 + \\
& + (m_6 + m_5 n_5)\sin(\varphi_5)\ddot{l}_5 + m_6 n_6 \sin(\varphi_6)\ddot{l}_6 = R_{A1y} + R_{A2y}, \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - l_1 m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1)\ddot{x} + l_1 m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1)\ddot{y} + (I_1 + l_1^2 m_1(n_1 - 1)^2)\ddot{\varphi}_1 - \\
& - l_1 l_2 m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - l_1 l_2 m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \\
& + g l_1 m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1) + 2l_1 m_1(n_1 - 1)^2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2l_1 m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 + \\
& + l_1 m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{l}_2 + \dot{I}_1 \dot{\varphi}_1 = -M_1 + M_2, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l_2(m_1 + m_2 - m_2 n_2)\sin(\varphi_2)\ddot{x} - l_2(m_1 + m_2 - m_2 n_2)\cos(\varphi_2)\ddot{y} - \\
& - l_1 l_2 m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 + (I_2 + (m_1 + m_2(n_2 - 1)^2)l_2^2)\ddot{\varphi}_2 + \\
& + l_1 l_2 m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 - g l_2(m_1 + m_2 - m_2 n_2)\cos(\varphi_2) - \\
& - 2l_2 m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + 2l_2(m_1 + m_2(n_2 - 1)^2)\dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - \\
& - l_2 m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{l}_1 + \dot{I}_2 \dot{\varphi}_2 = -M_2 + M_{5-2}, \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l_3(m_3 + m_4 - m_3 n_3)\sin(\varphi_3)\ddot{x} - l_3(m_3 + m_4 - m_3 n_3)\cos(\varphi_3)\ddot{y} + \\
& + (I_3 + (m_4 + m_3(n_3 - 1)^2)l_3^2)\ddot{\varphi}_3 - l_3 l_4 m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_3 - \varphi_4)\ddot{\varphi}_4 - \\
& - l_3 l_4 m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_3 - \varphi_4)\dot{\varphi}_4^2 - g l_3(m_3 + m_4 - m_3 n_3)\cos(\varphi_3) + \\
& + 2l_3(m_4 + m_3(n_3 - 1)^2)\dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 - 2l_3 m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_3 - \varphi_4)\dot{l}_4 \dot{\varphi}_4 + \\
& + l_3 m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_3 - \varphi_4)\ddot{l}_4 + \dot{I}_3 \dot{\varphi}_3 = -M_3 + M_{5-3}, \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - l_4 m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_4)\ddot{x} + l_4 m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_4)\ddot{y} - l_3 l_4 m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_3 - \varphi_4)\ddot{\varphi}_3 + \\
& + (I_4 + l_4^2 m_4(n_4 - 1)^2)\ddot{\varphi}_4 - l_3 l_4 m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_3 - \varphi_4)\dot{\varphi}_3^2 + g l_4 m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_4) - \\
& - 2l_4 m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_3 - \varphi_4)\dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 + 2l_4 m_4(n_4 - 1)^2 \dot{l}_4 \dot{\varphi}_4 - \\
& - l_4 m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_3 - \varphi_4)\ddot{l}_3 + \dot{I}_4 \dot{\varphi}_4 = -M_4 + M_3, \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - l_5(m_6 + m_5 n_5)\sin(\varphi_5)\ddot{x} + l_5(m_6 + m_5 n_5)\cos(\varphi_5)\ddot{y} + (I_5 + l_5^2(m_6 + m_5 n_5^2))\ddot{\varphi}_5 + \\
& + l_5 l_6 m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6)\ddot{\varphi}_6 + l_5 l_6 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6)\dot{\varphi}_6^2 + g l_5(m_6 + m_5 n_5)\cos(\varphi_5) + \\
& + 2l_5(m_6 + m_5 n_5^2)\dot{l}_5 \dot{\varphi}_5 + 2l_5 m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6)\dot{l}_6 \dot{\varphi}_6 - l_5 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6)\ddot{l}_6 + \dot{I}_5 \dot{\varphi}_5 = \\
& = -M_{5-2} - M_{5-3} + M_6, \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - l_6 m_6 n_6 \sin(\varphi_6)\ddot{x} + l_6 m_6 n_6 \cos(\varphi_6)\ddot{y} + l_5 l_6 m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6)\ddot{\varphi}_5 + \tag{18}
\end{aligned}$$

$$+ (I_6 + l_6^2 m_6 n_6^2) \ddot{\varphi}_6 - l_5 l_6 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{\varphi}_5^2 + g l_6 m_6 n_6 \cos(\varphi_6) + \\ + 2 l_6 m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{l}_5 \dot{\varphi}_5 + 2 l_6 m_6 n_6^2 \dot{l}_6 \dot{\varphi}_6 + l_6 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{l}_5 + \dot{l}_6 \dot{\varphi}_6 = -M_6,$$

$$m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{x} + m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \ddot{y} - l_2 m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - \\ - l_1 m_1(n_1 - 1)^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2 m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + g m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) - \\ - 2 m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 + m_1(n_1 - 1)^2 \ddot{l}_1 - \\ - m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{l}_2 = -k_1 \Delta l_1, \quad (19)$$

$$- (m_1 + m_2 - m_2 n_2) \cos(\varphi_2) \ddot{x} - (m_1 + m_2 - m_2 n_2) \sin(\varphi_2) \ddot{y} + \\ + l_1 m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + l_1 m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 - \\ - l_2(m_1 + m_2 - m_2 n_2) \dot{\varphi}_2^2 - g(m_1 + m_2 - m_2 n_2) \sin(\varphi_2) + \\ + 2 m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{l}_1 + \\ + (m_1 + m_2(n_2 - 1)^2) \ddot{l}_2 = -k_2 \Delta l_2, \quad (20)$$

$$- (m_3 + m_4 - m_3 n_3) \cos(\varphi_3) \ddot{x} - (m_3 + m_4 - m_3 n_3) \sin(\varphi_3) \ddot{y} - \\ - l_4 m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_4 - l_3(m_4 + m_3(n_3 - 1)^2) \dot{\varphi}_3^2 + \\ + l_4 m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 - g(m_3 + m_4 - m_3 n_3) \sin(\varphi_3) - \\ - 2 m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{l}_4 \dot{\varphi}_4 + (m_4 + m_3(n_3 - 1)^2) \ddot{l}_3 - \\ - m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{l}_4 = -k_3 \Delta l_3, \quad (21)$$

$$m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_4) \ddot{x} + m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_4) \ddot{y} + l_3 m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_3 + \\ + l_3 m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_3^2 - l_4 m_4(n_4 - 1)^2 \dot{\varphi}_4^2 + g m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_4) + \\ + 2 m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 - m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{l}_3 + \\ + m_4(n_4 - 1)^2 \ddot{l}_4 = -k_4 \Delta l_4, \quad (22)$$

$$(m_6 + m_5 n_5) \cos(\varphi_5) \ddot{x} + (m_6 + m_5 n_5) \sin(\varphi_5) \ddot{y} + l_6 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_6 - \\ - l_5(m_6 + m_5 n_5^2) \dot{\varphi}_5^2 - l_6 m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + g(m_6 + m_5 n_5) \sin(\varphi_5) + \\ + 2 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{l}_6 \dot{\varphi}_6 + (m_6 + m_5 n_5^2) \ddot{l}_5 + m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{l}_6 = -k_5 \Delta l_5, \quad (23)$$

$$m_6 n_6 \cos(\varphi_6) \ddot{x} + m_6 n_6 \sin(\varphi_6) \ddot{y} - l_5 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_5 - l_5 m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{\varphi}_5^2 - \\ - l_6 m_6 n_6^2 \dot{\varphi}_6^2 + g m_6 n_6 \sin(\varphi_6) - 2 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{l}_5 \dot{\varphi}_5 + m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{l}_5 + \\ + m_6 n_6^2 \ddot{l}_6 = -k_6 \Delta l_6. \quad (24)$$

Таким образом, составлены дифференциальные уравнения движения экзоскелета из шести стержней в безопорной фазе движения.

Полученные уравнения сохраняют свою матричную форму (25)-(26) [1] для одноопорной фазы движения.

$$A(q, l) \ddot{q} + B(q, l) \dot{q}^2 + gC(q, l) + 2D(q, l)(\dot{l} \dot{q}) + E(q, l) \ddot{l} + \dot{l} \dot{q} = F(q, l), \quad (25)$$

Матричное уравнение для деформаций звеньев имеет вид:

$$G(q, l) \ddot{q} + H(q, l) \dot{q}^2 + gK(q) + 2L(q, l)(\dot{l} \dot{q}) + P(q, l) \ddot{l} = S(k, l). \quad (26)$$

где:  $q$  – угловые обобщенные координаты  $q = (x, y, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ ;  $l$  – обобщенные координаты, описывающие с деформации звеньев  $l = (x, y, l_1, \dots, l_n)^T$ ;  $A(q, l)$ ,  $G(q, l)$  – матрицы, учитывающие инерционные свойства;  $B(q, l)$ ,  $H(q, l)$  – матрицы, учитывающие

вязкость;  $C(q)$ ,  $K(q)$  – матрицы, определяемые моментами силы тяжести;  $D(q,l)$ ,  $E(q,l)$ ,  $L(q,l)$ ,  $P(q,l)$  – матрицы, учитывающие деформации звеньев;  $F(q,l)$  – матрица-столбец обобщенных сил, т.е. управляющих моментов;  $S(k,l)$  – матрица-столбец, учитывающая упругие свойства материала звеньев,  $\ddot{q}$  – матрица обобщенных ускорений;  $\dot{q}$  – матрица обобщенных скоростей,  $(\dot{l}\dot{q}) = (\dot{l}_1\dot{q}_1, \dots, \dot{l}_n\dot{q}_n)^T$  – матрица, составленная из произведений  $\dot{l}\dot{q}$  при равных индексах,  $\dot{I} = (\dot{I}_1, \dots, \dot{I}_n)$  – матрица производных момента инерции.

Различия будут заключаться в виде конкретных матриц, входящих в них. Правые части для уравнений координат  $(x,y)$  точки подвеса ног, будут содержать не сумму моментов, а сумму соответствующих проекций реакций  $R_i$ .

При этом изменяются векторы-столбцы:  $q$  – содержит линейные и угловые обобщенные координаты  $q = (x, y, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ ;  $l$  – линейные и обобщенные координаты, описывающие с деформации звеньев  $l = (x, y, l_1, \dots, l_n)^T$ ;

Таким образом, на данном этапе представлена математическая модель стержневой механической системы с деформируемыми звеньями антропоморфного типа в виде системы дифференциальных уравнений движения.

### Метод построения решения

Для построения решения выпишем в явном виде соответствующие матрицы, входящие в полученные дифференциальные уравнения движения.

Матрицы для трехзвенной деформируемой системы имеют вид:

$$A(q,l) = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & l_1(m_1 - m_1n_1)\sin\varphi_1 & l_2(m_2 - m_2n_2)\sin\varphi_2 & -l_3m_3n_3\sin\varphi_3 \\ 0 & m_1 + m_2 + m_3 & -l_1(m_1 - m_1n_1)\cos\varphi_1 & -l_2(m_2 - m_2n_2)\cos\varphi_2 & l_3m_3n_3\cos\varphi_3 \\ l_1(m_1 - m_1n_1)\sin\varphi_1 & -l_1(m_1 - m_1n_1)\cos\varphi_1 & I_1 + l_1^2(n_1 - 1)^2m_1 & 0 & 0 \\ l_2(m_2 - m_2n_2)\sin\varphi_2 & -l_2(m_2 - m_2n_2)\cos\varphi_2 & 0 & I_2 + l_2^2(n_2 - 1)^2m_2 & 0 \\ -l_3m_3n_3\sin\varphi_3 & l_3m_3n_3\cos\varphi_3 & 0 & 0 & I_2 + l_3^2n_3^2m_3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$B(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_1(m_1 - m_1n_1)\cos\varphi_1 & l_2(m_2 - m_2n_2)\cos\varphi_2 & -l_3m_3n_3\cos\varphi_3 \\ 0 & 0 & l_1(m_1 - m_1n_1)\sin\varphi_1 & l_2(m_2 - m_2n_2)\sin\varphi_2 & -l_3m_3n_3\sin\varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$C(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m_1 + m_2 + m_3)y^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m_1 - m_1n_1)\cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(m_2 - m_2n_2)\cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3n_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (29)$$



$$D(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (m_1 - m_1 n_1) \sin \varphi_1 & (m_2 - m_2 n_2) \sin \varphi_2 & -m_3 n_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & -(m_1 - m_1 n_1) \cos \varphi_1 & -(m_2 - m_2 n_2) \cos \varphi_2 & m_3 n_3 \cos \varphi_3 \\ 0 & 0 & l_1 (n_1 - 1)^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 (n_2 - 1)^2 m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 n_3^2 m_3 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$E(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(m_1 - m_1 n_1) \cos \varphi_1 & -(m_2 - m_2 n_2) \cos \varphi_2 & m_3 n_3 \cos \varphi_3 \\ 0 & 0 & -(m_1 - m_1 n_1) \sin \varphi_1 & -(m_2 - m_2 n_2) \sin \varphi_2 & m_3 n_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$G(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(m_1 - m_1 n_1) \cos \varphi_1 & -(m_1 - m_1 n_1) \sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(m_2 - m_2 n_2) \cos \varphi_2 & -(m_2 - m_2 n_2) \sin \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_3 n_3 \cos \varphi_3 & m_3 n_3 \sin \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$H(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 (n_1 - 1)^2 m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_2 (n_2 - 1)^2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_3 n_3^2 m_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$F(q,l) = (R_{A1x} + R_{A2x}, R_{A1y} + R_{A2y}, -M_1 + M_{3-1}, -M_2 + M_{3-2}, -M_{3-1} - M_{3-2})^T. \quad (34)$$

$$K(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m_1 - m_1 n_1) \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(m_2 - m_2 n_2) \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 n_3 \cos \varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

$$L(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$P(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 (n_1 - 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 (n_2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 n_3^2 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$S(k,l) = (-k_1 \Delta l_1, -k_2 \Delta l_2, -k_3 \Delta l_3)^T. \quad (38)$$

Для того чтобы лучше уяснить блочную структуру уравнений необходимо привести матрицы и для шестизвенной модели в безопорной и двухопорной фазах движения. Матрицы для уравнений (11)-(24) шестизвенной модели ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Таким образом, приведенные матрицы показывают что несмотря на то, что структура уравнений (25), (26) осталась прежней их вид, в сравнении с одноопорной фазой движения, изменился. Проводя обобщения, видно, что общих формул получить

не удастся. Но элементы матрицы, выделенные пунктиром, подчиняются закономерностям, подобным полученным для одноопорной фазы движения, однако, не совпадают в точности с ними. Это связано со способом отсчета координат. Соответственно, формулы, обобщающие матрицы распадаются на несколько частей: для координат подвеса ног  $(x,y)$ , для каждой из частей – двух ног и корпуса (нижней части механизма и верхней).

Приведем обобщающие зависимости для произвольного конечного количества звеньев  $n$  стержневой механической системы. Через  $n_i$  обозначаются также множители, задающие положения центров масс звеньев, однако совпадений обозначений здесь не возникает, так как все множители имеют индексы, в отличие от общего количества звеньев. При этом, вообще говоря, не будем накладывать ограничения на количество звеньев из которых состоят ноги и корпус. Пусть условно первая нога, с меньшими индексами у углов, имеет  $k$  звеньев. Вторая нога, с большими индексами, имеет  $p$  звеньев. Корпус, имеет  $r$  звеньев. Тогда  $k + p + r = n$ . Количество уравнений для рассматриваемой модели с деформируемыми звеньями будет равно  $2n + 2$ . Области изменения значений для первой нижней ноги будет:  $1 \leq i \leq k$ , для второй:  $k + 1 \leq i \leq p$ , для корпуса:  $p + 1 \leq i \leq r$ .

Для матрицы  $A(q,l)$ . Первые две строки дают уравнения, описывающие движение точки подвеса ног.

$$a_{11} = a_{22} = \sum_{\gamma=1}^n m_{\gamma}, \quad (39)$$

То есть, для первых двух строк и двух столбцов диагональные элементы матрицы равны массе всего экзоскелета.

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с третьего по  $k + 2$ -й  $j = 3, \dots, k + 2$ , то есть для первой ноги:

$$a_{ij} = l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-2}^{j-k} m_{\gamma} - m_{j-2} n_{j-2} \right) \sin(\varphi_{j-2}), \quad (40)$$

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с  $k + 3$ -го по  $p + 2$ -й  $j = k + 3, \dots, p + 2$ , то есть для второй ноги:

$$a_{ij} = l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-2}^p m_{\gamma} - m_{j-2} n_{j-2} \right) \sin(\varphi_{j-2}), \quad (41)$$

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с  $p + 3$ -го по  $r + 2$ -й  $j = p + 3, \dots, r + 2$ , то есть для корпуса:

$$a_{ij} = -l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-1}^r m_{\gamma} + m_{j-2} n_{j-2} \right) \sin(\varphi_{j-2}), \quad (42)$$

Примечание: если в сумме  $\gamma$  больше верхнего значения, соответствующий элемент необходимо положить равным нулю.

Для второй строки  $i = 2$  и столбцов, начиная с третьего по  $k + 2$ -й  $j = 3, \dots, k + 2$ , то есть для первой ноги:

$$a_{ij} = -l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-2}^{j-k} m_{\gamma} - m_{j-2} n_{j-2} \right) \cos(\varphi_{j-2}), \quad (43)$$

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с  $k + 3$ -го по  $p + 2$ -й  $j = k + 3, \dots, p + 2$ , то есть для второй ноги:

$$a_{ij} = -l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-2}^p m_{\gamma} - m_{j-2} n_{j-2} \right) \cos(\varphi_{j-2}), \quad (44)$$

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с  $p + 3$ -го по  $r + 2$ -й  $j = p + 3, \dots, r + 2$ , то есть для корпуса:

$$a_{ij} = l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-1}^r m_{\gamma} + m_{j-2} n_{j-2} \right) \cos(\varphi_{j-2}), \quad (45)$$

Для элементов матрицы, начиная с третьей строки и третьего столбца, то есть:  $2 < i \leq n + 2$  и  $2 < j \leq n + 2$ . Эти элементы, выделенные по блокам пунктиром в матрицах приложения 3 очень похожи на элементы из системы уравнений для одноопорной фазы движения.

Для первой ноги  $2 < i \leq k + 2$  и  $2 < j \leq k + 2$ .

$$a_{ij} = \delta_{ij} l_{i-2} + l_{i-2} l_{j-2} \left( m_{j-2} (1 - n_{j-2}) \tilde{\delta}(1 - n_{j-2}) + \sum_{\gamma=i-2}^k m_{\gamma} \right) \cos(\varphi_{i-2} - \varphi_{j-2}), \quad (46)$$

где:  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ ,

символ:  $\tilde{\delta}(1 - n_{j-2}) = \begin{cases} (1 - n_{j-2}), i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Для второй ноги  $k + 2 < i \leq p + 2$  и  $k + 2 < j \leq p + 2$ .

$$a_{ij} = \delta_{ij} l_{i-2} + l_{i-2} l_{j-2} \left( m_{j-2} (1 - n_{j-2}) \tilde{\delta}(1 - n_{j-2}) + \sum_{\gamma=i-2}^p m_{\gamma} \right) \cos(\varphi_{i-2} - \varphi_{j-2}), \quad (47)$$

где:  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ ,

символ:  $\tilde{\delta}(1 - n_{j-2}) = \begin{cases} (1 - n_{j-2}), i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Для корпуса  $p + 2 < i \leq r + 2$  и  $p + 2 < j \leq r + 2$ .

$$a_{ij} = \delta_{ij} l_{i-2} + l_{i-2} l_{j-2} \left( m_{j-2} n_{j-2} \tilde{\delta} n_{i-2} + \sum_{\gamma=i-1}^r m_{\gamma} \right) \cos(\varphi_{i-2} - \varphi_{j-2}), \quad (48)$$

где:  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ , символ:  $\tilde{\delta} n_i = \begin{cases} n_j, i = j \\ 1, i \neq j \end{cases}$

Обобщения для остальных матриц аналогичны по логике построения и приводить их не будем ввиду однотипности действий и ясности метода их построения.

### **Заключение**

В результате работы, впервые предложены обобщения матриц и рекурсивный метод для получения уравнений движения экзоскелета в безопорной и двухопорной фазах движения с произвольным количеством звеньев и переменным моментом инерции звена.

### **РЕЗЮМЕ**

В работе впервые получены обобщения для построения матриц дифференциальных уравнений движения, описывающих динамику антропоморфных систем с деформируемыми звеньями и переменным моментом инерции звена в безопорной и двухопорной фазах движения. Благодаря полученным результатам появляется возможность рекурсивной записи дифференциальные уравнения движения непосредственно, минуя трудоемкий этап записи уравнений Лагранжа или других методов составления.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-97512 р\_центр\_a)*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов А.В. Уравнения динамики деформируемых стержневых механических систем. // Естественные и технические науки, № 2, 2013. С. 34-35.
2. Борисов А.В. Комплекс программ для моделирования динамики экзоскелета. // Научные труды международной научно-практической конференции ученых РГАУ-МСХА имени К.А.Тимирязева, ЛНАУ. 22 - 23 января 2014 года. Том 2. Экономика и управление. Естественные и технические науки Москва-Луганск. Издательство РГАУ-МСХА имени К.А.Тимирязева, ЛНАУ. 2014. С. 105-117.
3. Чигарев А. В. Биомеханика: учебник / А. В. Чигарев, Г. И. Михасев, А. В. Борисов. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.
4. Чигарев А. В. Динамика антропоморфного механизма с изменяемой структурой / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ (29-30 июня 2004 года). – М. – Луганск : Изд-во МАДИ(ГТУ) – МСХА – ЛНАУ. – 2004. – Т. 4. – С. 130-149.
5. Чигарев А. В. Моделирование управляемого движения двуногого антропоморфного механизма / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 1(51). – С. 74-88.

## SUMMARY

*For the first time obtained the generalization to construct matrices of differential equations of motion describing the dynamics of anthropomorphic systems with deformable parts and variable moment of inertia of the link in unsupported and two phases of movement. These results appear recursive write the differential equations of motion directly, bypassing the time-consuming stage write the Lagrange equations or other methods of preparation.*

**E-mail:** [borisowandrej@yandex.ru](mailto:borisowandrej@yandex.ru)  
[chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014