

РАВНОНАПРЯЖЕННОЕ АРМИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНО ИЗГИБАЕМЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ ГИПОТЕЗАМ ТИМОШЕНКО

д.ф.-м.н. **Янковский А.П.**

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск*

При создании конструкций из композиционных элементов уже на этапе их проектирования целесообразно осуществлять оптимизацию, причем не только по геометрическим параметрам, но и по структуре армирования [1]. Одним из наиболее естественных прочностных критериев рационального армирования тонкостенных конструкций типа пластин и оболочек является требование равнонапряженности силовых элементов (волокон) вдоль их траекторий, так как при этом несущая способность арматуры используется наиболее полно (так называемая оптимизация по физическому критерию качества).

Достаточно подробный обзор публикаций, посвященных оптимальному проектированию тонкостенных элементов композитных конструкций, в том числе по проблеме равнонапряженного армирования (РА), приведен в монографиях [1–3 и др.]. Из этих обзоров следует, что подавляющая часть публикаций, посвященных проблеме РА, сводится к рассмотрению плоских задач теории упругости или безмоментных оболочек. Лишь незначительная часть публикаций посвящена задачам РА изгибаемых пластин. При этом изгиб РА-пластин исследуется исключительно в рамках гипотез Кирхгофа [2, 4, 5 и др.]. Однако известно, что в случаях использования высокомодульных армирующих волокон (боро-, углепластики, металло-полимерные композиции) при изгибе композитных пластин необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам [6, 7 и др.]. В рамках теории Кирхгофа этот учет невозможен, поэтому в таких случаях, как правило, используют теорию Тимошенко [6, 8, 9 и др.].

В связи с этим настоящая работа посвящена постановке задачи РА изгибаемых пластин в рамках гипотез Тимошенко, анализу и обсуждению особенностей ее решения.

Рассмотрим пластину постоянной толщины $2h$, подчиняющуюся гипотезам Тимошенко [6, 9]. Свяжем с пластиной декартову прямоугольную систему координат x_1, x_2, x_3 . Отсчетную плоскость x_1x_2 ($x_3=0$) совместим со срединной плоскостью пластины, которая армирована N семействами волокон постоянного поперечного сечения в плоскостях, параллельных отсчетной плоскости. Армирование по толщине пластины (в направлении x_3) предполагается квазиоднородным и регулярным. Пластина нагружена только в поперечном направлении x_3 (напряжение в плоскости x_1x_2 отсутствует), тепловое воздействие не учитывается. Прогибы считаются малыми.

При таких условиях нагружения и армирования пластины в ней реализуется случай поперечного изгиба (мембранные деформации и напряжения отсутствуют). Задача РА такой линейно-упругой конструкции описывается следующими уравнениями и соотношениями (используется модель полиармированного элемента из [10]): уравнениями равновесия [6, 8, 9]

$$\partial_1 M_{1i} + \partial_2 M_{i2} = F_{i3} \quad (i=1, 2), \quad \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23} = -p_3(x_1, x_2); \quad (1)$$

кинематическими соотношениями [6, 8, 10]

$$\varepsilon_{ii} = h^{-1} x_3 \partial_i u_i, \quad \varepsilon_{ij} = (2h)^{-1} x_3 (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad \varepsilon_{i3} = (\partial_i u_3 + u_i / h) / 2, \quad j=3-i, \quad i=1, 2, \quad |x_3| \leq h; \quad (2)$$

определяющими уравнениями [2, 3, 9]

$$\sigma_{ii} = aEa_1(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}) + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki}^2, \quad \sigma_{ij} = aEa_2\varepsilon_{ij} + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki}l_{kj}, \quad (3)$$

$$\sigma_{i3} = a^{-1}Ea_2\varepsilon_{i3}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2;$$

$$\sigma_k = E_k(\varepsilon_{11}l_{k1}^2 + \varepsilon_{22}l_{k2}^2 + 2\varepsilon_{12}l_{k1}l_{k2}), \quad 1 \leq k \leq N; \quad (4)$$

условиями равнонапряженности арматуры [2–5]

$$\sigma_k(x_1, x_2, h) = \sigma_k^0 = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N; \quad (5)$$

условиями постоянства поперечных сечений волокон [2–5]

$$\partial_1(\omega_k l_{k1}) + \partial_2(\omega_k l_{k2}) = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (6)$$

где

$$M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad i, j = 1, 2; \quad (7)$$

$$a_1 = (1 - \nu^2)^{-1} = \text{const}, \quad a_2 = (1 + \nu)^{-1} = \text{const}, \quad l_{k1} = \cos \psi_k, \quad (8)$$

$$l_{k2} = \sin \psi_k \quad (1 \leq k \leq N), \quad a = 1 - \sum_k \omega_k;$$

M_{ij} , F_{i3} – моменты и поперечные силы в пластине; $u_i(x_1, x_2)$ – тангенциальные перемещения точек на верхней лицевой поверхности пластины ($x_3 = h$) в направлениях x_i ($i = 1, 2$); $u_3(x_1, x_2)$ – прогиб; p_3 – распределенная поперечная нагрузка, действующая на пластину; σ_{ij} , ε_{ij} – напряжения и деформации в композиции пластины;

σ_k – напряжения в волокнах k -го семейства; σ_k^0 – фиксированное значение напряжения в арматуре k -го семейства на верхней лицевой поверхности, обеспечивающее условие РА; ω_k , ψ_k – плотность и угол (отсчитываемый от направления x_1) армирования волокнами k -го семейства, причем должны выполняться физические ограничения

$$0 \leq \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad 0 \leq \sum_k \omega_k \leq \omega_* < 1; \quad (9)$$

ω_* – предельно допустимая суммарная плотность армирования (на практике $\omega_* \approx 0,7$); E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего материала; E_k – модуль Юнга арматуры k -го семейства; ∂_i – оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 2$); суммирование производится по указанному индексу от 1 до N , если не указаны пределы.

Пусть область G , занимаемая пластиной в плане, ограничена контуром Γ , тогда на одной части этого контура (обозначим ее Γ_p) могут быть заданы статические

$$M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + 2M_{12}n_1n_2 = M_{mm}, \quad (M_{22} - M_{11})n_1n_2 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2) = M_{m\tau}, \quad (10)$$

$$F_{13}n_1 + F_{23}n_2 = F_{n3}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p,$$

а на другой части контура (обозначим ее Γ_u) – кинематические

$$u_i(\Gamma_u) = u_{i0}, \quad i = \overline{1, 3} \quad (11)$$

граничные условия. Здесь: $n_1 = \cos \beta$, $n_2 = \sin \beta$, β – угол, задающий направление внешней нормали к контуру Γ ; M_{mm} , $M_{m\tau}$ – изгибающий и крутящий моменты, заданные на Γ_p ; F_{n3} – заданная на контуре (кромке) поперечная сила; u_{i0} – заданные на контуре перемещения. (Условия (11) могут быть заданы и на всем контуре Γ ; кроме того, возможно и задание смешанных из (10), (11) граничных условий.)

На той части контура Γ (обозначим ее $\Gamma_{\omega k}$), на которой волокна k -го семейства входят в конструкцию, необходимо задать краевые условия для интенсивностей армирования [2]:

$$\omega_k(\Gamma_{\omega k}) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

где ω_{0k} – заданные на $\Gamma_{\omega k}$ контурные значения функций ω_k .

Согласно (2), (4), (5) напряжения в волокнах РА-пластины при поперечном изгибе имеют простые выражения

$$\sigma_k(x_1, x_2, x_3) = x_3 \sigma_k^0 / h, \quad 1 \leq k \leq N, \quad |x_3| \leq h, \quad (13)$$

откуда вытекает $\sigma_k(x_1, x_2, -h) = -\sigma_k^0 = \text{const}$, т.е. арматура на нижней лицевой поверхности ($x_3 = -h$) также равнонапряжена.

После подстановки соотношений (2) в (3), а затем (3) в (7) и, наконец, (7) в (1) с учетом (6), (8), (13) получим следующие уравнения равновесия задачи РА в перемещениях:

$$\begin{aligned} & (-1)^i \sum_k \sigma_k^0 \omega_k I_{kj} \partial_s (\psi_k, \psi_k) + Ea_1 \partial_i [a (\partial_i u_i + \nu \partial_j u_j)] + 0,5 Ea_2 \partial_j [a (\partial_i u_j + \partial_j u_i)] = \\ & = 1,5 a^{-1} h^{-1} Ea_2 (\partial_i u_3 + u_i / h), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (14)$$

$$h Ea_2 \sum_{i=1}^2 \partial_i [a^{-1} (\partial_i u_3 + u_i / h)] = -p_3(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G. \quad (15)$$

К этой системе уравнений следует добавить условия постоянства поперечных сечений волокон (6), которые с учетом (8) примут вид

$$\partial_s (\psi_k, \omega_k) + \omega_k \partial_n (\psi_k, \psi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

а также условия РА (5), которые с учетом (4), (2), (8) можно записать в перемещениях

$$\partial_s (\psi_k, u_1) \cos \psi_k + \partial_s (\psi_k, u_2) \sin \psi_k = \varepsilon_k^0 = \sigma_k^0 / E_k = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (17)$$

где

$$\partial_s (\psi_k, \cdot) = \cos \psi_k \partial_1(\cdot) + \sin \psi_k \partial_2(\cdot), \quad \partial_n (\psi_k, \cdot) = -\sin \psi_k \partial_1(\cdot) + \cos \psi_k \partial_2(\cdot), \quad 1 \leq k \leq N. \quad (18)$$

Статические граничные условия (10) после подстановки в них (7) с учетом (2), (3), (13), (8) можно записать в перемещениях

$$\begin{aligned} & \sum_k \sigma_k^0 \omega_k \cos^2(\psi_k - \beta) + a Ea_1 [(\partial_1 u_1 + \nu \partial_2 u_2) n_1^2 + (\partial_2 u_2 + \nu \partial_1 u_1) n_2^2 + (1 - \nu) \times \\ & \times (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) n_1 n_2] = 1,5 h^{-2} M_{nn}, \quad \sum_k \sigma_k^0 \omega_k \sin 2(\psi_k - \beta) + \end{aligned} \quad (19)$$

$$+ a Ea_2 [2(\partial_2 u_2 - \partial_1 u_1) n_1 n_2 + (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) (n_1^2 - n_2^2)] = 3 h^{-2} M_{nt};$$

$$a^{-1} h Ea_2 \sum_{i=1}^2 n_i (\partial_i u_3 + u_i / h) = F_{n3}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p. \quad (20)$$

Граничные (11) и краевые (12) условия остаются без изменения.

Таким образом, система разрешающих уравнений задачи РА поперечно изгибаемых пластин, подчиняющихся гипотезам Тимошенко, состоит из $2N + 3$ уравнений (14)–(17) и замкнута относительно следующих неизвестных функций: тангенциальных перемещений на верхней лицевой поверхности u_1 , u_2 , прогиба u_3 и параметров РА ψ_k , ω_k ($1 \leq k \leq N$). Для однозначного интегрирования системы разрешающих уравнений на кромке пластины должны быть заданы граничные (11), (19), (20) и краевые (12) условия. Решение сформулированной задачи РА должно удовлетворять физическим ограничениям (9).

Полученная система разрешающих уравнений (14)–(17) и соответствующие ей краевые условия (11), (12), (19), (20) с учетом (8), (18) указывают на то, что задачи определения перемещений u_i ($i = \overline{1, 3}$) и параметров РА ψ_k , ω_k ($1 \leq k \leq N$) связаны и решать их необходимо совместно, причем в целом система уравнений и граничные условия существенно нелинейны, что вызвано нелинейным вхождением параметров РА в указанные соотношения. Эти обстоятельства значительно усложняют качественный анализ граничной задачи РА изгибаемых пластин и разработку методов ее решения.

Характеристическое уравнение системы разрешающих уравнений имеет следующий вид [11]

$$\left[x_2'^2 + 1 \right] P(x_2') \prod_{k=1}^N (\sin \psi_k - x_2' \cos \psi_k) = 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} P(x_2') = & \left[L_{11}(x_2') \prod_{k=1}^N \gamma_k - (\sigma_{12}^0 - \sigma_{11}^0 x_2') \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \eta_k \omega_k \cos \psi_k + \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \zeta_k^2 \omega_k \cos \psi_k \sin \psi_k \right] \times \\ & \times \left[L_{22}(x_2') \prod_{k=1}^N \gamma_k - (\sigma_{22}^0 - \sigma_{12}^0 x_2') \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \eta_k \omega_k \sin \psi_k - \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \zeta_k^2 \omega_k \cos \psi_k \sin \psi_k \right] - \\ & - \left[L_{12}(x_2') \prod_{k=1}^N \gamma_k - (\sigma_{22}^0 - \sigma_{12}^0 x_2') \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \eta_k \omega_k \cos \psi_k - \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \zeta_k^2 \omega_k \cos^2 \psi_k \right] \times \\ & \times \left[L_{12}(x_2') \prod_{k=1}^N \gamma_k - (\sigma_{12}^0 - \sigma_{11}^0 x_2') \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \eta_k \omega_k \sin \psi_k + \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \zeta_k^2 \omega_k \sin^2 \psi_k \right], \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_k &= \sin \psi_k - x_2' \cos \psi_k, \quad \eta_k = \cos \psi_k + x_2' \sin \psi_k, \quad \gamma_k = (\partial_2 u_2 - \partial_1 u_1) \sin 2\psi_k + (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) \times \\ & \times \cos 2\psi_k, \quad \sigma_{ii}^0 = Ea_1 (\partial_i u_i + \nu \partial_j u_j), \quad \sigma_{ij}^0 = 0, 5Ea_2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2), \end{aligned}$$

$$L_{11} = aEa_1 [x_2'^2 + (1 - \nu)/2], \quad L_{22} = aEa_1 [1 + x_2'^2 (1 - \nu)/2], \quad L_{12} = -0, 5aEx_2' / (1 - \nu);$$

производная $x_2' = dx_2 / dx_1$ задает направление характеристики; $P(x_2')$ – полином четвертого порядка относительно x_2' , коэффициенты которого зависят от значений неизвестных функций $\partial_i u_j$, ψ_k , ω_k (см. (22)).

Сомножители, стоящие в (21) под знаком произведения, указывают на то, что система разрешающих уравнений имеет N действительных характеристик, совпадающих с траекториями армирования. Двучлен, заключенный в (21) в квадратные скобки, имеет только мнимые корни x_2' , поэтому система разрешающих уравнений имеет два мнимых характеристических направления, порожденных уравнением равновесия (15). Полином $P(x_2')$ в зависимости от значений неизвестных функций $\partial_i u_j$, ψ_k , ω_k (т.е. в зависимости от значений коэффициентов) может иметь разное количество действительных корней в разных точках области G . Следовательно, система разрешающих уравнений задачи РА является квазилинейной системой смешанно-составного типа [12].

Правые части в уравнениях (14) имеют смысл поперечных сил (см. (1)) и не содержат старших производных от неизвестных функций, т.е. операторы, стоящие в правых частях (14), не входят в главную часть дифференциальных операторов, описывающих задачу РА изгибаемых пластин. Если предположить, что правые части в (14) известны из каких-то соображений (т.е. если рассматривать их как некоторые фиктивные нагрузки), то система уравнений (14), (16), (17) и соответствующие ей граничные (19), (11) (при $i = 1, 2$) и краевые (12) условия формально полностью совпадают с разрешающими уравнениями и краевыми условиями задачи РА пластин, нагруженных в своей плоскости [2]. Поэтому на основании анализа, проведенного в [2], можно сделать следующие выводы относительно свойств решения краевой задачи (14)–(17), (19), (20), (11), (12).

Статические (19), (20) и кинематические (11) граничные условия являются естественными условиями в задачах механики деформируемого твердого тела и определяются конкретными условиями эксплуатации пластины. Краевые же условия для плотностей армирования (12) являются «технологическими» условиями, задающими количество арматуры k -го семейства, внедряемой в конструкцию на данном участке контура (кромки). Выбор количества внедряемых волокон в определенной

степени произволен и должен удовлетворять лишь физическим ограничениям (9) и условиям существования соответствующего проекта РА. Следовательно, задача РА при использовании арматуры постоянного поперечного сечения обладает функциональными произволами $\omega_{0k}(\Gamma_{\omega k})$, связанными с краевыми условиями (12). Варьируя в краевых условия (12) функции $\omega_{0k}(\Gamma_{\omega k})$, можно получить «пучки» решений задачи РА, из которых можно выбирать проекты с определенными свойствами. Это означает, что на множестве проектов с РА-структурами можно осуществлять целевое управление. Более того, в силу существенной нелинейности статических (19) граничных условий и условий РА (17) относительно параметров армирования ψ_k, ω_k ($k=1, 2, \dots, N$) задача РА, как обратная задача механики композитов [1], может иметь несколько альтернативных решений даже при фиксированных функциях $\omega_{0k}(\Gamma_{\omega k})$ в краевых условиях (12). Эта возможность еще больше расширяет «спектр» решений задачи РА, из которого можно выбирать наиболее эффективные с практической точки зрения проекты.

Используя общеизвестный переход от прямоугольной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 к цилиндрической системе $r, \theta, z = x_3$, уравнения и соотношения (14)–(20), (11), (12) можно переписать в полярной системе координат (не будем их здесь приводить). В случае осесимметричного нагружения, закрепления и армирования (т.е. при $\omega_{0k} = \text{const}$ в (12)) кольцевой пластины решение задачи РА также будет обладать осевой симметрией (не будет зависеть от полярного угла θ). При этом система разрешающих уравнений представляет собой систему обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений, содержащих производные от неизвестных функций только по полярному радиусу r . Проинтегрировать соответствующую двухточечную нелинейную краевую задачу РА изгибаемых кольцевых пластин можно численно, например, методом пристрелки [13]. Не будем останавливаться на обсуждении этого вопроса более подробно, а обсудим результаты расчетов, выполненных на основе такого подхода.

Рассмотрим кольцевую пластину, ограниченную кромками радиусов r_0, r_1 ($r_1 = 2r_0$). На внешней кромке r_1 пластина жестко закреплена ($u_{i0} = 0, i = \overline{1, 3}$; см. (11)), а на внутренней кромке r_0 статически нагружена изгибающим $M_m = \text{const}$ и крутящим $M_{\pi} = \text{const}$ моментами (см. (10)). Поперечные нагрузки отсутствуют: $p_3 \equiv 0, F_{n3} = 0$ (см. (1), (10)). Пластина армирована двумя семействами волокон ($N = 2$), выполненных из одного материала ($E_1 = E_2$). Напряжения в обоих семействах арматуры на лицевых поверхностях одинаковы ($\sigma_1^0 = \sigma_2^0$). Значения механических характеристик фаз композиции характеризуются безразмерными величинами $\nu = 0,3, E/E_1 = 0,01$ (сильная анизотропия, требующая учета ослабленного сопротивления поперечным сдвигам в пластине [6, 7]). Краевые условия для плотностей армирования (12) заданы на внутренней кромке r_0 и $\omega_{0k} = \text{const}$ ($k = 1, 2$).

При таких условиях закрепления, нагружения и армирования решение задачи РА обладает осевой симметрией.

На рисунок 1 изображены РА-структуры, полученные при $\omega_{01} = \omega_{02} = 0,3$ и разных условиях нагружения внутренней кромки. На рисунок 1, а приведена структура армирования, полученная при нагружении пластины только изгибающим моментом $M_m / (r_1^2 \sigma_1^0) = 0,5$ ($M_{\pi} = 0$). При этом траектории армирования обладают не только осевой, но и радиальной симметрией. Так как волокна разных семейств выполнены из одного материала, уложены с одинаковой плотностью и напряжения в них одинаковы, второе альтернативное решение этой задачи РА приводит к структуре армирования,

полностью совпадающей с изображенной на рисунок 1, а, лишь траектории разных семейств меняются местами.

К РА-структуре, аналогичной изображенной на рисунок 1, а, приводит и решение рассматриваемой задачи в рамках классической теории Кирхгофа [2]. Известно, что классическая теория при осесимметричном изгибе кольцевых пластин не чувствительна к наличию или отсутствию на их кромках равномерно распределенных крутящих моментов $M_{\tau} = \text{const}$. Поэтому добавление крутящего момента $M_{\tau} = \text{const} \neq 0$ в рамках теории Кирхгофа приводит к той же РА-структуре, что изображена на рисунок 1, а. Неклассическая же теория позволяет учесть влияние этого момента. Так, на рисунок 1, б изображена РА-структура, полученная в рамках теории Тимошенко при $M_{mn}/(r_1^2 \sigma_1^0) = 0,5$ и $M_{\tau\tau}/(r_1^2 \sigma_1^0) = 0,1$. Как видно, структура армирования при этом уже не обладает радиальной симметрией и существенно отличается от РА-структуры, приведенной на рисунок 1, а. По указанным выше причинам второе альтернативное

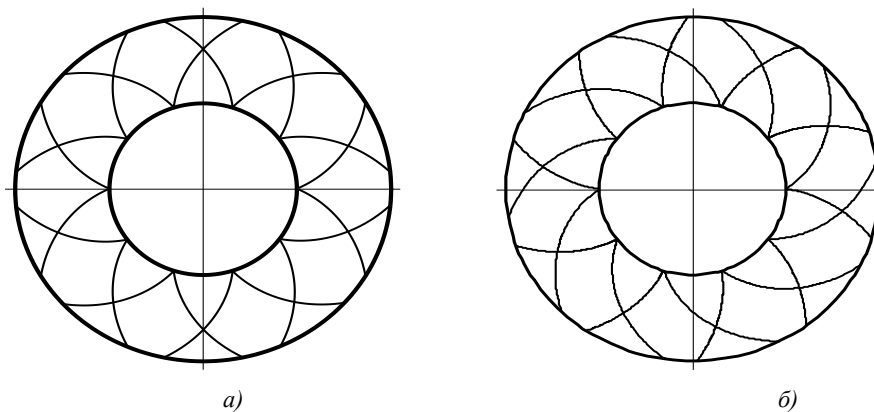


Рисунок 1 – РА-структуры изгибаемых пластин, нагруженных моментами на внутренней кромке: а) – только изгибающим моментом, б) – изгибающим и крутящим моментами

решение приводит вновь к структуре армирования, изображенной на рисунок 1, б, при этом траектории армирования разных семейств вновь меняются местами.

На рисунок 2 изображены структуры армирования, соответствующие двум альтернативным решениям задачи РА, при нагружении внутренней кромки пластины только изгибающим моментом $M_{mn}/(r_1^2 \sigma_1^0) = 0,5$ ($M_{\tau\tau} = 0$), т.е. как в случае, соответствующем рисунок 1, а, но при не одинаковых плотностях армирования, заданных на внутренней кромке: $\omega_{01} = 0,35$, $\omega_{02} = 0,25$. Из сравнения структур, приведенных на рисунок 2, видно, что структуру, изображенную на рисунок 2, б,

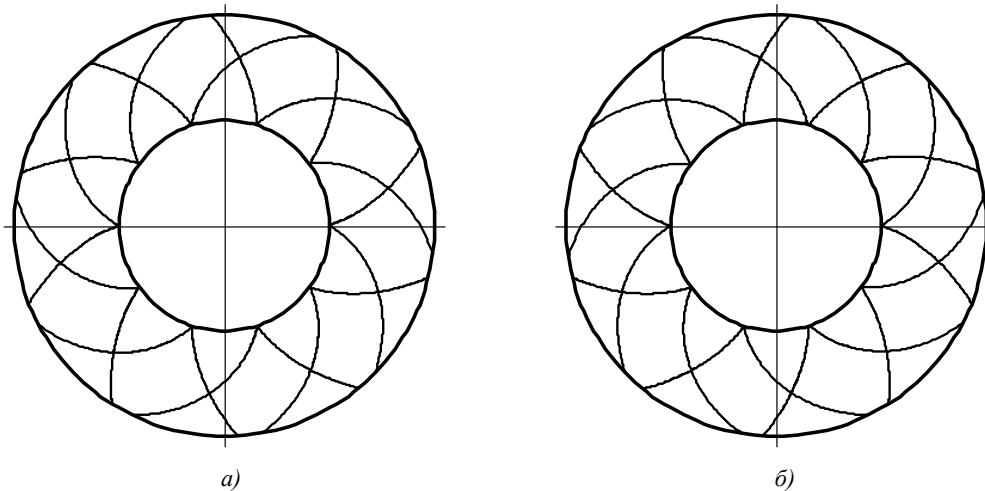


Рисунок 2 – Две альтернативные РА-структуры изгибаемой пластины, нагруженной на внутренней кромке только изгибающим моментом

можно получить из структуры, изображенной на рисунок 2, а, если РА-пластину повернуть на угол π вокруг вертикальной или горизонтальной оси (т.е., просто, пластину перевернуть). Такое свойство двух решений задачи РА имеет место только при $\sigma_1^0 = \sigma_2^0$, $E_1 = E_2$. В случае же использования волокон разных семейств, выполненных из разных материалов ($E_1 \neq E_2$), или при задании разных уровней напряжений в волокнах на лицевых поверхностях ($\sigma_1^0 \neq \sigma_2^0$) структуры армирования, соответствующие альтернативным решениям задачи РА, получаются совершенно разными.

Сравнение структур, изображенных на рисунок 1, а и рисунок 2, позволяет получить представление об изменении траекторий армирования при варьировании величин ω_{0k} в краевых условиях (12) при постоянстве суммарной плотности армирования на внутренней кромке ($\omega_{01} = \omega_{02} = \text{const}$). В рамках классической теории изгиба пластин такое варьирование величин ω_{0k} ($k = 1, 2$) не приводит к изменению РА-структуры, приведенной на рисунок 1, а [2].

Таким образом, сформулированная в рамках гипотез теории Тимошенко задача РА изгибаемых композитных пластин позволяет не только адекватно учитывать их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам [6, 8], но и получать РА-структуры, более точно соответствующие особенностям нагружения пластин, чем это удается добиться в рамках классической теории Кирхгофа [2].

РЕЗЮМЕ

В рамках гипотез теории Тимошенко сформулирована задача равнонапряженного армирования поперечно изгибаемых упругих пластин волокнами постоянного поперечного сечения. Выполнен качественный анализ соответствующей системы разрешающих уравнений и граничных условий. Показано, что система разрешающих уравнений является системой квазилинейных уравнений смешанно-составного типа, которой соответствуют нелинейные статические граничные условия, порождающие возможность существования нескольких альтернативных решений поставленной задачи. В осесимметричном случае методом пристрелки численно решена двухточечная нелинейная задача о равнонапряженном армировании кольцевой пластины. Обсуждаются результаты расчетов такой пластины, особенности изменения структуры армирования при разных типах ее нагружения и при варьировании плотностей армирования на внутренней кромке. Сравняются результаты расчетов по классической теории и теории Тимошенко.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00102-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук, Н.В. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов / Н.В. Баничук, В.В. Кобелев, Р.Б. Рикардс. – М.: Машиностроение, 1988. – 224 с.
2. Немировский, Ю.В. Рациональное проектирование армированных конструкций / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский. – Новосибирск: Наука, 2002. – 488 с.
3. Голушко, С.К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С.К. Голушко, Ю.В. Немировский. – М: Физматлит, 2008. – 432 с.
4. Немировский, Ю.В. О некоторых свойствах решения задачи поперечного изгиба пластины с равнонапряженной арматурой / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский //

- Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т. 2, № 2. – С. 15–28.
5. Немировский, Ю.В. Применение методов теории возмущений в задачах поперечного изгиба пластин с равнонапряженной арматурой / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 3. – С. 3–22.
 6. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
 7. Немировский, Ю.В. О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Научный вестник НГТУ. – 2004. – № 3 (18). – С. 93–115.
 8. Пикуль, В.В. Механика оболочек / В.В. Пикуль. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 536 с.
 9. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
 10. Немировский, Ю.В. Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю.В. Немировский, Б.С. Резников. – Новосибирск: Наука, 1986. – 168 с.
 11. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
 12. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.
 13. Холл, Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

SUMMARY

Under the hypotheses of Timoshenko theory the problem is formulated for transverse bending of elastic plates equal-stress reinforced by fibers of constant cross-section. The qualitative analysis carried out for the corresponding system of resolving equations and boundary conditions. It is shown that the resolving equations is a system of quasilinear equations of mixed-composite type, which correspond to nonlinear static boundary conditions, generating the possibility of the existence of several alternative solutions of the problem. In the axisymmetric case the two-point nonlinear problem about equal-stress reinforcement of circular plate is numerically solved by the shooting method. The results of calculations of such plates, particularly changes in the structure of reinforcement for different types of loading and at varying densities of reinforcement on the inner edge are discussed. The results of calculations according to the classical theory and Timoshenko theory are compared.

E-mail: yankovsky_ap@rambler.ru
lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 21.09.2013