

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Минск  
БНТУ  
2015

30

ISSN 0134-9635

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный научно-технический журнал

Основан в 1975 году

Выпуск 30

*Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь  
для опубликования результатов диссертационных исследований  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук*

Минск  
БНТУ  
2015

УДК [531+621.01:531.8](082)  
ББК 22.21я43  
30.12я43  
Т 33

## РЕДАКЦИЯ НАУЧНОГО ЖУРНАЛА

### Президиум редакции:

С.А. Чижик, М.А. Журавков,  
Ю.М. Плескачевский, Б.М. Хрусталеv,  
Ф.И. Пантелеенко, Ф.А. Романюк, Л.Г. Красневский

### Международный совет редакции:

J. Awrejcewicz (Польша), J. Grabski (Польша), Р.А. Васин (Россия),  
G. Gudehus (Германия), В.В. Лобода (Украина), Н.Ф. Морозов (Россия),  
Ж.А. Мрочек (Беларусь), Н.К. Мышкин (Беларусь), Ф.А. Романюк (Беларусь),  
К. Циммерман (Германия), А.И. Шашкин (Россия), Г.П. Черепанов (США),  
Ю.В. Немировский (Россия), С.В. Харитончик (Беларусь), В.С. Бондарь (Россия)

### Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич (зам. председателя), В.С. Вихренко,  
И.С. Куликов, М.А. Журавков, М.Г. Ботогова, А.Т. Скойбеда,  
А.В. Чигарев (председатель, главный редактор), А.М. Якимович,  
П.И. Ширвель (уч. секретарь, технический редактор),  
А.В. Глембоцкий (компьютерная верстка)

*Теоретическая и прикладная механика:* А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков  
*Механика конструкций:* А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Т.М. Пецольд, Э.И. Старовойтов  
*Механика материалов и структур:* Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, Н.В. Спиридонов  
*Приборы точной механики:* С.А. Чижик, И.Е. Зуйков, М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо  
*Механика машин:* Ю.М. Плескачевский, В.Б. Альгин, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег  
*Мехатроника и интеллектуальные системы:* Л.Г. Красневский, В.М. Колешко

### Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65  
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика»  
Тел.: (+375 17) 292 74 25, 292 22 63, 299 92 52  
E-mail: [seminar.mechatronics@gmail.com](mailto:seminar.mechatronics@gmail.com)

В журнале печатаются научные статьи по механике, компьютерному моделированию, мехатронике и смежным вопросам. Содержатся научно-методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и исследовательских учреждений. Включены также материалы докладов, обсуждавшиеся на международном семинаре-коллоквиуме «Моделирование и компьютеринг в механических и мехатронных системах» и на республиканском научно-методическом семинаре «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании» (по рекомендации оргкомитета).

Тематика статей журнала охватывает широкий круг вопросов: общая механика, МДТТ, механика жидкости и газа, мехатроника, био- и наномеханика, математическое и компьютерное моделирование физических и технических процессов, дифференциальные уравнения и их приложения в механике, дизайн-конструирование мехатронных систем, конструирование деталей машин и др. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Механика деформируемых тел», «Теория механизмов и машин» и др. Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов в высшей и средней школе.

Взгляды отдельных авторов статей могут не совпадать с общей позицией редакции журнала.

Научно-технический журнал будет полезен для преподавателей высших учебных заведений, научно-инженерных работников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов технических вузов.

УДК [531+621.01:531.8](082)  
ББК 22.21я43  
30.12я43

© Белорусский национальный технический университет, 2015

## ДЛЯ ВСЕХ НАС ЧРЕЗВЫЧАЙНО ВАЖНО НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ

**Вершина Г.А.**

*Проректор по учебной работе, экономической и финансовой деятельности БНТУ*

Белорусский национальный технический университет хорошо известен в мировом образовательном пространстве. Он занимает лидирующее место среди технических вузов в международных рейтингах университетов: Всемирный профессиональный рейтинг университетов, рейтинг QS, рейтинг агентства «Эксперт РА» и другие. Именно здесь несколько лет назад по инициативе БНТУ и Российского государственного технологического университета имени К.Э. Циолковского – МАТИ состоялся первый форум белорусских и российских вузов инженерно-технологического профиля. Затем прошел и второй. В III Форуме приняли участие Жорес Иванович АЛФЕРОВ – руководитель секции нанотехнологий в отделении нанотехнологий и информационных технологий РАН, вице-президент РАН, председатель Санкт-Петербургского научного центра РАН, ректор Академического университета; Григорий Алексеевич РАПОТА – государственный секретарь Союзного государства; Сергей Александрович МАСКЕВИЧ – министр образования Республики Беларусь; Александр Геннадьевич ШУМИЛИН – председатель Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь; Николай Дмитриевич РОГАЛЕВ – ректор Национального исследовательского университета МЭИ; Борис Михайлович ХРУСТАЛЕВ – ректор Белорусского Национального технического университета.



*Подписание соглашения о сотрудничестве между Белорусским национальным техническим университетом и Санкт-Петербургским академическим университетом – научно-образовательным центром нанотехнологий РАН (ректор БНТУ Б.М. Хрусталеv слева, Жорес Иванович Алферов – справа).*

О том, что еще сделано за несколько лет, прошедших с момента первого Форума в БНТУ говорит ректор университета, академик НАН Беларуси Борис Хрусталеv:

– Например, по итогам предыдущего форума была сформирована научно-техническая программа Союзного государства в области машиностроения. Инициировано и стало ежегодным участие белорусских студентов, аспирантов, молодых ученых в молодежном инновационном центре в Нижнем Новгороде. Начата работа по созданию совместной инновационной инфраструктуры Союзного государства: российско-белорусского технопарка и белорусско-российского бизнес-акселератора «Молодежный инновационный центр». Устоялась практика стажировок специалистов в ведущих НИИ и на промышленных предприятиях, более ста специалистов приняли участие в научном обмене.

Особую значимость III Форуму придало руководителя Санкт-Петербургского академического университета – научно-образовательного центра нанотехнологий РАН, нобелевского лауреата Жореса Алферова, который начинал учебу в 1947 году в стенах Политеха.

На полях Форума шел конкретный деловой разговор о развитии молодежного инновационного предпринимательства, а также прошли бизнес-бои на лучшую молодежную научно-техническую разработку. Широко обсуждалась тема энергетической безопасности Союзного государства, в том числе в свете развития в Беларуси атомной энергетики. Причем, и там участники не стремились обходить острые углы.

Если же говорить в целом, то нынешний форум продемонстрировал значительный качественный рост сотрудничества инженерно-технологических вузов Союзного государства. И это развитие, по мнению ректора Бориса Хрусталева, безусловно продолжится. Состоялись десятки полезных переговоров с участием ведущих ученых и преподавателей, подписаны новые межвузовские соглашения. Например, было подписано соглашение о сотрудничестве между Белорусским национальным техническим университетом и Санкт-Петербургским академическим университетом – научно-образовательным центром нанотехнологий РАН, который возглавляет нобелевский лауреат Жорес Иванович Алфёров. В этом – сила межвузовского движения, что и отметил госсекретарь Союзного государства Григорий Рапота, также принимавший активное участие в деятельности форума:

– Самое ценное то, что идея форума принадлежит самим технологическим вузам, а не спущена сверху. Собираются, обмениваются мнениями, говорят о будущем. Я вижу свою задачу в том, чтобы это движение превратилось в систему, чтобы оно прирастало все большим числом участников, получило большое информационное сопровождение. Проведение трех форумов показало, что разговор идет предметный и полезный. Очень хотел бы пожелать этому движению превратиться в традицию, которая бы охватывала максимально широкий круг участников.

## 80 ЛЕТ КАФЕДРЕ "ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА": ИСТОРИЯ – СОВРЕМЕННОСТЬ – БУДУЩЕЕ

**Чигарев А.В.**

*Заведующий кафедрой теоретической механики БНТУ*

Кафедра "Теоретическая механика" БПИ была организована в 1934 г. Возглавил ее тогда профессор Н.А. Столяров (1870-1942). Он закончил физико-математический факультет Киевского университета. В 1914 г. получил звание профессора и возглавил кафедру механики в Харьковском технологическом институте. В середине 20-х годов профессор Столяров переехал в город Кузнецк, где читал лекции по механике и сопротивлению материалов. В 1934 г. он был приглашен в БПИ на должность заведующего кафедрой. Им написаны учебники "Теоретическая механика", "Аналитическая геометрия", ряд научных работ. Профессор Н.А.Столяров владел несколькими иностранными языками: греческим, английским, итальянским. Не успев эвакуироваться из Минска во время войны, Н.А.Столяров отказался от сотрудничества с оккупантами, предпочтя голодную смерть. Скончался он весной 1942г.

В 1945-1954 гг. кафедрой "Теоретическая механика и теория машин и механизмов" заведовал к.т.н., доцент Ф.К.Околковский, избранный на эту должность в 1945г., когда после освобождения Минска была создана объединенная кафедра. Восстановление экономики требовало специалистов, вместе с ростом БПИ росла численность сотрудников кафедры, что привело в 1954 г. к разделению кафедры, после которого, на должность заведующего кафедрой "Теоретическая механика" избирается кандидат физико-математических наук, доцент Н.А. Бессонов. В то время на кафедре работали старшие преподаватели Ничипорович Ф.В. и Ким А.Х., аспирант Свистун А.Н. и совместители Миткевич С.Б., Ширшов В.М. Тогда же на должности ассистентов на кафедру пришли Д.А. Аксенович, А.Н. Прохорова, З.Н. Проскурина, В.С. Грипович.

В 1957 г. в связи с избранием Н.А. Бессонова зав. кафедрой физики Алтайского института сельскохозяйственного машиностроения он переехал в город Барнаул, а обязанности заведующего кафедрой в 1957-1958 учебном году исполнял к.т.н., доцент А.Х. Ким.

В 1958-1963 гг. кафедрой заведовал замечательный ученый, педагог, методист, доктор технических наук, профессор Г.К.Татура (1902-1979), который до этого заведовал кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов в Криворожском горнорудном институте. Под руководством профессора Г.К. Татура аспиранты М.А. Левин и В.Б.Немцов подготовили кандидатские диссертации, которые успешно защитили в 1965г. В дальнейшем ими были защищены докторские диссертации, и профессор В.Б. Немцов длительное время возглавлял кафедру "Теоретическая механика" в БТИ.

Работы Г.К.Татура и его учеников положили начало систематическим теоретическим и прикладным исследованиям в области механики деформируемого твердого тела, проводимым на кафедре теоретической механики БПИ. Крушевский А.Е., защитивший кандидатскую диссертацию в 1961 г., вместе со своими учениками проводил большой комплекс исследований по применению вариационных методов для решения задач механики деформируемого твердого тела. Под его руководством было подготовлено 10 кандидатов наук: Кондратюк В.Ф., Апанович В.Н., Акимов В.А., Бойко Н.Я., Федута А.А., Скляр О.Н., два доктора: Кондратюк В.Ф., Наумович С.А. Им и его ученикам опубликовано более 200 научных работ, изданы монографии А.Е. Крушевский "Вариационные методы расчета корпусных деталей машин" (1967), А.Е. Крушевский, С.А. Наумович "Биомехника системы зуб-периодонт" (2000), В.Н. Апанович "Метод внешне-конечных аппроксимаций"(1991). В 2000 г. А.Е.Крушевским была защищена диссертация на степень доктора физико-математических наук,

подытожившая определенный этап в развитии данного направления. Научный авторитет проф. Г.К. Татура был признан всеми учеными БПИ, что проявлялось в том, что он беспрерывно на протяжении 10 лет был заместителем председателя специализированного совета при БПИ по защите диссертаций.

Несмотря на то, что профессор Г.К.Татур заведовал кафедрой всего 5 лет, его влияние на становление уровня и культуры преподавания теоретической механики было очень велико, что проявилось в отмеченном в 2003 г. 100-летнем юбилее со дня рождения Г.К. Татура.

В 1963-1978 гг. кафедру возглавлял А.Х. Ким, который пришел в 1953 г. на должность ассистента и активно занимался проблемами механического поведения торфяных смесей в различных перерабатывающих устройствах машин. В 1955г. он защитил кандидатскую диссертацию, а в 1966 г. – докторскую. Под руководством А.Х.Кима на кафедре сформировалось научное направление – реология сложных сред, в рамках которого защитили диссертации Аксенович Д.А., Гринчик И.П., Лапушина Б.И., Несенчук С.В., Козеев М.П., Лембович Н.Б., Пикус Ю.М., Носов В.М., Ящерицын В.Б. Было опубликовано более 300 работ, изданы 3 монографии: А.Х.Ким "Некоторые вопросы реологии вязкопластических дисперсных систем" (1960), Ю.М.Пикус "Гидропластическая смазка вязкопластичными и вязкими жидкостями" (1981), В.М.Носов, З.П.Шульман "Вращение непроводящих тел в электро-реологических суспензиях" (1985). Под руководством А.Х. Кима в то время действовал специализированный совет по присуждению ученой степени кандидата наук.

В 1973 году профессором А.Х. Кимом было начато издание ежегодного сборника "Теоретическая и прикладная механика", получившего одним из первых в республике международный регистрационный номер. Издание было возобновлено в 2003г. выпуском юбилейного сборника, посвященного 100-летию со дня рождения Г.К. Татура. В настоящее время «Теоретическая и прикладная механика» – международный научно-технический журнал, включенный в Перечень ведущих научных изданий Республики Беларусь в котором должны публиковаться основные результаты исследований на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

В этот период наряду с серьезными научными исследованиями кафедра проводит активную методическую деятельность. Под руководством А.Х. Кима в 1970-1982 гг. действовал Республиканский научно-методический семинар, затем Республиканское объединение, возглавлявшееся Л.А.Роттом. С 1975 по 1985 гг. профессор А.Х. Ким являлся членом научно-методического совета по теоретической механике при Минвузе СССР.

В 1978-1984 гг. кафедрой заведовал к.т.н., доцент Д.А. Аксенович. Этот период характеризуется дальнейшим развитием и расширением научной и методической работы. С 1978г. после прихода на кафедру д.т.н., профессора Р.Е. Ершова активизировались исследования в области механики деформируемого твердого тела применительно к пластинам и оболочкам, имевшие оборонное применение. В 1978-1990гг. по данному направлению опубликовано более 120 работ, защитили кандидатские диссертации И.А. Тавгень и С.Ф. Андреев.

В эти годы кафедра активно участвует в организации и проведении олимпиад по теоретической механике на всесоюзном уровне. В 1972-1982 гг. Д.А. Аксенович являлся ученым секретарем специализированного совета по защите диссертаций при БПИ.

В 1984-1991 гг. кафедрой руководил к.т.н., доцент Н.И. Горбач, при котором кафедра продолжала расти и развиваться. К.т.н., доцентом М.А. Левиным были подытожены результаты в области механики негомономных систем, полученные им в его исследованиях, проводившихся начиная с середины 60-х годов. Итогом этих работ явилась монография "Теория качения деформируемого колеса" (1989) и защита

докторской диссертации в 1991 г., в 1993 г. М.А. Левин был утвержден в звании профессора. Под руководством доц. Н.П. Имашевой выполнялись исследования по педагогике учебного процесса. Этот период характеризуется стабильно сильными выступлениями команды студентов БССР по теоретической механике во Всесоюзной олимпиаде. По итогам 1986-1990 гг. команда БССР занимала 4-е место среди команд технических вузов СССР.

Кафедра "Теоретическая механика" БПИ в послевоенные годы и до распада СССР проходила стадии становления и укрепления. Развивалась научно-исследовательская работа теоретического и прикладного характера в форме хозяйственных работ, большинство которых было связано с оборонной промышленностью, велась серьезная научно-методическая, педагогическая работа, активно развивалось участие студентов в олимпиадах и научной работе. Коллектив кафедры насчитывал более 40 человек профессорско-преподавательского состава и 8 человек учебно-вспомогательного.

С 1991 г. кафедру возглавляет д.ф.-м.н., профессор А.В. Чигарев. В 1991-1992 гг. начался процесс непрерывного сокращения преподавательских кадров, изменения учебных планов, перехода на хозрасчетное финансирование научной деятельности. Все это потребовало адаптации к новым условиям. Коллектив кафедры сумел, не снижая качества преподавания, уровня научно-исследовательских работ, достойно поддерживать свой статус как кафедры, закладывающей базу инженерного образования в ведущем вузе Республики Беларусь.

По приказу ВАК СССР при БПИ был создан специализированный совет по защите диссертаций по механике деформируемого твердого тела, председателем которого был утвержден А.В. Чигарев. За 11 лет работы в совете было защищено 12 докторских и 16 кандидатских диссертаций. Из сотрудников кафедры в нем защитили кандидатские диссертации ученики А.Е. Крушевского: А.А. Федута, Н.Я. Бойко, В.А. Акимов, О.Н. Скляр. Докторские диссертации защитили А.Е. Крушевский, Ю.В. Василевич, И.С. Куликов, М.А. Журавков.

Создание НИЛ "Динамика и прочность материалов, конструкций, машин" позволило сотрудникам кафедры, аспирантам, студентам принимать активное участие в прикладных исследованиях в рамках республиканских научно-технических программ.

Фундаментальным исследованиям в области механики деформируемого твердого тела были посвящены кандидатские диссертации Петкуна С.Э., Миклашевича И.А., Троян Г.М., Дрозд С.Г., Ботоговой М.Г., Рафеенко Е.Д., Беляцкой Л.Н., Смалюка А.Ф., Ширвеля П.И. защищенные в этот период. Всего за этот период под руководством профессора Чигарева А.В. защищено 11 кандидатских диссертаций и четыре докторские (Поленов В.С., Михасев Г.И., Миклашевич И.А. Кравчук А.С.).

В этот период на кафедре работали д.ф.-м.н., проф. Василевич Ю.В. и д.ф.-м.н., проф. Журавков М.А., развивавшие актуальные теоретические и прикладные исследования по механике деформируемого твердого тела. В дальнейшем они возглавили кафедры "Сопrotивление материалов" БИТУ и "Теоретическая механика" БГУ. Профессор Г.И. Михасев возглавляет кафедру «Био- и наномеханики» Белгосуниверситета.

Начиная с 1995 г. сотрудниками кафедры было издано 12 научных монографий общим объемом около 2500 страниц.

Кафедра активно участвовала в организации и проведении I (1995) и II (1999) Белорусских конгрессов по теоретической и прикладной механике, международных конференций "Вибрация и волны" (1993), "Экологическое моделирование и оптимизация в условиях техногенеза" (1996). Ежегодно проводится международный научно-методический семинар-коллоквиум «Моделирование и компьютеринг в механических и мехатронных системах». Сотрудники кафедры, лаборатории,



аспиранты и докторанты постоянно участвуют в международных научных конференциях. В 2003г. возобновлено издание научно-технического сборника "Теоретическая и прикладная механика", который в 2011г. включен ВАК Республики Беларусь в Перечень изданий, рекомендуемых для публикации диссертационных исследований в отраслях физ.-мат. и технических наук (машиностроение, строительство, механика деформируемого твердого тела, биомеханика), а с 2014 года ТПМ – международный научно-технический журнал.

Кафедра участвует в различных программах международного научного сотрудничества, а также поддерживает тесные научные связи со многими научными и образовательными учреждениями в России, Украине, Польше, Германии, Прибалтике.

Несмотря на значительное сокращение преподавательского потенциала в рассматриваемый период учебно-методическая работа кафедры развивалась достаточно успешно. Кафедра обеспечивает изучение теоретической механики на 10 факультетах университета. Динамика нашей издательской деятельности свидетельствует о прогрессе методического потенциала кафедры: за период с 1960 г. по 1994 г. издано 3 учебных и 88 учебно-методических пособий, с 1995 по 1999 гг. – 18 учебно-методических и учебных пособий общим объемом 1800 стр., в 2000-2003 гг. – 26 пособий общим объемом 4700 стр. 2004-2014 гг. – 29 учебно-методических пособий и лабораторных практикумов общим объемом 6000 страниц. Многие из этих книг изданы с грифом Минобразования.

Мы продолжаем ежегодно проводить студенческие олимпиады по теоретической механике БНТУ, Беларуси и активно участвуем в региональных олимпиадах в России, как правило, добываясь хороших результатов. Большая заслуга в этом доц. О.Н.Скляр и других преподавателей кафедры. Четкая организация учебного процесса на кафедре поддерживается ст. преподавателем Г.И.Беляевой, доц. Т.Ф.Богинской, доц. Э.Э.Глубокой, доц. Л.Н.Беляцкой, зав. лабораторией Д.М.Лукошко и др. Воспитательной и идеологической работой со студентами кафедры на высоком педагогическом уровне занималась ст. преподаватель Е.С.Селицкая – куратор студенческих групп в период с 2002-2013 гг. Научно-организационной деятельностью занимается доцент Ширвель П.И.: проведение республиканских и международных научных конференций и семинаров, технический редактор научного журнала ТПМ, организация международного сотрудничества между кафедрой и зарубежными университетами в рамках Государственных программ развития высшего образования в Республике Беларусь. Сотрудники кафедры выполняют НИР в рамках тем и проектов ГНТП, ГПНИ, БРФФИ, Минобразования, РФФИ. По итогам работы кафедра постоянно занимает места в десятке лучших кафедр университета на протяжении ряда лет.

В рамках выполнения Государственных программ развития высшего образования кафедра регулярно осуществляет привлечение ведущих иностранных специалистов к участию в учебном и научно-исследовательском процессе. Так, за последние пять лет на кафедре читали лекции известные ученые-механики, среди которых: академик РАЕН, д.ф.-м.н., проф. В.С.Бондарь (Московский государственный машиностроительный университет), Заслуженный деятель науки РФ, д.ф.-м.н., проф. Р.А.Васин (МГУ им. М.В. Ломоносова), Член Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, д.т.н., проф. Р.И.Непершин (Московский государственный технологический университет "Станкин"), Заслуженный деятель науки Республики Беларусь, член-корр. НАН Беларуси, д.т.н., проф. Ю.М. Плекачевский; член-корр. НАН Беларуси, д.т.н., проф. С.А. Чижик и Л.Г. Красневский.

Сотрудники кафедры Чигарев А.В., Акимов В.А., Беляцкая Л.Н., Ширвель П.И. включены в состав научного собрания машиностроительного факультета, которое возглавляет проф. Чигарев А.В. П.И. Ширвель и А.В. Чигарев входят в состав Совета Д 02.05.07 при БНТУ по защите докторских и кандидатских диссертаций.

В 2002 году на кафедре начата подготовка по специальности "Компьютерная механика", а с 2008 года «Компьютерная мехатроника». Компьютерная мехатроника – специальность, студенты которой осваивают компьютерные методы проектирования, конструирования, производства и эксплуатации современной техники, сочетающая компоненты механики и электроники. Это специальность не только сегодняшнего дня, но и будущего.

Студенты новой специальности под руководством ст. преподавателя Пронкевича активно участвуют в различных международных олимпиадах по мехатронике, программированию, CAD/CAM/CAE-проектированию, занимая призовые места. Среди последних студент 3-его курса Александр Шашко стал победителем всемирноизвестной международной олимпиады World Skills-2014.

Теоретическая механика часто называется классической, что является признанием ее уровня и значения для науки, техники. В литературе, живописи, музыке классическими называются вещи, которые, пройдя испытание временем, являются эталонными. Классическая механика наряду с музыкой и литературой является шедевром культуры. Однако, теоретическая механика не является наукой, развитие которой закончено. Она бурно развивается, являясь как и прежде фундаментом для многих других наук. Нелинейная динамика системы составляет основу синергетики. Проблемы самоорганизации, детерминированного хаоса, фрактальной динамики из области чисто научных исследований переходят в разряд прикладных, инженерных. Это требует модернизации типовых и рабочих программ. Компьютерная механика, которая постепенно внедряется в преподавание, позволяет уменьшить время, затрачиваемое на рутинные вычисления, и увеличить время для развития инженерного осмысления решаемых задач.

Подготовка высококвалифицированных кадров преподавателей и научных работников через аспирантуру и докторантуру – гарантия того, что кафедра окажется и в будущем способной эффективно участвовать в решении задач подготовки квалифицированных специалистов для республики.

## **К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФЕССОРА А.Х. КИМА**

**к.т.н. Горбач Н.И.**

22 ноября 2014 г. исполнилось 100 лет со дня рождения заслуженного машиностроителя БССР, доктора технических наук, профессора Алексея Харитоновича Кима.

Смерть неожиданно настигла его вполне еще физически здорового, крепкого, полного творческих сил 9 июня 1992 г.

Нелегким его был жизненный путь, но только сильная воля, целеустремленность, незаурядные способности и большое трудолюбие позволили ему достичь многого в жизни.

Родился он в 1914 г. в крестьянской семье в деревне Синтухинка Приморского края. Там же окончил школу. Свою трудовую деятельность он начал с 15 лет секретарем сельского совета. После окончания школы продолжил учебу в земельно-мелиоративном техникуме, но не окончив его, в 1932 г. поступил в Московский торфяной институт на механический факультет, который окончил с отличием в 1937 г.

С июля 1937 г. по апрель 1939 г. работал в торфяной промышленности инженером на машиностроительном заводе в Орехово-Зуеве и инженером-конструктором во Всесоюзном научно-исследовательском институте торфяной промышленности в городе Ленинграде.



*В апреле 1939 г.* А.Х. Ким перешел на преподавательскую работу в торфяной техникум г. Балахна Горьковской области, где проработал до августа 1953 г.

*11.09.1953 г.* приказом по БПИ был зачислен на должность ассистента кафедры теоретической механики и ТММ в соответствии с его заявлением от 08.03.1953 г.

*30.12.1953 г.* переведен на должность старшего преподавателя этой же кафедры. Преподавал теоретическую механику студентам торфяных специальностей.

В 1955/56 учебном году, когда я был студентом 2-го курса торфяного факультета, нам читал лекции Алексей Харитонович. Конспект его лекций у меня сохранился до сих пор, а ведь с того времени прошло почти 50 лет! Его лекции всегда мы охотно посещали, они отличались четкостью, ясностью и доступностью изложения теоретического материала, удачно иллюстрируемого различными примерами, задачами и рисунками. Нас восхищала его манера общения со студентами, его способность красиво писать на доске формулы и чертить схемы.

Параллельно с учебной работой Алексей Харитонович активно начал заниматься научно-исследовательской работой под руководством профессора Ф.А. Опейко. Уже *07.01.1955 г.* он успешно защищает диссертацию и решением ВАК 7 июля этого же года ему присуждена ученая степень кандидата технических наук.

*21.01.1955 г.* он был избран на должность доцента, а *17.03.1956 г.* был утвержден ВАКом в ученое звание доцента по кафедре «Теоретическая механика». Пройти путь от ассистента до доцента, подготовить и защитить диссертацию на соискание ученой степени кандидата наук менее чем за полтора года – это безусловно феноменальный успех и под силу человеку, обладающему незаурядными способностями.

Научная работа Алексея Харитоновича была посвящена исследованию течения вязкопластического торфа в различных перерабатывающих устройствах торфяных машин. Этой работой по существу были заложены основы научного направления на кафедре по реологии дисперсных систем, которое успешно развивалось им и его учениками вплоть до конца семидесятых годов. Результаты этих исследований обобщены в многочисленных научных статьях и монографиях. Им опубликовано более 100 научных статей, из них 6 авторских свидетельств на изобретения. В 1965 г. вышла его монография «Некоторые вопросы реологии вязкопластических дисперсных систем».

Свою докторскую диссертацию на тему «Реология торфяных систем» Алексей Харитонович защитил *10.06.1966 г.* и *25.02.1967 г.* ВАКом ему была присуждена ученая степень доктора технических наук, а *10.07.1967 г.* присвоено ученое звание профессора по кафедре теоретической механики.

По данному научному направлению под руководством А.Х. Кима было подготовлено и защищено 14 кандидатских диссертаций, из них 9 сотрудниками кафедры.

Основной пик научных исследований на кафедре по реологии приходится на 1965-1975 г.г., когда на кафедре почти половина тогдашнего состава кафедры примыкала к школе реологов, возглавляемой А.Х. Кимом.

Научные интересы Александра Харитоновича не ограничивались только исследованиями по реологии. Имея обширные знания по математике и, особенно, по теории дифференциальных уравнений, он мог смело браться за решение поставленной перед ним технической задачи, будь это из области теории упругости, или теории пластичности, или теории колебаний. Это подтверждается хоздоговорными работами, выполненными под его руководством и успешной защитой диссертационных работ соискателями ученых степеней, у которых Алексей Харитонович являлся официальным, а иногда и неофициальным руководителем или консультантом. По этому направлению им были разработаны теоретические основы таких процессов как сварка взрывом, прессование порошковых материалов, исследование напряженного состояния биметаллических материалов (диссертационная работа Г.С. Соколовского), течение сыпучих материалов (диссертационная работа В.И. Безмена) и др.

Наряду с научно-педагогической деятельностью большое место в жизни Алексея Харитоновича занимала административная и общественная работа. В его послужном списке: заместитель декана торфяного факультета (*01.02.1956 г.* - *08.05.1958 г.*), временно

исполняющий обязанности заведующего кафедрой теоретической механики (07.09.1957 г. - 05.07.1958 г.), заведующий этой же кафедрой (27.06.1963 г. - 05.07.1978 г.), одновременно с этим с 11.10.1968 г. по 25.03.1976 г. - декан машиностроительного факультета. За время работы заведующим кафедрой Алексей Харитонович проявил себя как прекрасный руководитель и организатор научной деятельности кафедры, прекрасный педагог, чуткий и вместе с тем требовательный воспитатель коллектива.

Его научная и педагогическая деятельность была широко известна не только в пределах нашего института и республики, но и далеко за ее пределами. Его знали и ценили многие видные ученые и педагоги в области механики: А.Ю. Ишлинский, С.М. Тарг, А.А. Яблонский, А.С. Галиулин и др.

В знак признания заслуг кафедры в учебной и научной работе в 1969 г. на базе кафедры был проведен Пленум научно-методического совета по теоретической механике Министерства высшего образования СССР. Членом Президиума этого совета Алексей Харитонович был с 1968 по 1984 год.

Благодаря усилиям Алексея Харитоновича и других работников кафедры было организовано издание республиканского межвузовского сборника «Теоретическая и прикладная механика», главным редактором которого он был с 1973 года по 1991 год.

С 1970 года по 1982 г. он был руководителем республиканского научно-методического семинара преподавателей теоретической механики при Минвузе БССР.

С 1975 г. по 1982 г. Алексей Харитонович был членом многих Ученых Советов Минвуза СССР, БССР БПИ по защите кандидатских и докторских диссертаций по машиностроительным и торфяным специальностям.

Общественная деятельность Алексея Харитоновича достаточно велика. Кроме перечисленных выше общественных работ, он некоторое время являлся членом международной ассоциации по охране окружающей среды Земли при ЮНЕСКО, членом ряда редакционных советов Всесоюзных и Республиканских журналов, неоднократно избирался членом партбюро МСФ, был секретарем парторганизации факультета, избирался членом парткома института.

Весь многолетний труд Алексея Харитоновича был неразрывно связан с благородной задачей обучения и воспитания высококвалифицированных специалистов для народного хозяйства.

Занимаясь большой административной и общественной работой, он постоянно вел учебный процесс, читал лекции, проводил практические занятия, руководил научной работой студентов. Освободившись от административной работы, с 1978 года он до конца своих дней работал профессором кафедры.

Буквально за три дня до его смерти мы с ним последними уходили с кафедры, где занимались подсчетом выполнения нагрузки за весенний семестр и за год, заполняли индивидуальные планы, готовили материалы к началу экзаменационной сессии. Это был предвыходной день, последний рабочий день в его жизни, после которого Алексея Харитоновича не стало.

Широкая научно-педагогическая и общественная деятельность, глубокие знания и эрудиция, беззаветная преданность науке и своему делу, простота и скромность снискали ему глубокое уважение всех, кто имел возможность работать и встречаться с этим замечательным человеком – мужем, отцом и дедушкой.

Его плодотворная педагогическая, научная и общественная работа отмечена шестью медалями и грамотами, среди которых Почетная грамота Верховного Совета БССР, 2 грамоты МВиССО СССР, 5 грамот Минвуза БССР и многочисленные грамоты института. Решением Президиума Верховного Совета БССР в декабре 1980 года ему было присвоено почетное звание «Заслуженный машиностроитель БССР».

Отмечая юбилейные даты видных ученых и педагогов, каким, несомненно, был Алексей Харитонович, тем более после их смерти, мы не только отдаем дань уважения памяти об этих людях. Вместе с тем это является поводом, чтобы еще глубже проанализировать все то, что сделано такими людьми, что можно позаимствовать из их жизни и на их примере воспитывать будущих ученых и педагогов.

## Юрий Власович Чигарев

(к 70-летию со дня рождения)

9 декабря 2014 г. Юрию Власовичу Чигареву исполнилось 70 лет.

Ю.В. Чигарев представитель известной (не только в России) научной школы по механике профессора Ивлева Д.Д. Чигарев Ю.В. родился в г.Мурманске 9 декабря 1944г. В 1963 г. поступил в Воронежский государственный университет на математико–механический факультет. 1964-1967гг. служил в рядах Советской Армии. В 1973 году закончил факультет прикладной математики и механики Воронежского университета. 1973-1974 гг. работал ассистентом кафедры теоретической механики в Воронежском инженерно-строительном институте, а с 1974 по 1977 учился в аспирантуре на той же кафедре (научный руководитель проф. Чернышов А.Д.). С 1978 года по настоящее время работает в Белорусском государственном аграрном техническом университете (до 1993 г. Белорусский институт механизации сельского хозяйства). В 1979г. в Московском институте электронного машиностроения защитил кандидатскую диссертацию. С 1982 г. доцент кафедры теоретической механики. 1987- 1988 г. заведует кафедрой «Механика почв и гидравлики». С 1989 -2002 г. заведует кафедрой «Теоретическая механика и теория механизмов и машин». С 2003-профессор этой кафедры. В 1993 году в БПИ защитил докторскую диссертацию. С 1994 имеет звание профессора.



Научные интересы Чигарева Ю.В. лежат в области изучения деформирования неоднородных сред. Совместно с проф. А.Н. Спорыхиным в квазистатической постановке впервые была построена общая теория устойчивости стохастически неоднородных сложных сред на основе которой был решен ряд практических задач по определению критических нагрузок для тонкостенных плит и стержней. Данные исследования обобщили известные результаты в области устойчивости полученные акад. А.Н. Гузь. В динамической постановке совместно с А.В. Чигаревым впервые сформулирована и решена задача о хаотизации движения лучей в неоднородной упругой среде с определением границы стохастичности и оценки устойчивости движения.

Работая в БИМСХ и затем в БГАТУ Ю.В. Чигарев принимал активное участие в исследовании проблемы деградации почв при уплотнении их колесными движителями. В 1987 г. им был создан теоретический и лабораторный курс по механике почв, который впервые в СССР был введен в учебный процесс сельскохозяйственного вуза. В том же году совместно с доц. Анисимовым В.М. была создана лаборатория Точного земледелия и разработано приборное обеспечение по оценке плотности почвы в полевых условиях. В 2001 г. Ю.В. Чигарев был приглашен на работу профессором в Аграрно-техническую академию в г. Щецине (Польша), совмещая эту работу с работой в должности профессора кафедры теоретической механики БАТУ.

Чигаревым Ю.В. опубликовано свыше 150 научных работ. Имеет 8 патентов на изобретение, является соавтором трех учебных пособий с грифом Министерства образования Республики Беларусь и двух монографий. С 1996 года член немецкого научного общества Прикладной математики и механики, с 2003 г. член польского научного общества Агрофизики, с 2002 г. профессор Западнопоморского Технологического университета (Польша). Известны увлечения Юрия Власовича живописью. Так в 2011 и 2013 гг. прошли выставки его картин в БГАТУ.

*Коллеги, друзья, ученики сердечно поздравляют профессора Юрия Власовича Чигарева с юбилеем, желают ему здоровья и творческого долголетия!*

**Редакция журнала ТПМ**

## ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

академик РАЕН Бондарь В.С., к.ф.-м.н. Даншин В.В.

*Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), Россия*

Проблемы надежного функционирования и снижения материалоемкости конструкций современной техники, работающих в условиях высокого уровня силовых и температурных нагрузок, делают весьма актуальной задачу математического моделирования термовязкопластического деформирования и разрушения конструкционных материалов в условиях повторности и длительности воздействия температурно-силовых нагрузок. В данной работе рассматривается основной базовый вариант теории неупругости (термовязкопластичности) [1,2], относящейся к классу одноповерхностных теорий течения при комбинированном (трансляционно-изотропном) упрочнении, при котором поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается, а центр поверхности нагружения смещается. Для радиуса поверхности нагружения формулируется эволюционное уравнение, отражающее изотропное упрочнение, неизотермический переход и разупрочнение при отжиге. Эволюционное уравнение для тензора смещения центра поверхности нагружения имеет трехчленную структуру, т.е. разложение тензора скорости смещения (добавочных напряжений, остаточных микронапряжений) осуществляется по тензорам скорости неупругой деформации, смещения и неупругой деформации. Первые три слагаемых этого эволюционного уравнения отражают анизотропное упрочнение, последующие – неизотермический переход и рекристаллизацию (разупрочнение). Следует отметить, в данной теории нет разделения деформации на пластическую и деформацию ползучести, а есть единая неупругая деформация. Для описания процессов накопления повреждений формулируются кинетические уравнения накопления повреждений, где в качестве энергии, расходуемой на создание повреждения в материале, принимается работа микронапряжений (тензора смещения) на поле неупругих деформаций. Кинетические уравнения кроме слагаемого, отражающего накопление повреждений за счет работы микронапряжений, содержат слагаемые обеспечивающие неизотермический переход, охрупчивание и залечивание. Далее приводятся основные уравнения теории неупругости (термовязкопластичности).

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})] + \alpha_{ij}^{eT} \dot{T} \quad (2)$$

$$\alpha_{ij}^{eT} = \alpha_T \delta_{ij} - \frac{1}{E^2} [\sigma_{ij} - \nu(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij})] \frac{dE}{dT} - \frac{1}{E} (3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}) \frac{d\nu}{dT}$$

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C^2 = 0 \quad (3)$$

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{u*}^p + q_T \dot{T} - q_R, \quad \dot{\varepsilon}_{u*}^p = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p \right)^{1/2} \quad (4)$$

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g_{\varepsilon} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \left( \frac{2}{3} g_{\varepsilon} \varepsilon_{ij}^p + g_a a_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{u^*}^p + \left( \frac{2}{3} g_{\varepsilon}^T \varepsilon_{ij}^p + g_a^T a_{ij} \right) \dot{T} - \left( \frac{2}{3} g_{\varepsilon}^R \varepsilon_{ij}^p + g_a^R a_{ij} \right) \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}, \quad \sigma_u^* = \left( \frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^* \right)^{1/2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{1}{E_*} \left[ \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*} - B^T \dot{T} + B^R \right] \quad (6)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{1}{E_* + 3G} \left[ 3G \frac{s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*} - B^T \dot{T} + B^R \right]$$

$$E_* = q_{\varepsilon} + g + g_{\varepsilon} \varepsilon_u^{p*} + g_a a_u^*$$

$$B^T = q_T + g_{\varepsilon}^T \varepsilon_u^{p*} + g_a^T a_u^*$$

$$B^R = q_R + g_{\varepsilon}^R \varepsilon_u^{p*} + g_a^R a_u^*$$

$$\varepsilon_u^{p*} = \frac{s_{ij}^* \varepsilon_{ij}^p}{\sigma_u^*}, \quad a_u^* = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* a_{ij}}{\sigma_u^*}$$

$$\sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_{u^*}^p \leq 0 \quad - \text{упругость} \quad (\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = 0)$$

$$\sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_{u^*}^p > 0 \quad - \text{неупругость} \quad (\dot{\varepsilon}_{u^*}^p \neq 0) \quad (7)$$

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{1}{W} (a_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p) - g_{\omega} \omega \quad (8)$$

$$\dot{W} = g_W^T \dot{T} - g_W W. \quad (9)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $\varepsilon_{ij}^p$  – тензора полной, упругой и неупругой деформаций;  $E, \nu, \alpha_T$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент температурного расширения;  $T$  – температура;  $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$  – среднее напряжение;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\sigma_{ij}$ ,  $s_{ij}$  – тензор и девиатор напряжений;  $a_{ij}$  – девиатор смещения;  $C$  – радиус (размер) поверхности нагружения;  $\varepsilon_u^{p*}$  – накопленная неупругая деформация;  $s_{ij}^*$  – девиатор активных напряжений;  $G$  – модуль сдвига;  $\omega$  – повреждение ( $\omega \in [0;1]$ );  $W$  – энергия разрушения.

Определяющие функции  $q_{\varepsilon}, q_T, q_R, g, g_{\varepsilon}, g_a, g_{\varepsilon}^T, g_a^T, g_{\varepsilon}^R, g_a^R, g_{\omega}, g_W^T, g_W, \alpha$  выражаются через материальные функции следующим образом [1,2]:

$$q_{\varepsilon} = \frac{\partial C}{\partial \varepsilon_u^{p*}}, \quad q_T = \frac{C}{C_p} \frac{\partial C}{\partial T}, \quad q_R = q_{\varepsilon} P_c$$

$$g = E_a + \beta \sigma_a, \quad g_{\varepsilon} = \beta E_a, \quad g_a = -\beta$$

$$g_{\varepsilon}^T = \frac{dE_a}{dT} - \frac{E_a}{\sigma_a} \frac{d\sigma_a}{dT}, \quad g_a^T = \frac{1}{\sigma_a} \frac{d\sigma_a}{dT}$$

$$g_{\varepsilon}^R = g_{\varepsilon} P_a, \quad g_a^R = (g + g_a a_u) \frac{P_a}{a_u}, \quad a_u = \left( \frac{3}{2} a_{ij} a_{ij} \right)^{1/2}$$

$$g_{\omega} = \lambda, \quad g_W = \rho, \quad g_W^T = \frac{W}{W_0} \frac{dW_0}{dT}$$

$$\alpha = \left( \frac{\sigma}{\sigma_{au}} \right)^{n_{\alpha}}, \quad \sigma_{au} = \left[ \frac{3}{2} \left( a_{ij} - \frac{2}{3} E_a \varepsilon_{ij}^p \right) \left( a_{ij} - \frac{2}{3} E_a \varepsilon_{ij}^p \right) \right]^{1/2}$$

$$P_c = \exp(b_c) |C - C_{P0}|^{n_c} (1 - \omega)^{-m_{\omega}}, \quad C_{P0} = C_P(T, 0)$$

$$P_a = \exp(b_a) (a_u)^{n_a} (1 - \omega)^{-m_{\omega}}$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_i \geq 0 \\ \exp(b_{\lambda}) |\sigma_{ii}|^{n_{\lambda}}, & \text{если } \sigma_i < 0 \end{cases}$$

$$\rho = \exp(b_{\rho}) (\sigma_u)^{n_{\rho}}, \quad \sigma_u = \left( \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$$

Окончательно теория неупругости (термовязкопластичности) замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

$E(T), \nu(T), \alpha_T(T)$  – упругие параметры;

$C_P(T, \varepsilon_{u*}^p)$  – функция изотропного упрочнения;

$E_a(T), \sigma_a(T), \beta(T)$  – параметры анизотропного упрочнения;

$W_0(T)$  – начальная энергия разрушения;

$n_{\alpha}(T)$  – параметр нелинейности процесса накопления повреждений;

$b_c(T), b_a(T), n_c(T), n_a(T), m_{\omega}(T)$  – параметры изотропной и анизотропной ползучести;

$b_{\omega}(T), b_W(T), n_{\omega}(T), n_W(T)$  – параметры залечивания и охрупчивания.

Для определения материальных функций необходим следующий набор данных базового эксперимента при различных уровнях температуры.

Упругие параметры определяются традиционными методами.

Для термопластических процессов необходимы:

– диаграмма одноосного пластического растяжения до деформации  $0.05 \div 0.1$ ;

– диаграмма одноосного пластического растяжения до деформации  $0.05 \div 0.1$  после предварительного сжатия до деформации  $0.01 \div 0.02$ ;

– циклические пластические диаграммы при одноосном растяжении-сжатии с постоянным размахом деформации  $0.01 \div 0.03$ .

Для описания процессов накопления повреждений и разрушения дополнительно необходимы:

– данные по малоцикловой усталости при одноблочном циклическом пластическом нагружении с постоянным размахом деформации  $0.01 \div 0.03$ ;

– данные по малоцикловой усталости при двухблочном циклическом пластическом нагружении с размахом деформации на первом блоке  $0.005 \div 0.015$  и на



втором блоке  $0.02 \div 0.03$ . Или (и) наоборот, на первом блоке  $0.02 \div 0.03$ , а втором блоке  $0.005 \div 0.015$ .

Для описания термовязкопластических процессов деформирования и накопления повреждений необходимы:

- данные по релаксации напряжения при постоянной деформации растяжения  $0.03 \div 0.05$ ;

- данные по зависимости скорости установившейся ползучести от напряжения растяжения;

- диаграмма кратковременной ползучести при постоянном напряжении растяжения вплоть до разрушения;

Для описания процессов залечивания и охрупчивания необходимы:

- данные по длительной прочности при растяжении и сжатии;

- данные по малоцикловой усталости с постоянным размахом деформации (порядка  $0.01 \div 0.02$ ) после ползучести при наборе различных уровней напряжения растяжения.

Расчетно-экспериментальный метод определения (идентификации) материальных функций по данным базового эксперимента подробно изложен в работах [1,2,3], в которых для ряда конструкционных сталей и сплавов приведены материальные функции.

На широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований проведена [1,2,3,4] верификация теории неупругости (термовязкопластичности) как по компонентам напряженно-деформированного состояния, так и по характеристикам разрушения. Ниже приводятся некоторые результаты верификации теории термовязкопластичности на основе сопоставления результатов расчетов и экспериментов при циклических нагружениях.

Расчетные и экспериментальные исследования усталости нержавеющей стали 304 проводятся при пропорциональном симметричном жестком циклическом нагружении в условиях нормальной температуры, как при постоянном размахе деформации, так и при блочном изменении размаха деформации. На рисунке 1 сплошной линией показана расчетная кривая малоцикловой усталости, а светлыми кружками – экспериментальные данные [5]. Нарушение правила линейного суммирования повреждений при двухблочном изменении размаха деформации приведено на рисунке 2. Результаты расчетов на этом рисунке изображены сплошными кривыми, а результаты экспериментов [5] темными кружками при возрастании размаха деформации ( $0.005 \rightarrow 0.015$ ) и светлыми кружками при убывании размаха деформации ( $0.015 \rightarrow 0.005$ ). Наблюдается существенное отклонение от правила линейного суммирования повреждений при удовлетворительном соответствии результатов расчетов и экспериментов.

Расчетные и экспериментальные исследования усталости нержавеющей стали AISI 304 проводятся в условиях нормальной температуры как при пропорциональном жестком циклическом нагружении, так и при непропорциональном (сложном) циклическом нагружении по траектории деформаций в виде окружности. Результаты расчетов изображены на рисунке 3 сплошными кривыми, а результаты экспериментов [6] светлыми кружками при пропорциональном нагружении и темными кружками при непропорциональном (сложном). Наблюдается значительно больший повреждающий эффект непропорционального нагружения по сравнению с пропорциональным – снижение долговечности достигает практически порядка. Соответствие результатов расчетов и экспериментов удовлетворительное.

Результаты исследования малоцикловой усталости при изотермическом и неизотермическом нагружении нержавеющей стали 12X18H9 приводятся на рисунках

4-6. На рисунке 4 приведены расчетные кривые малоциклового усталости и экспериментальные результаты [7] (кружки, треугольники, светлые квадраты, звездочки, темные квадраты) при жестком циклическом нагружении при постоянной температуре  $T = 500, 550, 600, 650^{\circ}\text{C}$  и переменной температуре  $T = 150 \leftrightarrow 650^{\circ}\text{C}$  (синфазный неизотермический режим). Длительность цикла составляла 2 мин. (частота – 30 цикл/час). На рисунке 5 приведены расчетные кривые малоциклового усталости и экспериментальные результаты [7] (кружки, треугольники, квадраты) при мягком циклическом нагружении при постоянной температуре  $T = 650^{\circ}\text{C}$  и двух режимах переменной температуры  $T = 150 \leftrightarrow 650^{\circ}\text{C}$ , отличающихся частотой изменения температуры – 30 цикл/час и 60 цикл/час соответственно. Длительность цикла изменения напряжения 2 мин. (частота – 30 цикл/час). На рисунке 6 приведены расчетные кривые и экспериментальные результаты [7-9] при жестком циклическом изотермическом нагружении ( $T = 650^{\circ}\text{C}$ ) с различной длительностью циклов. Кривая 1 получена расчетным путем при скорости деформирования, когда временные эффекты малы, а светлый квадрат соответствует экспериментальному результату. Кривая 2 и треугольники получены при длительности цикла равной 2 мин, а кривая 3 и кружки – 8 мин. Представленные результаты, говорят о существенном влиянии на малоцикловую прочность длительности процесса, а также эффектов охрупчивания и залечивания, которые учитываются в основном варианте теории неупругости (термовязкопластичности).

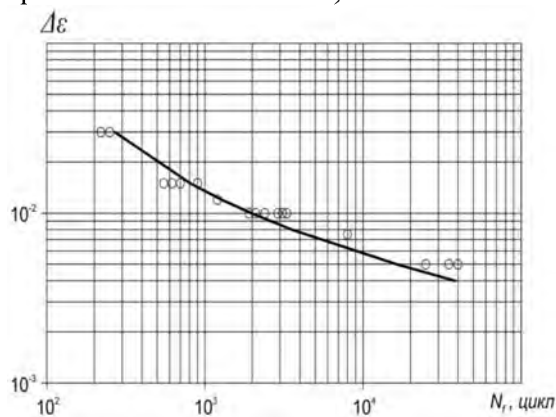


Рисунок 1. – Кривая малоциклового усталости стали 304

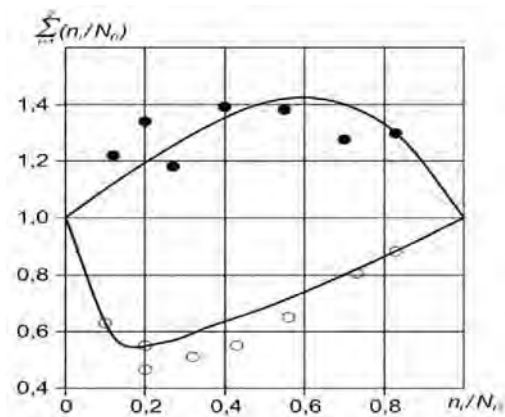


Рисунок 2. – Суммирование повреждений при двухблочном изменении амплитуды деформации

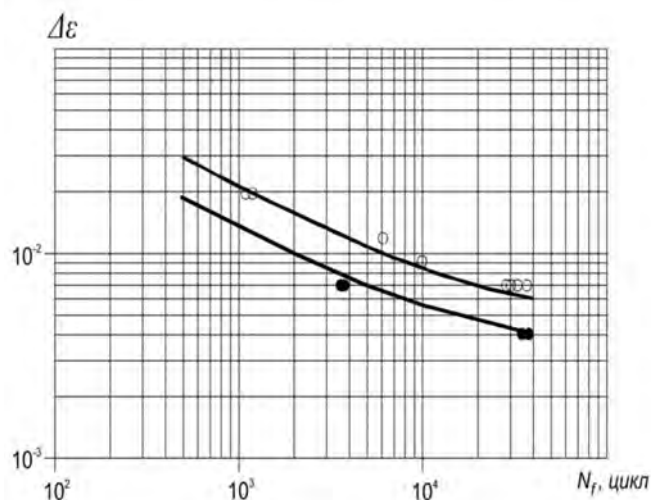


Рисунок 3. – Кривые малоциклового усталости нержавеющей стали AISI 304 при простом и сложном нагружениях

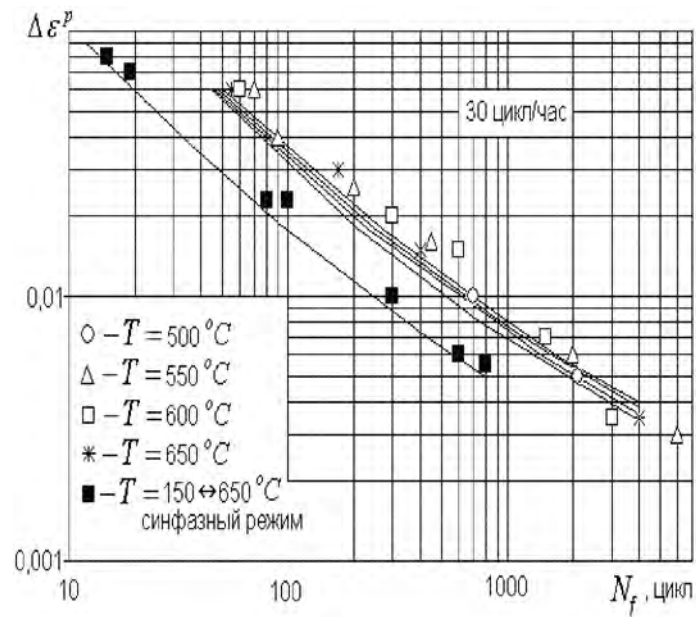


Рисунок 4. – Кривые малоциклового усталости нержавеющей стали 12X18H9 при жестком циклическом изотермическом и неизотермическом нагружении

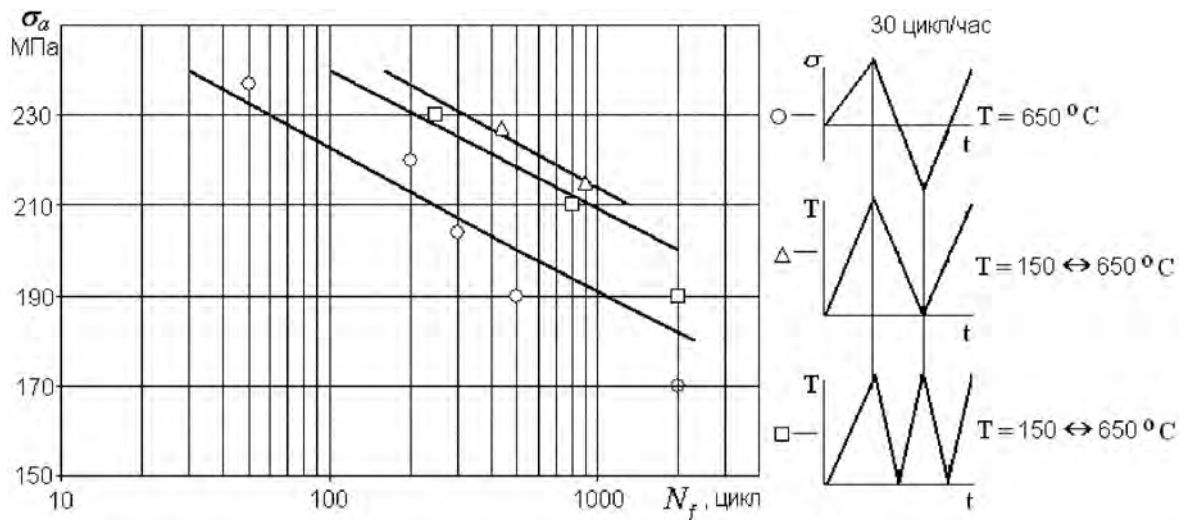


Рисунок 5. – Кривые малоциклового усталости нержавеющей стали 12X18H9 при мягком циклическом изотермическом и неизотермическом нагружении

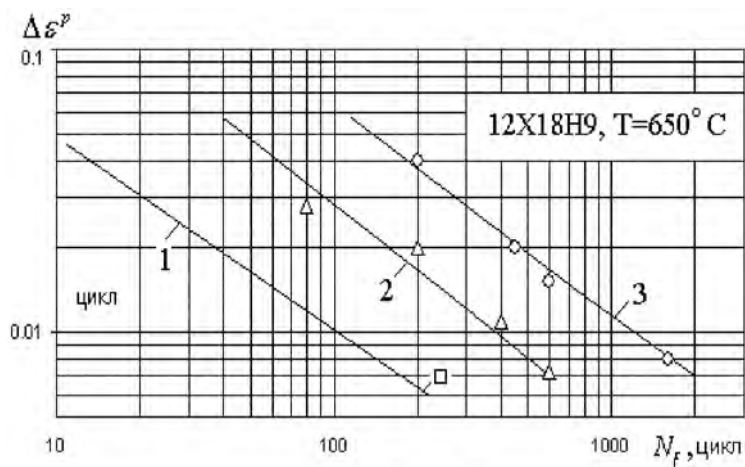


Рисунок 6. – Кривые малоциклового усталости нержавеющей стали 12X18H9 при жестком циклическом изотермическом нагружении с различной длительностью циклов

Адекватное описание процессов термовязкопластического деформирования и разрушения конструкционных сталей и сплавов при разнообразных режимах циклического нагружения иллюстрирует широкие возможности современной теории неупругости (термовязкопластичности).

### РЕЗЮМЕ

Рассматриваются основные положения и уравнения современной теории термовязкопластичности (неупругости). Выделяются материальные функции, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций, замыкающих теорию термовязкопластичности. Иллюстрируются возможности теории термовязкопластичности по адекватному описанию процессов деформирования и разрушения конструкционных сталей и сплавов при разнообразных режимах термосиловых циклических нагружений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарь В.С. Неупругое поведение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении: дис. д-ра физико-математических наук; 01.02.04. – М., 1990. – 314 с.
2. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 144 с.
3. Бондарь В.С. Теория неупругости // Материалы 49-ой Межд. научно-техн. конференции ААИ. Школа-семинар «Современные модели термовязкопластичности». Часть 2. – М.: МАМИ, 2005. – С. 3–24.
4. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 176 с.
5. Бернард-Коннолли, Бью Куок, Бирон. Усталость коррозионностойкой стали 304 при испытаниях в условиях многоступенчатой контролируемой деформации // Теор. основы инж. расчетов. – 1983. – № 3. – С. 47–53.
6. Соси Д. Модели разрушения при многоосной усталости // Теор. основы инж. расчетов. – 1988. – № 3. – С. 9–21.
7. Казанцев А.Г. Малоцикловая усталость при сложном термомеханическом нагружении. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 247 с.
8. Гусенков А.П. Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
9. Гусенков А.П., Котов П.И. Малоцикловая усталость при неизотермическом нагружении. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.

### SUMMARY

*Explains the basic concepts and equations of the modern theory of thermo-visco plasticity (anelasticity). Allocated material functions, formulates the basic experiment and method of identification of the material functions, closing the theory of thermo-visco plasticity. Illustrates the possibilities of the theory of thermo-visco plasticity adequate description of the processes of deformation and destruction of structural steels and alloys, in a variety of modes thermal power cyclic loading.*

**E-mail:** [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru)

Поступила в редакцию 04.01.2014

## ПОВТОРНОЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЕ НАГРУЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

д.ф.-м.н. Старовойтов Э. И., Савицкий Д.М.

*УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель*

**Введение.** Радиационное облучение твердых тел сопровождается многочисленными эффектами, в результате которых возникает в них дополнительная объемная деформация  $\theta_t$ , изменяются упругие и особенно пластические характеристики вещества. Поэтому при однократных и циклических квазистатических нагружениях упругопластических элементов конструкций необходимо вносить соответствующие корректировки в постановки и решения краевых задач. Основными важными факторами при этом являются радиационное упрочнение материала (увеличение предела текучести) и радиационное разбухание (увеличение объемной деформации). Ниже теория переменного нагружения В.В. Москвитина [1] распространена на рассматриваемый класс краевых задач.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим начально-однородное изотропное тело, занимающее полупространство  $z \geq 0$ . Если на границу ( $z = 0$ ) параллельно оси  $z$  падают нейтроны с одинаковой средней энергией и интенсивностью  $\theta_0$ , нейтрон/(м<sup>2</sup>сек), то интенсивность потока нейтронов, доходящих до плоскости  $z = \text{const}$ , будет [2]

$$\varphi(z) = \varphi_0 e^{-\mu z}. \quad (1)$$

Величина  $\mu$  в (1) называется макроскопическим эффективным сечением и имеет порядок 1/м. Для любого химического элемента она вычисляется по формуле [2]:

$$\mu = \sigma n_0 = \sigma \frac{A_0 \rho}{A}, \quad (2)$$

где  $\zeta$  – эффективное сечение, отнесенное к одному ядру,  $n_0$  – число ядер в 1 см<sup>3</sup>,  $A_0$  – число Авогадро,  $\rho$  – плотность,  $A$  – атомный вес.

Для алюминия  $\zeta = 0,21 \cdot 10^{-24}$  см<sup>2</sup>,  $A_0 = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> плотность  $\rho = 2,7$  г/см<sup>3</sup>  $A = 27$  а.е.м.. Подставляя эти значения в (2), получим  $\mu = 1,26$  м<sup>-1</sup>.

Если  $\theta_0$  в (1) постоянно, то к моменту времени  $t$  через сечение  $z$  пройдет поток

$$I(z) = \varphi_0 t e^{-\mu z}. \quad (3)$$

В грубом приближении можно считать, что изменение объема вещества прямо пропорционально потоку  $I(z)$  и, следовательно,

$$\theta_t = B I(z),$$

где  $B$  – опытная константа.

Величина  $I_0 = \theta_0 t$  дает суммарный поток нейтронов на единицу площади поверхности тела. В реакторах  $\theta_0$  имеет порядок  $10^{17}$ – $10^{18}$  нейтрон/(м<sup>2</sup>сек), а  $I_0$  достигает значений  $10^{23}$ – $10^{27}$  нейтрон/(м<sup>2</sup>), причем  $\theta_t$  будет порядка 0,1. Следовательно, в зависимости от энергии нейтронов и облучаемого материала величина  $B$  может быть порядка  $10^{-28}$ – $10^{-24}$  м<sup>2</sup>/нейтрон.

Зависимость модуля упругости, пределов текучести и прочности и всей диаграммы растяжения от  $I_0$  для различных энергий исследована экспериментально после облучения образцов в атомных реакторах. Опыты свидетельствуют, что, как правило, модуль упругости изменяется слабо (возрастает на 1,5 – 5%). Что касается пределов прочности и текучести, то они весьма чувствительны в отношении облучения и особенно предел текучести.

Для массивных тел с плоской границей число проходящих на глубине  $z$  под этой границей нейтронов за время  $t$  определяется формулой (3), поэтому предел текучести будет переменным по толщине  $z$ . На поверхности тела ( $z = 0$ ) влияние радиации на предел пластичности  $\zeta_y$  вполне удовлетворительно описывается формулой радиационного упрочнения [2]:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left[ 1 + A(1 - \exp(-\xi I_0))^{1/2} \right], \quad (4)$$

где  $\zeta_{y0}$  – предел пластичности необлученного материала.

На глубине  $z$  эта формула принимает вид

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left[ 1 + A(1 - \exp(-\xi I))^{1/2} \right],$$

где величина нейтронного потока  $I(z)$  описывается формулой (3);  $A, \xi$  – константы материала, получаемые из эксперимента.

Например, если для алюминиевого сплава 356 принять  $A = 1,09$ ;  $\xi = 9,73 \cdot 10^{-26}$  м<sup>2</sup>/нейтрон, то об удовлетворение известным экспериментальным данным можно судить по рисунку 1. Темные точки – эксперимент, сплошная линия – расчет по формуле (4). Соответствующие величины деформации обозначим через  $\varepsilon_{y0}, \varepsilon_y$ .

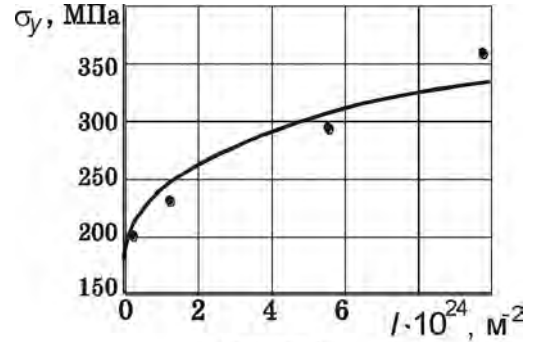


Рисунок 1

Рассмотрим в рамках теории малых упругопластических деформаций процесс комплексного воздействия на деформируемое тело внешних силовых и радиационного потока. Пусть в начальный момент времени на тело, находящееся в естественном состоянии мгновенно воздействуют внешние силы  $F_i', R_i'$  при граничном перемещении  $u_{i0}'$  и одновременно на его поверхность падает нейтронный поток величиной  $I_0 = \theta_0 t$ . Предполагается, что при таком воздействии в теле появляются области упругих и пластических деформаций. Изменением модулей упругости за счет нейтронного облучения пренебрегаем. Возникающие в теле напряжения, деформации и перемещения помечаем одним штрихом вверх.

В упругих областях твердого тела справедлив закон Гука и выполняются известные соотношения, связывающие девиаторы тензоров напряжений и деформаций  $s'_{ij}, \varepsilon'_{ij}$ , а также их шаровые части  $\sigma', \varepsilon'$  с поправкой на дополнительное объемное деформирование за счет воздействия нейтронного облучения  $BI$ :

$$s'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij}, \quad \sigma' = K(3\varepsilon' - BI), \quad (5)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $K$  – модуль объемного деформирования.

Для тех областей твердого тела, где появились пластические деформации, связь девиаторов в случае простых нагружений можно представить в виде:

$$s'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij} f'(\varepsilon'_u, I, a'_k),$$

где  $f'(\varepsilon'_u, I, a'_k)$  – функция пластичности, зависящая от интенсивности деформаций  $\varepsilon'_u$ , величины нейтронного потока  $I$  и аппроксимационных параметров  $a'_k$ .

В условиях простого нагружения [3] эта функция будет универсальной, т. е. ее можно получить из экспериментов на растяжение, кручение и т. д.

Таким образом, в деформируемом теле связь между напряжениями и деформациями при активном нагружении из естественного состояния и воздействии нейтронного потока в общем случае представима в виде

$$s'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij} f'(\varepsilon'_u, I, a'_k), \quad \sigma' = K(3\varepsilon' - BI), \quad (6)$$

причем функцию пластичности следует положить  $f''(\varepsilon'_u, I, a'_k) = 1$  в тех областях, где  $\varepsilon'_u \leq \varepsilon'_y$ .

При достаточно быстром "мгновенном" приложении силовой нагрузки упрочняющее воздействие облучения не успеет сказаться, и возникшие области пластических деформаций будут такими же, как и без воздействия нейтронного потока. Однако если активное нагружение происходит достаточно медленно, то внешние слои тела окажутся со временем упрочненными и в них области пластического деформирования могут оказаться меньше, либо отсутствовать вовсе, по сравнению с необлученным телом. Может возникнуть эффект, когда первые пластические деформации появятся не на внешней упрочненной поверхности, а под ней, где интенсивность деформаций велика, а предел текучести не успел возрасти. Таким образом, по своему воздействию на упругопластические тела радиационное облучение противоположно тепловому, которое уменьшает предел текучести и ведет к увеличению зон пластического деформирования при одинаковых нагрузках.

К соотношениям (6) добавим дифференциальные уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия в предположении малости деформаций

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij,j} + \rho F'_i &= 0; \quad 2\varepsilon'_{ij} = u'_{i,j} + u'_{j,i}, \\ \sigma'_{ij} l_j &= R'_i \text{ на } S_\sigma, \quad u'_i = u'_{0i} \text{ на } S_u. \end{aligned} \quad (7)$$

Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате. Считаем, изменения во времени внешних нагрузок и граничных перемещений происходит таким образом, что соответствующие траектории нагружения не относятся к классу существенно сложных нагружений, а радиационное упрочнение наступает после силового деформирования твердого тела. В дальнейшем предполагаем, что краевая задача (6), (7) решена.

Пусть, начиная со времени  $t_1$ , воздействие нейтронного потока прекращается ( $\theta = 0$ ), а внешние силы изменяются таким образом, что во всех точках пластически деформируемых областей тела  $V_p'$  происходит разгрузка и последующее знакопеременное нагружение объемными  $F_i''$  и поверхностными силами  $R_i''$  (на  $S_\zeta$ ) при граничном перемещении  $u_{i0}''$  (на  $S_u$ ). Уровень облучения тела остается постоянным и равным его значению перед разгрузкой  $I_1 = \theta t_1$ . Предел пластичности в точках тела зависит от координаты  $z$  и становится равным  $\zeta_y''(I_1(z))$ , т. е. зависит от величины деформационного и радиационного упрочнения. Схематично процесс показан на рисунке 2.

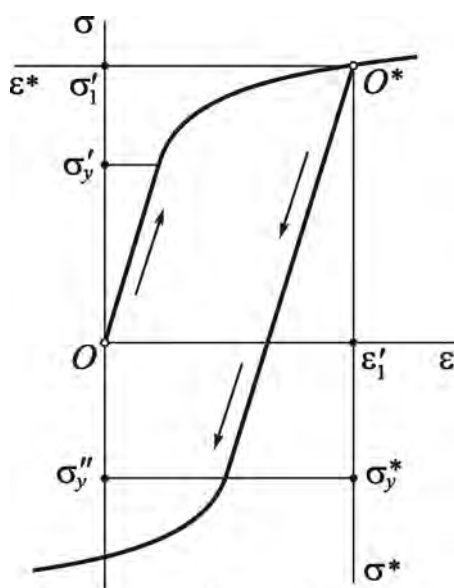


Рисунок 2

Обозначим соответствующие напряжения, деформации и перемещения через  $\zeta''_{ij}$ ,  $\varepsilon''_{ij}$ ,  $u_i''$ . Для них остаются справедливыми соотношения (7)

$$\begin{aligned} \sigma''_{ij,j} + \rho F_i'' &= 0; \quad 2\varepsilon''_{ij} = u''_{i,j} + u''_{j,i}, \\ \sigma''_{ij} l_j &= R_i'' \text{ на } S_\sigma, \quad u_i'' = u''_{0i} \text{ на } S_u. \end{aligned} \quad (8)$$

Связь напряжений с деформациями запишем следующим образом

$$s''_{ij} = 2G\varepsilon''_{ij} f''(\varepsilon''_u, \varepsilon'_1, I_1, a''_k), \quad \sigma'' = 3K\varepsilon''. \quad (9)$$

Здесь  $f''(\varepsilon''_u, \varepsilon'_1, I_1, a''_k)$  — функция пластичности при повторном знакопеременном нагружении, зависящая от интенсивности деформации  $\varepsilon''_u$ , предшествующей разгрузке интенсивности  $\varepsilon'_1$ , уровня облучения тела  $I_1$ , аппроксимационных параметров  $a''_k$ , описывающих кривую деформирования второго полуцикла.

Причем функцию пластичности  $f''$  следует положить равной единице в тех областях, где не появились новые пластические деформации, то есть  $\varepsilon_u'' \leq \varepsilon_y''$  по модулю,  $\varepsilon_y''$  – деформация, соответствующая пределу текучести  $\zeta_y''$  при повторном нагружении.

Уравнения (8), (9) определяют краевую задачу для величин с двумя штрихами. Ее сложность заключается в зависимости искомого решения от точки разгрузки  $(\varepsilon_1', \zeta_1')$ , т. к. в каждой частице твердого тела необходимо ставить свою краевую задачу и получать свое решение. Рассмотрим одну возможность избежать этих трудностей.

Для величин перед началом разгрузки сохраним обозначения  $\zeta_{ij}', \varepsilon_{ij}', u_i'$ . Следуя Москвитину [1], введем следующие разности для момента времени  $t > t_1$ :

$$s_{ij}^* = s_{ij}' - s_{ij}'', \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij}'' . \quad (10)$$

Запишем физические уравнения состояния для величин со звездочками. В зонах  $V_e'$  и  $V_e''$  разгрузки и упругого деформирования справедливы соотношения

$$s_{ij}^* = 2G\varepsilon_{ij}^*, \quad \varepsilon_u^* \leq \varepsilon_y^*(I_1),$$

В области  $V_p''$ , где в процессе переменного нагружения происходит изменение пластических деформаций, должны быть справедливыми зависимости

$$s_{ij}^* = 2G\varepsilon_{ij}^* f^*(\varepsilon_u^*, \varepsilon_1', I_1, a_k^*) . \quad (11)$$

Здесь  $f^*(\varepsilon_u^*, \varepsilon_1', I_1, a_k^*)$ , вообще говоря, некоторая новая универсальная функция, описывающая нелинейность диаграммы деформирования в осях  $\zeta^* \sim \varepsilon^*$  (см. рисунок 2)..

Во всех точках тела объемная деформация сохраняется упругой. Следовательно, перед началом разгрузки и для текущего состояния выполняются равенства

$$\sigma' = K(3\varepsilon' - BI_1), \quad \sigma'' = K(3\varepsilon'' - BI_1),$$

поэтому и для величин со звездочками

$$\sigma^* = 3K\varepsilon^* . \quad (12)$$

Уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия для величин  $\zeta_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*, u_i^*$  будут

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^* + \rho F_i^* &= 0, \quad F_i^* = F_i' - F_i''; \quad 2\varepsilon_{ij}^* = u_{i,j}^* + u_{j,i}^*, \\ \sigma_{ij}^* l_j &= R_i^*, \quad R_i^* = R_i' - R_i'', \quad \text{на } S_\sigma; \quad u_i^* = u_{0i}^* = u_{0i}' - u_{0i}'', \quad \text{на } S_u. \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношения (11)–(13) образуют новую краевую задачу для величин со звездочками. Если теперь предположить, что функцию  $f^*$  в любой точке кривой деформирования можно приблизить функцией  $f'$ , то есть описать таким же аналитическим выражением только с другими параметрами  $a_k^*$ , то мы уйдем от зависимости  $f^*$  от  $\varepsilon_1'$ :

$$f^* = f'(\varepsilon_u^*, I_1, a_k^*) .$$

Сравнивая после этого соотношения (6), (7) для тела при нагружении из естественного состояния и соотношения для величин со звездочками (11)–(13) отмечаем, что они совпадают с точностью до обозначений. Поэтому, решение задачи для величин со звездочками можно получить из известного решения задачи, соответствующей нагружению из естественного состояния, путем некоторых замен. Например, если известно перемещение  $u_i' = u_i'(x, \varepsilon_u', \varepsilon_\tau', I, a_k')$ , то соответствующее перемещение  $u_i^* = u_i'(x, \varepsilon_u^*, \varepsilon_\tau^*, I, a_k^*)$ , а искомое перемещение при повторном знакопеременном нагружении определяется из соотношения (10):  $u_i'' = u_i' - u_i^*$ . Напряжения и деформации вычисляются по формулам такого же типа. Полученный результат можно распространить на случай любого  $n$ -го циклического нагружения.

**Пример.** В качестве примера решена задача о повторном радиационно-силовом изгибе трехслойного консольной балки. Следует отметить, что слоистые элементы



конструкций, нашли широкое применение в авиа-, ракето-, приборостроении и строительстве, поэтому разработка методик и решения соответствующих краевых задач актуальны. Исследованию напряженно-деформированного состояния неоднородных элементов конструкций посвящены многие публикации, в том числе [4–13]. В рамках теории малых упругопластических деформаций [3] в монографиях [4–6] приведены результаты по изотермическому квазистатическому и динамическому однократному деформированию трехслойных элементов конструкций, связанных и несвязанных с винклеровым основанием. Напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях рассмотрено в статье [7]. Динамическим проблемам трехслойных стержней и цилиндрических оболочек посвящены работы [8–10]. Здесь, в рамках теории простых переменных нагружений, рассмотрено повторное термосиловое деформирование несимметричного по толщине трехслойного стержня с упругопластическими несущими слоями и физически нелинейно-упругим заполнителем, один конец которого заделан.

Для рассматриваемой несимметричной по толщине трехслойной балки приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(x)$ . Наружные несущие слои балки выполнены из металла, а несжимаемый по толщине внутренний слой (заполнитель) – полимер. Несущие слои приняты упругопластическими, заполнитель – нелинейно упругий. Аналитическое решение соответствующей задачи теории упругости приведено в [4].

Пусть к внешней поверхности  $z = c + h_1$  рассматриваемой трехслойной балки кроме распределенной силовой нагрузки  $p'(x), q'(x)$  подводится нейтронный поток плотностью  $\theta_0$  в направлении, противоположном внешней нормали (рисунок 3). Для описания деформирования материалов слоев в нейтронном потоке используем уравнения состояния типа (5):

$$s_x^{r(k)} = 2G_k f^{(k)}(\varepsilon_u^{r(k)}, I) \varepsilon_x^{r(k)}, \quad \sigma^{r(k)} = K_k (3\varepsilon^{r(k)} - B_k I), \quad (k=1, 2, 3), \quad (14)$$

$$s_{xz}^{r(3)} = 2G_3 f^{r(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, I) \varepsilon_{xz}^{r(3)},$$

где  $f^{r(k)}$  – универсальная функция нелинейности при нагружении из естественного состояния

$$f^{r(k)}(\varepsilon_u^{r(k)}, I) = \begin{cases} 1, \\ 1 - \omega^{r(k)}(\varepsilon_u^{r(k)}, I), \end{cases}$$

$$\varepsilon_u^{r(k)} \leq \varepsilon_y^{r(k)}(I),$$

$$\varepsilon_u^{r(k)} > \varepsilon_y^{r(k)}(I); \quad (15)$$

$\omega^{r(k)}(\varepsilon_u^{r(k)}, I)$  – в несущих слоях функция пластичности Ильюшина, в заполнителе – функция нелинейности.

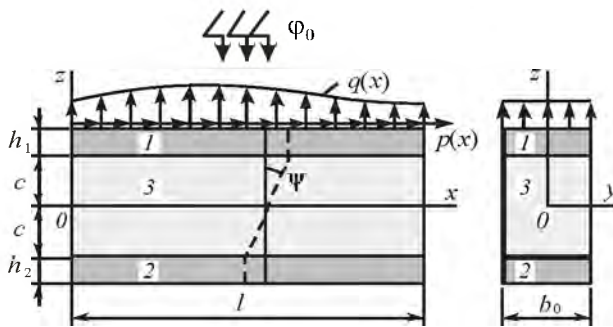


Рисунок 3

В дальнейшем будем полагать, что изменения во времени внешних нагрузок и граничных перемещений происходит таким образом, что соответствующие траектории нагружения не относятся к классу существенно сложных нагружений, а радиационный рост предела пластичности не превышает роста интенсивности деформаций в облучаемых точках твердого тела, что препятствовало бы образованию пластических деформаций.

Рассмотренная задача о нагружении из естественного состояния решена методом упругих решений [4]. В нашем случае, в соответствии с соотношениями (14) (при

воздействии нейтронного потока) решение было получено по такой же методике. В результате искомые перемещения определяются следующими рекуррентными формулами ( $n$  – номер приближения):

$$\begin{aligned}
\psi^{(n)}(x) &= C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \\
&+ \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\
u^{(n)}(x) &= \gamma_3 \psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[ -a_4 L_2^{-1}(p' - p_\omega^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1}(q' - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\
w^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1}(p' - p_\omega^{(n-1)}) + a_1 L_4^{-1}(q' - q_\omega^{(n-1)}) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}. \tag{16}
\end{aligned}$$

Здесь  $p_\omega^{(n-1)}$ ,  $h_\omega^{(n-1)}$ ,  $q_\omega^{(n-1)}$  – дополнительные «внешние» нагрузки служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев при повторном нагружении и учитывают воздействие нейтронного потока. Они на первом шаге ( $n = 1$ ) принимаются равными нулю, в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения, функция  $g^{(n)}(x)$ , коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и линейные интегральные операторы четвертого порядка  $L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$  определены в [4]. Константы интегрирования  $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$  учитывают воздействие нейтронного потока и на каждом последующем шаге  $n$  следуют из условий закрепления стержня.

В случае жесткой консольной заделки левого торца стержня при свободном правом, удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$\begin{aligned}
C_1^{(n)} &= -L_1^{-1}(q' - q_\omega^{(n-1)})|_{x=l}, \quad C_3^{(n)} = \frac{1}{\beta} \int g^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=0}, \\
C_2^{(n)} &= \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\operatorname{ch}(\beta l)}{\operatorname{sh}(\beta l)} \left( \int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=l} - \int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=0} \right) - \int g^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx|_{x=l} \right], \\
C_4^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} \left( L_1^{-1}(p' - p_\omega^{(n-1)}) + \sum_{k=1}^3 B_k K_k I_k h_k \right)|_{x=l} - \\
&- \frac{a_1}{\alpha_2} \left( L_2^{-1}(q' - q_\omega^{(n-1)}) + B_1 K_1 I_1 h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - B_2 K_2 I_2 h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right)|_{x=l} - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1^{(n)} l, \\
C_5^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} L_2^{-1}(p' - p_\omega^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_3^{-1}(q' - q_\omega^{(n-1)})|_{x=0}, \\
C_6^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(p' - p_\omega^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_4^{-1}(q' - q_\omega^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int \psi^{(n)} dx|_{x=0}, \\
C_7^{(n)} &= \frac{a_4}{\alpha_2} \left( L_1^{-1}(p' - p_\omega^{(n-1)})|_{x=l} + \sum_{k=1}^3 B_k K_k I_k h_k \right) - \\
&- \frac{a_7}{\alpha_2} \left( L_2^{-1}(q' - q_\omega^{(n-1)})|_{x=l} + B_1 K_1 I_1 h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - B_2 K_2 I_2 h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) - C_1^{(n)} l \right), \\
C_8^{(n)} &= \frac{a_4}{\alpha_2} L_2^{-1}(p' - p_\omega^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(q' - q_\omega^{(n-1)})|_{x=0}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Пусть, начиная с момента  $t_1$ , осуществляется мгновенная разгрузка и повторное нагружение усилиями обратного знака  $p''$ ,  $q''$ , изменяющимися по тому же закону, что и

при нагружении из естественного состояния. Эти усилия создадут в  $k$ -м слое стержня поле перемещений  $u^n(x), w^n(x)$ , деформации  $\varepsilon_x^{n(k)}(x, z), \varrho_x^{n(k)}(x, z), \varepsilon^{n(k)}(x, z), \psi^n(x, z)$  и напряжения  $\sigma_x^{n(k)}(x, z), s_x^{n(k)}(x, z), \sigma^{n(k)}(x, z), \sigma_{xz}^{n(3)}(x, z)$ . При этом будем предполагать, что за время разгрузки и последующего переменного нагружения воздействие нейтронного потока прекратилось, и уровень облучения во всех точках тела остается неизменным. Он совпадает с уровнем к моменту начала разгрузки, т.е.  $I'(z)=I(z, t_1)$ . Введем для всех величин напряженно-деформированного состояния и нагрузки разности, в которых величины с одним штрихом – напряжения, деформации и перемещения в стержне перед разгрузкой, двумя штрихами помечены аналогичные параметры в процессе второго полуцикла:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)*} &= \sigma_x'^{(k)} - \sigma_x''^{(k)}, \quad \varepsilon_x^{(k)*} = \varepsilon_x'^{(k)} - \varepsilon_x''^{(k)}, \quad \sigma^{(k)*} = \sigma'^{(k)} - \sigma''^{(k)}, \quad \sigma_{xz}^{(3)*} = \sigma_{xz}'^{(3)} - \sigma_{xz}''^{(3)}, \quad \varepsilon^{(k)*} = \varepsilon'^{(k)} - \varepsilon''^{(k)}, \\ \psi^* &= \psi' - \psi'', \quad q^* = q' - q'', \quad p^* = p' - p'', \quad u^* = u' - u'', \quad w^* = w' - w''. \end{aligned} \quad (18)$$

Для напряжений и деформаций, отмеченных звездочкой, примем физические уравнения состояния типа (14):

$$\begin{aligned} s_x^{(k)*} &= 2G_k f^{(k)*} \varrho_x^{(k)*}, \quad s_{xz}^{(3)*} = 2G_3 f^{(3)*} \varrho_{xz}^{(3)*}, \\ \sigma^{(k)*} &= 3K_k \varepsilon^{(k)*}, \quad k=1, 2, 3. \end{aligned}$$

Соответствующие универсальные функции нелинейности в несущих слоях полагаем, согласно гипотезе Москвитина, выраженными через функции пластичности при нагружении из естественного состояния (15):

$$\begin{aligned} f^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, I') &= \begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_y^{(k)*}(I'), \\ 1 - \omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, I'), & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_y^{(k)*}(I'), \end{cases} \\ \omega^{(k)*} &= \omega'^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)*}, \varepsilon_y^{(k)*}, I', d_l^*), \end{aligned}$$

где  $d_l^*$  – экспериментальные параметры материала, входящие в аппроксимационную формулу функции нелинейности.

При повторном знакопеременном нагружении рекуррентное решение для величин со звездочками будет подобным (17):

$$\begin{aligned} \psi^{(n)*}(x) &= C_2^{(n)*} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)*} \operatorname{ch}(\beta x) + \\ &+ \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g^{(n)*} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g^{(n)*} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)*}(x) &= \gamma_3 \psi^{(n)*} + \frac{1}{\alpha_2} \left[ -a_4 L_2^{-1}(p^* - p_\omega^{(n-1)*}) + a_7 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)*}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)*} x^2 \right] + C_7^{(n)*} x + C_8^{(n)*}, \\ w^{(n)*}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \int \psi^{(n)*} dx - a_7 L_3^{-1}(p^* - p_\omega^{(n-1)*}) + a_1 L_4^{-1}(q^* - q_\omega^{(n-1)*}) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)*} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)*} x^2 + C_5^{(n)*} x + C_6^{(n)*}. \end{aligned} \quad (19)$$

Удовлетворяя решением (19) граничные условия для консоли, получим константы интегрирования  $C_1^{(n)*}, \dots, C_8^{(n)*}$ . Они следуют из (17), если в последних убрать нейтронный поток  $I_k$ , т.к. его воздействие прекратилось перед разгрузкой.

Параметры НДС трехслойной балки при повторном знакопеременном нагружении следуют из соотношений (18) с учетом решений (16), (17), (19):

$$\psi'' = \psi^* - \psi', \quad u'' = u^* - u', \quad w'' = w^* - w'. \quad (20)$$

Численные результаты получены для трехслойной балки слои ко торой выполнены из Д16Т-фторопласт-Д16Т. Относительные толщины слоев:  $h_1 = h_2 = 0,03$ ,  $c = 0,09$ .

Аналитический вид функции физической нелинейности заполнителя принят в виде

$$\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, I) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(I), \\ A_k \left( 1 - \frac{\varepsilon_y^{(k)}(I)}{\varepsilon_u^{(k)}} \right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}(I), \end{cases} \quad \varepsilon_y^{(k)}(I) = \varepsilon_{y0} \left[ 1 + A(1 - \exp(-\xi I))^{1/2} \right],$$

Механические и радиационные параметры материалов слоев, входящие в формулу (20), приведены в [2, 6]. Кроме этого принималось:  $B = 10^{-23} \text{ м}^2 / \text{нейтрон}$ , что обеспечивает объемную деформацию в слоях рассматриваемого стержня 3–3,5 %, для дюралюминия –  $\mu = 1,26 \text{ см}$ , для фторопласта  $\mu = 3,21 \text{ см}$ .

На рисунке 4 показано изменение прогиба  $w - a$  и сдвига  $\psi - b$  вдоль оси рассматриваемого трехслойного стержня, рассчитанные по различным физическим уравнениям состояния при консольном закреплении левого торца. Кривые с одним штрихом соответствуют нагружению из естественного состояния, два штриха – повторный знакопеременный изгиб: 1, 2 – упругий и упругопластический стержни без облучения, 3 – упругопластические при  $\theta = 10^{18} \text{ нейтрон}/(\text{м}^2\text{с})$ . При повторном нагружении перемещения уменьшаются на 2–3 %, как у необлученного, так и облученного стержней, что объясняется циклическим упрочнением материала при каждой перемене знака нагрузки.

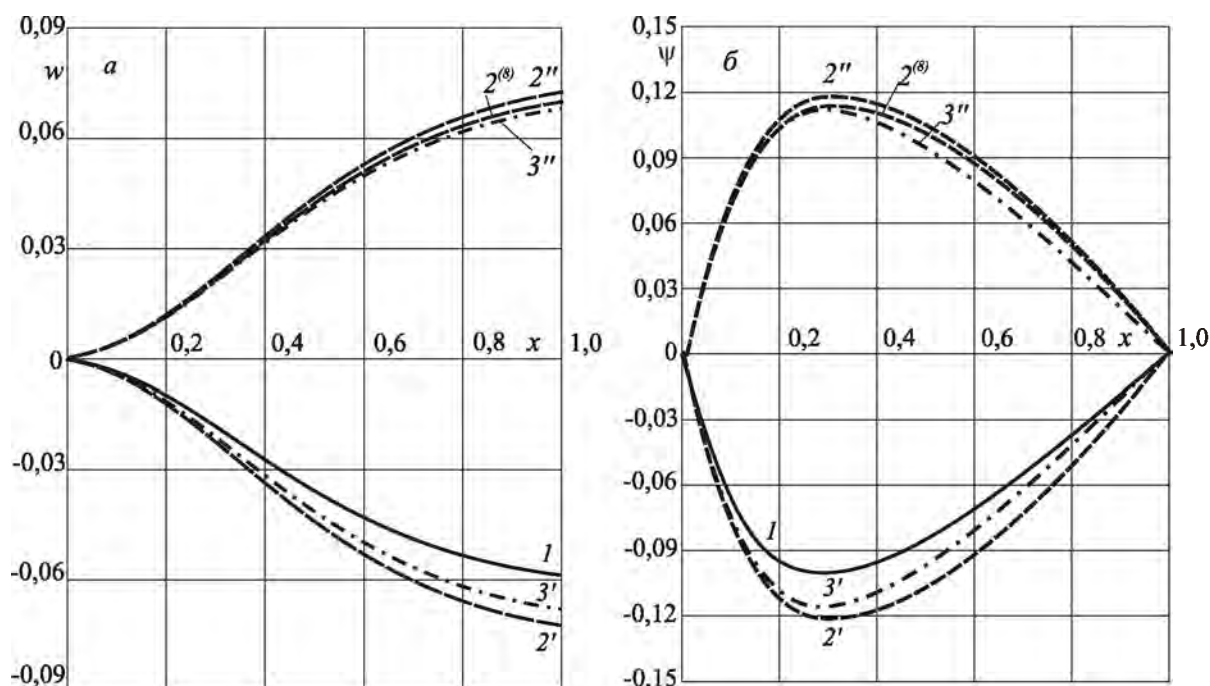


Рисунок 4.

**Выводы.** Предложена методика исследования НДС при циклическом нагружении упругопластических тел в нейтронном потоке позволяет существенно упростить решение целого класса краевых задач. Однако следует еще раз указать ограничения на ее применение. Во-первых, максимальный уровень нейтронного облучения не должен вызывать разрыхление вещества. Во-вторых, на каждом

полуцикле должны выполняться условия простого нагружения и деформации должны быть малыми.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция".*

## РЕЗЮМЕ

Рассмотрено влияние нейтронного облучения на упругопластическое деформирование твердых тел при циклическом силовом воздействии. На основе экспериментальных данных предложена формула радиационного упрочнения. Доказана теорема о переменных нагружениях. Приведено аналитическое решение и численные результаты для трехслойного металлополимерного стержня.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Москвитин, В. В. Циклическое нагружение элементов конструкций. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
2. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. Упругопластические деформации полых цилиндров. – М.: изд-во Московского университета, 1960. 224 с.
3. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
4. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
5. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
6. Starovoitov, E. I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F.B. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
7. Москвитин В.В., Старовойтов Э. И. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – № 1. – С. 116–121.
8. Леоненко Д.В. Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.
9. Леоненко Д.В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 3, (13). – С. 53–56.
10. Леоненко Д.В. Вынужденные колебания трехслойного стержня ВИНУ на упругом безынерционном основании / Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2007. – № 3. – С. 70–74.

## SUMMARY

*The influence of neutron irradiation upon elastoplastic deformation of components of constructions under cyclic force disturbance is considered. On basis of experimental data the formula of irradiation reinforcement is suggested. The theorem about variable loading is proved. Numerical and analytical solution for sandwich metal-polymeric beam is adduced.*

**E-mail:** [edstar@mail.by](mailto:edstar@mail.by)  
[scvizki31@gmail.com](mailto:scvizki31@gmail.com)

Поступила в редакцию 12.10.2014

## ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГИБРИДНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

к.т.н. <sup>1</sup>Мищенко А.В., д.ф.-м.н. <sup>2</sup>Немировский Ю.В.<sup>1</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, РФ<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Современные технологические приемы (склейка, диффузионная и взрывная сварка, плазменное и холодное газодинамическое напыление) позволяют создавать уникальные конструкции из практически любых наборов материалов [1, 2]. Вследствие взаимодействия в конструкции широкого спектра материалов, исследование ее деформированного, напряженного состояния и рационального подбора материалов требует разработки специальных методов расчета. В условиях статических режимов нагружения соответствующие подходы достаточно подробно освещены в [3], некоторые вопросы динамики были рассмотрены в [4, 5]. Здесь разработан общий подход, позволяющий с единых позиций исследовать гибридные стержневые системы с широким разнообразием материалов и динамических режимов. Выполнен учет взаимодействия между элементами конструкции и опорными средами.

**1. Соотношения расчетной модели.** Рассмотрим неоднородный (гибридный) стержень – элемент плоской стержневой системы, испытывающий прямой продольно-поперечный динамический изгиб в плоскости симметрии  $yx$  локальной системы координат  $xuz$ . Стержень имеет поперечно-слоистую структуру, образованную границами  $y_k(x)$  ( $k=1, \dots, s+1$ ) с произвольной привязкой к отсчетной плоскости  $y=0$ . Геометрическая ось стержня  $x$  образуется пересечением силовой  $z=0$  и отсчетной плоскостей. Слои, имеющие поперечные размеры (ширину и толщину)

$$b_k(x, y), \quad h_k(x), \quad (k=1, \dots, s),$$

выполнены из различных квазиоднородных материалов при обеспечении идеального межслойного контакта. Материал  $k$ -го слоя характеризуется: объемной плотностью  $\rho_k$ , модулем упругости  $E_k$  и коэффициентом вязкости  $\eta_k$ .

Будем считать, что в отношении физических и геометрических параметров гибридного стержня выполняются ограничения: а) об одинаковости порядков числовых значений одноименных физических характеристик используемых материалов; б) об относительной тонкости стержня – малости поперечных размеров при условии  $l \geq (5 \div 6)h$ . Это позволяет принять следующий вариант кинематических соотношений для функций продольных  $u$  и поперечных  $v$  перемещений, углов поворота  $\theta$ , деформаций  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и сдвигов  $\gamma_{yx}$ :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, t) - \theta(x, t)y, \quad v(x, y, t) = v_0(x, t), \\ \varepsilon_x(x, y, t) &= \varepsilon_0(x, t) - \kappa(x, t) \cdot y, \quad \varepsilon_y(x, y, t) = 0, \quad \gamma_{yx}(x, y, t) = -\gamma_0(x, t), \\ \varepsilon_0(x, t) &= u'_0(x, t), \quad \kappa(x, t) = \theta'(x, t), \quad \theta(x, t) = v'(x, t) + \gamma_0(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_0$ ,  $v_0$  – смещения точек продольной оси;  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa$  – деформация и кривизна (с поправкой на  $\gamma'$ ) оси; штрихом обозначено дифференцирование по координате  $x$ .

К стержню приложены динамические нагрузки  $q_x(x, t)$ ,  $q_y(x, t)$ ,  $m_z(x, t)$ , инерционные силовые факторы

$$q_{x,dyn}(x,t) = -\sum_{k=1}^s \rho_k \iint_{A_k} (\ddot{u}_0 - \ddot{\theta}y) dA, \quad q_{y,dyn}(x,t) = -\sum_{k=1}^s \rho_k \iint_{A_k} \ddot{v}_0 dA, \quad (2)$$

$$m_{z,dyn}(x,t) = -\sum_{k=1}^s \rho_k \iint_{A_k} (\ddot{u}_0 - \ddot{\theta}y) y dA$$

и реакции вязко-упругого основания

$$q_x^{(r)}(x,t) = -\beta_x b_r(x) u(x, y_r, t) - c_x b_r(x) \dot{u}(x, y_r, t), \quad (3)$$

$$q_y^{(r)}(x,t) = -\beta_y b_r(x) v(x, t) - c_y b_r(x) \dot{v}(x, t), \quad m_{zi}^{(r)}(x,t) = q_x^{(r)} y_r,$$

где  $\dot{(\quad)} = \partial(\quad)/\partial t$ ,  $A_k$  – площадь поперечного сечения  $k$ -го слоя,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  – коэффициенты жесткости, а  $c_x$ ,  $c_y$  – вязкости основания при смещении в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $b_r(x)$ ,  $y_r(x)$  – ширина и координата поверхности контакта стержня с основанием.

Интегральные уравнения движения для гибкого слоистого стержня, записанные с учетом реактивных нагрузок (3), факторов (2) и гипотез (1) для усилий

$$[N, Q, M](x) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} [\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}, -\sigma_x^{(k)} y] dA \quad (4)$$

принимают вид

$$\begin{cases} N' + (Q\theta)' - \beta_{xx} u_0 + \beta_{x\theta} \theta - c_{xx} \dot{u}_0 + c_{x\theta} \dot{\theta} = -q_x + m_A \ddot{u}_0 - m_S \ddot{\theta}, \\ Q' - (N\theta)' + \beta_{yy} v_0 + c_{yy} \dot{v}_0 = q_y - m_A \ddot{v}_0, \\ M' + \beta_{x\theta} u_0 - \beta_{\theta\theta} \theta + c_{x\theta} \dot{u}_0 - c_{\theta\theta} \dot{\theta} = Q + m_z + m_I \ddot{\theta} - m_S \ddot{u}_0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь введены обобщенные характеристики жесткости и вязкости основания

$$[\beta_{xx}, \beta_{x\theta}, \beta_{\theta\theta}](x) = \beta_x b_r [1, y_r, y_r^2], \quad \beta_{yy}(x) = \beta_y b_r,$$

$$[c_{xx}, c_{x\theta}, c_{\theta\theta}](x) = c_x b_r [1, y_r, y_r^2], \quad c_{yy}(x) = c_y b_r$$

и обобщенные массовые характеристики слоистого стержня

$$[m_A, m_S, m_I](x) = \sum_{k=1}^s \rho_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA. \quad (6)$$

Для нормальных напряжений примем закон вязкоупругого деформирования

$$\sigma_x^{(k)}(x, y, t) = E_k \varepsilon_x(x, y, t) + \eta_k \dot{\varepsilon}_x(x, y, t), \quad (k=1, \dots, s). \quad (7)$$

Касательные напряжения могут быть получены из условий равновесия сдвигаемой части  $y \in [y, y_{s+1}]$  элемента  $dx$

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y) = -\frac{1}{b_k(x, y)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_y^{y_{s+1}(x)} \sigma_x(x, y) b(x, y) dy \right). \quad (8)$$

Погонную сдвигающую силу (производную от интеграла в (8)) аппроксимируем выражением

$$\frac{\partial N^{sec}(x, y)}{\partial x} = b_0 \tau_0(x) f_\tau(y), \quad (9)$$

где  $f_\tau(y)$  – заданная безразмерная функция формы поперечного распределения сдвигающих сил, удовлетворяющая условиям  $f_\tau(y_1) = f_\tau(y_{s+1}) = 0$ ;  $\tau_0(x)$  – функциональный параметр, характеризующий продольное распределение сдвигающих сил;  $b_0$  – характерный размер (ширина сечения).

Объединив (9), (8) и исключив при помощи условия равновесия (4) параметр  $\tau_0$ , получим формулу касательного напряжения

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y, t) = \frac{Q(x, t)}{b_k(x, y)} \frac{f_\tau(y)}{F_\tau}, \quad F_\tau = \int_{y_1}^{y_{s+1}} f_\tau dy. \quad (10)$$

Выражение для сдвиговой жесткости сечения  $D_Q$  может быть получено по условию эквивалентности энергии деформации интегрального усилия  $Q$  и напряжений (10). Заменяя в  $D_Q$  модуль сдвига  $G_k$  на сдвиговую вязкость  $\eta_{\tau k}$ , получим энергетически осредненную сдвиговую вязкость  $V_Q$  сечения гибридного стержня. Запишем жесткость и вязкость в виде

$$D_Q(x) = \frac{F_\tau^2}{\sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k G_k} dy}, \quad V_Q(x) = \frac{F_\tau^2}{\sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k \eta_{\tau k}} dy}. \quad (11)$$

Подстановка (7), (10) в (4) при учете (11) дает систему дифференциальных уравнений, связывающих обобщенные деформации, их скорости с интегральными силовыми факторами

$$\begin{cases} D_A \varepsilon_0 - D_S \kappa + V_A \dot{\varepsilon}_0 - V_S \dot{\kappa} = N, \\ -D_S \varepsilon_0 + D_I \kappa - V_S \dot{\varepsilon}_0 + V_I \dot{\kappa} = M, \\ \gamma_0 D_Q + \dot{\gamma}_0 V_Q = Q, \end{cases} \quad (12)$$

содержащую обобщенные жесткостные и вязкостные характеристики (11) и

$$[D_A, D_S, D_I](x) = \sum_{k=1}^s E_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA, \quad [V_A, V_S, V_I](x) = \sum_{k=1}^s \eta_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA. \quad (13)$$

Объединив (5), (12) с учетом (1), имеем разрешающую систему трех дифференциальных уравнений относительно искомых перемещений  $u_0(x, t)$ ,  $v_0(x, t)$ ,  $\theta(x, t)$ . Выполнив переобозначение  $u_0 \rightarrow u$ ,  $v_0 \rightarrow v$ , запишем ее в виде

$$\begin{cases} (D_A u' - D_S \theta' + V_A \dot{u}' - V_S \dot{\theta}')' - \beta_{xx} u + \beta_{x\theta} \theta - c_{xx} \dot{u} + c_{x\theta} \dot{\theta} - \\ \quad - m_A \ddot{u} + m_S \ddot{\theta} = -q_x(x, t), \\ [D_Q(\theta - v') + V_Q(\dot{\theta} - \dot{v}')] - (N_{st} \theta)' + \beta_{yy} v + c_{yy} \dot{v} + m_A \ddot{v} = q_y(x, t), \\ (D_I \theta' - D_S u' + V_I \dot{\theta}' - V_S \dot{u}') + \beta_{x\theta} u - \beta_{\theta\theta} \theta + c_{x\theta} \dot{u} - c_{\theta\theta} \dot{\theta} - \\ \quad - D_Q(\theta - v') - V_Q(\dot{\theta} - \dot{v}') - m_I \ddot{\theta} + m_S \ddot{u} = m_z(x, t). \end{cases} \quad (14)$$

Здесь с целью линеаризации выполнено пренебрежение слагаемым  $(Q\theta)'$ , а в  $(N\theta)'$  учтена лишь статическая компонента продольной силы. Система уравнений (14) описывает связанные продольно-поперечные колебания неоднородного вязкоупругого стержня на вязкоупругом основании. Используемые в ней одиннадцать интегральных характеристик (6), (11), (13) позволяют в полном объеме учесть реальные физические свойства неоднородного стержня. В частном случае при  $D_S = 0$ ,  $V_A = V_S = V_I = 0$ ,  $N_{st} = 0$ ,  $c_{xx} = c_{yy} = c_{x\theta} = c_{\theta\theta} = 0$ ,  $m_S = m_I = 0$ ,  $\beta_{xx} = \beta_{x\theta} = \beta_{\theta\theta} = 0$ ,  $k=1$  из (14) вытекают линейные соотношения однородного стержня Тимошенко.

Для замыкания начально-краевой задачи записываются начальные условия



$$u(x,0) = v(x,0) = \theta(x,0) = 0, \quad \dot{u}(x,0) = \dot{v}(x,0) = \dot{\theta}(x,0) = 0 \quad (15)$$

и граничные – в конечных сечениях с координатами  $x_* = 0, l$ :

$$u(x_*, t) = u_*(t), \quad v(x_*, t) = v_*(t), \quad \theta(x_*, t) = \theta_*(t), \quad - \quad (16)$$

при наличии жестких связей, а при деформируемых –

$$\begin{aligned} N(x_*, t) \mp R_{x*}(t) \pm F_{x*}(t) &= 0, \\ \theta(x_*, t) N_{st}(x_*) - Q(x_*, t) \mp R_{y*}(t) \pm F_{y*}(t) &= 0, \\ M(x_*, t) \mp R_{\theta*}(t) \mp m_{z*}(t) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$R_{x*}(t) = D_{x*}u(x_*, t) + C_{x*}\dot{u}(x_*, t), \quad R_{y*}(t) = D_{y*}v(x_*, t) + C_{y*}\dot{v}(x_*, t),$$

$R_{\theta*}(t) = D_{\theta*}\theta(x_*, t) + C_{\theta*}\dot{\theta}(x_*, t)$  – реакции продольной, поперечной и угловой конечных вязкоупругих связей, имеющих характеристики жесткости  $D_{x*}, D_{y*}, D_{\theta*}$  и вязкости  $C_{x*}, C_{y*}, C_{\theta*}$ . На левом конце применяются верхние, а на правом – нижние знаки.

Заданные на границах стержня функции перемещений  $u_*(t), v_*(t), \theta_*(t)$  позволяют описывать кинематические воздействия, в том числе – сейсмические.

**2. Решение системы уравнений (14) представим в виде разложений**

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{j_u} T_{uj}(t) \varphi_{uj}(x), \quad v(x, t) = \sum_{j=1}^{j_v} T_{vj}(t) \varphi_{vj}(x), \quad \theta(x, t) = \sum_{j=1}^{j_\theta} T_{\theta j}(t) \varphi_{\theta j}(x) \quad (17)$$

по заданным координатным базисам  $\varphi_{uj}(x), \varphi_{vj}(x), \varphi_{\theta j}(x)$ , удовлетворяющим граничным условиям с амплитудами – искомыми функциями времени:

$$T_{uj}(t), \quad (j = 1, \dots, j_u), \quad T_{vj}(t), \quad (j = 1, \dots, j_v), \quad T_{\theta j}(t), \quad (j = 1, \dots, j_\theta). \quad (18)$$

Подставив (17) в (14), полученные невязки уравнений ортогонализируем в интервале  $x \in [0, l]$  к базисным функциям

$$\begin{aligned} \int_0^l L_1(u, v, x) \varphi_{uj}(x) dx &= 0, \quad (j = 1, \dots, j_u); \quad \int_0^l L_2(u, v, x) \varphi_{vj}(x) dx = 0, \quad (j = 1, \dots, j_v), \\ \int_0^l L_3(u, v, \theta) \varphi_{\theta j} dx &= 0, \quad (j = 1, \dots, j_\theta). \end{aligned}$$

Здесь  $L_i$  – дифференциальный оператор  $i$ -го уравнения системы (14). В результате получим систему  $j_u + j_v + j_\theta$  уравнений относительно искомым функций (18), которая в матричном виде имеет вид

$$\sum_{\beta=0}^2 \mathbf{A}^{(\alpha\beta)} \frac{d^\beta}{dt^\beta} \mathbf{T}_u + \sum_{\beta=0}^2 \mathbf{B}^{(\alpha\beta)} \frac{d^\beta}{dt^\beta} \mathbf{T}_v + \sum_{\beta=0}^2 \mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \frac{d^\beta}{dt^\beta} \mathbf{T}_\theta = \mathbf{G}^{(\alpha)}(t), \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (19)$$

$$\mathbf{T}_u(t) = [T_{u1} \dots T_{uj_u}]^T, \quad \mathbf{T}_v(t) = [T_{v1} \dots T_{vj_v}]^T, \quad \mathbf{T}_\theta(t) = [T_{\theta 1} \dots T_{\theta j_\theta}]^T. \quad (20)$$

Девять матриц  $\mathbf{A}^{(\alpha\beta)} = \{a_{ij}^{(\alpha\beta)}\}$ ,  $\mathbf{B}^{(\alpha\beta)} = \{b_{ij}^{(\alpha\beta)}\}$ ,  $\mathbf{C}^{(\alpha\beta)} = \{c_{ij}^{(\alpha\beta)}\}$  (и три вектора  $\mathbf{G}^{(\alpha)} = \{g_i^{(\alpha)}\}$ ) имеют  $j_u, j_v, j_\theta$  столбцов при  $\beta = 1, 2, 3$  соответственно и  $j_u, j_v, j_\theta$  строк при  $\alpha = 1, 2, 3$ . Интегральные компоненты в (19) определяются выражениями

$$a_{ij}^{(1,0)} = \int_0^l \varphi_{ui} [(D_A \varphi'_{uj})' - \beta_{xx} \varphi_{uj}] dx, \quad a_{ij}^{(1,1)} = \int_0^l \varphi_{ui} [(V_A \varphi'_{uj})' - c_{xx} \varphi_{uj}] dx,$$

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(1,2)} &= -\int_0^l \varphi_{ui} m_A \varphi_{uj} dx, \quad b_{ij}^{(1,0)} = b_{ij}^{(1,1)} = b_{ij}^{(1,2)} = 0, \quad c_{ij}^{(1,2)} = \int_0^l \varphi_{ui} m_S \varphi_{\theta j} dx, \\
c_{ij}^{(1,0)} &= -\int_0^l \varphi_{ui} [(D_S \varphi'_{\theta j})' - \beta_{x\theta} \varphi_{\theta j}] dx, \quad c_{ij}^{(1,1)} = -\int_0^l \varphi_{ui} [(V_S \varphi'_{\theta j})' + c_{x\theta} \varphi_{\theta j}] dx, \\
a_{ij}^{(2,0)} &= a_{ij}^{(2,1)} = a_{ij}^{(2,2)} = 0, \quad b_{ij}^{(2,0)} = -\int_0^l \varphi_{vi} [(D_Q \varphi'_{vj})' - \beta_{yy} \varphi_{vj}] dx, \\
b_{ij}^{(2,1)} &= -\int_0^l \varphi_{vi} [(V_Q \varphi'_{vj})' - c_{yy} \varphi_{vj}] dx, \quad b_{ij}^{(2,2)} = -\int_0^l \varphi_{vi} (m_A \varphi_{vj}) dx, \\
c_{ij}^{(2,0)} &= \int_0^l \varphi_{vi} [(D_Q \varphi_{\theta j})' - (N_{st} \varphi_{\theta j})'] dx, \quad c_{ij}^{(2,1)} = \int_0^l \varphi_{vi} (V_Q \varphi_{\theta j})' dx, \quad c_{ij}^{(2,2)} = 0, \\
a_{ij}^{(3,0)} &= -\int_0^l \varphi_{\theta i} [(D_S \varphi'_{uj})' - \beta_{x\theta} \varphi_{uj}] dx, \quad a_{ij}^{(3,1)} = -\int_0^l \varphi_{\theta i} [(V_S \varphi'_{uj})' - c_{xx} \varphi_{uj}] dx, \\
a_{ij}^{(3,2)} &= \int_0^l \varphi_{\theta i} m_S \varphi_{uj} dx, \quad b_{ij}^{(3,0)} = -\int_0^l \varphi_{\theta i} D_Q \varphi'_{vj} dx, \quad b_{ij}^{(3,1)} = \int_0^l \varphi_{\theta i} V_Q \varphi'_{vj} dx, \\
b_{ij}^{(3,2)} &= 0, \quad c_{ij}^{(3,0)} = \int_0^l \varphi_{\theta i} [(D_I \varphi'_{\theta j})' - \beta_{\theta\theta} \varphi_{\theta j} - D_Q \varphi_{\theta j}] dx, \\
c_{ij}^{(3,1)} &= -\int_0^l \varphi_{\theta i} (V_Q + c_{\theta\theta}) \varphi_{\theta j} dx, \quad c_{ij}^{(3,2)} = \int_0^l \varphi_{\theta i} [(V_I \varphi_{\theta j})' - m_I \varphi_{\theta j}] dx, \\
g_i^{(1)}(t) &= -\int_0^l \varphi_{ui} q_x(x, t) dx, \quad g_i^{(2)}(t) = \int_0^l \varphi_{vi} q_y(x, t) dx, \quad g_i^{(3)}(t) = \int_0^l \varphi_{\theta i} m_z(x, t) dx.
\end{aligned}$$

Систему уравнений (19) запишем в компактном виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_2 \ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{T} &= \mathbf{G}, \tag{21} \\
\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u \\ \mathbf{T}_v \\ \mathbf{T}_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1i} & \mathbf{B}_{1i} & \mathbf{C}_{1i} \\ \mathbf{A}_{2i} & \mathbf{B}_{2i} & \mathbf{C}_{2i} \\ \mathbf{A}_{3i} & \mathbf{B}_{3i} & \mathbf{C}_{3i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{(1)} \\ \mathbf{G}^{(2)} \\ \mathbf{G}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, 3).
\end{aligned}$$

3. Решение однородного уравнения, соответствующего (21), будем искать в виде

$$\mathbf{T}_u(t) = \mathbf{K}_u \exp(\lambda t), \quad \mathbf{T}_v(t) = \mathbf{K}_v \exp(\lambda t), \quad \mathbf{T}_\theta(t) = \mathbf{K}_\theta \exp(\lambda t), \tag{22}$$

где  $\mathbf{K}_u$ ,  $\mathbf{K}_v$ ,  $\mathbf{K}_\theta$  – числовые векторы, содержащие по  $j_u$ ,  $j_v$ ,  $j_\theta$  элементов соответственно. Подстановка (22) в (21) для однородного уравнения дает характеристическое уравнение

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1(\lambda) & \tilde{\mathbf{B}}_1(\lambda) & \tilde{\mathbf{C}}_1(\lambda) \\ \tilde{\mathbf{A}}_2(\lambda) & \tilde{\mathbf{B}}_2(\lambda) & \tilde{\mathbf{C}}_2(\lambda) \\ \tilde{\mathbf{A}}_3(\lambda) & \tilde{\mathbf{B}}_3(\lambda) & \tilde{\mathbf{C}}_3(\lambda) \end{bmatrix} = 0, \tag{23}$$

$$\tilde{\Lambda}_i = \Lambda^{(i0)} + \lambda \Lambda^{(i1)} + \lambda^2 \Lambda^{(i2)}, \quad \Lambda \in [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}], \quad (i=1, 2, 3)$$

степени  $2r$  ( $r = j_u + j_v + j_\theta$ ) и позволяет решить проблему собственных значений и векторов любым из известных способов.

В случае стержня с симметричной относительно отсчетной поверхности структурой имеем  $D_S = V_S = m_S = 0$ . Если дополнительно для характеристик основания в (5) положить  $\beta_{x\theta} = c_{x\theta} = 0$ , то в (19), (21) получим  $\mathbf{B}^{(1,\beta)} = \mathbf{C}^{(1,\beta)} = \mathbf{A}^{(2,\beta)} = \mathbf{A}^{(3,\beta)} = 0$  ( $\beta = 0, 1, 2$ ), что приведет к распадению системы (19) на два матричных блока

$$\sum_{\beta=0}^2 \mathbf{A}^{(1,\beta)} \frac{d^\beta}{dt_\beta} \mathbf{T}_u = 0, \quad \sum_{\beta=0}^2 \mathbf{B}^{(\alpha\beta)} \frac{d^\beta}{dt_\beta} \mathbf{T}_v + \sum_{\beta=0}^2 \mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \frac{d^\beta}{dt_\beta} \mathbf{T}_\theta = 0, \quad (\alpha = 2, 3)$$

описывающих свободные продольные и поперечные колебания с независимыми спектрами и частотными уравнениями

$$\det \left[ \mathbf{A}^{(1,0)} + \lambda_u \mathbf{A}^{(1,1)} + \lambda_u^2 \mathbf{A}^{(1,2)} \right] = 0,$$

$$\det \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{(2,0)} + \lambda_v \mathbf{B}^{(2,1)} + \lambda_v^2 \mathbf{B}^{(2,2)} & \mathbf{C}^{(2,0)} + \lambda_v \mathbf{C}^{(2,1)} + \lambda_v^2 \mathbf{C}^{(2,2)} \\ \hline \mathbf{B}^{(3,0)} + \lambda_v \mathbf{B}^{(3,1)} + \lambda_v^2 \mathbf{B}^{(3,2)} & \mathbf{C}^{(3,0)} + \lambda_v \mathbf{C}^{(3,1)} + \lambda_v^2 \mathbf{C}^{(3,2)} \end{array} \right] = 0.$$

Постановка задачи о собственных колебаниях стержня, основанная на уравнениях (21), позволяет для выявления критических состояний стержня применить динамический критерий устойчивости

$$\lambda_{\min}(N_{cr}) = 0.$$

Тогда (23) примет вид

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(10)} & 0 & \mathbf{C}^{(10)} \\ 0 & \mathbf{B}^{(20)} & \mathbf{C}^{(20)}(N_{cr}) \\ \mathbf{A}^{(30)} & \mathbf{B}^{(30)} & \mathbf{C}^{(30)} \end{bmatrix} = 0. \quad (24)$$

Раскрывая определитель (24) блочной матрицы с квадратными диагональными блоками при  $\det \mathbf{A}^{(10)} \neq 0$ ,  $\det \mathbf{B}^{(20)} \neq 0$ , получим

$$\det \left( \left[ \mathbf{C}^{(30)} - \mathbf{A}^{(30)} \left\{ \mathbf{A}^{(10)} \right\}^{-1} \mathbf{C}^{(10)} \right] - \mathbf{B}^{(30)} \left\{ \mathbf{B}^{(20)} \right\}^{-1} \mathbf{C}^{(20)}(N_{cr}) \right) = 0. \quad (25)$$

Представив продольную силу  $N(x) = P n(x)$  через функцию формы  $n(x)$  и параметр  $P$ , из (25) может быть получено значение критического параметра  $P_{cr}$ . Для стержня симметричной структуры при  $\beta_{x\theta} = c_{x\theta} = 0$  (25) принимает вид

$$\det \left( \mathbf{C}^{(30)} - \mathbf{B}^{(30)} \left\{ \mathbf{B}^{(20)} \right\}^{-1} \mathbf{C}^{(20)}(P_{cr}) \right) = 0.$$

**4. Частное решение.** Представим нагрузки в виде произведения

$$q(x, t) = \bar{q}(x) f(t), \quad q \in [q_x, q_y, m_z], \quad (26)$$

координатного профиля нагрузки  $\bar{q}(x)$  и безразмерной функции времени  $f(t)$ , записанной в форме ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0} (a_{qk} \cos k\omega_q t + b_{qk} \sin k\omega_q t), \quad (27)$$

$$a_{qk} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \tilde{q}(t) \cos k\omega_q t dt, \quad b_{qk} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \tilde{q}(t) \sin k\omega_q t dt,$$

где  $\omega_q$ ,  $\tau = 2\pi/\omega_q$  – частота и период заданной динамической нагрузки  $\tilde{q}(t)$ . Каждая из нагрузок  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $m_z$  (26) может быть введена со своей специфической функцией (27).

Учитывая (26), (27) для векторов  $\mathbf{G}^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), в правой части (21) получим

$$\mathbf{G}^{(\alpha)}(t) = \bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)} \sum_{k=0}^{k_0} (a_{qk} \cos k\omega_q t + b_{qk} \sin k\omega_q t),$$

$$\bar{g}_i^{(1)} = -\int_0^l \varphi_{ui} \bar{q}_x(x) dx, \quad (i = 1, \dots, j_u), \quad \bar{g}_i^{(2)} = \int_0^l \varphi_{vi} \bar{q}_y(x) dx, \quad (i = 1, \dots, j_v),$$

$$\bar{g}_i^{(3)} = \int_0^l \varphi_{\theta i} \bar{m}_z(x) dx, \quad (i = 1, \dots, j_\theta).$$

Частное решение системы уравнений (21) зададим в форме

$$\mathbf{T}_u(t) = \sum_{k=0}^{k_0} (\mathbf{H}_k^{(u)} \cos k\omega_q t + \mathbf{S}_k^{(u)} \sin k\omega_q t), \quad \mathbf{T}_v(t) = \sum_{k=0}^{k_0} (\mathbf{H}_k^{(v)} \cos k\omega_q t + \mathbf{S}_k^{(v)} \sin k\omega_q t),$$

$$\mathbf{T}_\theta(t) = \sum_{k=0}^{k_0} (\mathbf{H}_k^{(\theta)} \cos k\omega_q t + \mathbf{S}_k^{(\theta)} \sin k\omega_q t),$$

Тогда из (21) для  $k$ -й гармоники имеем систему шести уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{A}^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 \mathbf{A}^{(i2)}] \mathbf{H}_k^{(u)} + k\omega_q \mathbf{A}^{(i1)} \mathbf{S}_k^{(u)} + \\ + [\mathbf{B}^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 \mathbf{B}^{(i2)}] \mathbf{H}_k^{(v)} + k\omega_q \mathbf{B}^{(i1)} \mathbf{S}_k^{(v)} + \\ + [\mathbf{C}^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 \mathbf{C}^{(i2)}] \mathbf{H}_k^{(\theta)} + k\omega_q \mathbf{C}^{(i1)} \mathbf{S}_k^{(\theta)} = a_{qk} \bar{\mathbf{G}}^{(i)}, \quad k = 0, 1, \dots \\ -k\omega_q \mathbf{A}^{(i1)} \mathbf{H}_k^{(u)} + [\mathbf{A}^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 \mathbf{A}^{(i2)}] \mathbf{S}_k^{(u)} - \\ -k\omega_q \mathbf{B}^{(i1)} \mathbf{H}_k^{(v)} + [\mathbf{B}^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 \mathbf{B}^{(i2)}] \mathbf{S}_k^{(v)} - \\ -k\omega_q \mathbf{C}^{(i1)} \mathbf{H}_k^{(\theta)} + [\mathbf{C}^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 \mathbf{C}^{(i2)}] \mathbf{S}_k^{(\theta)} = b_{qk} \bar{\mathbf{G}}^{(i)}, \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (28)$$

( $i = 1, 2, 3$ ) относительно искоемых векторов  $\mathbf{H}_k^{(u)}$ ,  $\mathbf{S}_k^{(u)}$ ,  $\mathbf{H}_k^{(v)}$ ,  $\mathbf{S}_k^{(v)}$ ,  $\mathbf{H}_k^{(\theta)}$ ,  $\mathbf{S}_k^{(\theta)}$ . При  $k = 0$  в (28) записываются три уравнения для векторов  $\mathbf{H}_0^{(u)}$ ,  $\mathbf{H}_0^{(v)}$ ,  $\mathbf{H}_0^{(\theta)}$ .

Просуммировав частное решение и решение однородной системы, получаем общее решение неоднородной системы (21). Удовлетворив его начальным условиям (15) имеем функции перемещений в начально-краевой задаче динамики продольно-поперечных колебаний слоисто-неоднородного стержня.

**5. Основные соотношения для гибридной стержневой системы.** Рассматривая стержневой ансамбль системы, выполнив преобразования локальных координат к глобальным, получим три группы соотношений – уравнения движения, кинематические и физические уравнения в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_S \mathbf{S}(t) + \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_d(t) &= 0, \\ \mathbf{A}_W \mathbf{W}(t) + \mathbf{L}(t) + \tilde{\mathbf{L}} &= 0, \\ \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{L}(t) - \mathbf{L}_T] + \mathbf{B}_V^{-1} \dot{\mathbf{L}}(t) &= \mathbf{S}(t).\end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{W}$  – вектор узловых перемещений;  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}_T$ ,  $\tilde{\mathbf{L}}$  – векторы обобщенных деформаций стержней – полных, температурных и геометрических несовершенств;  $\mathbf{S}$  – вектор концевых усилий в стержнях;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}_d = -\mathbf{M}_W \ddot{\mathbf{W}}$  – векторы нагрузок – заданных динамических и инерционных, приведенных к узловым;  $\mathbf{A}_S$ ,  $\mathbf{A}_W = \mathbf{A}_S^T$  – матрицы преобразования – силового и кинематического базисов;  $\mathbf{M}_W$  – инерционная матрица системы, сформированная из матриц масс стержней.

С использованием жесткостных характеристик (13) вектор температурных деформаций для  $j$ -го стержня записывается в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{Tj}(t) &= [\Delta l_T \quad \theta_{b,T} \quad \theta_{e,T}]_j^T, \\ \theta_{b,T} &= \int_l \frac{N_T \bar{D}_S + M_T \bar{D}_A}{\bar{D}_A \bar{D}_I - \bar{D}_S^2} (1 - \bar{x}) dx, \quad \theta_{e,T} = \int_l \frac{N_T \bar{D}_S + M_T \bar{D}_A}{\bar{D}_A \bar{D}_I - \bar{D}_S^2} \bar{x} dx, \quad \Delta l_T = \int_l \frac{N_T \bar{D}_I + M_T \bar{D}_S}{\bar{D}_A \bar{D}_I - \bar{D}_S^2} dx.\end{aligned}$$

Матрица податливости системы  $\mathbf{B}_S = \text{diag}[\mathbf{B}_{S_1} \dots \mathbf{B}_{S_n}]$  сформирована из матриц податливости гибридных стержней при учете сдвигов

$$\mathbf{B}_{Sj} = \begin{vmatrix} \int_l \frac{D_I}{D} dx & \int_l \frac{(1-l)D_S}{lD} dx & \int_l \frac{x D_S}{lD} dx \\ \int_l \frac{(1-\bar{x})D_S}{D} dx & \int_l \left[ \frac{(1-l)^2 D_A}{l^2 D} + \frac{1}{l^2 D_Q} \right] dx & \int_l \left[ \frac{(1-l)l D_A}{l^2 D} - \frac{1}{l^2 D_Q} \right] dx \\ \int_l \frac{\bar{x} D_S}{D} dx & \int_l \left[ \frac{(1-l)l D_A}{l^2 D} - \frac{1}{l^2 D_Q} \right] dx & \int_l \left[ \frac{x^2 D_A}{l^2 D} + \frac{1}{l^2 D_Q} \right] dx \end{vmatrix} \quad (29)$$

Здесь  $D = D_I D_A - D_S^2$  – инвариант жесткостных характеристик при параллельном переносе осей. Аналогично (29) определяется и матрица вязкости  $\mathbf{B}_V = \text{diag}[\mathbf{B}_{V_1} \dots \mathbf{B}_{V_n}]$  – при замене одноименных характеристик жесткости  $D$  на характеристики вязкости  $V$ .

Окончательно для гибридной стержневой системы разрешающее матричное уравнение в перемещениях может быть представлено в традиционной форме

$$\mathbf{M}_W \ddot{\mathbf{W}}(t) + \mathbf{R}_V \dot{\mathbf{W}}(t) + \mathbf{R}_W \mathbf{W}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_0, \quad (30)$$

$$\mathbf{R}_W = \mathbf{A}_S \mathbf{B}_S^{-1} \mathbf{A}_W, \quad \mathbf{R}_V = \mathbf{A}_S \mathbf{B}_V^{-1} \mathbf{A}_W, \quad \mathbf{F}_0 = -\mathbf{A}_S \mathbf{B}_S^{-1} \tilde{\mathbf{L}},$$

где  $\mathbf{R}_W$ ,  $\mathbf{R}_V$ ,  $\mathbf{M}_W$  – матрицы жесткости, вязкого сопротивления и инерции. Вектор искомого решения следует подчинить начальным условиям  $\mathbf{W}(0) = 0$ ,  $\dot{\mathbf{W}}(0) = 0$ .

Формулировка (30) позволяет использовать известные методы решения задач динамики, в том числе – методы Ньюмарка, Вильсона и другие.

### РЕЗЮМЕ

Рассматривается решение на основе метода Бубнова-Галеркина начально-краевой задачи динамического расчета гибридного вязкоупругого стержня. При учете осредненного сдвига и взаимодействия с внешней средой сформулированы основные группы уравнений: движения, физические и кинематические соотношения. Методом Фурье на основе использования заданных координатных функций задача сведена к системе матричных уравнений для вектор-функций времени, отражающих изменение перемещений и углов поворота. Сформированы матричные уравнения динамики гибридных стержневых систем.

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ проект 14-01-00102.*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дерибас А.А. Физика упрочнения и сварки взрывом. – Новосибирск: Наука, 1980. – 218 с.
2. Конюшков Г.В., Мусин Р.А. Специальные методы сварки давлением. – Гарант Ай Пи Эр Медиа, 2009. – 632 с.
3. Немировский Ю.В., Мищенко А.В., Вохмянин И.Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем: Монография. – Новосибирск: НГАСУ, 2004. – 488 с.
4. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамический расчет многослойных стержней переменного сечения // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Сб. научн. трудов, Саратов: СГТУ, 2010. – с. 96–104.
5. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамика слоистых рам из разносопротивляющихся материалов // Известия вузов. Строительство, 2011. – № 11. – с. 10–19.

### SUMMARY

*The decision of the initial-boundary dynamic problem of the composite visco-elastic rod by Bubnov-Galerkin method is suggested. The basic dynamic system equations (motion, kinematic and physical equations) is obtain taking into account of the average shear deformation and external medium interaction. By Furie ' method the problem is transform to decision of the matrix equations for the vector time-functions represented the displacement. The basic coordinate functions is used in this method. The matrix system equations is receive for the composite rods system.*

**E-mail:** [mavr@hnet.ru](mailto:mavr@hnet.ru)  
[nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)

Поступила в редакцию 25.09.2014

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА

д.ф.-м.н. **Гурьянов Н.Г.**, к.ф.-м.н. **Тюленева О.Н.**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань*

Уравнения трехмерной теории упругости в цилиндрической системе координат как относительно перемещений, так и относительно напряжений опубликованы в известных монографиях. Наиболее компактная форма их записи приведена в монографиях [1], [2]. Аналогичные уравнения задачи термоупругости, построенные с использованием соотношений Дюгамеля-Неймана приведены в монографии [3]. Все они обладают одним недостатком – не позволяют получить интегрируемые комбинации, что до последнего времени приводило к непреодолимым трудностям в их решении. В монографии [4] эту проблему для уравнений теории упругости удалось решить, введя дополнительное уравнение относительно объемной деформации. Хотя это уравнение записано и проинтегрировано уже в работе [1], однако его не удалось использовать при решении всей системы разрешающих уравнений.

Целью представленной работы является построение наиболее удобной для интегрирования системы уравнений термоупругости, и их решение.

В качестве исходных выберем уравнения из монографии [3]

$$\begin{aligned} \Delta w + \frac{R}{(1-2\nu)} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - 2(1+\nu)\alpha_T \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial \gamma} \right] + \frac{2(1+\nu)R^2}{E} Z &= 0, \\ \left( \Delta - \frac{1}{\alpha^2} \right) u + \frac{R}{(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - 2(1+\nu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right] - \frac{2}{\alpha^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{2(1+\nu)R^2}{E} X &= 0, \\ \left( \Delta - \frac{1}{\alpha^2} \right) v + \frac{R}{(1-2\nu)} \left[ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - 2(1+\nu)\alpha_T \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \beta} \right] + \frac{2}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{2(1+\nu)R^2}{E} Y &= 0, \\ \theta &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha} u + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  – цилиндрические координаты (первая отнесена к радиусу цилиндра  $R$ , третья – к его высоте  $H$ ),  $u, v, w$  – перемещения вдоль координаты  $\alpha$ , второе – в окружном, третье вдоль  $\gamma$ ,  $T$  – температура тела,  $\alpha_T$  – температурный коэффициент линейного расширения,  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона,  $\theta$  – объемная деформация,  $\{X, Y, Z\}$  – компоненты вектора массовых сил,  $\varepsilon = \frac{H}{R}$ ,

$$\Delta \equiv \nabla^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}. \quad (2)$$

Действуя на первое уравнение системы (1) оператором  $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \gamma}(\ )$ , на второе уравнение оператором  $\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\ )$ , на третье уравнение – оператором  $\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta}(\ )$ , и суммируя полученные уравнения, после достаточно громоздких вычислений приходим к уравнению

$$\left(1 + \frac{1}{(1-2\nu)}\right)\Delta\theta - \frac{2(1+\nu)\alpha_T}{(1-2\nu)}\Delta T + \frac{2(1+\nu)R}{E}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha X) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial Y}{\partial\beta} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Z}{\partial\gamma}\right] = 0.$$

Принимая уравнение теплопроводности в виде

$$\Delta T = 0, \quad (3)$$

при отсутствии массовых сил получаем уравнение  $\Delta\theta = 0$ .

Заменяем последнее уравнение системы (1) только что полученным и добавляем к системе уравнение теплопроводности. Считая массовые силы равными нулю, приходим к системе разрешающих уравнений

$$\begin{aligned} \Delta T = 0, \quad \Delta\theta = 0, \\ \Delta w + \frac{R}{(1-2\nu)}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma} - 2(1+\nu)\alpha_T\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial\gamma}\right] = 0, \\ \left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)u + \frac{R}{(1-2\nu)}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - 2(1+\nu)\alpha_T\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right] - \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0, \\ \left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)v + \frac{R}{(1-2\nu)}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - 2(1+\nu)\alpha_T\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right] + \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial\beta} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

позволяющая ее интегрировать.

Из первых трех уравнений определяются температура, объемная деформация, и перемещение  $w$ . Процедуру интегрирования последних двух уравнений изложим ниже.

Однако порядок системы (4) выше порядка исходной системы, поскольку при построении уравнения  $\Delta\theta = 0$  проводилось дополнительное дифференцирование. Это приводит к увеличению числа постоянных интегрирования и нехватке граничных условий для определения их значений.

В монографии [4] доказано, что выполнение условия

$$\theta = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha}u + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right) \quad (5)$$

устраняет этот недостаток, то есть полностью решает проблему.

Переходя к построению точного решения системы уравнений (4), рассматриваем вначале частный случай, когда искомые функции линейны относительно координаты  $\gamma$ . Он встречается при расчете цилиндрических резервуаров, заполненных жидкостью.

Периодическое по  $\beta$  решение ищется в виде

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = [T_{1n}(\alpha) + T_{2n}(\alpha)\gamma]\cos(n\beta), \quad (6)$$

где  $n$  –любое число. Тогда при сделанных предположениях относительно коэффициентов получаем уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{n^2}{\alpha^2}\right)T_{mn} = 0, \quad (m=1; 2). \quad (7)$$

*Замечание.* Возможно представление функции  $T$  как нечетной на интервале  $(-\pi, \pi)$ , тогда в (6) вместо косинуса следует поставить синус. Допустима и комбинация функций косинуса и синуса. Решение в этих случаях практически не отличается от того, которое будет получено ниже для варианта (6).



Нетрудно проверить, что решением уравнений (7) являются функции

$$\begin{aligned} T_{10}(\alpha) &= B_{10}^1 + B_{10}^2 \ln \alpha, & T_{20}(\alpha) &= B_{20}^1 + B_{20}^2 \ln \alpha, \\ T_{1n}(\alpha) &= B_{1n}^1 \alpha^n + B_{1n}^2 \alpha^{-n}, & T_{2n}(\alpha) &= B_{2n}^1 \alpha^n + B_{2n}^2 \alpha^{-n}, \quad (n > 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку уравнение относительно объемной деформации не отличается от уравнения теплопроводности, при тех же допущениях его решение

$$\begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= [\theta_{1n}(\alpha) + \theta_{2n}(\alpha)\gamma] \cos(n\beta), \\ \theta_{10}(\alpha) &= A_{10}^1 + A_{10}^2 \ln \alpha, & \theta_{20}(\alpha) &= A_{20}^1 + A_{20}^2 \ln \alpha, \\ \theta_{1n}(\alpha) &= A_{1n}^1 \alpha^n + A_{1n}^2 \alpha^{-n}, & \theta_{2n}(\alpha) &= A_{2n}^1 \alpha^n + A_{2n}^2 \alpha^{-n}, \quad (n > 0), \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $A_{mn}^k, B_{mn}^k$  – постоянные интегрирования.

В результате представления решения третьего уравнения системы (4) в виде

$$w(\alpha, \beta, \gamma) = [w_{1n}(\alpha) + w_{2n}(\alpha)\gamma] \cos(n\beta), \quad (10)$$

после подстановки в него соотношений (6), (8), (9) оно распадается на две группы уравнений.

Для  $n = 0$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) w_{10} + \frac{R}{(1-2\nu)\varepsilon} (L_{20}^1 + L_{20}^2 \ln \alpha) = 0, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) w_{20} = 0, \quad (11)$$

и для  $n > 0$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) w_{1n} + \frac{R}{(1-2\nu)\varepsilon} (L_{2n}^1 \alpha^n + L_{2n}^2 \alpha^{-n}) &= 0, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) w_{2n} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$L_{mn}^k = A_{mn}^k - 2(1+\nu)\alpha_T B_{mn}^k. \quad (13)$$

После их интегрирования получаем

$$\begin{aligned} w_{10}(\alpha) &= -\frac{R}{(1-2\nu)\varepsilon} \left[ C_{10}^1 + C_{10}^2 \ln \alpha + \frac{1}{4} L_{20}^1 \alpha^2 + L_{20}^2 \frac{\alpha^2}{4} (\ln \alpha - 1) \right], \\ w_{20}(\alpha) &= -\frac{R}{(1-2\nu)\varepsilon} (C_{20}^1 + C_{20}^2 \ln \alpha), \\ w_{11} &= -\frac{R}{(1-2\nu)\varepsilon} \left\{ C_{11}^1 \alpha + C_{11}^2 \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{8} L_{21}^1 \alpha^3 + \frac{1}{2} L_{21}^2 \alpha \ln \alpha \right\}, \\ w_{21} &= -\frac{R}{(1-2\nu)\varepsilon} \left( C_{21}^1 \alpha + C_{21}^2 \frac{1}{\alpha} \right), \\ w_{1n} &= -\frac{R}{4(1-2\nu)\varepsilon} \left[ C_{1n}^1 \alpha^n + C_{1n}^2 \alpha^{-n} + \frac{1}{(n+1)} L_{2n}^1 \alpha^{n+2} - \frac{1}{(n-1)} L_{2n}^2 \alpha^{-n+2} \right], \\ w_{2n} &= -\frac{R}{(1-2\nu)\varepsilon} (C_{2n}^1 \alpha^n + C_{2n}^2 \alpha^{-n}). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $C_{mn}^k$  – постоянные интегрирования.

Решение последних двух уравнений системы (4) ищется в виде

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta, \gamma) &= u_n(\alpha, \gamma) \cos(n\beta), & v(\alpha, \beta, \gamma) &= v_n(\alpha, \gamma) \sin(n\beta), \\ u_n(\alpha, \gamma) &= u_{1n}(\alpha) + u_{2n}(\alpha) \gamma, & v_n(\alpha, \gamma) &= v_{1n}(\alpha) + v_{2n}(\alpha) \gamma. \end{aligned} \quad (15)$$

В случае осесимметричной деформации цилиндра ( $n=0$ ) перемещение  $v \equiv 0$ , и последнее уравнение системы (4) выполняется тождественно, а четвертое записывается следующим образом

$$\left( \Delta - \frac{1}{\alpha^2} \right) u_0 + \frac{R}{(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial \theta_0}{\partial \alpha} - 2(1+\nu) \alpha_r \frac{\partial T_0}{\partial \alpha} \right] = 0.$$

Оно приводит к паре уравнений, их решением являются функции

$$\begin{aligned} u_{10} &= -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left[ D_{10}^1 \alpha + D_{10}^2 \frac{1}{\alpha} + L_{10}^2 \alpha \ln \alpha \right], \\ u_{20} &= -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left[ D_{20}^1 \alpha + D_{20}^2 \frac{1}{\alpha} + L_{20}^2 \alpha \ln \alpha \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Суммируя два последних уравнения системы (4) при  $n > 0$  после подстановки соотношений (13) и (15) и вычитая из первого второе, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{n^2 + 2n + 1}{\alpha^2} \right) (u_{1n} + v_{1n}) &= \frac{2nR}{(1-2\nu)} L_{1n}^2 \alpha^{-(n+1)}, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{n^2 + 2n + 1}{\alpha^2} \right) (u_{2n} + v_{2n}) &= \frac{2nR}{(1-2\nu)} L_{2n}^2 \alpha^{-(n+1)}, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{n^2 - 2n + 1}{\alpha^2} \right) (u_{1n} - v_{1n}) &= -\frac{2nR}{(1-2\nu)} L_{1n}^1 \alpha^{(n-1)}, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{n^2 - 2n + 1}{\alpha^2} \right) (u_{2n} - v_{2n}) &= -\frac{2nR}{(1-2\nu)} L_{2n}^1 \alpha^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Их решение при  $n=1$

$$\begin{aligned} u_{11} + v_{11} &= -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left[ D_{11}^1 \alpha^2 + D_{11}^2 \alpha^{-2} + L_{11}^2 \right], \\ u_{21} + v_{21} &= -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left[ D_{21}^1 \alpha^2 + D_{21}^2 \alpha^{-2} + L_{21}^2 \right], \\ u_{11} - v_{11} &= -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left\{ D_{31}^1 + D_{31}^2 \ln \alpha + L_{11}^1 \alpha^2 \right\}, \\ u_{21} - v_{21} &= -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left\{ D_{41}^1 + D_{41}^2 \ln \alpha + L_{21}^1 \alpha^2 \right\}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} u_{11} &= -\frac{R}{4(1-2\nu)} \left[ (D_{11}^1 + L_{11}^1) \alpha^2 + D_{31}^1 + L_{11}^2 + D_{11}^2 \alpha^{-2} + D_{31}^2 \ln \alpha \right], \\ v_{11} &= -\frac{R}{4(1-2\nu)} \left[ (D_{11}^1 - L_{11}^1) \alpha^2 - D_{31}^1 + L_{11}^2 + D_{11}^2 \alpha^{-2} - D_{31}^2 \ln \alpha \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$u_{21} = -\frac{R}{4(1-2\nu)} \left[ (D_{21}^1 + L_{21}^1) \alpha^2 + L_{21}^2 + D_{41}^1 + D_{21}^2 \alpha^{-2} + D_{41}^2 \ln \alpha \right],$$

$$v_{21} = -\frac{R}{4(1-2\nu)} \left[ (D_{21}^1 - L_{21}^1) \alpha^2 + L_{21}^2 - D_{41}^1 + D_{21}^2 \alpha^{-2} - D_{41}^2 \ln \alpha \right],$$

Решением системы (17) в случае  $n > 1$  являются

$$u_{1n} + v_{1n} = -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left[ D_{1n}^1 \alpha^{(n+1)} + D_{1n}^2 \alpha^{-(n+1)} + L_{1n}^2 \alpha^{-(n-1)} \right],$$

$$u_{2n} + v_{2n} = -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left[ D_{2n}^1 \alpha^{(n+1)} + D_{2n}^2 \alpha^{-(n+1)} + L_{2n}^2 \alpha^{-(n-1)} \right],$$

$$u_{1n} - v_{1n} = -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left[ D_{3n}^1 \alpha^{(n-1)} + D_{3n}^2 \alpha^{-(n-1)} + L_{1n}^1 \alpha^{(n+1)} \right],$$

$$u_{2n} - v_{2n} = -\frac{R}{2(1-2\nu)} \left[ D_{4n}^1 \alpha^{(n-1)} + D_{4n}^2 \alpha^{-(n-1)} + L_{2n}^1 \alpha^{(n+1)} \right].$$

Тогда

$$u_{1n} = -\frac{R}{4(1-2\nu)} \left[ (D_{1n}^1 + L_{1n}^1) \alpha^{(n+1)} + (L_{1n}^2 + D_{3n}^2) \alpha^{-(n-1)} + D_{1n}^2 \alpha^{-(n+1)} + D_{3n}^1 \alpha^{(n-1)} \right],$$

(19)

$$v_{1n} = -\frac{R}{4(1-2\nu)} \left[ (D_{1n}^1 - L_{1n}^1) \alpha^{(n+1)} + (L_{1n}^2 - D_{3n}^2) \alpha^{-(n-1)} + D_{1n}^2 \alpha^{-(n+1)} - D_{3n}^1 \alpha^{(n-1)} \right],$$

$$u_{2n} = -\frac{R}{4(1-2\nu)} \left[ (D_{2n}^1 + L_{2n}^1) \alpha^{(n+1)} + (L_{2n}^2 + D_{4n}^2) \alpha^{-(n-1)} + D_{2n}^2 \alpha^{-(n+1)} + D_{4n}^1 \alpha^{(n-1)} \right],$$

$$v_{2n} = -\frac{R}{4(1-2\nu)} \left[ (D_{2n}^1 - L_{2n}^1) \alpha^{(n+1)} + (L_{2n}^2 - D_{4n}^2) \alpha^{-(n-1)} + D_{2n}^2 \alpha^{-(n+1)} - D_{4n}^1 \alpha^{(n-1)} \right].$$

Здесь  $D_{mn}^k$  – постоянные интегрирования.

В результате выполнения условия (5) получаем

$$A_{10}^1 = -\frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \left\{ 2(1-\nu)D_{10}^1 + \frac{[4(1-\nu)C_{20}^1 - C_{20}^2]}{2\varepsilon^2} - (1+\nu)(1-2\nu)\alpha_T B_{10}^2 \right\},$$

$$A_{10}^2 = -\frac{1}{(1-\nu)} \left[ \frac{1}{2\varepsilon^2} C_{20}^2 - (1+\nu)\alpha_T B_{10}^2 \right], \quad A_{20}^2 = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T B_{20}^2,$$

$$A_{20}^1 = \frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \left\{ 2(1-\nu)D_{20}^1 + (1+\nu)(1-2\nu)\alpha_T B_{20}^2 \right\},$$

$$A_{11}^1 = \frac{2}{(3-4\nu)} \left[ (1+\nu)\alpha_T B_{11}^1 - \frac{1}{\varepsilon^2} C_{21}^1 - D_{11}^1 \right],$$

$$A_{11}^2 = \frac{1}{2(3-4\nu)} \left[ 4(1+\nu)\alpha_T B_{11}^2 - D_{31}^2 - \frac{4}{\varepsilon^2} C_{21}^2 \right],$$

(20)

$$A_{21}^1 = \frac{2}{(3-4\nu)} \left[ (1+\nu)\alpha_T B_{21}^1 - D_{21}^1 \right], \quad A_{21}^2 = \frac{1}{2(3-4\nu)} \left[ 4(1+\nu)\alpha_T B_{21}^2 - D_{41}^2 \right],$$

$$A_{1n}^1 = \frac{1}{(3-4\nu)} \left[ -(n+1)D_{1n}^1 + 2(1+\nu)\alpha_T B_{1n}^1 - \frac{2}{\varepsilon^2} C_{2n}^1 \right],$$

$$A_{1n}^2 = \frac{1}{(3-4\nu)} \left[ 2(1+\nu)\alpha_T B_{1n}^2 + (n-1)D_{3n}^1 - \frac{2}{\varepsilon^2} C_{2n}^2 \right],$$

$$A_{2n}^1 = \frac{1}{(3-4\nu)} \left[ 2(1+\nu)\alpha_T B_{2n}^1 - (n+1)D_{2n}^1 \right],$$

$$A_{2n}^2 = \frac{1}{(3-4\nu)} \left[ (n-1)D_{4n}^2 + 2(1+\nu)\alpha_T B_{2n}^2 \right].$$

В качестве примера рассмотрим цилиндрический резервуар, заполненный жидкостью. Его верхний ( $\gamma=1$ ) и нижний ( $\gamma=0$ ) торцы жестко защемлены. Оба торца и внутренняя боковая поверхность  $\alpha=r$  теплоизолированы, внешняя боковая поверхность  $\alpha=R$  нагревается температурой  $T(1, \beta, \gamma) = \Theta_0 + \Theta_1 \cos \beta$ , причем  $\Theta_0, \Theta_1$  – постоянные.

Краевые условия задачи термоупругости принимаются следующие

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}(t, \beta, \gamma) &= \rho H(1-\gamma), \\ w(1, \beta, 0) &= 0, \quad u(1, \beta, 0) = 0, \quad v(1, \beta, 0) = 0, \\ w(t, \beta, 0) &= 0, \quad v(t, \beta, 0) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$w(1, \beta, 1) = 0, \quad w(t, \beta, 1) = 0, \quad u(1, \beta, 1) = 0, \quad v(1, \beta, 1) = 0, \quad v(t, \beta, 1) = 0,$$

причем напряжение определяется из соотношений Дюгамеля-Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu\theta - (1+\nu)\alpha_T T \right\}, \\ \sigma_{\gamma\gamma} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{R\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \nu\theta - (1+\nu)\alpha_T T \right\}, \\ \sigma_{\alpha\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)R} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right), \quad \sigma_{\beta\gamma} = \frac{E}{2(1+\nu)R} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \gamma} \right), \end{aligned}$$

$r$  – радиус внутренней поверхности цилиндра  $\left( t = \frac{r}{R} \right)$ ,  $\rho$  – плотность заполняющей резервуар жидкости.

Вычисления проводились для следующих параметров задачи

$$\begin{aligned} R &= 10 \text{ м}, \quad r = 9.95 \text{ м}, \quad H = 30 \text{ м}, \quad E = 7.4 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.34, \\ \rho &= 0.75 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \alpha_T = 23 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad \Theta_0 = 60^0 \text{ C}, \quad \Theta_1 = 25^0 \text{ C}. \end{aligned}$$

Перемещения  $v$ ,  $w$  пренебрежимо малы, как и смещение  $u$  точек наружной боковой поверхности. Перемещения  $u$  точек внутренней боковой поверхности практически не меняются по высоте и не превышают 0.004 толщины стенки резервуара.

Максимальное напряжение  $\frac{\sigma_{\gamma\gamma}}{E} = 0.003$  возникает в окрестности боковых поверхностей и практически не меняется по высоте резервуара. Остальные напряжения значительно меньше. Без учета влияния температуры качественная картина та же, но максимальные напряжения на 1-2 порядка меньше.

## РЕЗЮМЕ

В работе получено уравнение относительно объемной деформации с учетом температурных членов, представлены интегрируемые комбинации уравнений термоупругости в перемещениях. Построены точные решения уравнений трехмерной задачи термоупругости в предположении линейной зависимости температуры и перемещений вдоль оси цилиндра. Рассмотрен пример.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости – М., Высшая школа – 1966 – 227 с.
2. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости – М., Наука – 1981 – 687 с.
3. Коваленко А.Д. Избранные труды – Киев, Наукова думка – 1976 – 762 с.
4. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра – Казань, Изд-во Казанского университета – 2008 – 207с.

## SUMMARY

*Equation of relatively irrotational deformation with consideration of temperature members was obtained, integrable combinations of thermoelasticity equations in translation are presented in the study. Exact solutions of equations of three-dimensional thermoelasticity problem are developed under the assumption of linear dependence of temperature and translations along cylinder axis. An example is considered.*

**E-mail:** [tdv.ton@mail.ru](mailto:tdv.ton@mail.ru)

Поступила в редакцию 11.10.2014

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МЕТОДА СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

д.т.н. **Одинокова О.А.**

*УО « Тихоокеанский государственный университет », Хабаровск, Россия*

Сведения о свойствах пластмасс и материалов на их основе содержатся в многочисленных источниках. Сопоставить же эти свойства бывает затруднительно, так как различные авторы при исследовании физико-механических свойств полимерных материалов для проведения аналогичных испытаний пользуются самой различной испытательной и измерительной аппаратурой. Зачастую такая аппаратура изготавливается усилиями самих исследователей в единственном экземпляре. К тому же свойства полимерных изделий изменяются с течением времени и весьма разнообразны даже в том случае, если они изготовлены из материала одной партии.

Знание как общих закономерностей механического поведения пластмасс, так и конкретных свойств определенной партии полимерного материала является насущной необходимостью для технологов и конструкторов, работающих в различных областях народного хозяйства. Разноречивые же сведения о свойствах полимерных материалов сдерживают их применение, несмотря на явные достоинства конструкций с использованием пластмасс (малый вес при достаточно высокой несущей способности и жесткости).

В этом смысле ГОСТы на испытания пластмасс призваны сыграть важную роль, вводя единые требования на методы испытаний. Но, к сожалению, действующие ГОСТы не отвечают современным научным представлениям о высокополимерах и поэтому несут в себе элемент формальности.

С одной стороны, свойства пластмасс целесообразно рассматривать в сравнении со свойствами традиционных конструкционных материалов. Такой подход позволяет использовать опыт длительной инженерной практики. С другой стороны, машины и аппаратура, предназначенные для испытания пластмасс, имеют свои особенности, связанные с присущими только высокополимерам свойствами.

Всестороннее научное исследование физико-механических свойств полимерных материалов немислимо без создания новых эффективных приборов и оборудования не только для фундаментальных исследований, но и для взятия пробы на "текущие" свойства используемой партии полимерного материала. Условия испытаний должны быть продиктованы условиями изготовления и эксплуатации готовых изделий.

Существенное влияние факторов внешней среды, конкретных условий нагружения, а также технологии изготовления должны быть учтены при определении таких свойств полимера, как долговечность и время старения. На основе строго количественных экспериментальных данных с использованием методов оценки надежности должен быть рассчитан гарантированный срок службы полимерного изделия.

Для правильного понимания явления ползучести в пластмассах испытания при сжатии не менее важны, чем при растяжении.

Необходимость проведения сравнительного анализа механических свойств полимерных материалов при растяжении и сжатии, особенно в области малых (до  $\varepsilon = 1-1,5 \%$ ) деформаций, ограниченных применением линейной суперпозиции, требует очень тщательной постановки эксперимента. Чтобы получить результаты требуемой

точности, необходимо создать одинаковые условия при проведении механических испытаний на растяжение и сжатие.

### *Реверсор для испытаний материалов на растяжение-сжатие*

Испытание одного образца на различных испытательных установках при растяжении и сжатии не устраняет погрешностей сопоставляемых результатов эксперимента.

Применение реверсивного устройства позволяет повысить надежность результатов сравнительных испытаний при растяжении и сжатии. Известный реверсор преобразует усилие растяжения в усилие сжатия, позволяет испытывать один образец на растяжной машине, но остается необходимость переустановки и образца, и измерительной аппаратуры, что вызывает дополнительные напряжения в весьма чувствительных полимерных образцах и не снимает погрешностей сравнительных испытаний.

В настоящей работе был принят метод реверсирования нагрузки, достоинствами которого являются:

- возможность применения одного и того же образца для испытаний на растяжение и на сжатие;

- использование для этой цели одной испытательной машины осевого нагружения.

На основе этого метода была достигнута полная идентичность в опытах на ползучесть при растяжении и сжатии. Было разработано переключаемое реверсивное устройство, которое обладает рядом преимуществ по сравнению с ранее применяемыми:

- оно позволяет исследовать деформационные свойства при растяжении и сжатии на одном и том же образце в любой последовательности и без переустановок испытываемого образца и контрольно-измерительных приборов. Этим самым обеспечиваются одинаковые условия при работе образца на растяжение и сжатие, что дает надежные результаты для сопоставления механического поведения образца при указанных видах деформирования;

- при изменении режима работы реверсора, образец не испытывает дополнительных усилий, неблагоприятно сказывающихся на последующих испытаниях, так как у полимеров ярко выражено явление упругого последействия;

- отпадает необходимость в переустановке измерительной аппаратуры, что дает возможность сохранить постоянство мерной базы образца при его растяжении и сжатии;

- в качестве дополнения к любой растяжной машине реверсор позволяет осуществлять довольно сложную программу экспериментального исследования самых различных материалов, так как стало возможным производить смену режимов испытания при растяжении и сжатии без снятия нагрузки;

- использование переключаемого реверсора сокращает время проведения эксперимента, связанное с подготовкой оборудования;

- применение сравнительно простого и дешевого реверсора в значительной степени расширяет возможности имеющихся в любой лаборатории прессов и растяжных машин без каких-либо дополнительных переделок.

На рисунке 1 схематически изображен в разрезе общий вид переключаемого реверсора для испытания на растяжение-сжатие, работающего в режиме растяжения [1].

Направление усилия, прикладываемого к реверсору, и направление перемещения всех движущихся элементов растяжной машины и реверсора остается без изменения как при растяжении, так и при сжатии. Таким образом, создаются совершенно идентичные условия для испытания образца в условиях осевого растяжения и сжатия.

Смена режимов испытания на универсальном реверсоре при действующем усилии происходит за 15-18 сек, а при отсутствии нагрузки - за 10-12 сек. Вес нижней рамки реверсора компенсируется противовесами. Многочисленные испытания свидетельствуют о надежной работе реверсора и стабильных показаниях контрольно-измерительных приборов.

Перестройка реверсора с режима растяжения на режим сжатия производится свободно, без затруднений и нарушения положения образца и измерительных приборов.

Переключаемый реверсор предназначен для сравнительного экспериментального исследования деформационных свойств при растяжении и сжатии полимерных материалов, однако, возможность использования его для испытаний самых различных материалов на растяжение и на сжатие очевидна.

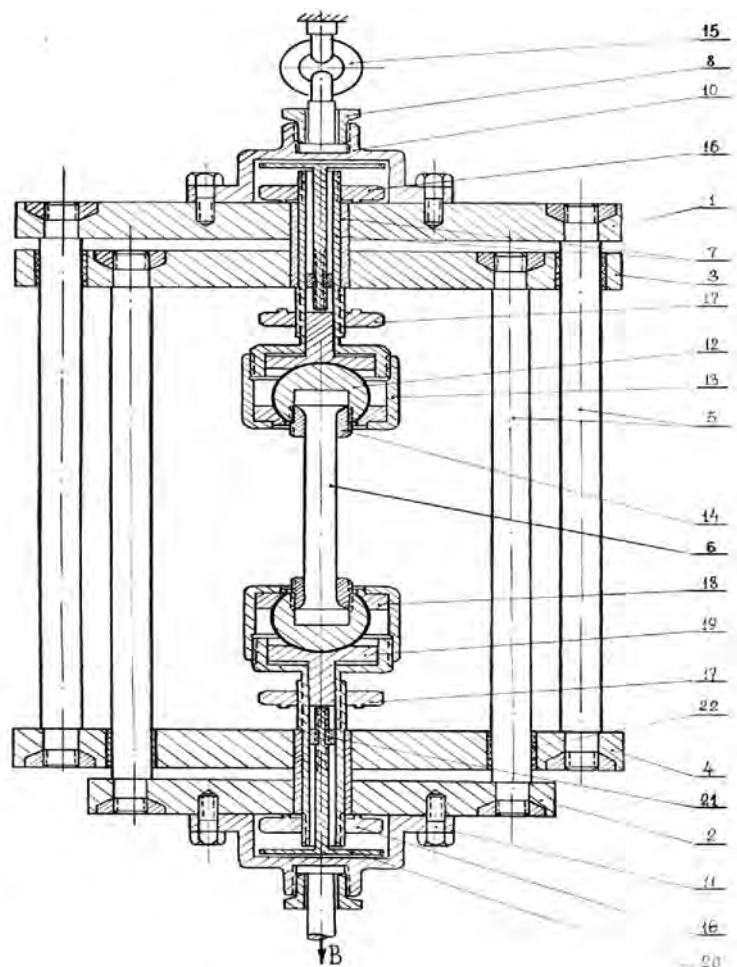


Рисунок 1.- Переключаемый реверсор для испытаний материалов на растяжение - сжатие

### ***Реверсор для комплексных испытаний материалов***

Данное реверсивное устройство для комплексных испытаний материалов дает возможность испытывать в режиме ползучести, релаксации и статического нагружения один образец при растяжении, сжатии, а также при кручении, кручении с растяжением или сжатием, знакопеременном кручении в любой последовательности без переустановки образца и измерительной аппаратуры [2].

Таким образом, представляемая конструкция значительно расширяет возможности реверсора.

Этот реверсор также дополняет любую машину осевого нагружения, усилие от которой может оставаться постоянным по величине и направлению при любой смене режимов испытания. Дополнительной мощности реверсор не требует, с помощью



переключателей он изменяет характер и направление усилия от испытательной машины при передаче его на образец. Реверсор значительно расширяет возможности нагружающих устройств осевого действия без каких-либо дополнительных переделок, сокращает время проведения испытаний.

На рисунке 2 представлена принципиальная схема реверсора для комплексных испытаний материалов.

Все виды нагружения могут производиться в любой последовательности, при этом усилии на внешних траверсах реверсора не меняет ни величины, ни направления.

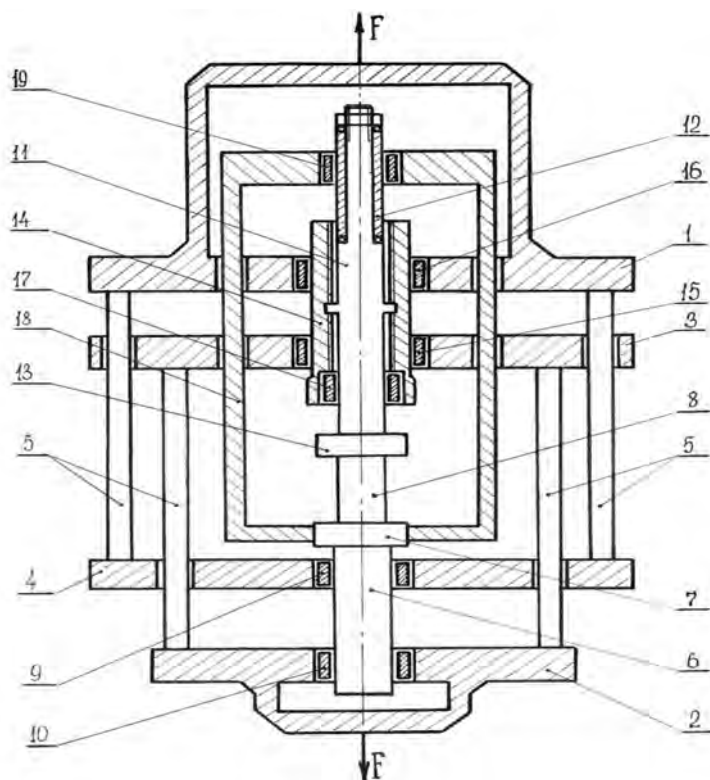


Рисунок 2.- Реверсор для комплексных испытаний материалов

### РЕЗЮМЕ

Статья содержит описание реверсоров, которые являются приспособлениями к любой испытательной машине осевого действия и позволяют испытывать один образец при растяжении, сжатии и кручении в любой последовательности в режимах статического нагружения, ползучести и релаксации. Реверсор снимает погрешности сопоставительных результатов эксперимента.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А.с. 356511 СССР, МКИ G 01 N 3/02. Универсальный реверсор для испытаний на растяжение-сжатие / О.А.Одиноква, В.В.Одиноков, П.В.Мелентьев (СССР). 1972. Бюл. №32. 3 с.
2. А.с. 842467 СССР, МКИ G01 N 3/08. Реверсор для испытания материалов / А.В.Одинокв, О.А.Одиноква (СССР). 1981. Бюл. № 24. 3 с.

### SUMMARY

*The article contains a description of the reversers, which are devices-mi to any testing machine axial action and allow testing of one sample under tension, compression and torsion in any sequence in static loading, creep and relaxation. Rev. removes error comparative experimental results.*

**E-mail:** [odi37@mail.ru](mailto:odi37@mail.ru)

Поступила в редакцию 17.10.2014

## ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИЛОГАРИФМАМИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КРУГА ПРИ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ВТОРОГО РОДА

д.ф.-м.н. Мелешко И.Н., д.ф.-м.н. Чигарев А.В., к.ф.-м.н. Ширвель П.И.

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Рассматривается вторая основная задача теории теплопроводности (задача Неймана) для уравнения Лапласа в единичном круге с центром в начале координат:

$$\Delta T = 0, \quad r < 1, \quad (1)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = \alpha T_0 f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $T=T(r,\theta)$  – температура;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $T_0$  – характерная температура, а  $f(\varphi)$  – известная функция. Направление нормали совпадает с направлением возрастания  $r$ .

В [1] с помощью методов теории аналитических функций и специальных формул для интеграла Шварца получено приближенное представление комплексного теплового потенциала задачи (1), (2), позволяющего определять приближенно все основные элементы теплового потока.

Основной физической величиной, характеризующей процесс теплопроводности, является температура. В данном случае с помощью интеграла Дини отдельно для функции температуры конструируется ее приближенное представление полилогарифмами.

Полученная в работе приближенная формула сравнительно проста, устойчива и позволяет оценивать погрешности вычислений.

### 1. Точное представление решения краевой задачи (1)-(2) интегралом Дини.

Представим граничное условие (2) в виде

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = \beta T_0 f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

где  $\beta = \frac{\alpha r}{\lambda} \Big|_{r=1}$  – коэффициент Био, и воспользуемся представлением решения задачи

Неймана для круга (см., например, [2]) интегралом Дини. Тогда точное решение краевой задачи (1), (2) запишется в виде

$$T(r, \varphi) = -T_0 \frac{\beta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln|t - z| d\tau + C, \quad t = e^{i\tau}; \quad z = re^{i\varphi}; \quad (3)$$

где  $C$  действительная произвольная постоянная.

*Примечание.* Если известно значение температуры в некоторой точке  $|z^*| \leq 1$ , то из (4) следует, что

$$C = T(z^*) + T_0 \frac{\beta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln|t - z^*| d\tau.$$

### 2. Приближенное решение краевой задачи (1), (2).

Приближенное решение краевой задачи будем конструировать на основе формулы (3). Вначале получим приближенную формулу для интеграла Дини в правой части формулы (3)

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln|t-z| d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau - \ln 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau \quad (4)$$

Зададим на отрезке  $[-\pi; \pi]$  систему точек

$$\varphi_k = kh, \quad k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}$$

и приблизим плотность  $f(\varphi)$  интеграла Дини на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi) \approx \tilde{f}(\varphi) = \sum_{-n}^n \Theta_k(\varphi) f(\varphi_k), \quad (5)$$

где

$$\Theta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in \left[ \varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]; \\ 0, & \varphi \notin \left[ \varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]. \end{cases}$$

Тогда, подставляя в представление (3) интеграла Дини вместо плотности ее приближение по формуле (5), получим приближенную формулу

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln|t-z| d\tau \approx \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \frac{h \ln 2}{\pi} \sum_{-n}^n f(\varphi_k), \quad (6)$$

где коэффициенты

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - h/2}^{\varphi_k + h/2} \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau. \quad (7)$$

*Теорема 1. Коэффициенты приближенной формулы (6)  $A_k(r, \varphi)$  неотрицательны, а для их вычисления имеет место формула*

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \left[ h \ln 2 + \operatorname{Im} \left( L^2 \left( z e^{-i(\varphi_k - h/2)} \right) - L^2 \left( z e^{-i(\varphi_k + h/2)} \right) \right) \right]. \quad (8)$$

где

$$L^2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}. \quad (\text{дилогарифм Эйлера}). \quad (9)$$

*Доказательство.* Так как  $\ln \frac{2}{|t-z|} > 0, r \neq 1$ , то из представления (7) для коэффициентов

$A_k(r, \varphi)$  следует, что все они неотрицательны для всех  $r$  и  $\varphi$  ( $r < 1; -\pi \leq \varphi \leq \pi$ ).

Далее

$$\begin{aligned} A_k(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - h/2}^{\varphi_k + h/2} \ln 2 d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - h/2}^{\varphi_k + h/2} \ln \frac{1}{|t-z|} d\tau = \frac{h \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - h/2}^{\varphi_k + h/2} \left( \sum_1^{\infty} \frac{r^k}{k} \cos k(\tau - \varphi) \right) d\tau = \frac{h \ln 2}{\pi} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \left( \frac{r^k}{k} \sin k(\tau - \varphi) \Big|_{\varphi_k - h/2}^{\varphi_k + h/2} \right) = \frac{h \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{r^k \sin k(\varphi - \varphi_k + h/2)}{k^2} - \frac{r^k \sin k(\varphi - \varphi_k - h/2)}{k^2} \right) = \\ &= \frac{h \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \sum_1^{\infty} \frac{z^k e^{-i(\varphi_k - h/2)}}{k^2} - \sum_1^{\infty} \frac{z^k e^{-i(\varphi_k + h/2)}}{k^2} \right]. \end{aligned}$$

Последнее равенство приводит к формуле (8).

*Примечание.* Ряды

$$L^S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^S}.$$

Определяют полилогарифмы порядка  $s$  – специальные функции, изученные в [4] (а также в [1]), где с помощью полилогарифмов найдены новые формулы для

приближенного вычисления интегралов типа Коши и решения некоторых краевых задач математической физики.

Полилогарифм второго порядка (9) принято называть дилогарифмом Эйлера [5].

Заменив интеграл Дини в правой части формулы (3) его приближением по формуле (6), найдем приближенное решение краевой задачи

$$T(r, \varphi) \approx \tilde{T}(r, \varphi) = T_0 \beta \left[ \frac{h \ln 2}{\pi} \sum_{-n}^n f(\varphi_k) - \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) \right] + C. \quad (10)$$

Теперь получим неравенства для оценки погрешности приближенной формулы (10).

*Теорема 2.* Пусть функция  $f(\varphi)$  в граничном условии (2) непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , тогда имеет место равномерная по  $r$  и  $\varphi$  ( $r \leq 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$ ) следующая оценка погрешности формулы (10):

$$|T(r, \varphi) - \tilde{T}(r, \varphi)| \leq 4T_0 \beta \omega(f; h) \ln 2, \quad (11)$$

где  $\omega(f; h)$  – модуль непрерывности функции  $f(\varphi)$ .

Если же  $f(\varphi)$  – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$|T(r, \varphi) - \tilde{T}(r, \varphi)| \leq 2M_1 T_0 \beta h \ln 2, \quad r \leq 1; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \quad M_1 = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f'(\varphi)|. \quad (12)$$

*Доказательство.* Очевидно, что

$$|T(r, \varphi) - \tilde{T}(r, \varphi)| = \frac{T_0 \beta}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(\tau) - \tilde{f}(\tau)] \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau - \ln 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\tau) - \tilde{f}(\tau)] d\tau \right|,$$

где функция  $\tilde{f}(\varphi)$  определена формулой (5). В силу положительности

$$\ln \frac{2}{|t-z|} \quad (z = r e^{i\varphi}; \quad t = e^{i\tau}; \quad r \leq 1)$$

$$|T(r, \varphi) - \tilde{T}(r, \varphi)| \leq \frac{T_0 \beta}{\pi} \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \left| \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau + \ln 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \right|.$$

Далее, так как

$$\ln \frac{2}{|t-z|} = -\operatorname{Re} \ln \left( 1 - \frac{t}{z} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{t} \right)^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k \cos k(\tau - \varphi)}{k},$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|t-z|} d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k(\tau - \varphi) d\tau = 0,$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$|T(r, \varphi) - \tilde{T}(r, \varphi)| \leq 4T_0 \beta \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \ln 2. \quad (13)$$

Если функция  $f(\varphi)$  непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \omega(f; h), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (14)$$

Если же  $f(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то легко установить с помощью формулы Тейлора, что

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \frac{M_1}{2} h, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (15)$$

Из неравенств (13)–(15) следуют неравенства (11), (12).

### 3. Пример.

В качестве примера рассмотрим стационарную тепловую задачу для единичного круга с граничным условием на окружности

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \alpha T_0 (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

В этом случае удается получить точное решение задачи

$$T(r, \varphi) = T_0 \beta \operatorname{Im} \left[ \left( z - \frac{1}{z} \right) \ln(1+z) \right], \quad (16)$$

где  $\ln(1+z)$  – ветвь логарифмической функции, принимающая на промежутке  $(-1;1)$  действительной оси действительные значения.

Результаты вычислений по точной (16) и приближенной (10) формулам при  $n=20$ ,  $n=50$  и  $n=100$  приведены в таблице. Для определенности положено  $T_0=1$ ;  $\beta=1$ .

Таблица – Изменение температуры в направлении возрастания  $r$  по точной и приближенной формулам

$r$	$T\left(r; \frac{\pi}{4}\right)$	$\tilde{T}_{20}\left(r; \frac{\pi}{4}\right)$	$\tilde{T}_{50}\left(r; \frac{\pi}{4}\right)$	$\tilde{T}_{100}\left(r; \frac{\pi}{4}\right)$
0.1	0.041846	0.041666	0.041816	0.041838
0.3	0.161401	0.160827	0.161306	0.161377
0.5	0.322505	0.321498	0.322340	0.322464
0.7	0.518788	0.517311	0.518545	0.518727
0.9	0.745141	0.743161	0.744816	0.745059

Численный эксперимент подтверждает эффективность и устойчивость приближенной формулы (10).

### РЕЗЮМЕ

В работе получено приближенное представление полилогарифмами решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге. Равномерные оценки погрешности приближенной формулы позволяют проводить вычисления с заданной точностью.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Мелешко И.Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения. – Мн.: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. – 197с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Пыхтеев Г.Н., Мелешко И.Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычислений. – Мн.: Изд-во БГУ, 1976. – 67 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т.1. – 294 с.

### SUMMARY

*Some results of approximate solution of heat conduction theory problem for circle are presented. It is obtained an approximate of the second main boundary problem of heat conduction theory (Neyman's problem) for Laplasse equation in an individual circle. A uniform estimation of approximate formula error makes it possible to conduct calculations with the given accuracy.*

**E-mail:** [Chigarev@rambler.ru](mailto:Chigarev@rambler.ru)

Поступила в редакцию 25.10.2014

## РАВНОНАПРЯЖЕННОЕ АРМИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНО ИЗГИБАЕМЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ ГИПОТЕЗАМ ТИМОШЕНКО

д.ф.-м.н. **Янковский А.П.**

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,  
Новосибирск*

При создании конструкций из композиционных элементов уже на этапе их проектирования целесообразно осуществлять оптимизацию, причем не только по геометрическим параметрам, но и по структуре армирования [1]. Одним из наиболее естественных прочностных критериев рационального армирования тонкостенных конструкций типа пластин и оболочек является требование равнонапряженности силовых элементов (волокон) вдоль их траекторий, так как при этом несущая способность арматуры используется наиболее полно (так называемая оптимизация по физическому критерию качества).

Достаточно подробный обзор публикаций, посвященных оптимальному проектированию тонкостенных элементов композитных конструкций, в том числе по проблеме равнонапряженного армирования (РА), приведен в монографиях [1–3 и др.]. Из этих обзоров следует, что подавляющая часть публикаций, посвященных проблеме РА, сводится к рассмотрению плоских задач теории упругости или безмоментных оболочек. Лишь незначительная часть публикаций посвящена задачам РА изгибаемых пластин. При этом изгиб РА-пластин исследуется исключительно в рамках гипотез Кирхгофа [2, 4, 5 и др.]. Однако известно, что в случаях использования высокомодульных армирующих волокон (боро-, углепластики, металло-полимерные композиции) при изгибе композитных пластин необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам [6, 7 и др.]. В рамках теории Кирхгофа этот учет невозможен, поэтому в таких случаях, как правило, используют теорию Тимошенко [6, 8, 9 и др.].

В связи с этим настоящая работа посвящена постановке задачи РА изгибаемых пластин в рамках гипотез Тимошенко, анализу и обсуждению особенностей ее решения.

Рассмотрим пластину постоянной толщины  $2h$ , подчиняющуюся гипотезам Тимошенко [6, 9]. Свяжем с пластиной декартову прямоугольную систему координат  $x_1, x_2, x_3$ . Отсчетную плоскость  $x_1x_2$  ( $x_3=0$ ) совместим со срединной плоскостью пластины, которая армирована  $N$  семействами волокон постоянного поперечного сечения в плоскостях, параллельных отсчетной плоскости. Армирование по толщине пластины (в направлении  $x_3$ ) предполагается квазиоднородным и регулярным. Пластина нагружена только в поперечном направлении  $x_3$  (напряжение в плоскости  $x_1x_2$  отсутствует), тепловое воздействие не учитывается. Прогибы считаются малыми.

При таких условиях нагружения и армирования пластины в ней реализуется случай поперечного изгиба (мембранные деформации и напряжения отсутствуют). Задача РА такой линейно-упругой конструкции описывается следующими уравнениями и соотношениями (используется модель полиармированного элемента из [10]): уравнениями равновесия [6, 8, 9]

$$\partial_1 M_{1i} + \partial_2 M_{i2} = F_{i3} \quad (i=1, 2), \quad \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23} = -p_3(x_1, x_2); \quad (1)$$

кинематическими соотношениями [6, 8, 10]

$$\varepsilon_{ii} = h^{-1} x_3 \partial_i u_i, \quad \varepsilon_{ij} = (2h)^{-1} x_3 (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad \varepsilon_{i3} = (\partial_i u_3 + u_i/h)/2, \quad j=3-i, \quad i=1, 2, \quad |x_3| \leq h; \quad (2)$$

определяющими уравнениями [2, 3, 9]

$$\sigma_{ii} = aEa_1(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}) + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki}^2, \quad \sigma_{ij} = aEa_2\varepsilon_{ij} + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki}l_{kj}, \quad (3)$$

$$\sigma_{i3} = a^{-1}Ea_2\varepsilon_{i3}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2;$$

$$\sigma_k = E_k(\varepsilon_{11}l_{k1}^2 + \varepsilon_{22}l_{k2}^2 + 2\varepsilon_{12}l_{k1}l_{k2}), \quad 1 \leq k \leq N; \quad (4)$$

условиями равнонапряженности арматуры [2–5]

$$\sigma_k(x_1, x_2, h) = \sigma_k^0 = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N; \quad (5)$$

условиями постоянства поперечных сечений волокон [2–5]

$$\partial_1(\omega_k l_{k1}) + \partial_2(\omega_k l_{k2}) = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (6)$$

где

$$M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad i, j = 1, 2; \quad (7)$$

$$a_1 = (1 - \nu^2)^{-1} = \text{const}, \quad a_2 = (1 + \nu)^{-1} = \text{const}, \quad l_{k1} = \cos \psi_k, \quad (8)$$

$$l_{k2} = \sin \psi_k \quad (1 \leq k \leq N), \quad a = 1 - \sum_k \omega_k;$$

$M_{ij}$ ,  $F_{i3}$  – моменты и поперечные силы в пластине;  $u_i(x_1, x_2)$  – тангенциальные перемещения точек на верхней лицевой поверхности пластины ( $x_3 = h$ ) в направлениях  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $u_3(x_1, x_2)$  – прогиб;  $p_3$  – распределенная поперечная нагрузка, действующая на пластину;  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – напряжения и деформации в композиции пластины;

$\sigma_k$  – напряжения в волокнах  $k$ -го семейства;  $\sigma_k^0$  – фиксированное значение напряжения в арматуре  $k$ -го семейства на верхней лицевой поверхности, обеспечивающее условие РА;  $\omega_k$ ,  $\psi_k$  – плотность и угол (отсчитываемый от направления  $x_1$ ) армирования волокнами  $k$ -го семейства, причем должны выполняться физические ограничения

$$0 \leq \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad 0 \leq \sum_k \omega_k \leq \omega_* < 1; \quad (9)$$

$\omega_*$  – предельно допустимая суммарная плотность армирования (на практике  $\omega_* \approx 0,7$ );  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего материала;  $E_k$  – модуль Юнга арматуры  $k$ -го семейства;  $\partial_i$  – оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ); суммирование производится по указанному индексу от 1 до  $N$ , если не указаны пределы.

Пусть область  $G$ , занимаемая пластиной в плане, ограничена контуром  $\Gamma$ , тогда на одной части этого контура (обозначим ее  $\Gamma_p$ ) могут быть заданы статические

$$M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + 2M_{12}n_1n_2 = M_m, \quad (M_{22} - M_{11})n_1n_2 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2) = M_\tau, \quad (10)$$

$$F_{13}n_1 + F_{23}n_2 = F_{n3}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p,$$

а на другой части контура (обозначим ее  $\Gamma_u$ ) – кинематические

$$u_i(\Gamma_u) = u_{i0}, \quad i = \overline{1, 3} \quad (11)$$

граничные условия. Здесь:  $n_1 = \cos \beta$ ,  $n_2 = \sin \beta$ ,  $\beta$  – угол, задающий направление внешней нормали к контуру  $\Gamma$ ;  $M_m$ ,  $M_\tau$  – изгибающий и крутящий моменты, заданные на  $\Gamma_p$ ;  $F_{n3}$  – заданная на контуре (кромке) поперечная сила;  $u_{i0}$  – заданные на контуре перемещения. (Условия (11) могут быть заданы и на всем контуре  $\Gamma$ ; кроме того, возможно и задание смешанных из (10), (11) граничных условий.)

На той части контура  $\Gamma$  (обозначим ее  $\Gamma_{\omega k}$ ), на которой волокна  $k$ -го семейства входят в конструкцию, необходимо задать краевые условия для интенсивностей армирования [2]:

$$\omega_k(\Gamma_{\omega k}) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

где  $\omega_{0k}$  – заданные на  $\Gamma_{\omega k}$  контурные значения функций  $\omega_k$ .

Согласно (2), (4), (5) напряжения в волокнах РА-пластины при поперечном изгибе имеют простые выражения

$$\sigma_k(x_1, x_2, x_3) = x_3 \sigma_k^0 / h, \quad 1 \leq k \leq N, \quad |x_3| \leq h, \quad (13)$$

откуда вытекает  $\sigma_k(x_1, x_2, -h) = -\sigma_k^0 = \text{const}$ , т.е. арматура на нижней лицевой поверхности ( $x_3 = -h$ ) также равнонапряжена.

После подстановки соотношений (2) в (3), а затем (3) в (7) и, наконец, (7) в (1) с учетом (6), (8), (13) получим следующие уравнения равновесия задачи РА в перемещениях:

$$\begin{aligned} & (-1)^i \sum_k \sigma_k^0 \omega_k I_{kj} \partial_s (\psi_k, \psi_k) + Ea_1 \partial_i [a (\partial_i u_i + \nu \partial_j u_j)] + 0,5 Ea_2 \partial_j [a (\partial_i u_j + \partial_j u_i)] = \\ & = 1,5 a^{-1} h^{-1} Ea_2 (\partial_i u_3 + u_i / h), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (14)$$

$$h Ea_2 \sum_{i=1}^2 \partial_i [a^{-1} (\partial_i u_3 + u_i / h)] = -p_3(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G. \quad (15)$$

К этой системе уравнений следует добавить условия постоянства поперечных сечений волокон (6), которые с учетом (8) примут вид

$$\partial_s (\psi_k, \omega_k) + \omega_k \partial_n (\psi_k, \psi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

а также условия РА (5), которые с учетом (4), (2), (8) можно записать в перемещениях

$$\partial_s (\psi_k, u_1) \cos \psi_k + \partial_s (\psi_k, u_2) \sin \psi_k = \varepsilon_k^0 = \sigma_k^0 / E_k = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (17)$$

где

$$\partial_s (\psi_k, \bullet) = \cos \psi_k \partial_1 (\bullet) + \sin \psi_k \partial_2 (\bullet), \quad \partial_n (\psi_k, \bullet) = -\sin \psi_k \partial_1 (\bullet) + \cos \psi_k \partial_2 (\bullet), \quad 1 \leq k \leq N. \quad (18)$$

Статические граничные условия (10) после подстановки в них (7) с учетом (2), (3), (13), (8) можно записать в перемещениях

$$\begin{aligned} & \sum_k \sigma_k^0 \omega_k \cos^2 (\psi_k - \beta) + a Ea_1 [(\partial_1 u_1 + \nu \partial_2 u_2) n_1^2 + (\partial_2 u_2 + \nu \partial_1 u_1) n_2^2 + (1 - \nu) \times \\ & \times (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) n_1 n_2] = 1,5 h^{-2} M_{mm}, \quad \sum_k \sigma_k^0 \omega_k \sin 2(\psi_k - \beta) + \end{aligned} \quad (19)$$

$$+ a Ea_2 [2(\partial_2 u_2 - \partial_1 u_1) n_1 n_2 + (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) (n_1^2 - n_2^2)] = 3 h^{-2} M_{m\tau};$$

$$a^{-1} h Ea_2 \sum_{i=1}^2 n_i (\partial_i u_3 + u_i / h) = F_{n3}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p. \quad (20)$$

Граничные (11) и краевые (12) условия остаются без изменения.

Таким образом, система разрешающих уравнений задачи РА поперечно изгибаемых пластин, подчиняющихся гипотезам Тимошенко, состоит из  $2N + 3$  уравнений (14)–(17) и замкнута относительно следующих неизвестных функций: тангенциальных перемещений на верхней лицевой поверхности  $u_1$ ,  $u_2$ , прогиба  $u_3$  и параметров РА  $\psi_k, \omega_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ). Для однозначного интегрирования системы разрешающих уравнений на кромке пластины должны быть заданы граничные (11), (19), (20) и краевые (12) условия. Решение сформулированной задачи РА должно удовлетворять физическим ограничениям (9).

Полученная система разрешающих уравнений (14)–(17) и соответствующие ей краевые условия (11), (12), (19), (20) с учетом (8), (18) указывают на то, что задачи определения перемещений  $u_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) и параметров РА  $\psi_k, \omega_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) связаны и решать их необходимо совместно, причем в целом система уравнений и граничные условия существенно нелинейны, что вызвано нелинейным вхождением параметров РА в указанные соотношения. Эти обстоятельства значительно усложняют качественный анализ граничной задачи РА изгибаемых пластин и разработку методов ее решения.



Характеристическое уравнение системы разрешающих уравнений имеет следующий вид [11]

$$\left[ x_2'^2 + 1 \right] P(x_2') \prod_{k=1}^N (\sin \psi_k - x_2' \cos \psi_k) = 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} P(x_2') = & \left[ L_{11}(x_2') \prod_{k=1}^N \gamma_k - (\sigma_{12}^0 - \sigma_{11}^0 x_2') \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \eta_k \omega_k \cos \psi_k + \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \varsigma_k^2 \omega_k \cos \psi_k \sin \psi_k \right] \times \\ & \times \left[ L_{22}(x_2') \prod_{k=1}^N \gamma_k - (\sigma_{22}^0 - \sigma_{12}^0 x_2') \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \eta_k \omega_k \sin \psi_k - \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \varsigma_k^2 \omega_k \cos \psi_k \sin \psi_k \right] - \\ & - \left[ L_{12}(x_2') \prod_{k=1}^N \gamma_k - (\sigma_{22}^0 - \sigma_{12}^0 x_2') \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \eta_k \omega_k \cos \psi_k - \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \varsigma_k^2 \omega_k \cos^2 \psi_k \right] \times \\ & \times \left[ L_{12}(x_2') \prod_{k=1}^N \gamma_k - (\sigma_{12}^0 - \sigma_{11}^0 x_2') \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \eta_k \omega_k \sin \psi_k + \sum_k \prod_{m=1, N}^{m \neq k} \gamma_m \varsigma_k^2 \omega_k \sin^2 \psi_k \right], \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varsigma_k &= \sin \psi_k - x_2' \cos \psi_k, \quad \eta_k = \cos \psi_k + x_2' \sin \psi_k, \quad \gamma_k = (\partial_2 u_2 - \partial_1 u_1) \sin 2\psi_k + (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) \times \\ & \times \cos 2\psi_k, \quad \sigma_{ij}^0 = E a_1 (\partial_i u_j + \nu \partial_j u_i), \quad \sigma_{ij}^0 = 0, 5 E a_2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2), \end{aligned}$$

$$L_{11} = a E a_1 [x_2'^2 + (1 - \nu)/2], \quad L_{22} = a E a_1 [1 + x_2'^2 (1 - \nu)/2], \quad L_{12} = -0, 5 a E x_2' / (1 - \nu);$$

производная  $x_2' = dx_2 / dx_1$  задает направление характеристики;  $P(x_2')$  – полином четвертого порядка относительно  $x_2'$ , коэффициенты которого зависят от значений неизвестных функций  $\partial_i u_j$ ,  $\psi_k$ ,  $\omega_k$  (см. (22)).

Сомножители, стоящие в (21) под знаком произведения, указывают на то, что система разрешающих уравнений имеет  $N$  действительных характеристик, совпадающих с траекториями армирования. Двучлен, заключенный в (21) в квадратные скобки, имеет только мнимые корни  $x_2'$ , поэтому система разрешающих уравнений имеет два мнимых характеристических направления, порожденных уравнением равновесия (15). Полином  $P(x_2')$  в зависимости от значений неизвестных функций  $\partial_i u_j$ ,  $\psi_k$ ,  $\omega_k$  (т.е. в зависимости от значений коэффициентов) может иметь разное количество действительных корней в разных точках области  $G$ . Следовательно, система разрешающих уравнений задачи РА является квазилинейной системой смешанно-составного типа [12].

Правые части в уравнениях (14) имеют смысл поперечных сил (см. (1)) и не содержат старших производных от неизвестных функций, т.е. операторы, стоящие в правых частях (14), не входят в главную часть дифференциальных операторов, описывающих задачу РА изгибаемых пластин. Если предположить, что правые части в (14) известны из каких-то соображений (т.е. если рассматривать их как некоторые фиктивные нагрузки), то система уравнений (14), (16), (17) и соответствующие ей граничные (19), (11) (при  $i = 1, 2$ ) и краевые (12) условия формально полностью совпадают с разрешающими уравнениями и краевыми условиями задачи РА пластин, нагруженных в своей плоскости [2]. Поэтому на основании анализа, проведенного в [2], можно сделать следующие выводы относительно свойств решения краевой задачи (14)–(17), (19), (20), (11), (12).

Статические (19), (20) и кинематические (11) граничные условия являются естественными условиями в задачах механики деформируемого твердого тела и определяются конкретными условиями эксплуатации пластины. Краевые же условия для плотностей армирования (12) являются «технологическими» условиями, задающими количество арматуры  $k$ -го семейства, внедряемой в конструкцию на данном участке контура (кромки). Выбор количества внедряемых волокон в определенной

степени произволен и должен удовлетворять лишь физическим ограничениям (9) и условиям существования соответствующего проекта РА. Следовательно, задача РА при использовании арматуры постоянного поперечного сечения обладает функциональными произволами  $\omega_{0k}(\Gamma_{\omega k})$ , связанными с краевыми условиями (12). Варьируя в краевых условия (12) функции  $\omega_{0k}(\Gamma_{\omega k})$ , можно получить «пучки» решений задачи РА, из которых можно выбирать проекты с определенными свойствами. Это означает, что на множестве проектов с РА-структурами можно осуществлять целевое управление. Более того, в силу существенной нелинейности статических (19) граничных условий и условий РА (17) относительно параметров армирования  $\psi_k, \omega_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) задача РА, как обратная задача механики композитов [1], может иметь несколько альтернативных решений даже при фиксированных функциях  $\omega_{0k}(\Gamma_{\omega k})$  в краевых условиях (12). Эта возможность еще больше расширяет «спектр» решений задачи РА, из которого можно выбирать наиболее эффективные с практической точки зрения проекты.

Используя общеизвестный переход от прямоугольной декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$  к цилиндрической системе  $r, \theta, z = x_3$ , уравнения и соотношения (14)–(20), (11), (12) можно переписать в полярной системе координат (не будем их здесь приводить). В случае осесимметричного нагружения, закрепления и армирования (т.е. при  $\omega_{0k} = \text{const}$  в (12)) кольцевой пластины решение задачи РА также будет обладать осевой симметрией (не будет зависеть от полярного угла  $\theta$ ). При этом система разрешающих уравнений представляет собой систему обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений, содержащих производные от неизвестных функций только по полярному радиусу  $r$ . Проинтегрировать соответствующую двухточечную нелинейную краевую задачу РА изгибаемых кольцевых пластин можно численно, например, методом пристрелки [13]. Не будем останавливаться на обсуждении этого вопроса более подробно, а обсудим результаты расчетов, выполненных на основе такого подхода.

Рассмотрим кольцевую пластину, ограниченную кромками радиусов  $r_0, r_1$  ( $r_1 = 2r_0$ ). На внешней кромке  $r_1$  пластина жестко закреплена ( $u_{i0} = 0, i = \overline{1, 3}$ ; см. (11)), а на внутренней кромке  $r_0$  статически нагружена изгибающим  $M_m = \text{const}$  и крутящим  $M_{\pi} = \text{const}$  моментами (см. (10)). Поперечные нагрузки отсутствуют:  $p_3 \equiv 0, F_{n3} = 0$  (см. (1), (10)). Пластина армирована двумя семействами волокон ( $N = 2$ ), выполненных из одного материала ( $E_1 = E_2$ ). Напряжения в обоих семействах арматуры на лицевых поверхностях одинаковы ( $\sigma_1^0 = \sigma_2^0$ ). Значения механических характеристик фаз композиции характеризуются безразмерными величинами  $\nu = 0,3, E/E_1 = 0,01$  (сильная анизотропия, требующая учета ослабленного сопротивления поперечным сдвигам в пластине [6, 7]). Краевые условия для плотностей армирования (12) заданы на внутренней кромке  $r_0$  и  $\omega_{0k} = \text{const}$  ( $k = 1, 2$ ).

При таких условиях закрепления, нагружения и армирования решение задачи РА обладает осевой симметрией.

На рисунок 1 изображены РА-структуры, полученные при  $\omega_{01} = \omega_{02} = 0,3$  и разных условиях нагружения внутренней кромки. На рисунок 1, а приведена структура армирования, полученная при нагружении пластины только изгибающим моментом  $M_m / (r_1^2 \sigma_1^0) = 0,5$  ( $M_{\pi} = 0$ ). При этом траектории армирования обладают не только осевой, но и радиальной симметрией. Так как волокна разных семейств выполнены из одного материала, уложены с одинаковой плотностью и напряжения в них одинаковы, второе альтернативное решение этой задачи РА приводит к структуре армирования,

полностью совпадающей с изображенной на рисунок 1, а, лишь траектории разных семейств меняются местами.

К РА-структуре, аналогичной изображенной на рисунок 1, а, приводит и решение рассматриваемой задачи в рамках классической теории Кирхгофа [2]. Известно, что классическая теория при осесимметричном изгибе кольцевых пластин не чувствительна к наличию или отсутствию на их кромках равномерно распределенных крутящих моментов  $M_{\pi} = \text{const}$ . Поэтому добавление крутящего момента  $M_{\pi} = \text{const} \neq 0$  в рамках теории Кирхгофа приводит к той же РА-структуре, что изображена на рисунок 1, а. Неклассическая же теория позволяет учесть влияние этого момента. Так, на рисунок 1, б изображена РА-структура, полученная в рамках теории Тимошенко при  $M_m / (r_1^2 \sigma_1^0) = 0,5$  и  $M_{\pi} / (r_1^2 \sigma_1^0) = 0,1$ . Как видно, структура армирования при этом уже не обладает радиальной симметрией и существенно отличается от РА-структуры, приведенной на рисунок 1, а. По указанным выше причинам второе альтернативное

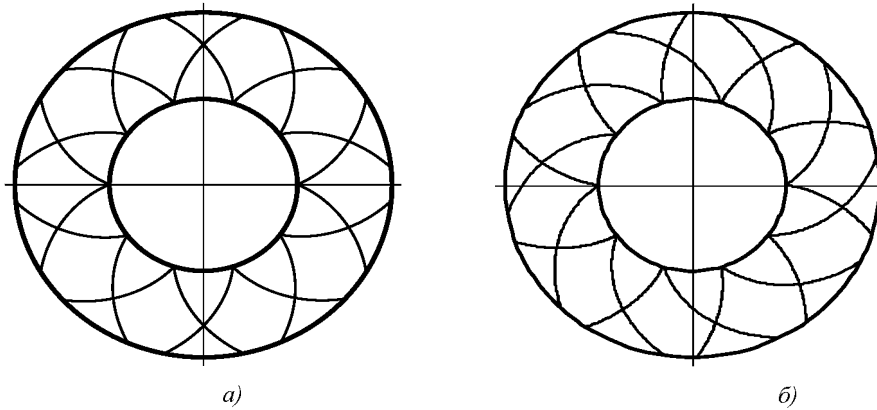


Рисунок 1 – РА-структуры изгибаемых пластин, нагруженных моментами на внутренней кромке: а) – только изгибающим моментом, б) – изгибающим и крутящим моментами

решение приводит вновь к структуре армирования, изображенной на рисунок 1, б, при этом траектории армирования разных семейств вновь меняются местами.

На рисунок 2 изображены структуры армирования, соответствующие двум альтернативным решениям задачи РА, при нагружении внутренней кромки пластины только изгибающим моментом  $M_m / (r_1^2 \sigma_1^0) = 0,5$  ( $M_{\pi} = 0$ ), т.е. как в случае, соответствующем рисунок 1, а, но при не одинаковых плотностях армирования, заданных на внутренней кромке:  $\omega_{01} = 0,35$ ,  $\omega_{02} = 0,25$ . Из сравнения структур, приведенных на рисунок 2, видно, что структуру, изображенную на рисунок 2, б,

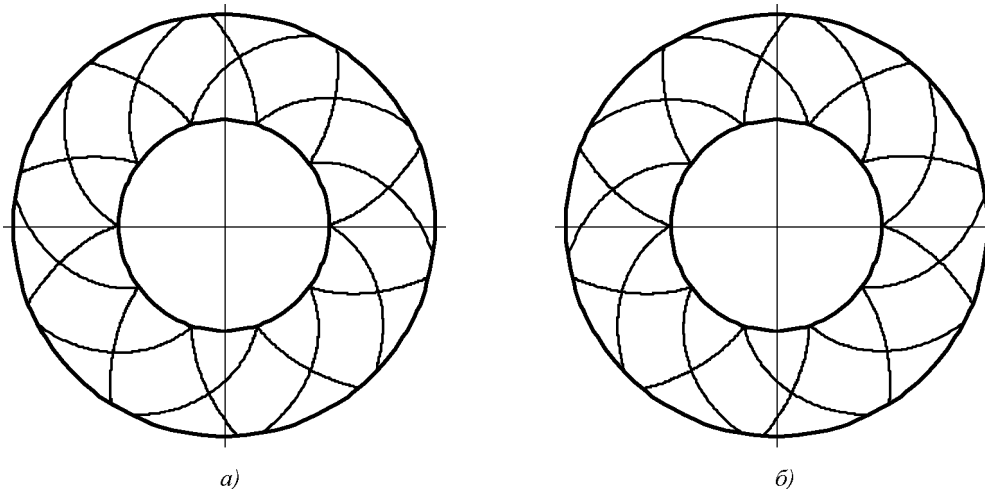


Рисунок 2 – Две альтернативные РА-структуры изгибаемой пластины, нагруженной на внутренней кромке только изгибающим моментом

можно получить из структуры, изображенной на рисунок 2, а, если РА-пластину повернуть на угол  $\pi$  вокруг вертикальной или горизонтальной оси (т.е., просто, пластину перевернуть). Такое свойство двух решений задачи РА имеет место только при  $\sigma_1^0 = \sigma_2^0$ ,  $E_1 = E_2$ . В случае же использования волокон разных семейств, выполненных из разных материалов ( $E_1 \neq E_2$ ), или при задании разных уровней напряжений в волокнах на лицевых поверхностях ( $\sigma_1^0 \neq \sigma_2^0$ ) структуры армирования, соответствующие альтернативным решениям задачи РА, получаются совершенно разными.

Сравнение структур, изображенных на рисунок 1, а и рисунок 2, позволяет получить представление об изменении траекторий армирования при варьировании величин  $\omega_{0k}$  в краевых условиях (12) при постоянстве суммарной плотности армирования на внутренней кромке ( $\omega_{01} = \omega_{02} = \text{const}$ ). В рамках классической теории изгиба пластин такое варьирование величин  $\omega_{0k}$  ( $k = 1, 2$ ) не приводит к изменению РА-структуры, приведенной на рисунок 1, а [2].

Таким образом, сформулированная в рамках гипотез теории Тимошенко задача РА изгибаемых композитных пластин позволяет не только адекватно учитывать их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам [6, 8], но и получать РА-структуры, более точно соответствующие особенностям нагружения пластин, чем это удается добиться в рамках классической теории Кирхгофа [2].

## РЕЗЮМЕ

В рамках гипотез теории Тимошенко сформулирована задача равнонапряженного армирования поперечно изгибаемых упругих пластин волокнами постоянного поперечного сечения. Выполнен качественный анализ соответствующей системы разрешающих уравнений и граничных условий. Показано, что система разрешающих уравнений является системой квазилинейных уравнений смешанно-составного типа, которой соответствуют нелинейные статические граничные условия, порождающие возможность существования нескольких альтернативных решений поставленной задачи. В осесимметричном случае методом пристрелки численно решена двухточечная нелинейная задача о равнонапряженном армировании кольцевой пластины. Обсуждаются результаты расчетов такой пластины, особенности изменения структуры армирования при разных типах ее нагружения и при варьировании плотностей армирования на внутренней кромке. Сравниваются результаты расчетов по классической теории и теории Тимошенко.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00102-а).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук, Н.В. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов / Н.В. Баничук, В.В. Кобелев, Р.Б. Рикардс. – М.: Машиностроение, 1988. – 224 с.
2. Немировский, Ю.В. Рациональное проектирование армированных конструкций / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский. – Новосибирск: Наука, 2002. – 488 с.
3. Голушко, С.К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С.К. Голушко, Ю.В. Немировский. – М: Физматлит, 2008. – 432 с.
4. Немировский, Ю.В. О некоторых свойствах решения задачи поперечного изгиба пластины с равнонапряженной арматурой / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский //

- Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т. 2, № 2. – С. 15–28.
5. Немировский, Ю.В. Применение методов теории возмущений в задачах поперечного изгиба пластин с равнонапряженной арматурой / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 3. – С. 3–22.
  6. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
  7. Немировский, Ю.В. О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Научный вестник НГТУ. – 2004. – № 3 (18). – С. 93–115.
  8. Пикуль, В.В. Механика оболочек / В.В. Пикуль. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 536 с.
  9. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
  10. Немировский, Ю.В. Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю.В. Немировский, Б.С. Резников. – Новосибирск: Наука, 1986. – 168 с.
  11. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
  12. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.
  13. Холл, Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

#### SUMMARY

*Under the hypotheses of Timoshenko theory the problem is formulated for transverse bending of elastic plates equal-stress reinforced by fibers of constant cross-section. The qualitative analysis carried out for the corresponding system of resolving equations and boundary conditions. It is shown that the resolving equations is a system of quasilinear equations of mixed-composite type, which correspond to nonlinear static boundary conditions, generating the possibility of the existence of several alternative solutions of the problem. In the axisymmetric case the two-point nonlinear problem about equal-stress reinforcement of circular plate is numerically solved by the shooting method. The results of calculations of such plates, particularly changes in the structure of reinforcement for different types of loading and at varying densities of reinforcement on the inner edge are discussed. The results of calculations according to the classical theory and Timoshenko theory are compared.*

**E-mail:** [yankovsky\\_ap@rambler.ru](mailto:yankovsky_ap@rambler.ru)  
[lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)

Поступила в редакцию 21.09.2013

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА

д.ф.-м.н. Леоненко Д.В.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

**Введение.** Ранее в статье [1] было исследовано поведение упругопластического стержня со сжимаемым наполнителем под действием квазистатических нагрузок. В работах [2, 3] приведены результаты по динамическому деформированию трехслойных стержней и пластин, скрепленных с безынерционным основанием Винклера. В монографии [4] рассмотрено поведение трехслойных элементов без упругого основания. Деформирование однородных балок и плит на упругом основании при статических и динамических воздействиях исследовано в [5]. Здесь рассматриваются собственные колебания трёхслойного стержня, связанного с инерционным основанием Винклера.

**1. Постановка задачи.** Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком наполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты  $z$ . На границах контакта слоёв используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в наполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью наполнителя (рисунок 1). На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания  $q_r(x, t)$ . Через  $w_k(x)$  и  $u_k(x)$  обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв;  $h_k$  и  $\rho_k$  – толщина и плотность  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя),  $h_3 = 2c$ .

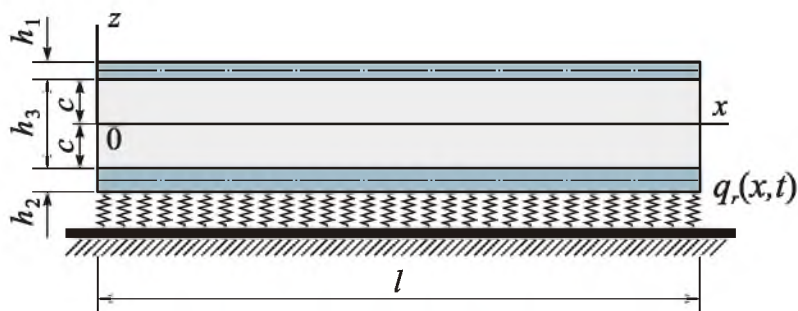


Рисунок 1. – Расчетная схема трехслойного стержня

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между реакцией и прогибом может быть различной. Рассмотрим случай *инерционного* основания в рамках модели Винклера. В нашем случае стержень прикреплен к основанию вторым слоем, поэтому выполняется следующее соотношение

$$q_r = -\kappa_0 w_2 - m_f \ddot{w}_2,$$

где  $\kappa_0$  – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели);  $m_f$  – инерционный член основания.

Выпишем уравнения движения, описывающую собственные колебания, рассматриваемого трехслойного стержня в следующем виде:

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_1 \ddot{\phantom{u}} - a_5 u_2 \ddot{\phantom{u}} + a_2 w_1 \ddot{\phantom{w}} + a_3 w_2 \ddot{\phantom{w}} - 2a_6 w_1 \ddot{\phantom{w}} + a_7 w_2 \ddot{\phantom{w}} + m_1 \ddot{\phantom{u}} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 = 0, \\
& -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\
& + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} = 0, \\
& -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
& -a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 + (m_2 + m_f) \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $a_i$  – жесткостные характеристики стержня;  $m_j$  – инерционные члены стержня [3].

В качестве граничных принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие ограничения для перемещений в сечениях  $x = 0; l$  имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{2}$$

Начальные условия движения будут ( $t = 0$ )

$$u_k(x, 0) = u_{k0}(x); \quad \dot{u}_k(x, 0) = \dot{u}_{k0}(x); \quad w_k(x, 0) = w_{k0}(x); \quad \dot{w}_k(x, 0) = \dot{w}_{k0}(x) \quad (k = 1, 2), \tag{3}$$

где  $u_0^k(x)$ ,  $\dot{u}_0^k(x)$ ,  $w_0^k(x)$ ,  $\dot{w}_0^k(x)$  – заданные начальные перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоев.

**2. Решение задачи.** Решение начально-краевой задачи (1)–(3) проводится методом Бубнова–Галеркина. Для этого искомые перемещения  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющей принятым граничным условиям (2):

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); & u_2(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t); \\
w_1(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t); & w_2(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t).
\end{aligned} \tag{4}$$

Подстановка выражений (4) в (1) приводит к системе уравнений для определения функций времени  $T_{mi}(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), которая в матричном виде будет:

$$[B]\{T\} + [M]\{\ddot{T}\} = 0, \tag{5}$$

где  $[B]$  – квадратная матрица четвертого порядка, составленная из коэффициентов  $B_{mij}$ ;  $[M]$  – диагональная матрица четвертого порядка с элементами  $M_{mij}$  [2];  $\{T\}$  и  $\{\ddot{T}\}$  – векторы, сформированные из искомых функций времени  $T_{mi}$  и их вторых производных:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & b_8 & b_9 \\ b_4 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 + m_3 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 + m_f + m_4 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь коэффициенты  $b_i$  зависят от параметра  $m$  и приведены в [2].

Систему (5) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^4 B_{mkj} T_{mj} + M_{mkk} \ddot{T}_{mk} = 0 \quad (k = 1, \dots, 4). \quad (6)$$

Т. к. матрица  $[M]$  диагональная, то от второй суммы осталось только одно  $k$ -е слагаемое. Для замыкания начально-краевой задачи к системе (6) необходимо добавить начальные условия (3).

Решение системы (6) ищем в виде

$$T_{mk}(t) = A_{mk} \sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \quad (7)$$

где  $A_{mk}$  – амплитуда;  $\omega_m$  – частота и  $\alpha_{mk}$  – начальная фаза колебаний.

Подстановка выражения (7) в систему (6) приводит к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[B]\{A\} = \omega^2 [M]\{A\}, \quad (8)$$

где  $\{A\}$  – вектор, сформированный амплитудами  $A_{mk}$ .

Обращение в уравнении (8) матрицы  $[M]$ , так как она не является вырожденной, осуществляет переход к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R]\{A\} = \omega^2 \{A\}; \quad [R] = [M]^{-1}[B]; \quad ([R] - \omega^2 E)\{A\} = 0.$$

Решив задачу, получим четыре вещественных неотрицательных частоты. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра  $m$  оказывается четырехчастотным. Следовательно, вместо решения (7) нужно принять:

$$T_{mk}(t) = \sum_{i=1}^4 A_{mki} \sin(\omega_{mi} t + \alpha_{mi}). \quad (9)$$

Искомые перемещения теперь определяются выражениями (4) с учетом (9).

**3. Численное исследование.** При численном исследовании принимается, что слои стержня выполнены из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т с относительными толщинами:  $h_1 = 0,01$ ,  $h_2 = 0,05$ ,  $c = 0,09$ . Торцы стержня свободно оперты на неподвижные опоры. Параметры упругой среды вычислялись по формулам из [5].

На рисунке 2 показана зависимость низшей частоты  $\omega_{11}$  от толщины слоя внешней среды  $H_f$ . Кривые соответствуют различным моделям упругих оснований ( $\kappa_0 = 50$  МПа/м,  $m_f = 641$  кг/м<sup>2</sup>): 1 – безынерционная модель; 2 – инерционная модель. Коэффициент жесткости основания  $\kappa_0$  остается в процессе изменения толщины  $H_f$  постоянным. При увеличении толщины слоя основания собственные частоты по двум моделям оснований постоянны при толщине  $H_f \geq 1,5$ . Для более тонких оснований система стержень-основание будет более жесткой за счет подпирания абсолютно жесткого основания, и частота по безынерционной модели (1) – постоянна. Учет инерции основания, начиная с  $H_f \geq 1,5$ , приводит к уменьшению исследуемой частоты в 2,1 раза.

Рисунок 3 иллюстрирует изменение минимальной частоты собственных колебаний  $\omega_{11}$  в зависимости от коэффициента жесткости инерционного основания  $\kappa_0$  при различной удельной массе основания  $m_f$  (кг/м<sup>2</sup>): 1 –  $m_f = 0$  (безынерционное основание), 2 –  $m_f = 500$ , 3 –  $m_f = 1000$ , 4 –  $m_f = 2000$ . Из графиков следует, что учет инерции основания (2) приводит к уменьшению частоты более чем в 2 раза по сравнению с безынерционным основанием (1). При дальнейшем увеличении удельной массы основания частоты уменьшаются.



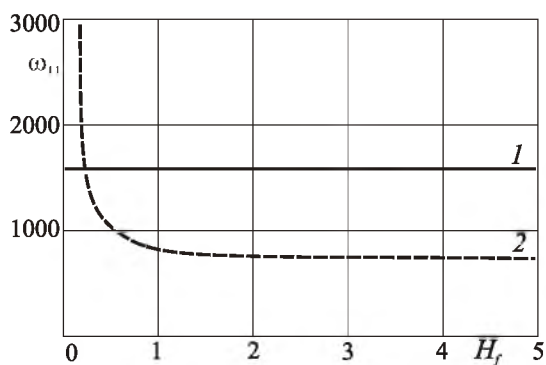


Рисунок 2. – Изменение частоты собственных колебаний  $\omega_{11}$  в зависимости от толщины сжимаемого слоя основания

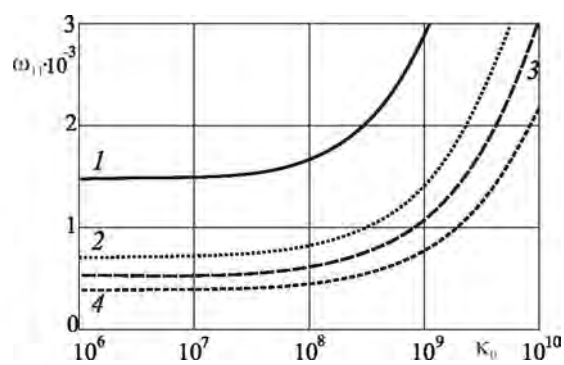


Рисунок 3. – Изменение частоты собственных колебаний  $\omega_{11}$  в зависимости от коэффициента  $\kappa_0$  (Па/м)

**4. Выводы.** Приведенные в работе аналитические и численные результаты, позволяют сделать вывод о существенном влиянии упругого основания средней и высокой жесткости на частоты. Увеличение толщины слоя основания при  $H_f \geq 1,5$  перестает влиять на собственные частоты системы стержень-основание, как с учетом инерции основания, так и без ее учета.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф15РМ–024).*

#### РЕЗЮМЕ

Рассмотрены собственные колебания трехслойного стержня на упругом инерционном основании. Для описания кинематики несущих слоев приняты гипотезы бернулли. Заполнитель жесткий, сжимаемый. Реакция основания описывается инерционной моделью винклера. Получена система дифференциальных уравнений движения и ее точное решение в перемещениях. Приведены численные результаты для трехслойного стержня.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного упругопластического стержня со сжимаемым заполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Гу Юй // Теоретическая и прикладная механика: межведомст. сб. науч.-метод. ст. – Минск, 2005. – Вып. 19. – С. 67–75.
2. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
3. Леоненко, Д.В. Исследование собственных частот колебаний трехслойного стержня на упругом основании / Д.В. Леоненко // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2006. –Т. 11, №4. – С. 23–26.
4. Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.V. Nagiyev. – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
5. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н.Леонтьев. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 491 с.

#### SUMMARY

*Natural vibrations of sandwich beam on an elastic inertial foundation considered. For the kinematics description of carryings layers accepted the hypotheses bernoulli. Filler is hard, compressible. Reaction of foundation was described on the base of winkler's inertial model. Combined differential equations of motion and analytical solutions via displacement were received. Numerical solutions for sandwich beam were adduced.*

**E-mail:** [leoden@tut.by](mailto:leoden@tut.by)

Поступила в редакцию 02.11.2014

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

д.ф.-м.н. **Поленов В.С.**

*Воронежский институт экономики и права, Россия*

Динамическому деформированию насыщенных жидкостью пористых сред посвящены работы [1-4], в которых отражена теория распространения упругих стационарных и нестационарных волн.

Наличие и степень пористости в твердой фазе учитывается с помощью коэффициента пористости равного отношению объема пор к общему объему, занимаемому твердой фазой и сжимаемой жидкостью.

Введение Ю.Н. Работновым [5] дробно-экспоненциальных функций в качестве ядер интегральных операторов, оказывается весьма эффективными при применении принципа Вольтерра к решению динамических задач [6] наследственной теории упругости. Это объясняется тем, что дробно-экспоненциальные ядра допускают расшифровку соответствующих упругих операторов по вполне определенным правилам. Исследование диссипативных процессов при гармоническом деформировании таких сред позволяет установить эквивалентность между дробно-экспоненциальными ядрами и функциями распределения констант релаксации (ретардации).

В данной работе предлагается дальнейшее исследование диссипативных процессов на примере звуковых волн распространяющихся в насыщенной жидкостью упругой пористой среде, упругие операторы которой определяются дробно-экспоненциальными функциями памяти.

1. Система уравнений теории наследственной упругости позволяет записать уравнения движения двухкомпонентной среды относительно вектора перемещения  $u_i^{(1)}$  твердой фазы (скелета пористой среды) и вектора перемещения  $u_i^{(2)}$  жидкости в следующем виде [1,2]

$$(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})u_{j,ij}^{(1)} + \tilde{\mu}u_{i,jj}^{(1)} + \tilde{A}_1 u_{j,ij}^{(2)} = \rho_{11}\ddot{u}_i^{(1)} + \rho_{12}\ddot{u}_i^{(2)} \quad (1)$$

$$\tilde{A}_1 u_{j,ij}^{(1)} + \tilde{A}_2 u_{j,ij}^{(2)} = \rho_{12}\ddot{u}_i^{(1)} + \rho_{22}\ddot{u}_i^{(2)}$$

Здесь  $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$  – упругие операторы,  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$  – операторы, зависящие от пористости среды и модуля сжимаемости жидкости;  $\rho_{12}$  – интенсивность перехода массы из второй фазы в первую:  $\rho_{11} = \rho_1 / \alpha_1$  и  $\rho_{22} = \rho_2 / \alpha_2$  – истинные плотности твердой фазы и жидкости в порах;  $\rho_1$  – масса твердой фазы в единице объема среды;  $\rho_2$  – масса жидкости в единице объема среды;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – величины, характеризующие доли объема смеси, занимаемые каждой фазой ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ ).

Индексы, стоящие сверху в круглых скобках, относятся соответственно: 1- к твердой фазе, 2- к жидкости. Точка над буквой  $u_i$  – означает производную по времени, а индекс внизу, стоящий после запятой, указывает пространственное дифференцирование по соответствующей координате.

Упругие операторы в (1.1) определены следующим образом

$$\tilde{\lambda} = \lambda(1 + \Lambda^*), \quad \Lambda^* \varepsilon = \int_0^\infty \Lambda(s)\varepsilon(t-s)ds \quad (2)$$

$$\tilde{\mu} = \mu(1 + M^*), \quad M^* \varepsilon = \int_0^{\infty} M(s) \varepsilon(t-s) ds,$$

а операторы  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$  равны коэффициентам  $A_1$  и  $A_2$ .

Систему (1) преобразуем к виду

$$V_c^2 \left[ \frac{\tilde{\lambda}}{H} u_{j,ij}^{(1)} + \frac{\tilde{\mu}}{H} (u_{j,ij}^{(1)} + u_{i,jj}^{(1)}) + \sigma_{12} u_{j,ij}^{(2)} \right] = \gamma_{11} \ddot{u}_i^{(1)} + \gamma_{12} u_i^{(2)} \quad (3)$$

$$V_c^2 [\sigma_{12} u_{j,ij}^{(1)} + \sigma_{22} u_{j,ij}^{(2)}] = \gamma_{12} \ddot{u}_i^{(1)} + \gamma_{22} u_i^{(2)}$$

Здесь

$$\gamma_{11} = \rho_{11} / \rho, \quad \gamma_{12} = \rho_{12} / \rho, \quad \gamma_{22} = \rho_{22} / \rho, \quad \rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}$$

$$\sigma_{12} = A_1 / H, \quad \sigma_{22} = A_2 / H, \quad H = \lambda + 2\mu + 2A_1 + A_2$$

Решение системы (3) будем искать в виде затухающих волн

$$u_i^{(\beta)} = C_i^{(\beta)} \exp[i\omega t - (\alpha + i\frac{\omega}{c})x_k \nu_k] \quad (\beta = 1, 2) \quad (4)$$

где  $C_i^{(\beta)}$  – амплитуды колебания волн в фазах,  $\nu_k$  – координаты единичного вектора в направлении распространения волн со скоростью  $c > 0$ , частотой  $\omega > 0$  и коэффициентом затухания  $\alpha > 0$ .

Подставим (4) в систему (3), получим

$$[\gamma_{11}\omega^2 + V_c^2 \frac{\mu(1+M(\omega))}{H} \left(\alpha + i\frac{\omega}{c}\right)^2] C_k^{(1)} + \frac{V_c^2}{H} [\lambda(1+\Lambda(\omega)) + \mu(1+M(\omega))] (\alpha + i\frac{\omega}{c})^2 C_j^{(1)} \nu_k \nu_j + \gamma_{12}\omega^2 C_k^{(2)} + V_c^2 \sigma_{12} (\alpha + i\frac{\omega}{c})^2 C_j^{(2)} \nu_k \nu_j = 0 \quad (5)$$

$$\gamma_{12}\omega^2 C_k^{(1)} + V_c^2 \sigma_{12} (\alpha + i\frac{\omega}{c})^2 C_j^{(1)} \nu_k \nu_j + \gamma_{22}\omega^2 C_k^{(2)} + V_c^2 \sigma_{22} (\alpha + i\frac{\omega}{c})^2 C_j^{(2)} \nu_k \nu_j = 0 \quad (6)$$

$$\Lambda(\omega) = \int_0^{\infty} \Lambda(s) e^{-i\omega s} ds, \quad M(\omega) = \int_0^{\infty} M(s) e^{-i\omega s} ds$$

Соотношения (5) позволяют определить характеристики поперечных и продольных звуковых волн в насыщенной жидкостью наследственно упругой пористой среде в процессе их распространения.

2. Характеристики поперечной звуковой волны: скорость волны  $c_t$  и коэффициент поглощения  $\alpha_t$  можно определить из (1.5) если положить  $C_j^{(\beta)} \nu_j = 0$  ( $\beta = 1, 2$ ). В результате получим

$$V_c^2 \gamma_{22} \frac{\mu(1+M(\omega))}{H} (\alpha + i\frac{\omega}{c_t})^2 + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)\omega^2 = 0 \quad (7)$$

Отсюда, после разделения действительной и мнимой частей, получим

$$c_t = V_c^2 \gamma_{22} \frac{\mu|1+M(\omega)|/H}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} \sec^2 \frac{\varphi_t}{2}, \quad \alpha_t = \frac{\omega}{c_t} \operatorname{tg} \frac{\varphi_t}{2} \quad (8)$$

Тангенс угла механических потерь для одномерного случая

$$\operatorname{tg} \varphi_t = \frac{\operatorname{Im}[1+M(\omega)]}{\operatorname{Re}[1+M(\omega)]} \quad (9)$$

Зная тангенс угла механических потерь, можно вычислить декремент затухания  $\delta_t$  и динамический модуль  $\mu_1$

$$\delta_i = 2\pi g \frac{\varphi_i}{2}, \quad \mu_1 = \mu|1+M(\omega)|/H \quad (10)$$

3 Характеристики продольных звуковых волн находятся из соотношений (5), если в них оба уравнения умножить на  $\nu_k$  и положить  $C_k^{(1)}\nu_k = D_1 \neq 0$ ,  $C_k^{(2)}\nu_k = D_2 \neq 0$ , получим

$$\left\{ \gamma_{11}\omega^2 + \frac{V_c^2}{H} [\lambda(1+\Lambda(\omega)) + 2\mu(1+M(\omega))] (\alpha_l + i\frac{\omega}{c_l})^2 \right\} D_1 + \left\{ V_c^2 \sigma_{12} (\alpha_l + i\frac{\omega}{c_l})^2 + \gamma_{12}\omega^2 \right\} D_2 = 0 \quad (11)$$

$$[V_c^2 \sigma_{12} (\alpha_l + i\frac{\omega}{c_l})^2 + \gamma_{12}\omega^2] D_1 + [\gamma_{22}\omega^2 + V_c^2 \sigma_{22} (\alpha_l + i\frac{\omega}{c_l})^2] D_2 = 0$$

Для дальнейшего исследования характеристик продольных волн выразим упругие операторы  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{\mu}$  через операторы объемного сжатия  $\tilde{K}$  и сдвига  $\tilde{\mu}$  следующим образом [7]

$$P^* = k(1+K^*) + \frac{4}{3} \mu(1+M^*) \quad (12)$$

Тогда (11) запишем в виде

$$\left[ \gamma_{11}\omega^2 + V_c^2 \frac{p(1+P(\omega))}{H} (\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^2 \right] D_1 + \left[ \gamma_{12}\omega^2 + V_c^2 \sigma_{12} (\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^2 \right] D_2 = 0 \quad (13)$$

$$\left[ \gamma_{12}\omega^2 + V_c^2 \sigma_{12} \left( \alpha + i\frac{\omega}{c_l} \right)^2 \right] D_1 + \left[ \gamma_{22}\omega^2 + V_c^2 \sigma_{22} \left( \alpha + \frac{\omega}{c_l} \right)^2 \right] D_2 = 0$$

Система (13) имеет нетривиальное решение при условии, когда определитель системы равен нулю. Раскрывая определитель, получим

$$\left[ \frac{p(1+P(\omega))}{H} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 \right] V_c^2 (\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^4 + [\gamma_{11}\sigma_{22} - 2\gamma_{12}\sigma_{12} + \gamma_{22} \frac{p(1+P(\omega))}{H} V_c^2 \omega^2 (\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^2 + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2) \omega^4] = 0 \quad (14)$$

Разделим (14) на  $(\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^4$  и введем следующее обозначение

$$z^* = (\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^{-2} \quad (15)$$

где  $z^*$  комплексное число.

Тогда уравнение (14) с учетом (12) запишем в виде

$$a\omega^4 z^{*2} + (\chi_1 + i\chi_2) V_c^2 \omega^2 z^* + (\gamma_1 + i\gamma_2) V_c^4 = 0 \quad (16)$$

$$\chi_1 = \gamma_{11}\sigma_{22} - 2\gamma_{12}\sigma_{12} + \gamma_{22} \left\{ \text{Re} \left[ \frac{k(1+K(\omega))}{H} + \frac{4}{3} \frac{\mu(1+M(\omega))}{H} \right] \right\}$$

$$\chi_2 = \gamma_{22} \text{Im} \left[ \frac{k(1+K(\omega))}{H} + \frac{4}{3} \frac{\mu(1+M(\omega))}{H} \right]$$

$$\gamma_1 = \sigma_{22} \text{Re} \left[ \frac{k(1+K(\omega))}{H} + \frac{4}{3} \frac{\mu(1+M(\omega))}{H} \right] - \sigma_{12}^2$$

$$\gamma_2 = \sigma_{22} \operatorname{Im} \left[ \frac{k(1+K(\omega))}{H} + \frac{4}{3} \frac{\mu(1+M(\omega))}{H} \right], \quad a = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$$

Из уравнения (16) находим  $z_{1,2}^*$

$$z_{1,2}^* = -\frac{b_1 + ib_2}{2a\omega^2} V_c^2 \quad (17)$$

$$b_1 = \chi_1 \pm \sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad b_2 = \chi_2 \pm \sqrt{r_1} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{2\chi_1\chi_2 - 4a\gamma_2}{\chi_1^2 - \chi_2^2 - 4a\gamma_1} \right)$$

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad a_1 = \chi_1^2 - \chi_2^2 - 4a\gamma_1, \quad a_2 = 2\chi_1\chi_2 - 4a\gamma_2$$

Из (15) и (17) после несложных преобразований и разделения действительной и мнимой частей, получим формулы для нахождения скорости распространения продольных звуковых волн, коэффициента поглощения и декремент затухания

$$c_l^2 = \frac{r_l V_c^2}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)} \sec^2 \frac{\varphi_l}{2}, \quad \alpha_l = \frac{\omega}{c_l} \operatorname{tg} \frac{\varphi_l}{2}, \quad \delta_l = 2\pi g \frac{\varphi_l}{2} \quad (18)$$

Тангенс угла механических потерь найдем по следующей формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_l = \frac{\chi_2 \pm \sqrt{r_1} \sin \frac{\varphi}{2}}{\chi_1 \pm \sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{2}}, \quad r_l = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad (19)$$

Так как  $b_1$  и  $b_2$  имеют знаки "±", то следует, что в наследственно упругой двухкомпонентной среде существует две продольные звуковые волны первого и второго типов.

4. В качестве примера рассмотрим продольную звуковую волну, когда ядро объемной релаксации выражается экспоненциальной функцией Ю.Н. Работнова [8]

$$M(t) = -\frac{\Delta\mu}{\mu_\infty \tau_\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \left( \frac{t}{\tau_\mu} \right)^{\gamma(n+1)-1} \quad (20)$$

$$\Delta\mu = \mu_\infty - \mu_0, \quad 0 < \gamma \leq 1$$

где  $\mu_\infty$  и  $\mu_0$  – соответственно, нерелаксированное и релаксированное значения модуля сдвига  $\mu$ ;  $\tau_\mu$  – время релаксации сдвиговых напряжений;  $\gamma$  – параметр дробности, учитывающий структурные изменения, связанные с различными видами обработки и эксплуатации материалов;  $\Gamma[\gamma(n+1)]$  – гамма функция.

Подставим (20), записанное в пространстве Фурье [9] в (16) и (17), получим выражения для коэффициентов  $\chi_1, \chi_2, \gamma_1, \gamma_2, b_1, b_2$  в виде

$$\chi_1 = \gamma_{11}\sigma_{22} - 2\gamma_{12}\sigma_{12} + \gamma_{22} \left( \frac{K_\infty g_k}{h_k} + \frac{4}{3} \frac{M_\infty g_\mu}{h_\mu} \right)$$

$$\chi_2 = \gamma_{22} \left[ K_\infty \left( 1 - \frac{k_0}{k_\infty} \right) h_k^{-1} \sin \left( \frac{\pi\gamma}{2} \right)_k + \frac{4}{3} M_\infty \left( 1 - \frac{\mu_0}{\mu_\infty} \right) h_\mu^{-1} \sin \left( \frac{\pi\gamma}{2} \right)_\mu \right]$$

$$\gamma_1 = \sigma_{22} \left( K_\infty g_k h_k^{-1} + \frac{4}{3} M_\infty g_\mu h_\mu^{-1} \right) - \sigma_{12}^2, \quad K_\infty = \frac{k_\infty}{H}, M_\infty = \frac{\mu_\infty}{H}$$

$$\gamma_2 = \sigma_{22} \left[ K_\infty \left( 1 - \frac{k_0}{k_\infty} \right) h_k^{-1} \sin \left( \frac{\pi\gamma}{2} \right)_k + \frac{4}{3} M_\infty \left( 1 - \frac{\mu_0}{\mu_\infty} \right) h_\mu^{-1} \sin \left( \frac{\pi\gamma}{2} \right)_\mu \right]$$

$$\begin{aligned}
g_k &= \frac{k_0}{k_\infty} (\omega \tau_k)^{-\gamma} + (\omega \tau_k)^\gamma + \left(1 + \frac{k_0}{k_\infty}\right) \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_k \\
g_\mu &= \frac{\mu_0}{\mu_\infty} (\omega \tau_\mu)^{-\gamma} + (\omega \tau_\mu)^\gamma + \left(1 + \frac{\mu_0}{\mu_\infty}\right) \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_\mu \\
h_k &= (\omega \tau_k)^{-\gamma} + (\omega \tau_k)^\gamma + 2 \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_k, \quad h_\mu = (\omega \tau_\mu)^{-\gamma} + (\omega \tau_\mu)^\gamma + 2 \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_\mu \\
b_1 &= \left[ \gamma_{11} \sigma_{22} - 2\gamma_{12} \sigma_{12} + \gamma_{22} \left( \frac{K_\infty g_k}{h_k} + \frac{4}{3} \frac{M_\infty g_\mu}{h_\mu} \right) \right] \pm \sqrt{r_1} \cos \frac{\varphi}{2} \\
b_2 &= \left[ \left( \frac{K_\infty \left(1 - \frac{k_0}{k_\infty}\right)}{h_k} \sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_k \right) + \frac{4}{3} \frac{M_\infty \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_\infty}\right)}{h_\mu} \sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_\mu \right] \pm \sqrt{r_1} \sin \frac{\varphi}{2}
\end{aligned} \tag{21}$$

Тогда, подставив выражения (21) в формулы (18) и (19), получим все характеристики продольных звуковых волн в насыщенной жидкостью наследственно упругой пористой среде.

### РЕЗЮМЕ

В работе получены аналитические выражения для определения скорости, коэффициента затухания и тангенса угла механических потерь поперечных и продольных звуковых волн, распространяющихся в насыщенной жидкостью упругой пористой среде. На примере продольной звуковой волны получены числовые характеристики, когда упругая среда описывается функцией Ю.Н Работнова.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Low-Frequency Range /M.A. Biot //J. Acoust. Soc. America.-1956. -V.28. -№ 2.-P. 168-178.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Higher Frequency Range /M.A. Biot //J. Acoust. Soc. America.-1956. -V.28. -№ 2.-P. 1179-191.
3. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах /Л.Я. Косачевский // ПММ. -1959. -Т.23. вып.6. - С.1115-1123.
4. Масликова Т.И. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах /Т.И. Масликова, В.С. Поленов// Изв. РАН. МТТ. -2005. -№ 1. -С. 104-108.
5. Работнов Ю.Н, Равновесие упругой среды с последствием /Ю.Н. Работнов // ПММ. - 1948. -Т 12. -вып. 1.- С. 53-62.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред /Т.Д. Шермергор. -М.: Наука. -1977. -399 с.
7. Мешков С.И. О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде /С.И. Мешков, Ю.А. Россихин // ПМТФ.-1968. -№ 5.- С.89-93.
8. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах/В.С.Постников. -М.: Металлургия.-1974. - 351 с.

### SUMMARY

*We obtain analytical expressions for determining the velocity, attenuation coefficient and mechanical loss tangent of the angle of the transverse and longitudinal sound waves propagating in a saturated liquid elastic porous medium. On an example of a longitudinal sound wave obtained numerical characteristics, when the elastic medium is described by fractional exponential function Rabotnova.*

**E-mail:** [polenov.vrn@mail.ru](mailto:polenov.vrn@mail.ru)

Поступила в редакцию 14.09.2014

**РЕКУРСИВНЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПЛОСКИХ  
АНТРОПОМОРФНЫХ СИСТЕМ В БЕЗОПОРНОЙ И ДВУХОПОРНОЙ ФАЗАХ  
ДВИЖЕНИЯ**

д.ф.-м.н. <sup>1</sup>Чигарев А.В., к.ф.-м.н. <sup>2</sup>Борисов А.В.

<sup>1</sup> Белорусский национальный технический университет, Минск  
<sup>2</sup> филиал ГОУВПО НИУ «Московский энергетический институт  
(Технический университет)» в г. Смоленске

**Введение**

Стержневые механические системы с шарнирами широко используются в технике с далекого прошлого. Во второй половине XX века, в связи с появлением новых конструкционных материалов сфера применения стержневых механических систем с шарнирами расширилась. Данная работа является частью развиваемого в настоящее время во всем мире направления, связанного с созданием экзоскелетов и антропоморфных роботов, которые строятся на основе механических систем.

Актуальной задачей является создание стержневой механической системы, которая бы по своим механическим свойствам, соответствовала бы максимально движениям опорно-двигательного аппарата человека.

Ранее в работах [1-5] были получены и исследованы уравнения движения для одноопорной фазы ходьбы. Предложена матричная форма записи и получены соответствующие обобщения элементов матриц. В данной статье разработаем аналогичные методы для одноопорной и двухопорной фаз ходьбы антропоида.

**Описание математической модели**

Одноопорная и двухопорная фазы движения описываются дифференциальными уравнениями, левая часть которых одинакова, а различаются только правые части. Поэтому рассмотрение данных двух фаз ходьбы будем проводить совместно.

Одноопорная фаза при антропоморфной ходьбе является основной и наиболее продолжительной. Двухопорную фазу, возникающую при смене ног обычно считают мгновенной. В реальности такая походка соответствует спортивной ходьбе. В случае перехода на бег возникает безопорная фаза движения. Однако, чтобы приблизить модель к реальности, требуется рассмотреть безопорную и двухопорную фазы движения.

Рассмотрим сначала безопорную фазу. Для отработки уравнений движения более удобны модели с ветвлением. Рассмотрим трехзвенный механизм (рисунок 1).

Рассматриваемая механическая системы имеет восемь степеней свободы. За обобщенные координаты, однозначно характеризующих положение, примем координаты прикрепления ног к корпусу  $x(t)$ ,  $y(t)$ , условно его можно назвать тазобедренный сустав  $B_1$ , три угла, которые, как и ранее, образуют звенья с горизонталью, отсчитываемые против часовой стрелки  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\varphi_3(t)$  и три переменных длины деформируемых звеньев  $l_1(t)$ ,  $l_2(t)$ ,  $l_3(t)$ . Моменты инерции звеньев, относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения обозначим  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$ ,  $I_3(t)$  соответственно. Они переменные и считаются функциями времени. В дальнейших записях аргумент  $t$  для краткости будем опускать.

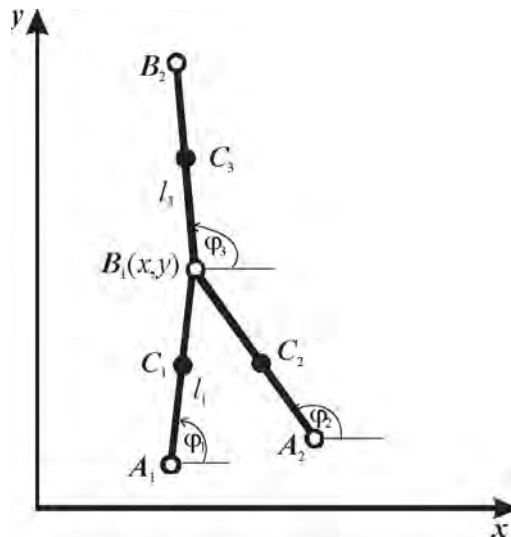


Рисунок 1. Схема кинематических звеньев трехзвенной стержневой механической системы в виде модели антропоморфного механизма в безопорной фазе

Запишем координаты центров масс звеньев в виде:

$$\begin{aligned}
 x_{C1} &= x + l_1(1 - n_1)\cos(\pi + \varphi_1), \\
 y_{C1} &= y + l_1(1 - n_1)\sin(\pi + \varphi_1), \\
 x_{C2} &= x + l_2(1 - n_2)\cos(\pi + \varphi_2), \\
 y_{C2} &= y + l_2(1 - n_2)\sin(\pi + \varphi_2), \\
 x_{C3} &= x + l_3n_3\cos\varphi_3, \\
 y_{C3} &= y + l_3n_3\sin\varphi_3.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Запишем дифференциальные уравнения движения механической системы в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате процедуры описанной, протестированной и отработанной ранее для одноопорной фазы движения [1,2], получаем дифференциальные уравнения движения (2)-(9). При свободном движении многозвенника в поле тяжести Земли правая часть уравнений движения равна нулю. И таким образом, уравнения составлены.

Рассмотрим двухопорную фазу движения. Она получается из уравнений движений для безопорной фазы, путем включения в правую часть уравнений неконсервативных сил (рисунок 2), действующих на экзоскелет.

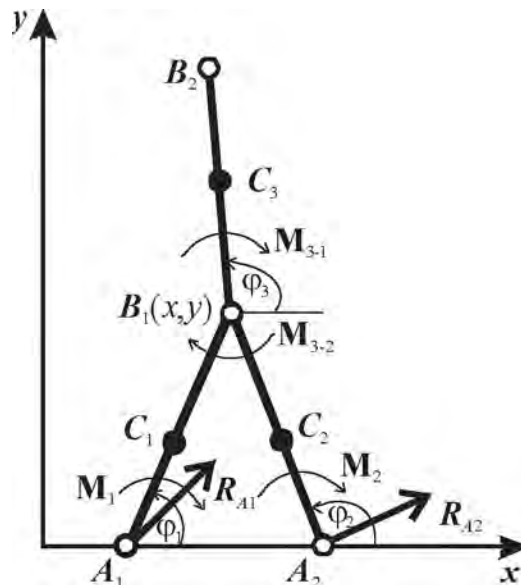


Рисунок 2. Схема трехзвенной стержневой механической системы в двухопорной фазе движения с действующими неконсервативными силами



В системе действуют моменты сил  $M_i$ , приложенные в каждом шарнире-суставе. Они являются внутренними силами. Действуют две внешние реакции  $R_{A1}$  и  $R_{A2}$ , приложенные соответственно в точках  $A_1$  и  $A_2$  контакта экзоскелета с опорой. Их проекции на оси координат обозначим:  $R_{A1x}$ ,  $R_{A1y}$ ,  $R_{A2x}$ ,  $R_{A2y}$ .

Обобщенные силы находим обычным образом из выражения для элементарной работы. Подставляя их в правые части соответствующих уравнений движения, получаем:

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} - m_1(n_1 - 1)l_1 \sin(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - m_2(n_2 - 1)l_2 \sin(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - \\ & - m_3 n_3 l_3 \sin(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 - m_1(n_1 - 1)l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 - m_2(n_2 - 1)l_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - \\ & - m_3 n_3 l_3 \cos(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 - 2m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - \\ & - 2m_3 n_3 \sin(\varphi_3) \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 + m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{l}_1 + m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) \ddot{l}_2 + \\ & + m_3 n_3 \cos(\varphi_3) \ddot{l}_3 = R_{A1x} + R_{A2x}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y} + m_1(n_1 - 1)l_1 \cos(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + m_2(n_2 - 1)l_2 \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \\ & + m_3 n_3 l_3 \cos(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 - m_1(n_1 - 1)l_1 \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 - m_2(n_2 - 1)l_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - \\ & - m_3 n_3 l_3 \sin(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 + g(m_1 + m_2 + m_3) + 2m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + \\ & + 2m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 + 2m_3 n_3 \cos(\varphi_3) \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 + m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \ddot{l}_1 + \\ & + m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) \ddot{l}_2 + m_3 n_3 \sin(\varphi_3) \ddot{l}_3 = R_{A1y} + R_{A2y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & - l_1 m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \ddot{x} + l_1 m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{y} + (I_1 + l_1^2 m_1(n_1 - 1)^2) \ddot{\varphi}_1 + \\ & + g l_1 m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) + 2l_1 m_1(n_1 - 1)^2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + \dot{I}_1 \dot{\varphi}_1 = -M_1 + M_{3-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & - l_2 m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) \ddot{x} + l_2 m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) \ddot{y} + (I_2 + l_2^2 m_2(n_2 - 1)^2) \ddot{\varphi}_2 + \\ & + g l_2 m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) + 2l_2 m_2(n_2 - 1)^2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 + \dot{I}_2 \dot{\varphi}_2 = -M_2 + M_{3-2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & - l_3 m_3 n_3 \sin(\varphi_3) \ddot{x} + l_3 m_3 n_3 \cos(\varphi_3) \ddot{y} + (I_3 + l_3^2 m_3 n_3^2) \ddot{\varphi}_3 + g l_3 m_3 n_3 \cos(\varphi_3) + \\ & + 2l_3 m_3 n_3^2 \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 + \dot{I}_3 \dot{\varphi}_3 = -M_{3-1} - M_{3-2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{x} + m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \ddot{y} - l_1 m_1(n_1 - 1)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \\ & + g m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) + m_1(n_1 - 1)^2 \ddot{l}_1 = -k_1 \Delta l_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & m_2(n_2 - 1) \cos(\varphi_2) \ddot{x} + m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) \ddot{y} - l_2 m_2(n_2 - 1)^2 \dot{\varphi}_2^2 + \\ & + g m_2(n_2 - 1) \sin(\varphi_2) + m_2(n_2 - 1)^2 \ddot{l}_2 = -k_2 \Delta l_2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$m_3 n_3 \cos(\varphi_3) \ddot{x} + m_3 n_3 \sin(\varphi_3) \ddot{y} - l_3 m_3 n_3^2 \dot{\varphi}_3^2 + g m_3 n_3 \sin(\varphi_3) + m_3 n_3^2 \ddot{l}_3 = -k_3 \Delta l_3. \quad (9)$$

Таким образом, составлены дифференциальные уравнения движения экзоскелета из трех стержней в безопорной (с нулевой правой частью) и двухопорной фазах движения.

Рассмотрим модель экзоскелета с двухзвенным корпусом и двухзвенными конечностями в безопорной фазе движения (рисунок 3).

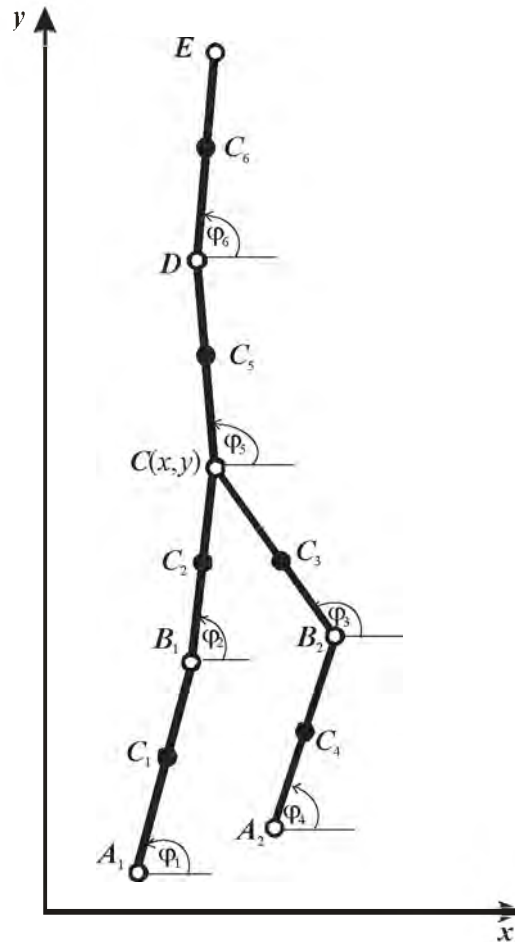


Рисунок 3. Схема кинематических звеньев шестизвенной стержневой механической системы в виде модели антропоморфного механизма в безопорной фазе

Рассматриваемая механическая системы имеет  $2n + 2$ , где  $n$  – число звеньев, то есть четырнадцать степеней свободы. За обобщенные координаты, однозначно характеризующих положение, примем, как и ранее, координаты тазобедренного сустава  $C(x(t), y(t))$ , шесть углов которые, образуют звенья с горизонталью, отсчитываемые против часовой стрелки  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t)$  и три переменных длины деформируемых звеньев  $l_1(t), l_2(t), l_3(t), l_4(t), l_5(t), l_6(t)$ . В дальнейших записях аргумент  $t$  для краткости будем опускать.

Запишем координаты центра масс звеньев в виде:

$$\begin{aligned}
 x_{C1} &= x + l_1(1 - n_1)\cos(\pi + \varphi_1) + l_2\cos(\pi + \varphi_2), \\
 y_{C1} &= y + l_1(1 - n_1)\sin(\pi + \varphi_1) + l_2\sin(\pi + \varphi_2), \\
 x_{C2} &= x + l_2(1 - n_2)\cos(\pi + \varphi_2), \\
 y_{C2} &= y + l_2(1 - n_2)\sin(\pi + \varphi_2), \\
 x_{C3} &= x + l_3(1 - n_3)\cos(\pi + \varphi_3), \\
 y_{C3} &= y + l_3(1 - n_3)\sin(\pi + \varphi_3), \\
 x_{C4} &= x + l_4(1 - n_4)\cos(\pi + \varphi_4) + l_3\cos(\pi + \varphi_3), \\
 y_{C4} &= y + l_4(1 - n_4)\sin(\pi + \varphi_4) + l_3\sin(\pi + \varphi_3), \\
 x_{C5} &= x + l_5n_5\cos\varphi_5, \\
 y_{C5} &= y + l_5n_5\sin\varphi_5, \\
 x_{C6} &= x + l_6n_6\cos\varphi_6 + l_5\cos\varphi_5, \\
 y_{C6} &= y + l_6n_6\sin\varphi_6 + l_5\sin\varphi_5.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Запишем дифференциальные уравнения движения механической системы в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате процедуры описанной,

протестированной и отработанной выше, получаем дифференциальные уравнения движения (11)-(24).

Аналогично предыдущему случаю, получим уравнения сразу и для двухопорной (рисунок 4) фазы движения.

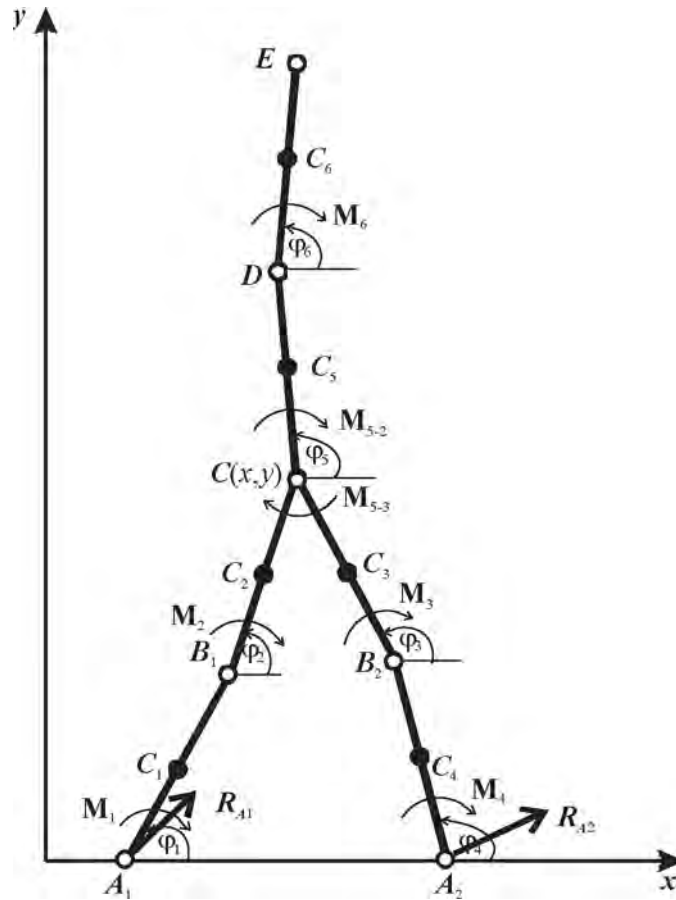


Рисунок 4. Схема шестизвенной стержневой механической системы в двухопорной фазе движения с действующими неконсервативными силами

В системе действуют моменты сил  $M_i$ , приложенные в каждом шарнире-суставе. Они являются внутренними силами. Действуют две внешние реакции  $R_{A1}$  и  $R_{A2}$ , приложенные соответственно в точках  $A_1$  и  $A_2$  контакта экзоскелета с опорой. Их проекции на оси координат обозначим:  $R_{A1x}$ ,  $R_{A1y}$ ,  $R_{A2x}$ ,  $R_{A2y}$ .

Обобщенные силы находим обычным образом из выражения для элементарной работы. Подставляя их в правые части соответствующих уравнений движения, получаем:

$$\begin{aligned}
 & (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) \ddot{x} - m_1(n_1 - 1)l_1 \sin(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + \\
 & + (m_1 + m_2 - m_2n_2)l_2 \sin(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + (m_3 + m_4 - m_3n_3)l_3 \sin(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 - \\
 & - m_4(n_4 - 1)l_4 \sin(\varphi_4) \ddot{\varphi}_4 - (m_6 + m_5n_5)l_5 \sin(\varphi_5) \ddot{\varphi}_5 - m_6n_6l_6 \sin(\varphi_6) \ddot{\varphi}_6 - \\
 & - m_1(n_1 - 1)l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 + (m_1 + m_2 - m_2n_2)l_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + \\
 & + (m_3 + m_4 - m_3n_3)l_3 \cos(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 - m_4(n_4 - 1)l_4 \cos(\varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 - \\
 & - (m_6 + m_5n_5)l_5 \cos(\varphi_5) \dot{\varphi}_5^2 - m_6n_6l_6 \cos(\varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 - 2m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + \\
 & + 2(m_1 + m_2 - m_2n_2) \sin(\varphi_2) \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 + 2(m_3 + m_4 - m_3n_3) \sin(\varphi_3) \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 - \\
 & - 2m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_4) \dot{l}_4 \dot{\varphi}_4 - 2(m_6 + m_5n_5) \sin(\varphi_5) \dot{l}_5 \dot{\varphi}_5 - 2m_6n_6 \sin(\varphi_6) \dot{l}_6 \dot{\varphi}_6 + \\
 & + m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{l}_1 - (m_1 + m_2 - m_2n_2) \cos(\varphi_2) \ddot{l}_2 - (m_3 + m_4 - m_3n_3) \cos(\varphi_3) \ddot{l}_3 + \\
 & + m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_4) \ddot{l}_4 + (m_6 + m_5n_5) \cos(\varphi_5) \ddot{l}_5 + m_6n_6 \cos(\varphi_6) \ddot{l}_6 = R_{A1x} + R_{A2x},
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) \ddot{y} + m_1(n_1 - 1)l_1 \cos(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - \\
& - (m_1 + m_2 - m_2n_2)l_2 \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - (m_3 + m_4 - m_3n_3)l_3 \cos(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 + \\
& + m_4(n_4 - 1)l_4 \cos(\varphi_4) \ddot{\varphi}_4 + (m_6 + m_5n_5)l_5 \cos(\varphi_5) \ddot{\varphi}_5 + m_6n_6l_6 \cos(\varphi_6) \ddot{\varphi}_6 - \\
& - m_1(n_1 - 1)l_1 \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 + (m_1 + m_2 - m_2n_2)l_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + \\
& + (m_3 + m_4 - m_3n_3)l_3 \sin(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 - m_4(n_4 - 1)l_4 \sin(\varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 - \\
& - (m_6 + m_5n_5)l_5 \sin(\varphi_5) \dot{\varphi}_5^2 - m_6n_6l_6 \sin(\varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + g(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) + \\
& + 2m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1)\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 - 2(m_1 + m_2 - m_2n_2)\cos(\varphi_2)\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 - \\
& - 2(m_3 + m_4 - m_3n_3)\cos(\varphi_3)\dot{l}_3\dot{\varphi}_3 + 2m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_4)\dot{l}_4\dot{\varphi}_4 + \\
& + 2(m_6 + m_5n_5)\cos(\varphi_5)\dot{l}_5\dot{\varphi}_5 + 2m_6n_6\cos(\varphi_6)\dot{l}_6\dot{\varphi}_6 + m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1)\ddot{l}_1 - \\
& - (m_1 + m_2 - m_2n_2)\sin(\varphi_2)\ddot{l}_2 - (m_3 + m_4 - m_3n_3)\sin(\varphi_3)\ddot{l}_3 + m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_4)\ddot{l}_4 + \\
& + (m_6 + m_5n_5)\sin(\varphi_5)\ddot{l}_5 + m_6n_6\sin(\varphi_6)\ddot{l}_6 = R_{A1y} + R_{A2y}, \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - l_1m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1) \ddot{x} + l_1m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1) \ddot{y} + (I_1 + l_1^2m_1(n_1 - 1)^2) \ddot{\varphi}_1 - \\
& - l_1l_2m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - l_1l_2m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + \\
& + gl_1m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1) + 2l_1m_1(n_1 - 1)^2\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 - 2l_1m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 + \\
& + l_1m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{l}_2 + \dot{I}_1\dot{\varphi}_1 = -M_1 + M_2, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l_2(m_1 + m_2 - m_2n_2)\sin(\varphi_2) \ddot{x} - l_2(m_1 + m_2 - m_2n_2)\cos(\varphi_2) \ddot{y} - \\
& - l_1l_2m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + (I_2 + (m_1 + m_2(n_2 - 1))^2l_2^2) \ddot{\varphi}_2 + \\
& + l_1l_2m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 - gl_2(m_1 + m_2 - m_2n_2)\cos(\varphi_2) - \\
& - 2l_2m_1(n_1 - 1)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + 2l_2(m_1 + m_2(n_2 - 1))^2\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 - \\
& - l_2m_1(n_1 - 1)\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{l}_1 + \dot{I}_2\dot{\varphi}_2 = -M_2 + M_{5-2}, \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l_3(m_3 + m_4 - m_3n_3)\sin(\varphi_3) \ddot{x} - l_3(m_3 + m_4 - m_3n_3)\cos(\varphi_3) \ddot{y} + \\
& + (I_3 + (m_4 + m_3(n_3 - 1))^2l_3^2) \ddot{\varphi}_3 - l_3l_4m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_4 - \\
& - l_3l_4m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 - gl_3(m_3 + m_4 - m_3n_3)\cos(\varphi_3) + \\
& + 2l_3(m_4 + m_3(n_3 - 1))^2\dot{l}_3\dot{\varphi}_3 - 2l_3m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_3 - \varphi_4)\dot{l}_4\dot{\varphi}_4 + \\
& + l_3m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_3 - \varphi_4)\ddot{l}_4 + \dot{I}_3\dot{\varphi}_3 = -M_3 + M_{5-3}, \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - l_4m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_4) \ddot{x} + l_4m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_4) \ddot{y} - l_3l_4m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_3 + \\
& + (I_4 + l_4^2m_4(n_4 - 1)^2) \ddot{\varphi}_4 - l_3l_4m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_3^2 + gl_4m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_4) - \\
& - 2l_4m_4(n_4 - 1)\cos(\varphi_3 - \varphi_4)\dot{l}_3\dot{\varphi}_3 + 2l_4m_4(n_4 - 1)^2\dot{l}_4\dot{\varphi}_4 - \\
& - l_4m_4(n_4 - 1)\sin(\varphi_3 - \varphi_4)\ddot{l}_3 + \dot{I}_4\dot{\varphi}_4 = -M_4 + M_3, \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - l_5(m_6 + m_5n_5)\sin(\varphi_5) \ddot{x} + l_5(m_6 + m_5n_5)\cos(\varphi_5) \ddot{y} + (I_5 + l_5^2(m_6 + m_5n_5^2)) \ddot{\varphi}_5 + \\
& + l_5l_6m_6n_6\cos(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_6 + l_5l_6m_6n_6\sin(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + gl_5(m_6 + m_5n_5)\cos(\varphi_5) + \\
& + 2l_5(m_6 + m_5n_5^2)\dot{l}_5\dot{\varphi}_5 + 2l_5m_6n_6\cos(\varphi_5 - \varphi_6)\dot{l}_6\dot{\varphi}_6 - l_5m_6n_6\sin(\varphi_5 - \varphi_6)\ddot{l}_6 + \dot{I}_5\dot{\varphi}_5 = \\
& = -M_{5-2} - M_{5-3} + M_6, \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - l_6m_6n_6\sin(\varphi_6) \ddot{x} + l_6m_6n_6\cos(\varphi_6) \ddot{y} + l_5l_6m_6n_6\cos(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_5 + \tag{18}
\end{aligned}$$

$$+ (I_6 + l_6^2 m_6 n_6^2) \ddot{\varphi}_6 - l_5 l_6 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{\varphi}_5^2 + g l_6 m_6 n_6 \cos(\varphi_6) + \\ + 2l_6 m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{l}_5 \dot{\varphi}_5 + 2l_6 m_6 n_6^2 \dot{l}_6 \dot{\varphi}_6 + l_6 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{l}_5 + \dot{l}_6 \dot{\varphi}_6 = -M_6,$$

$$m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1) \ddot{x} + m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) \ddot{y} - l_2 m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - \\ - l_1 m_1(n_1 - 1)^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2 m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + g m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1) - \\ - 2m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 + m_1(n_1 - 1)^2 \ddot{l}_1 - \\ - m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{l}_2 = -k_1 \Delta l_1, \quad (19)$$

$$- (m_1 + m_2 - m_2 n_2) \cos(\varphi_2) \ddot{x} - (m_1 + m_2 - m_2 n_2) \sin(\varphi_2) \ddot{y} + \\ + l_1 m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 + l_1 m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 - \\ - l_2(m_1 + m_2(n_2 - 1)^2) \dot{\varphi}_2^2 - g(m_1 + m_2 - m_2 n_2) \sin(\varphi_2) + \\ + 2m_1(n_1 - 1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - m_1(n_1 - 1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{l}_1 + \\ + (m_1 + m_2(n_2 - 1)^2) \ddot{l}_2 = -k_2 \Delta l_2, \quad (20)$$

$$- (m_3 + m_4 - m_3 n_3) \cos(\varphi_3) \ddot{x} - (m_3 + m_4 - m_3 n_3) \sin(\varphi_3) \ddot{y} - \\ - l_4 m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_4 - l_3(m_4 + m_3(n_3 - 1)^2) \dot{\varphi}_3^2 + \\ + l_4 m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 - g(m_3 + m_4 - m_3 n_3) \sin(\varphi_3) - \\ - 2m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{l}_4 \dot{\varphi}_4 + (m_4 + m_3(n_3 - 1)^2) \ddot{l}_3 - \\ - m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{l}_4 = -k_3 \Delta l_3, \quad (21)$$

$$m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_4) \ddot{x} + m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_4) \ddot{y} + l_3 m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_3 + \\ + l_3 m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_3^2 - l_4 m_4(n_4 - 1)^2 \dot{\varphi}_4^2 + g m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_4) + \\ + 2m_4(n_4 - 1) \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{l}_3 \dot{\varphi}_3 - m_4(n_4 - 1) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{l}_3 + \\ + m_4(n_4 - 1)^2 \ddot{l}_4 = -k_4 \Delta l_4, \quad (22)$$

$$(m_6 + m_5 n_5) \cos(\varphi_5) \ddot{x} + (m_6 + m_5 n_5) \sin(\varphi_5) \ddot{y} + l_6 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_6 - \\ - l_5(m_6 + m_5 n_5^2) \dot{\varphi}_5^2 - l_6 m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + g(m_6 + m_5 n_5) \sin(\varphi_5) + \\ + 2m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{l}_6 \dot{\varphi}_6 + (m_6 + m_5 n_5^2) \ddot{l}_5 + m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{l}_6 = -k_5 \Delta l_5, \quad (23)$$

$$m_6 n_6 \cos(\varphi_6) \ddot{x} + m_6 n_6 \sin(\varphi_6) \ddot{y} - l_5 m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_5 - l_5 m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{\varphi}_5^2 - \\ - l_6 m_6 n_6^2 \dot{\varphi}_6^2 + g m_6 n_6 \sin(\varphi_6) - 2m_6 n_6 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{l}_5 \dot{\varphi}_5 + m_6 n_6 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{l}_5 + \\ + m_6 n_6^2 \ddot{l}_6 = -k_6 \Delta l_6. \quad (24)$$

Таким образом, составлены дифференциальные уравнения движения экзоскелета из шести стержней в безопорной фазе движения.

Полученные уравнения сохраняют свою матричную форму (25)-(26) [1] для одноопорной фазы движения.

$$A(q, l) \ddot{q} + B(q, l) \dot{q}^2 + gC(q, l) + 2D(q, l)(\dot{l} \dot{q}) + E(q, l) \ddot{l} + \dot{l} \dot{q} = F(q, l), \quad (25)$$

Матричное уравнение для деформаций звеньев имеет вид:

$$G(q, l) \ddot{q} + H(q, l) \dot{q}^2 + gK(q) + 2L(q, l)(\dot{l} \dot{q}) + P(q, l) \ddot{l} = S(k, l). \quad (26)$$

где:  $q$  – угловые обобщенные координаты  $q = (x, y, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ ;  $l$  – обобщенные координаты, описывающие с деформации звеньев  $l = (x, y, l_1, \dots, l_n)^T$ ;  $A(q, l)$ ,  $G(q, l)$  – матрицы, учитывающие инерционные свойства;  $B(q, l)$ ,  $H(q, l)$  – матрицы, учитывающие

вязкость;  $C(q)$ ,  $K(q)$  – матрицы, определяемые моментами силы тяжести;  $D(q,l)$ ,  $E(q,l)$ ,  $L(q,l)$ ,  $P(q,l)$  – матрицы, учитывающие деформации звеньев;  $F(q,l)$  – матрица-столбец обобщенных сил, т.е. управляющих моментов;  $S(k,l)$  – матрица-столбец, учитывающая упругие свойства материала звеньев,  $\ddot{q}$  – матрица обобщенных ускорений;  $\dot{q}$  – матрица обобщенных скоростей,  $(\dot{l}q) = (\dot{l}_1\dot{q}_1, \dots, \dot{l}_n\dot{q}_n)^T$  – матрица, составленная из произведений  $\dot{l}q$  при равных индексах,  $\dot{I} = (\dot{I}_1, \dots, \dot{I}_n)$  – матрица производных момента инерции.

Различия будут заключаться в виде конкретных матриц, входящих в них. Правые части для уравнений координат  $(x,y)$  точки подвеса ног, будут содержать не сумму моментов, а сумму соответствующих проекций реакций  $R_i$ .

При этом изменяются векторы-столбцы:  $q$  – содержит линейные и угловые обобщенные координаты  $q = (x, y, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ ;  $l$  – линейные и обобщенные координаты, описывающие с деформации звеньев  $l = (x, y, l_1, \dots, l_n)^T$ ;

Таким образом, на данном этапе представлена математическая модель стержневой механической системы с деформируемыми звеньями антропоморфного типа в виде системы дифференциальных уравнений движения.

### Метод построения решения

Для построения решения выпишем в явном виде соответствующие матрицы, входящие в полученные дифференциальные уравнения движения.

Матрицы для трехзвенной деформируемой системы имеют вид:

$$A(q,l) = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & l_1(m_1 - m_1n_1)\sin\varphi_1 & l_2(m_2 - m_2n_2)\sin\varphi_2 & -l_3m_3n_3\sin\varphi_3 \\ 0 & m_1 + m_2 + m_3 & -l_1(m_1 - m_1n_1)\cos\varphi_1 & -l_2(m_2 - m_2n_2)\cos\varphi_2 & l_3m_3n_3\cos\varphi_3 \\ l_1(m_1 - m_1n_1)\sin\varphi_1 & -l_1(m_1 - m_1n_1)\cos\varphi_1 & I_1 + l_1^2(n_1 - 1)^2m_1 & 0 & 0 \\ l_2(m_2 - m_2n_2)\sin\varphi_2 & -l_2(m_2 - m_2n_2)\cos\varphi_2 & 0 & I_2 + l_2^2(n_2 - 1)^2m_2 & 0 \\ -l_3m_3n_3\sin\varphi_3 & l_3m_3n_3\cos\varphi_3 & 0 & 0 & I_2 + l_3^2n_3^2m_3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$B(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_1(m_1 - m_1n_1)\cos\varphi_1 & l_2(m_2 - m_2n_2)\cos\varphi_2 & -l_3m_3n_3\cos\varphi_3 \\ 0 & 0 & l_1(m_1 - m_1n_1)\sin\varphi_1 & l_2(m_2 - m_2n_2)\sin\varphi_2 & -l_3m_3n_3\sin\varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$C(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m_1 + m_2 + m_3)y^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m_1 - m_1n_1)\cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(m_2 - m_2n_2)\cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3n_3\cos\varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$D(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (m_1 - m_1 n_1) \sin \varphi_1 & (m_2 - m_2 n_2) \sin \varphi_2 & -m_3 n_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & -(m_1 - m_1 n_1) \cos \varphi_1 & -(m_2 - m_2 n_2) \cos \varphi_2 & m_3 n_3 \cos \varphi_3 \\ 0 & 0 & l_1 (n_1 - 1)^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 (n_2 - 1)^2 m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 n_3^2 m_3 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$E(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(m_1 - m_1 n_1) \cos \varphi_1 & -(m_2 - m_2 n_2) \cos \varphi_2 & m_3 n_3 \cos \varphi_3 \\ 0 & 0 & -(m_1 - m_1 n_1) \sin \varphi_1 & -(m_2 - m_2 n_2) \sin \varphi_2 & m_3 n_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$G(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(m_1 - m_1 n_1) \cos \varphi_1 & -(m_1 - m_1 n_1) \sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(m_2 - m_2 n_2) \cos \varphi_2 & -(m_2 - m_2 n_2) \sin \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_3 n_3 \cos \varphi_3 & m_3 n_3 \sin \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$H(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 (n_1 - 1)^2 m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_2 (n_2 - 1)^2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_3 n_3^2 m_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$F(q,l) = (R_{A1x} + R_{A2x}, R_{A1y} + R_{A2y}, -M_1 + M_{3-1}, -M_2 + M_{3-2}, -M_{3-1} - M_{3-2})^T. \quad (34)$$

$$K(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m_1 - m_1 n_1) \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(m_2 - m_2 n_2) \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 n_3 \cos \varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

$$L(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$P(q,l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 (n_1 - 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 (n_2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 n_3^2 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$S(k,l) = (-k_1 \Delta l_1, -k_2 \Delta l_2, -k_3 \Delta l_3)^T. \quad (38)$$

Для того чтобы лучше уяснить блочную структуру уравнений необходимо привести матрицы и для шестизвенной модели в безопорной и двухопорной фазах движения. Матрицы для уравнений (11)-(24) шестизвенной модели ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Таким образом, приведенные матрицы показывают что несмотря на то, что структура уравнений (25), (26) осталась прежней их вид, в сравнении с одноопорной фазой движения, изменился. Проводя обобщения, видно, что общих формул получить

не удастся. Но элементы матрицы, выделенные пунктиром, подчиняются закономерностям, подобным полученным для одноопорной фазы движения, однако, не совпадают в точности с ними. Это связано со способом отсчета координат. Соответственно, формулы, обобщающие матрицы распадаются на несколько частей: для координат подвеса ног  $(x, y)$ , для каждой из частей – двух ног и корпуса (нижней части механизма и верхней).

Приведем обобщающие зависимости для произвольного конечного количества звеньев  $n$  стержневой механической системы. Через  $n_i$  обозначаются также множители, задающие положения центров масс звеньев, однако совпадений обозначений здесь не возникает, так как все множители имеют индексы, в отличие от общего количества звеньев. При этом, вообще говоря, не будем накладывать ограничения на количество звеньев из которых состоят ноги и корпус. Пусть условно первая нога, с меньшими индексами у углов, имеет  $k$  звеньев. Вторая нога, с большими индексами, имеет  $p$  звеньев. Корпус, имеет  $r$  звеньев. Тогда  $k + p + r = n$ . Количество уравнений для рассматриваемой модели с деформируемыми звеньями будет равно  $2n + 2$ . Области изменения значений для первой нижней ноги будет:  $1 \leq i \leq k$ , для второй:  $k + 1 \leq i \leq p$ , для корпуса:  $p + 1 \leq i \leq r$ .

Для матрицы  $A(q, l)$ . Первые две строки дают уравнения, описывающие движение точки подвеса ног.

$$a_{11} = a_{22} = \sum_{\gamma=1}^n m_{\gamma}, \quad (39)$$

То есть, для первых двух строк и двух столбцов диагональные элементы матрицы равны массе всего экзоскелета.

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с третьего по  $k + 2$ -й  $j = 3, \dots, k + 2$ , то есть для первой ноги:

$$a_{ij} = l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-2}^{j-k} m_{\gamma} - m_{j-2} n_{j-2} \right) \sin(\varphi_{j-2}), \quad (40)$$

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с  $k + 3$ -го по  $p + 2$ -й  $j = k + 3, \dots, p + 2$ , то есть для второй ноги:

$$a_{ij} = l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-2}^p m_{\gamma} - m_{j-2} n_{j-2} \right) \sin(\varphi_{j-2}), \quad (41)$$

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с  $p + 3$ -го по  $r + 2$ -й  $j = p + 3, \dots, r + 2$ , то есть для корпуса:

$$a_{ij} = -l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-1}^r m_{\gamma} + m_{j-2} n_{j-2} \right) \sin(\varphi_{j-2}), \quad (42)$$

**Примечание:** если в сумме  $\gamma$  больше верхнего значения, соответствующий элемент необходимо положить равным нулю.

Для второй строки  $i = 2$  и столбцов, начиная с третьего по  $k + 2$ -й  $j = 3, \dots, k + 2$ , то есть для первой ноги:

$$a_{ij} = -l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-2}^{j-k} m_{\gamma} - m_{j-2} n_{j-2} \right) \cos(\varphi_{j-2}), \quad (43)$$

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с  $k + 3$ -го по  $p + 2$ -й  $j = k + 3, \dots, p + 2$ , то есть для второй ноги:

$$a_{ij} = -l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-2}^p m_{\gamma} - m_{j-2} n_{j-2} \right) \cos(\varphi_{j-2}), \quad (44)$$

Для первой строки  $i = 1$  и столбцов, начиная с  $p + 3$ -го по  $r + 2$ -й  $j = p + 3, \dots, r + 2$ , то есть для корпуса:



$$a_{ij} = l_{j-2} \left( \sum_{\gamma=j-1}^r m_{\gamma} + m_{j-2} n_{j-2} \right) \cos(\varphi_{j-2}), \quad (45)$$

Для элементов матрицы, начиная с третьей строки и третьего столбца, то есть:  $2 < i \leq n + 2$  и  $2 < j \leq n + 2$ . Эти элементы, выделенные по блокам пунктиром в матрицах приложения 3 очень похожи на элементы из системы уравнений для одноопорной фазы движения.

Для первой ноги  $2 < i \leq k + 2$  и  $2 < j \leq k + 2$ .

$$a_{ij} = \delta_{ij} l_{i-2} + l_{i-2} l_{j-2} \left( m_{j-2} (1 - n_{j-2}) \tilde{\delta}(1 - n_{j-2}) + \sum_{\gamma=i-2}^k m_{\gamma} \right) \cos(\varphi_{i-2} - \varphi_{j-2}), \quad (46)$$

где:  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ ,

символ:  $\tilde{\delta}(1 - n_{j-2}) = \begin{cases} (1 - n_{j-2}), i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Для второй ноги  $k + 2 < i \leq p + 2$  и  $k + 2 < j \leq p + 2$ .

$$a_{ij} = \delta_{ij} l_{i-2} + l_{i-2} l_{j-2} \left( m_{j-2} (1 - n_{j-2}) \tilde{\delta}(1 - n_{j-2}) + \sum_{\gamma=i-2}^p m_{\gamma} \right) \cos(\varphi_{i-2} - \varphi_{j-2}), \quad (47)$$

где:  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ ,

символ:  $\tilde{\delta}(1 - n_{j-2}) = \begin{cases} (1 - n_{j-2}), i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Для корпуса  $p + 2 < i \leq r + 2$  и  $p + 2 < j \leq r + 2$ .

$$a_{ij} = \delta_{ij} l_{i-2} + l_{i-2} l_{j-2} \left( m_{j-2} n_{j-2} \tilde{\delta} n_{i-2} + \sum_{\gamma=i-1}^r m_{\gamma} \right) \cos(\varphi_{i-2} - \varphi_{j-2}), \quad (48)$$

где:  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ , символ:  $\tilde{\delta} n_i = \begin{cases} n_j, i = j \\ 1, i \neq j \end{cases}$

Обобщения для остальных матриц аналогичны по логике построения и приводить их не будем ввиду однотипности действий и ясности метода их построения.

### **Заключение**

В результате работы, впервые предложены обобщения матриц и рекурсивный метод для получения уравнений движения экзоскелета в безопорной и двухопорной фазах движения с произвольным количеством звеньев и переменным моментом инерции звена.

### **РЕЗЮМЕ**

В работе впервые получены обобщения для построения матриц дифференциальных уравнений движения, описывающих динамику антропоморфных систем с деформируемыми звеньями и переменным моментом инерции звена в безопорной и двухопорной фазах движения. Благодаря полученным результатам появляется возможность рекурсивной записи дифференциальные уравнения движения непосредственно, минуя трудоемкий этап записи уравнений Лагранжа или других методов составления.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-97512 р\_центр\_а)*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов А.В. Уравнения динамики деформируемых стержневых механических систем. // Естественные и технические науки, № 2, 2013. С. 34-35.
2. Борисов А.В. Комплекс программ для моделирования динамики экзоскелета. // Научные труды международной научно-практической конференции ученых РГАУ-МСХА имени К.А.Тимирязева, ЛНАУ. 22 - 23 января 2014 года. Том 2. Экономика и управление. Естественные и технические науки Москва-Луганск. Издательство РГАУ-МСХА имени К.А.Тимирязева, ЛНАУ. 2014. С. 105-117.
3. Чигарев А. В. Биомеханика: учебник / А. В. Чигарев, Г. И. Михасев, А. В. Борисов. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.
4. Чигарев А. В. Динамика антропоморфного механизма с изменяемой структурой / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ (29-30 июня 2004 года). – М. – Луганск : Изд-во МАДИ(ГТУ) – МСХА – ЛНАУ. – 2004. – Т. 4. – С. 130-149.
5. Чигарев А. В. Моделирование управляемого движения двуногого антропоморфного механизма / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 1(51). – С. 74-88.

## SUMMARY

*For the first time obtained the generalization to construct matrices of differential equations of motion describing the dynamics of anthropomorphic systems with deformable parts and variable moment of inertia of the link in unsupported and two phases of movement. These results appear recursive write the differential equations of motion directly, bypassing the time-consuming stage write the Lagrange equations or other methods of preparation.*

**E-mail:** [borisowandrej@yandex.ru](mailto:borisowandrej@yandex.ru)  
[chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## ПРОЧНОСТНАЯ ДОВОДКА ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ КОРОБОК ПЕРЕДАЧ В УСЛОВИЯХ СТЕНДОВЫХ ИСПЫТАНИЙ

д.т.н. <sup>1</sup>Скойбеда А.Т., к.т.н. <sup>1</sup>Капуста П.П., <sup>2</sup>Шпаковский И.Т., <sup>2</sup>Гужов Д.С.

<sup>1</sup>УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

<sup>2</sup>ОАО «Минский завод колесных тягачей», Минск

Плавное трогание с места, динамичный разгон, мягкое переключение передач без разрыва потока мощности всегда считались главными достоинствами гидромеханических передач (ГМП). В настоящее время гидромеханические передачи находят широкое применение в мире. Их устанавливают на большегрузные автомобили, спецтехнику, автобусы. Общий вид ГМП представлен на рисунке 1.

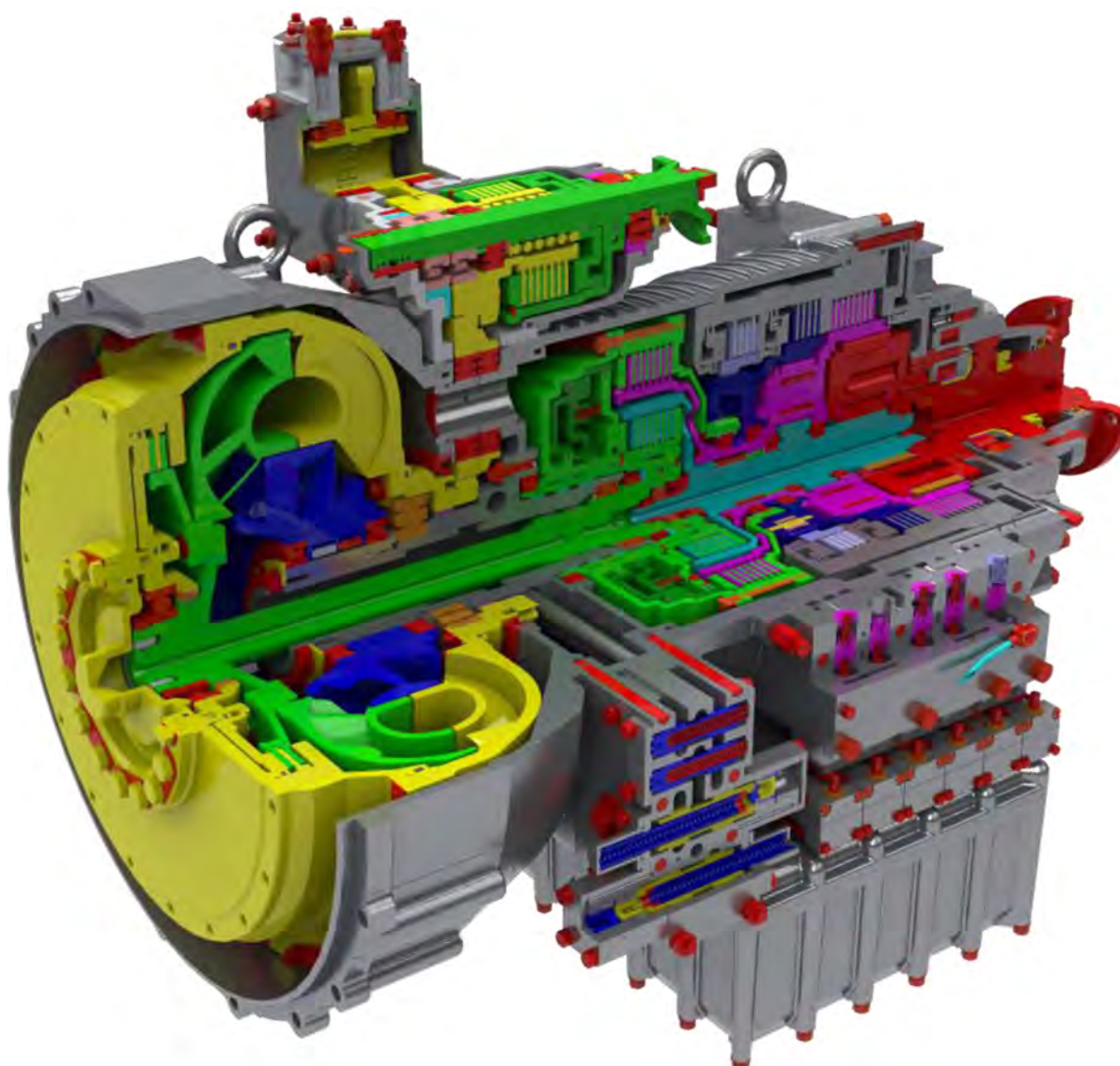


Рисунок 1. – Общий вид ГМП

Для надежной работы в составе шасси ГМП подвергаются стендовым и дорожным испытаниям. Основной задачей стендовых испытаний является выявление на ранней стадии неисправности в работе ГМП и ее узлов, а так же проверка

герметичности корпусных деталей. Надежные испытания сводят к минимуму неожиданные поломки в дороге. И что самое главное, проведение испытаний избавляет от лишних затрат на дополнительную разборку и ремонт.

### 1. Объект испытаний

Объектом испытаний является опытная ГМП, имеющая шесть передач переднего хода, нейтраль и одну передачу заднего хода. Максимальная частота вращения ведущего вала ГМП на нейтрали и передачах переднего хода  $n = 2200 \text{ мин}^{-1}$ , а на задней передаче  $n = 1600 \text{ мин}^{-1}$ . Принципиальное отличие опытной ГМП от штатной заключается в измененной конструкции турбинного вала, позволяющей с помощью шайбы и двух гаек зафиксировать турбинный вал на внутреннюю обойму подшипника, установленного в корпус блокировки гидротрансформатора. Общий вид измененного вала представлен на рисунке 2.

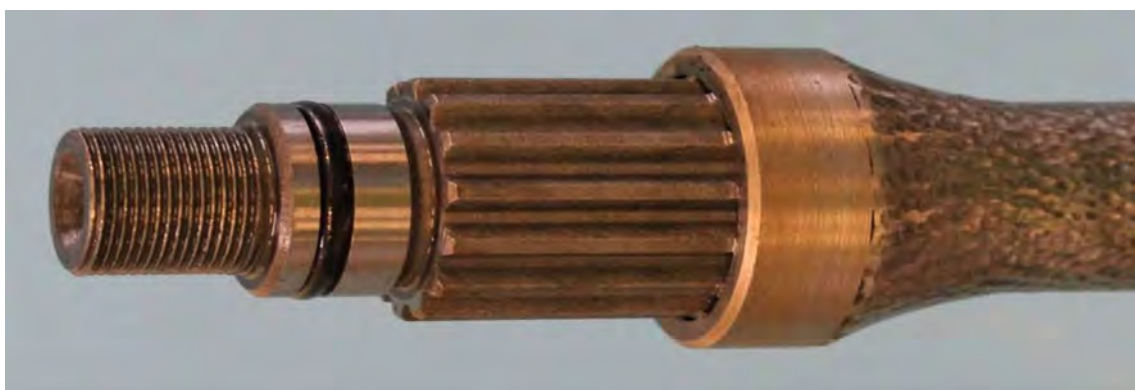


Рисунок 2. – Турбинный вал измененной конструкции

Схемы установки стандартного турбинного вала и вала измененной конструкции представлены на рисунке 3.

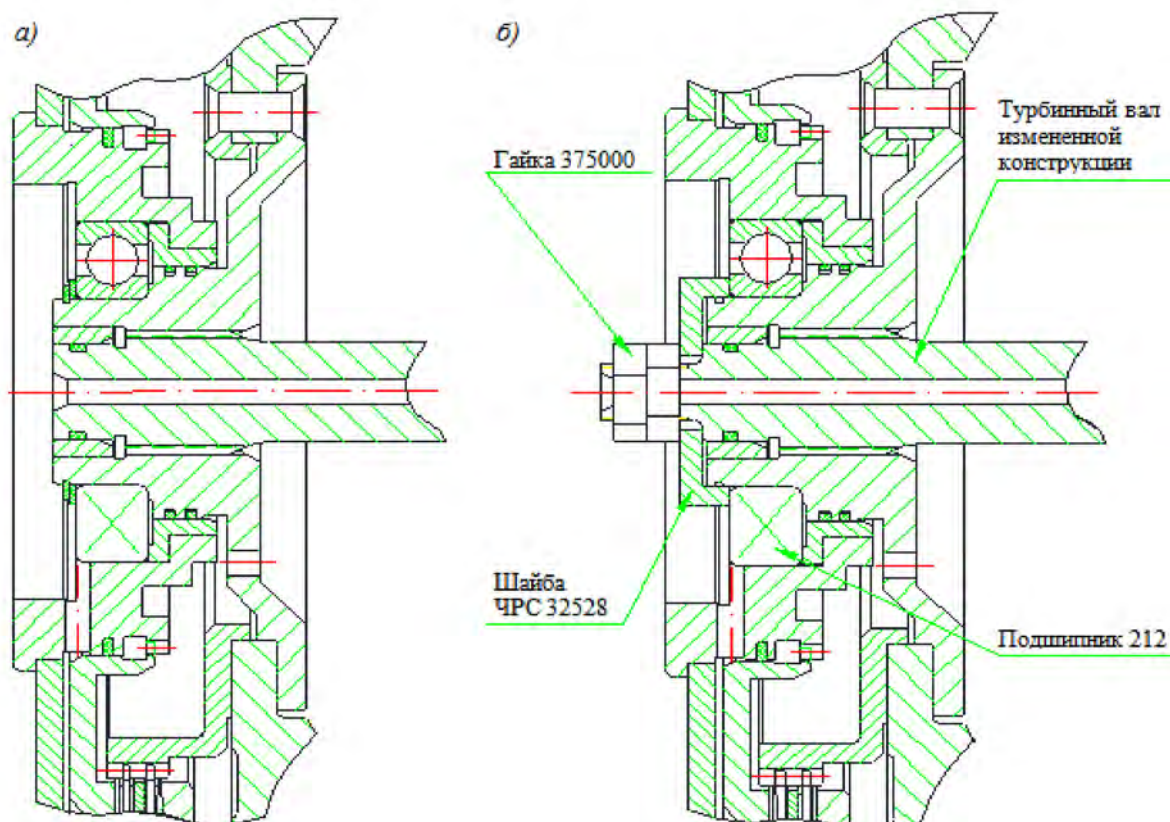


Рисунок 3. – Крепление турбинного вала: а) – стандартное, б) – измененной конструкции

## **2.Цель испытаний**

Поиск оптимального варианта конструкции ГМП для повышения ее ресурса.

## **3.Испытательное и измерительное оборудование**

Испытания ГМП проводились согласно Программы испытаний на стенде испытания ГМП под нагрузкой ИО-284. Стенд состоит из двух балансирных динамометров (приводного и тормозного), работающих в режиме «Скорость вращения».



1 – балансирный динамометр 1DS 1146 кV № 855675 (привод); 2 – испытуемый узел (ГМП);  
3 – балансирный динамометр 1DS 1146 кV № 850133 (тормоз)

*Рисунок 4. – Стенд ИО-284*

## ***4.Методы проведения испытаний***

4.1 Сборка ГМП с измененной фиксацией турбинного вала.

4.2 Проведение испытаний опытной ГМП на стенде под нагрузкой осуществлялось на каждой передаче с частотами вращения входного и выходного вала представленных в таблице 1.

Таблица 1. – Нагрузочные режимы при испытании ГМП с турбинным валом измененной конструкции

Передача	Частота вращения входного вала ГМП, мин <sup>-1</sup>	Частота вращения выходного вала ГМП, мин <sup>-1</sup>
1	2100	490
2	1700	500
3	1700	600
4	1700	850
5	1700	1160
6	1700	1350

В процессе испытаний контролировались температура масла на выходе из ГДТ (не превышала 90 °С), главное давление и давление смазки ГМП, стабильность величины крутящего момента на входном и выходном валах в установившемся режиме.

4.3 Периодический контроль (после наработки 100 ч на каждой передаче) состояния фильтра-заборника на предмет мелкодисперсных частиц.

4.4 Разборка ГМП и визуальная оценка узлов и деталей.

### 5. Результат испытаний

5.1. В процессе длительных испытаний ГМП со штатным турбинным валом из-за осевой силы, действующей на турбинный вал (по средствам силы трения в шлицевом соединении) со стороны трансформатора происходило разрушение подшипников, центрирующих водило второго планетарного ряда, а в последующем и износ осей и упорных шайб сателлитов планетарных рядов. Разрушение подшипников и износ осей и шайб сателлитов планетарных рядов представлены на рисунках 5-7.



Рисунок 5. – Разрушившийся подшипник 6008



*Рисунок 6. – Следы износа на двух осях сателлитов первого планетарного ряда*



*Рисунок 7. – Износ одной из четырех шайб сателлитов третьего планетарного ряда*

5.2 Испытания ГМП с измененной конструкцией турбинного вала показали, что данная конструкция является эффективной. Турбинный вал, зафиксированный на внутреннюю обойму подшипника 212, установленного в корпус блокировки гидротрансформатора, позволил снизить нагрузку на подшипники 6008 второго планетарного ряда и упорные шайбы сателлитов планетарных рядов, а в итоге увеличить ресурс подшипников, шайб сателлитов и ГМП в целом.

### **6 Заключение**

При стендовых испытаниях ГМП под динамической нагрузкой существует возможность задавать режимы нагрузки более высокие по отношению к реальным, что позволяет на более ранних стадиях выявить износ и разрушение деталей, а также снизить время испытаний и затраты на топливо, разрешение на проезд по дорогам общего пользования при дорожных испытаниях.

### **РЕЗЮМЕ**

Изложены некоторые результаты стендовых испытаний гидромеханической коробки передач с измененной конструкцией турбинного вала. Приводится сравнение

штатной конструкции и опытной. В статье представлены такие разделы как: объект испытаний, цели испытаний, испытательное и измерительное оборудование, методы проведения испытаний, результат испытаний и заключение. В статье присутствуют иллюстрации гидромеханической передачи, стенда для испытаний, опытной конструкция турбинного вала, а также разрушения подшипника и износа осей и упорных шайб сателлитов.

#### SUMMARY

*This article describes the bench tests hydromechanical transmission with a modified design of the turbine shaft. Provides a comparison of standard and experimental design. The article contains the following parts: the test object, the test purpose, test and measurement equipment, test methods, test result and conclusion. The article contains illustrations hydromechanical transmission test stand, experimental design of the turbine shaft and the destruction of the bearing and wear axles and thrust washers satellites.*

**E-mail:** [mparts@bntu.by](mailto:mparts@bntu.by)  
[kapusta@mail.ru](mailto:kapusta@mail.ru)

Поступила в редакцию 27.11.2013



## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫПУЧИВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СТРИНГЕРАМИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ С УЧЕТОМ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Мухутдинов Р.Ф., к.ф.-м.н. Шигабутдинов Ф.Г.

*«Казанский государственный архитектурно-строительный университет», Казань*

**Введение.** Предлагаемая работа является логическим продолжением работ авторов [1-5], посвященных исследованию волновых продольно - поперечных движений тонкостенных цилиндрических и конических оболочек при продольном ударе. Рассматривались движения оболочек идеальной формы и оболочек, которые имели различные отклонения в форме поперечных сечений. Эти отклонения носили характер ослабления поперечных сечений или усиления отдельных поперечных сечений оболочки. Оказалось, что в задачах это типа не удастся дать общие рекомендации по увеличению или уменьшению «суммарной» жесткости конструкции. Внесение любых конструктивных изменений в форме поперечного сечения оболочки требует нового исследования ее поведения при ударе. В данной работе исследуются движения цилиндрических оболочек, имеющих дискретное изменение толщины по фиксированной окружной координате по всей длине оболочки. Такие ситуации в оболочках возникают при изготовлении оболочек из плоского листа «внахлест» в промышленном производстве или в лаборатории при изготовлении оболочки из рулонной фольги.

Обзор работ в области динамического поведения тонкостенных конструкций до 1972 года можно найти в монографии [6]. обстоятельный обзор более поздних работ с оценкой эффективности и рекомендациями по применению численных методов можно найти в работе [7].

**Постановка задачи:** Общий вид оболочки и поперечного сечения показаны на рисунок1. Положения точек поверхности приведения определяются продольной координатой  $x$  и угловой координатой  $\theta$ . Начало правой системы координат  $Oxuz$  расположено на левом торце оболочки, воспринимающем удар. Ось  $Ox$  направлена вправо в массив оболочки, ось  $Oz$  – по внешней нормали к срединной поверхности оболочки. Вертикальная ось, проходящая через центр окружности, (сечения оболочки) является осью симметрии поперечного сечения. Угловая координата  $\theta$  откладывается от вертикального диаметра (рисунок1). В числовом примере принималось, что все поперечные сечения оболочки имеют два одинаковых локальных изменения толщины при  $\varphi = 90^\circ$  и  $\varphi = 270^\circ$ . Пусть в начальный момент времени изотропная цилиндрическая оболочка переменной толщины подвергается удару абсолютно твердым телом, ударяющим со скоростью  $v$ . Ударяющее тело перед ударом совершает поступательное движение. Направление вектора скорости ударяющего тела совпадает с положительным направлением оси  $Ox$  и тело ударяет оболочку плоскостью, параллельной торцевому сечению оболочки. Начальные условия удара формируются в предположении, что ударяющее тело после удара «прилипает» к торцу оболочки, воспринимающей удар, и в рассматриваемые промежутки времени выпучивания оболочки, движется вместе с ударяемым сечением. Материал оболочки предполагается упругим, что накладывает определенные условия на модули скоростей удара. Например, для «мягких» сталей это порядка 5м/с. Для тестирования программы и возможности использования ее для современных материалов с высокими прочностными характеристиками, в отдельных тестовых задачах материал принимался

неограниченно упругим. Это предположение позволяло значительно увеличивать скорости приложения ударных нагрузок и исследовать существенно нелинейные поперечные движения оболочки.

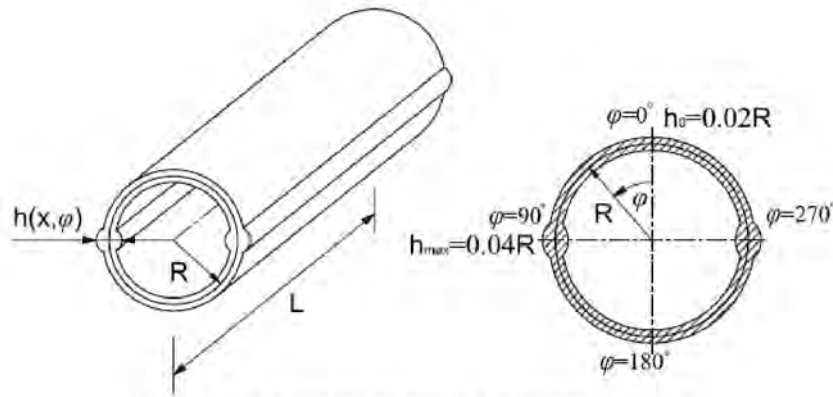


Рисунок 1. Общий вид оболочки и поперечное сечение

При сделанных предположениях геометрически нелинейные дифференциальные уравнения продольно поперечных движений тонкой упругой цилиндрической оболочки, учитывающие сдвиг, инерцию вращения и переменность толщины (уравнения типа С.П. Тимошенко) могут быть выведены из уравнений, полученных К.З. Галимовым в [8]. В нашем случае в цилиндрической системе координат они принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} &= \rho h(x, \varphi) u \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} &= \rho h(x, \varphi) v \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - \frac{T_{22}}{r} + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{T_{12}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( T_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{T_{22}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= \rho h(x, \varphi) w \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} - N_1 &= \frac{\rho (h(x, \varphi))^3}{12} \psi_1 \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} - N_2 &= \frac{\rho (h(x, \varphi))^3}{12} \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Соотношения физического закона упругости приняты в виде:

$$T_{11} = K(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); \quad T_{12} = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{12}; \quad T_{22} = K(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) \quad (2)$$

$$M_{11} = D \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right); \quad M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right); \quad M_{22} = D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \quad (3)$$

$$N_1 = k^2 \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \right); \quad N_2 = k^2 \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \psi_2 \right) \quad (4)$$

В цилиндрических координатах нелинейные геометрические соотношения записываются в виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \quad (5)$$

Кроме того в уравнениях (1) - (4) введены обозначения для жесткости

$$K = \frac{Eh(x, \varphi)}{1 - \nu^2}; \quad D = \frac{E(h(x, \varphi))^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (6)$$

В системе уравнений движения (1), физических и геометрических соотношений (2) – (5) все обозначения общепринятые.  $T_{11}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{12}$  – усилия в срединной поверхности оболочки,  $M_{11}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{12}$  – изгибающие и крутящий моменты в срединной поверхности оболочки,  $N_1$ ,  $N_2$  – перерезывающие силы.  $k^2$  – коэффициент сдвига в теории оболочек типа Тимошенко,  $G_{13}$  – модуль сдвига.  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки,  $\psi_1$  – угол поворота нормали к срединной поверхности вокруг касательной к окружности,  $\psi_2$  – угол поворота нормали к срединной поверхности вокруг нормали к окружности.  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$  – относительные деформации, соответствующие введенной системе координат.

Как видно из приведенных уравнений, они учитывают влияние прогибов и деформаций сдвига на тангенциальные компоненты перемещений в срединной поверхности.

Нужно отметить, что обсуждаемый ниже метод решения и составленная авторами программа не наложили ограничений на выбор граничных условий. Кроме того система уравнений (1) – (5) дополнялась нулевыми начальными условиями для перемещений в срединной поверхности оболочки.

**Обсуждение результатов.** Система уравнений (1)-(5) решалась методом конечных разностей. Уравнения (1) и соотношения (2)-(6) записывались в виде явной конечно-разностной схемы. Значения безразмерных шагов сетки принимались  $\Delta x = 0.005$  – по продольной координате,  $\Delta \varphi = 0.063$  – по угловой координате и  $\Delta t = 0.0025$  – по временной координате. Значения шагов были выбраны по результатам анализа числовых экспериментов с нелинейной разностной схемой задачи и соответствуют рекомендациям работы [9] – выбранный шаг по продольной координате не превышает трети минимальной толщины оболочки. Для оценки устойчивости разностной схемы проводились расчеты при различных шагах по временной координате:  $\Delta t = 0.005$ ;  $0.0025$ ;  $0.00125$ , шагах  $\Delta x = 0.01$ ;  $0.005$ ;  $0.0125$  – по продольной координате и шагах  $\Delta \varphi = 0.126$ ;  $0.063$ ;  $0.031$  – по угловой координате. С той же целью при тестировании разностной схемы и метода решения счет проводился до значений времени, соответствующего времени девяти пробегов продольной волны вдоль оболочки. Во всех случаях наблюдалась устойчивость счета. Схема оставалась устойчивой и при изменении скорости удара.

В качестве объекта исследования в примере расчета рассматривалась цилиндрическая оболочка, левый ударяемый край которой опирается на шарнирно подвижную опору, а правый край жестко заделан. В начальный момент оболочка считается недеформированной. В начальный момент времени оболочка считается недеформированной. Длина оболочки принималась равной  $2m$ , радиус поверхности приведения равнялся  $1m$ . Скорость удара изменялась в пределах от  $5m/c$  до  $50 m/c$ . Отношение массы оболочки к массе ударяющего тела принималось равным  $0.1$ . Изучались движения оболочки в течении времени, соответствующего шести пробегам продольной волны вдоль оболочки. На рисунок 2,3 показаны прогибы оболочки для скорости удара равной  $40m/c$ . Здесь по оси абсцисс отложено безразмерное время, по оси ординат – безразмерные прогибы. Представлены картины волнообразования в двух продольных сечениях оболочки. В расчетах толщина оболочки принималась  $h_0 = 0.02 m$ . В зоне стрингера толщина оболочки  $h = 0.04 m$ . На графиках безразмерные прогибы представлены отнесенными к толщине  $h_0$ .

Безразмерное время  $T = t/t_0$  получено делением времени  $t$ , истекшего с момента удара, на время  $t_0$ , равному времени однократного пробега продольной волны вдоль

длины оболочки. На рисунок3 и рисунок4 представлены сплошными линиями по четыре графика прогибов для четырех моментов времени  $T=2,25; 2,5; 2,75; 3,0$ . То есть показаны прогибы, когда продольная волна третий раз «бежит» по оболочке (от ударяемого торца к заделанному). На графиках показаны прогибы, когда волна распространилась на четверть оболочки ( $T=2,25$ ), на половину оболочки ( $T=2,5$ ), на три четверти длины оболочки ( $T=2,75$ ) и, наконец, дошла до заделанного торца ( $T=3,0$ ). Штрих пунктирными линиями для сравнений на тех же рисунках показаны формы движения оболочки постоянной толщины, в тех же сечениях и в те же моменты времени. При этом на всех приведенных рисунках меньшему моменту времени соответствует ниже лежащий график.

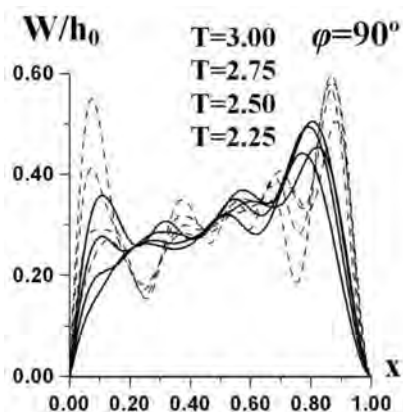


Рисунок 2. Прогибы оболочки  $\varphi = 90^\circ$

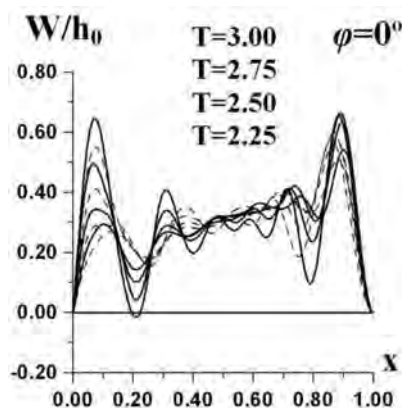


Рисунок 3. Прогибы оболочки  $\varphi = 0^\circ$

На рисунок2 показаны прогибы в сечении с угловой координаты  $\varphi = 90^\circ$ , где оболочка имеет утолщение. Толщина стрингера, как отмечалось, составляет две толщины оболочки и равна  $h=0.04$  м. Оболочки постоянной толщины в этот момент времени наиболее интенсивно изгибаются у торцов. Локальное усиление оболочки уменьшает величину относительного прогиба на 20-30% как на ударяемом, так и на заделанном торце оболочки, но качественный характер распределения прогибов остается прежним. Наблюдается тенденция к изменению числа полуволн.

Рисунок3 соответствует значению угловой координаты  $\varphi = 0^\circ$ . Здесь  $h = h_0 = 0.02$  м. В этом сечении возникают максимальные прогибы. Величины прогибов на обоих торцах оболочки увеличиваются на 10-15% по сравнению с оболочкой постоянной толщины. Другими словами, при ударе стеснение оболочки в одних сечениях, вызывает интенсивное деформирование в других сечениях.

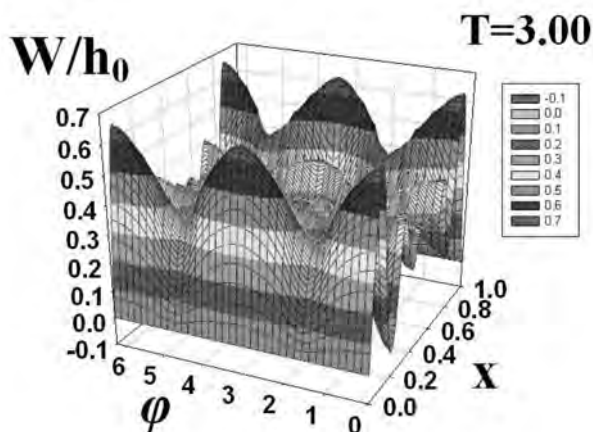


Рисунок 4. Прогибы по всей поверхности оболочки к моменту  $T=3$

На рисунок 4 представлена пространственная «развертка» картины волнообразования по всей оболочке к моменту времени  $T=3$ , то есть к моменту времени, когда продольная волна во второй раз достигла заделанного торца оболочки (продольная волна три раза пробежала вдоль оболочки). По одной из осей откладывается продольная координата  $x$ , по другой – угловая координата  $\theta$  (от 0 до  $2\pi$ ). Шаг по координате  $\theta$  соответствует на графике  $57^\circ$ . По вертикальной оси откладываются прогибы. Линия  $x=0$  соответствует ударяемому торцу. Линия  $x=1$  соответствует правому заделанному торцу оболочки. Отчетливо видна симметричность картины прогибов по угловой координате, обусловленная симметричностью поперечного сечения относительно вертикальной оси. Как видим, всюду в момент времени  $T=3$  оболочка выпучивается в выпуклую сторону. Заметно влияние изменения толщины на места образования максимальных прогибов. Наглядно представлено образование поперечных волн.

## РЕЗЮМЕ

Наличие стрингеров ведет к перераспределению поперечных волн: приводит к уменьшению относительных прогибов в усиленном сечении, но увеличивает прогибы в остальных сечениях оболочки. Картина изгибания оболочки существенно зависит от конкретного момента времени или, другими словами, от напряженного состояния оболочки в конкретный момент времени. В целом можно заключить, что при проектировании оболочек с усилениями необходимо проводить полное обследование конструкции на предмет перераспределения деформаций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шигабутдинов Ф.Г., Мухутдинов Р.Ф. Распространение упругих волн от продольного удара по оболочкам переменной толщины с нулевой гауссовой кривизной срединной поверхности // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, 2011г., том IV, Часть 5, с. 2374 – 2376.
2. Шигабутдинов Ф.Г., Мухутдинов Р.Ф. Влияние несимметрично расположенных шпангоутов на поперечное волнообразование ортотропных цилиндрических оболочек конечной длины при продольном ударе // «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Труды X международной Четаевской конференции, Казань, 12-16 июня 2012г. Том 1. Аналитическая механика. / Казань: КНИТУ-КАИ им.А.Н.Туполева. - 2012 г. – с. 521-528.
3. Мухутдинов Р.Ф., Шигабутдинов Ф.Г. Влияние местных дефектов на волнообразование в ортотропных цилиндрических оболочках конечной длины при продольном ударе // Вестник МГСУ, №10, 2013г., с. 60-67.
4. Шигабутдинов Ф.Г., Мухутдинов Р.Ф. Влияние форм и размеров местных дефектов на картину выпучивания цилиндрической ортотропной оболочки при продольном ударе. / В Международном научно – техническом сборнике «Теоретическая и прикладная механика». / Минск: БНТУ, 2014, вып. 29, с.65-68.
5. Мухутдинов Р.Ф., Шигабутдинов Ф.Г. Поперечные волны в ортотропных конических оболочках с локальными изменениями толщины при продольном ударе / Материалы Всероссийской конференции посвященной 100-летию со дня рождения проф. М.Т.Нужина «Обратные краевые задачи (ОКЗ) и их приложения», Казань, 20-24 октября 2014года // Казань: Из - во Казанского (Поволжского) Федерального ун-та, 2014г. – 1 электрон. опт. диск. – текстографические материалы. (CD-ROM, объем

- ЭИ:51Мб). Электр. Ресурс. –<http://kpfu.ru/math/konferencii-instituta/vserossijskaya-nauchnaya-konferenciya-39obratnye/materialy>
6. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек // М., Наука, 1972, 432с.
  7. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций // Изв. РАН, МТТ, 2001, №5, с. 156-173.
  8. Галимов К.З. и др. // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Казань: Изд-во КГУ, 1977, с. 3-132.
  9. Гордиенко Б.А. О машинном решении задач ударного выпучивания упругих систем методом конечных разностей // Изв. АН СССР, МТТ, 1970, №3, с. 143-148.

### SUMMARY

*Availability stringers leads to a redistribution of the transverse waves leads to a decrease in the relative deflections of the strengthened section, but increases the deflections in the other sections. Painting bending shell depends on the particular point in time or the stress state of the shell at a time. In general, we can conclude that the design of shells with reinforcements necessary to conduct a full examination of the design for the redistribution of deformation.*

**E-mail:** [ktm80@yandex.ru](mailto:ktm80@yandex.ru)  
[shigfg@mail.ru](mailto:shigfg@mail.ru)

Поступила в редакцию 01.11.2014

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПРЕПРЕГА ПРИ ПРОКОЛЕ В НЕМ КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ

д.ф.-м.н. <sup>1</sup>Василевич Ю.В., к.т.н. <sup>2</sup>Сахоненко В.М., к.т.н. <sup>1</sup>Сахоненко С.В.,  
<sup>1</sup>Неумержицкая Е.Ю.

<sup>1</sup>УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

<sup>2</sup>ОАО «Авангард» Сафоново, Россия

Альтернативой просверлённым отверстиям является формование их методом прокалывания в еще неотвержденном полимерно-волокнутом материале конструкции. Хотя в процессе формования отверстия с помощью заостренного стержня - индентора происходит раздвигание нитей и нарушение регулярной структуры материала изделия, однако силовое поле армирующих волокон в этом случае не прерывается, стенка отверстия из-за повышенного содержания волокон уплотняется, что и приводит к увеличению прочности на смятие между крепежным элементом и стенкой отверстия. В результате прокола нити теряют свое первоначальное прямолинейное положение, изгибаются и растягиваются. Наибольшему деформированию подвергаются нити, соприкасающиеся с поверхностью стержня. Осуществляют прокол отверстия на стадии, когда композиционный материал находится в состоянии препрега, т.е. когда полимерное связующее неотверждено и обладает минимальной величиной вязкости. Поэтому по мере продвижения конической части стержня возрастает зона уплотнения материала и повышается внутрислойное давление, которое приводит к перетеканию вязкого связующего через пористую волокнистую арматуру материала. При достаточно медленном процессе прокалывания через некоторое время наступает равновесное состояние измененной структуры материала с внедренным в нее индентором.

Пусть осуществлен прокол отверстия стержнем кругового сечения в многослойном препреге из тканых материалов, у которых нити утка и основы образуют взаимно-перпендикулярные семейства нитей. Это позволяет с полной уверенностью утверждать, что после установления равновесия все основные параметры этого процесса будут соблюдать симметрию относительно координатных осей. При этом (см. рис.1) та нить семейства «1», которая до деформации занимала положение на оси  $Ox$ , после деформации будет занимать положение на линии  $ABCF$ , нить семейства «2», лежащая на оси  $Oy$  до деформации, займет положение  $EM_1BCD$  после прокола отверстия. Линия  $ABCD$  - это граница отверстия. После прокола отверстия препрег, расположенный в первом квадранте, можно разделить на зоны, имеющие характерные особенности: зона, ограниченная линией  $HMAVM_1E$ , содержит только нити семейства «1»; зона, в которой содержатся только нити семейства «2», ограничена линией  $CFGD$ ; замкнутая зона  $BCB$  обладает тем свойством, что во всех точках этой зоны угол между нитями семейств равен нулю. Точки  $H$  и  $E$  - это точки, лежащие на одной и той же нити семейства «2» до деформации и после деформации соответственно, характеризующиеся тем, что они определяют границу деформативности нити. Точки  $F$  и  $G$  характеризуют участок деформативности нити семейства «1».

В этих зонах также выполняются условия равновесия [1], на основании которых следует, что напряжения растяжения и сжатия вдоль каждой из нитей в зоне  $BCB$  постоянны. Это положение позволяет легко связать напряженное состояние в точках основной зоны, ограниченной линией  $MM_1BCF$  с остальными зонами, расположенными в первом квадранте.

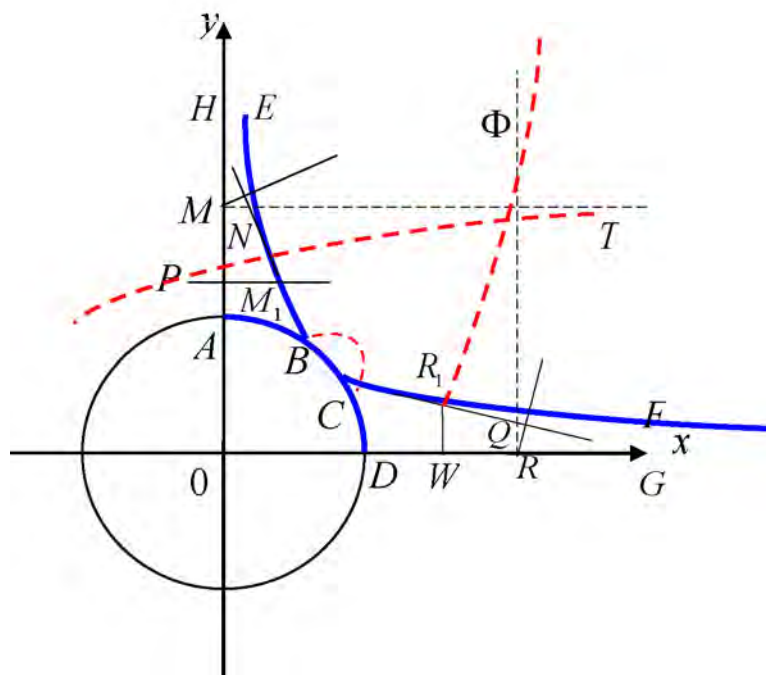


Рисунок 1. - Схема расположения характерных зон препрега после прокола отверстия.

Рассмотрим несколько подробнее зону  $HMABM_1E$ , вернее то, как в ней расположены нити семейства «1». На границе отверстия, т.е. на линии  $AB$  нити занимают положение части дуги окружности радиуса  $R_0$  - радиус отверстия. Рассматриваемая зона освобождена от нитей семейства «2», поэтому на границе  $EM_1B$  и вблизи нее нити семейства «1» расположены менее плотно, чем внутри зоны. Поэтому, чем дальше от линии  $AB$ , тем быстрее распрямляется та часть нити, семейства «1», которая находится в рассматриваемой зоне. На некотором расстоянии от точки  $A$  вдоль оси  $Oy$  найдется нить, которая в зоне будет представлять собой отрезок. Также и все нити, расположенные выше, обладают этим свойством. Поэтому в местах пересечения нитей семейства «1» с линией  $EM_1B$  должен быть излом нитей. Под изломом следует понимать скачкообразное изменение касательных к нитям семейства «1» в точках перехода через линию  $EM_1B$ . Следует провести параллель между существованием излома нитей в точках резкого изменения граничных условий и поведением напряжений в таких же точках для твердого упругого тела. Как известно, в подобных точках для твердого упругого тела имеет место концентрация напряжений. Поэтому, если в теории упругости твердых тел позволительна концентрация напряжений, то в теории деформации препрегов – излом нитей.

Кроме установленного ранее понятия плоской среды исследования в виде препрега будем иметь в виду, что его размеры в плане достаточны для того, чтобы деформация со сдвигом при проколе отверстия не затрагивала бы точек препрега на достаточном удалении. Для этого, по крайней мере, достаточно считать, что препрег занимает всю плоскость, включая бесконечно удаленную точку.

Прежде чем поставить граничные условия для рассматриваемой задачи отметим, что в данной постановке она имеет осевую симметрию. В таком случае следует рассматривать граничные условия на линии  $EM_1BCF$  (см. рис. 1). На участке границы вдоль линии  $BC$  нити обоих семейств имеют форму дуги окружности радиуса  $R_0$ . Это трансформируется в выполнение следующих трех условий:

$$R_1 = -R_0, \quad R_2 = -R_0, \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$



где  $R_1, R_2$  - радиусы кривых, представляющих собой нити семейств после деформации;  $\alpha_1, \alpha_2$  - углы, образованные касательными к кривым с осью  $Ox$

В общем случае граничные условия на каком – то участке границы могут выражаться следующими зависимостями:

- в виде заданных напряжений или перемещений для семейства нитей;
- описывающими форму границы области;
- дающими выражение связей между напряжениями или перемещениями обоих семейств нитей;
- дающими описание других связей при решении задач, имеющих не меньшее значение для приложений.

Все это должно выражаться функциональными зависимостями. Граничные условия при этом, очевидно, могут быть в большом диапазоне произвольными, однако количество таких условий должно быть равно трем.

Рассмотрим, какие функциональные зависимости имеют место при проколе отверстия в условиях поставленной задачи. Отметим, что границу  $EM_1B$  формирует крайняя нить семейства «2», а границу  $CF$  формирует нить семейства «1». Граница  $EM_1B$  характеризуется тем, что здесь нормальное давление равно нулю, так как отсутствует внешняя нагрузка на крайнюю нить семейства «2», кроме растягивающих усилий. Таким образом, в любой точке границы  $EM_1B$  напряжения сжатия семейства нитей «2» равны нулю.

Второе граничное условие на границе  $EM_1B$  должно быть поставлено для нитей семейства «1». Для этого обратим внимание, что как до прокола отверстия, так и после точки всех нитей семейства «1», лежащие на оси  $Oy$ , остаются на этой же оси. Точное отражение этой зависимости представляет собой интегральное уравнение, решение которого несколько затруднительно. Более удачное представление этого граничного условия будет результатом пренебрежения бесконечно малыми более высокого порядка малости. Действительно, угол  $\alpha_1$  изменяется достаточно мало и это изменение колеблется около значения  $2\pi$ . Кроме того, можно предположить, что нити семейства «1» в зоне  $HMAVM_1E$  растягиваются равномерно. Поэтому проекция перемещения на ось  $Ox$  всех точек границы  $EM_1B$  равна величине отрезка нити длиной  $x_0$  вместе с его упругими и неупругими деформациями. Здесь  $x_0$  - координата точки на нити семейства «1» до деформации, которая после деформации принадлежит линии  $EM_1B$ . Таким образом, во всех точках границы  $EM_1B$  выполняется следующее соотношение:

$$\left(1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}\right)x_0 = -u_2 \sin \alpha_2 + v_2 \cos \alpha_2. \quad (1)$$

Здесь  $\gamma_{11}$  и  $\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}$  - неупругая и упругая части относительной деформации нити семейства «1» [2]. Правая часть равенства определяет координату  $x_1$  точки  $M_1$ , причем  $u_2 = MN$ ,  $v_2 = MM_1$  - компоненты перемещения точки  $M$  в точку  $M_1$ , определяемые как проекции перемещения точки  $M$  на нормаль и касательную в точке  $M_1$ . Нетрудно показать, что

$$u_2 = c_{21} \sin \alpha_2 + c_{22} \cos \alpha_2 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} [Z_{22} R_2 \cos \alpha_2 - R_2 \sin(\alpha_2 - \alpha)] d\alpha, \quad (2)$$

$$v_2 = c_{22} \sin \alpha_2 - c_{21} \cos \alpha_2 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} [Z_{22} R_2 \sin \alpha_2 + R_2 \cos(\alpha_2 - \alpha)] d\alpha.$$

В результате подстановки (2) в (1) найдем:

$$x_0 = Z_{11} \left[ -c_{21} + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} R_2 \cos \alpha d\alpha \right], \quad (3)$$

где  $Z_{11} = \frac{1}{1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}}$ ;  $Z_{22} = \frac{1}{1 + \gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}}}$ ;  $c_{21}, c_{22}$  - произвольные постоянные.

Отметим, что равенство (3) будет абсолютно выражать граничное условие, если участок границы  $AB$  (рис.1) будет представлять собой отрезок параллельный оси  $Ox$ . Отверстие при этом будет не совсем круглым, а таким как на заштрихованной части рис. 2.

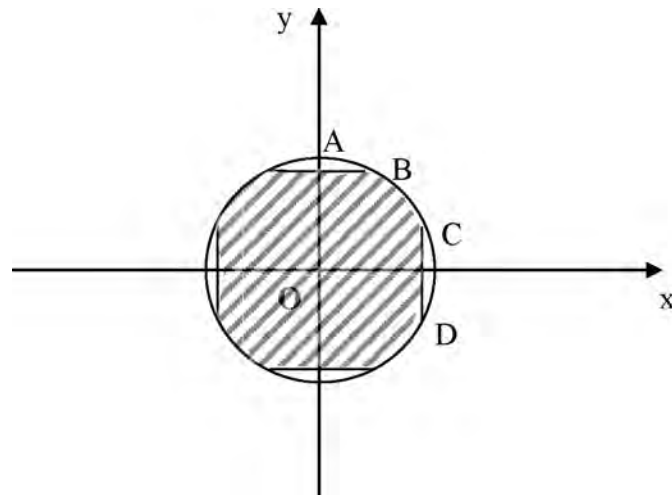


Рисунок 2. - Сечение прокалывающего элемента.

Если отверстие в препреге представлено таким как на рис. 2, то все нити семейства «1» в зоне  $HMAVM_1E$  (см. рис. 1) прямолинейны. Для круглого отверстия нить  $AB$  имеет форму дуги окружности. Поэтому на некотором расстоянии от точки  $A$  все нити семейства «1» тоже будут искривлены. Такое искривление отражается на точности граничного условия (3). Однако найдется точка, выше которой нити семейства «1» имеют прямолинейную форму в рассматриваемой зоне и поэтому там граничное условие (3) выполняется точно.

На границе  $CF$  аналогичные граничные условия представляются в виде:

$$S_0 - y_0 = Z_{22} \left( -c_{12} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} R_1 \sin \alpha d\alpha \right). \quad (4)$$

Рассмотрим, чему может быть равно выражение  $\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2}$  на участке границы  $EM_1B$ , если на этом участке  $\sigma_{21} = 0$ .

Отметим, что частные производные первого и второго порядков от функции  $\sigma_{21}$  по переменным  $R_1, R_2, \alpha_1, \alpha_2$  непрерывны как внутри области, так и в любой точке границы [1], поэтому будут справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial R_1} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) \frac{dR_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) \frac{dR_2}{d\alpha_2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) = \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \right) \frac{dR_1}{d\alpha_2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) \frac{dR_2}{d\alpha_2} + \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \right) \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \cdot \frac{dR_1}{d\alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \cdot \frac{dR_2}{d\alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} \right) - \\ &- \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial R_1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial R_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \cdot \frac{dR_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \cdot \frac{dR_2}{d\alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} \right) - \\ &- \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial R_1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial R_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right). \end{aligned}$$

Выражение в круглых скобках в первом слагаемом представляет собой обычную производную по переменной  $\alpha_2$  от функции  $\sigma_{21}$ . Поэтому первое слагаемое на основании равенства нулю  $\sigma_{21}$  имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{d\sigma_{21}}{d\alpha_2} \right) = 0.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое:

$$-\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \right) = -\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right) = -\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial R_2} \right) = 0.$$

Здесь параметр  $\alpha_1$  зависит только от переменной  $\alpha_2$ , поэтому предыдущие преобразования справедливы на основании очевидных равенств:

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial R_2} \right), \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial R_2} = 0.$$

На этом основании равны нулю и остальные слагаемые. Следовательно,

$$\frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} = C_2, \tag{5}$$

где  $C_2$  - произвольная постоянная, не зависящая от переменной  $\alpha_2$ .

Аналогичную зависимость можно получить на участке границы  $CF$  :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial R_1} = C_1, \tag{6}$$

где  $C_1$  - произвольная постоянная, не зависящая от переменной  $\alpha_1$ .

Граница области деформирования на периферии характеризуется предсдвиговым состоянием. Это означает, что во всех периферийных точках границы выполняются следующие соотношения:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0, \sigma_{22} = \sigma_{22}^0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{21} = 0,$$

где  $\sigma_{11}^0$  и  $\sigma_{22}^0$  - предельные напряжения растяжения, обеспечивающие предсдвиговое состояние;  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{21}$  - напряжения сжатия соответствующих семейств нитей.

Представленные граничные условия вместе с изложенными уравнениями в [1], [2] позволяют определять напряжения сжатия и растяжения в каждом семействе нитей при проколе отверстий в препрегах. При этом очевидно, что напряжения могут достигать предельных значений, при которых наступает момент разрушения армирующего материала. Вследствие этого возникают вопросы о создании и оформлении теоретических и экспериментальных основ учения о «прочности» препрегов и изделий из них. Здесь следует заметить, что можно судить о прочности при растяжении путем экспериментальной проверки прочности при растяжении армирующего материала. Такие эксперименты многочисленны, проверены и убедительны. Что касается сжатия армирующего материала в вязкоупругом состоянии, то таких испытаний до сих пор не проводилось, отсутствуют методики их проведения и поэтому нет ни малейшего представления ни о предельной величине таких напряжений, ни о тех факторах, которые связывают их с напряжениями растяжения, вообще говоря, неотделимых друг от друга.

В заключение можно сделать следующие выводы:

- изложенная в статье теория построения математической модели прокола отверстий в препрегах может быть обобщена и на другие задачи, касающиеся препрегов, если только напряженное состояние в них не приводит к потере устойчивости армирующего материала;
- граничные условия в количестве трех функциональных зависимостей для препрегов могут быть в большом диапазоне произвольными, выражающими либо заданные напряжения, либо перемещения, либо описывающими форму границы, либо выражающими связь между напряжениями и перемещениями и др.

#### РЕЗЮМЕ

Разработана математическая модель поведения препрега при проколе в нем круглого отверстия.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сахоненко С.В. Уравнения равновесия при плоском напряженном состоянии препрегов // Вестн. Белорус. гос. уни-та. Сер. 1- 2004-№2.
2. Сахоненко С.В. Процессы растяжения и сжатия в материале препрегов при проколе отверстий / БГУ – Минск, 2004 – Деп. в ГУ «БелИСА» 10.03.2005 - №Д200576.

#### SUMMARY

*The mathematical model of the behavior of the prepreg puncture it round hole.*

E-mail: [smat@bntu.by](mailto:smat@bntu.by)

Поступила в редакцию 17.09.2014

## РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МУЛЬТИМЕДИЙНОЙ РАБОТЫ ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ В КУРСЕ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

к.ф.-м.н. Бокун Г.С., к.ф.-м.н. Гапанюк Д.В., студ. Савинко А.А.,  
студ. Савинко П.А.

*Белорусский государственный технологический университет, Минск*

**Введение.** Внедрение компьютерных технологий позволяет эффективно решать задачи по теории механизмов и машин. Для проектирования целесообразно использовать пакеты общего пользования, в частности Mathcad и КОМПАС [1-5], позволяющие наглядно отражать получаемые результаты.

В данной работе описывается процесс построения картины эвольвентного зубчатого зацепления и расчета параметров колес средствами пакетов Mathcad и КОМПАС, демонстрирующий развитие и совершенствование разработанных ранее подходов по применению компьютерных технологий в учебном процессе. Для более эффективного усвоения материала разработанный ранее компьютерный практикум дополнен мультимедийными лабораторными работами. Здесь излагается содержание работы, предназначенной для проектирования эвольвентной зубчатой передачи. Сначала дается описание проектирования с использованием пакета Mathcad, затем полученные результаты сопоставляются с картиной зацепления построенной с использованием пакета КОМПАС.

**Основная часть.** Процесс проектирования картины зубчатого эвольвентного зацепления в пакете Mathcad начинается с задания основных параметров: числа зубьев первого и второго колес, коэффициентов смещения исходного контура для первого и второго колес, модуля зубьев, коэффициента высоты зуба и коэффициента радиального зазора.

Далее следует геометрический расчет параметров зубчатых колес. Задается функция для вычисления инвалюты. Вычисляется угол зацепления прямозубой передачи, делительное межосевое расстояние, коэффициенты воспринимаемого и уравнивающего смещения, высота зуба и передаточное отношение. Для непосредственного построения картины эвольвентного зубчатого зацепления необходимо произвести расчет радиусов делительной, основной и начальной окружностей, а также окружностей впадин и вершин отдельно для каждого из колес. Производится расчет окружной делительной толщины зуба, угла профиля зуба на окружности впадин, окружной толщины зуба по вершинам, половины угловой ширины вершины, угловой ширины одной эвольвентной части зуба, половины угловой ширины впадины.

Для построения изображения необходимо задать соответствующее количество шагов, на которое разбивается один угловой шаг зубчатого колеса. Далее уравнениями описывается одна часть зуба посредством задания радиуса впадин, эвольвенты и радиуса вершин. После чего задается вторая часть зуба, а также все остальные зубья через необходимый угловой шаг. Изображение второго колеса строится аналогично.

Для нахождения точки касания зубьев колес и построения анимации движения, а точнее положения механизма в каждый из моментов времени, используется вариант автоматического программного управления. Основан он на специфическом использовании оператора FRAME, позволяющего организовать вычисления в цикле, когда расчетные данные в конце цикла записываются в отдельный файл и считываются,

как начальное приближение соответственно в начале цикла. В результате каждое новое решение системы уравнений, определяющей функции положения механизма, находится как уточнение результатов предыдущего решения. Готовая картина эвольвентного зацепления показана на рисунке 1.

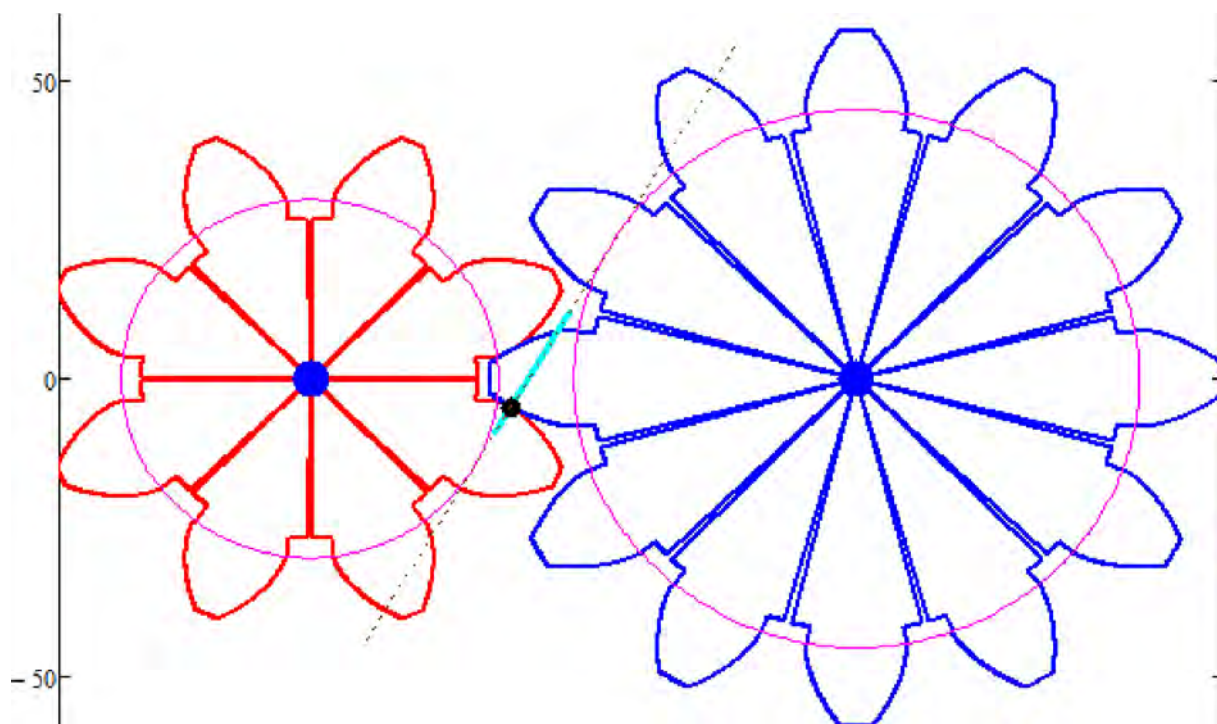


Рисунок 1. – Скриншот картины эвольвентного зацепления в пакете Mathcad

Наряду с использованием видеофильма, демонстрирующего особенности эвольвентного зацепления в Mathcad, предлагается осуществить вычерчивание картины зацепления в пакете КОМПАС. Это дает возможность ознакомиться в каждом конкретном случае не только с линией зацепления, как в случае упомянутой анимации, но и с другими характеристиками, такими как угловые и линейные шаги, делительная, начальная, основная окружности, углами перекрытия и зацепления и т. п.

Процесс построения картины зацепления в КОМПАС начнется с задания межосевого расстояния при помощи инструмента «отрезок», на концах которого строятся неподвижные шарниры при помощи инструментов «отрезок», «окружность» и «штриховка».

Далее из центра двух шарниров при помощи инструмента «окружность» проводятся окружности, равные радиусам делительной, начальной, основной окружностей, а также окружностей впадин и вершин (по пять окружностей для каждого колеса). Можно также воспользоваться вместо окружности инструментом «дуга». Для задания размеров на чертеже необходимо перейти в раздел «размеры» компактной панели, выбрать «радиальный размер» и указать размеры для всех окружностей.

Для демонстрации полюса зацепления необходимо провести касательную для к основным окружностям. Для этого выбирается раздел геометрии и инструмент «касательная к двум кривым» и проводится касательная к основным окружностям.

Для построения эвольвентных профилей зубьев необходимо графически реализовать обкатку основной окружности касательной. Для этого можно использовать инструмент «касательный отрезок через точку кривой». С помощью этой опции можно вычерчивать касательные отрезки требуемой длины, исходящие из заданных точек окружности.

Чтобы построить профиль зуба, необходимо по окружности вершин задать отрезок, равный половине толщины зуба по окружности вершин. Затем отразить ранее построенную эвольвенту от оси, проходящей через конец этого отрезка и центр колеса. Для этого необходимо выделить одним щелчком отражаемый фрагмент, выбрать в разделе «редактирование» опцию «симметрия», затем указать последовательными щелчками расположение оси симметрии и завершить построение. Для изображения остальных зубьев надо повторить рассмотренную процедуру, предварительно изобразив ось симметрии начерченного зуба. Последующий ее поворот на величину углового шага позволит выполнить построение других зубьев методом отражения, при условии, что поворачиваемый фрагмент будет предварительно выделен удерживанием левой клавиши мыши.

Если радиус основной окружности превосходит радиус окружности впадин, процедура построения бокового профиля зуба видоизменяется. На том участке, где не существует эвольвенты, боковой профиль очерчивается радиальным отрезком. Для его построения через центр колеса и начальную точку эвольвенты, лежащую на основной окружности, проводим вспомогательную прямую, используя соответствующую опцию из раздела «геометрия». Затем на этой прямой откладываем отрезок, расположенный между основной окружностью и окружностью впадин. Далее вспомогательная прямая удаляется как самостоятельный объект. Картина готового зацепления представлена на рисунке 2.

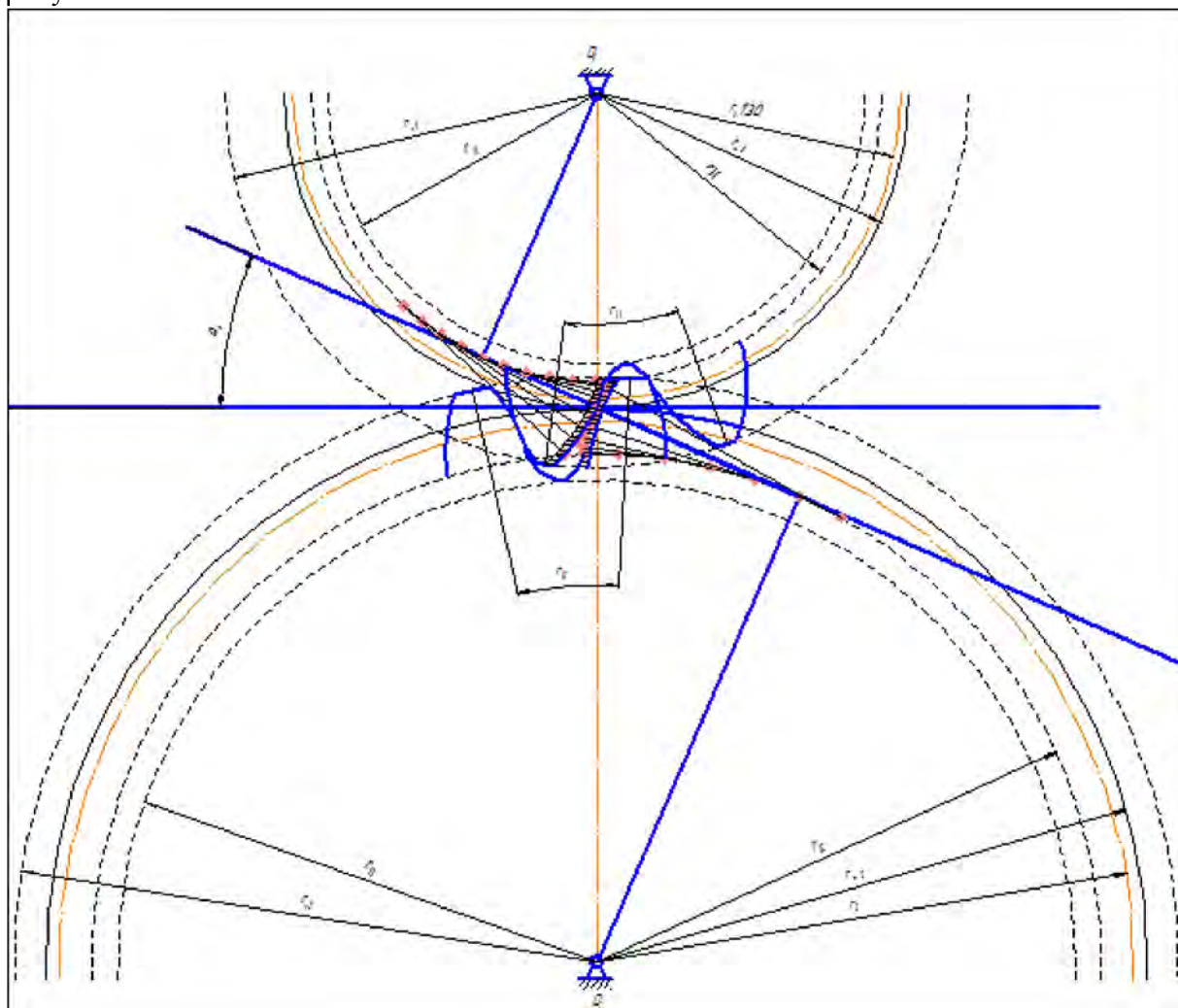


Рисунок 2. – Скриншот картины эвольвентного зацепления в пакете КОМПАС

Весь процесс построения картины эвольвентного зацепления в пакете КОМПАС был записан в видео файл при помощи программы для снятия скриншотов FsCapture. Используя встроенные возможности данной программы, удалось сделать монтаж записанного видеоматериала, добавить текстовые и звуковые пояснения. В результате чего был получен готовый продукт – пошаговая аудио-видео инструкция для построения картины эвольвентного зацепления в графическом пакете КОМПАС.

**Заключение.** Описанные методические разработки были использованы для выполнения курсового проекта по ТММ в форме индивидуальной самостоятельной работы в дисплейных классах университета. Для обеспечения выполнения указанной работы с помощью программных подходов, позволяющих осуществить захват экрана, была составлена аудио-видео инструкция, где демонстрируется и поясняется вся последовательность шагов по выполнению всех необходимых действий на компьютере. Использованные дополнительные возможности программного управления опциями пакета явились гарантом успешного проектирования картины эвольвентного зацепления цилиндрической зубчатой передачи.

### РЕЗЮМЕ

Представлен опыт кафедры теоретической механики по внедрению компьютерных методов при проектировании механизмов во время обучения студентов по курсу теории машин и механизмов. Дано описание мультимедийной компьютерной работы, используемой для проектирования зубчатой передачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бокун, Г. С. Применение информационных технологий для учебного проектирования механизмов / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, С. А. Гляков // Теоретическая и прикладная механика: межведомственный сборник научно-методических статей. – Минск: БНТУ, 2005. – Вып. 18. – С. 215–220.
2. Бокун, Г. С. Опыт внедрения компьютерных технологий в проектирование по курсу теории механизмов и машин / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, Д.В. Гапанюк // Труды БГТУ – Минск: БГТУ, 2009. – Серия 8. – Вып. 10. – С. 45–47.
3. Бокун, Г. С. Компьютерный практикум по проектированию рычажных механизмов / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, Д. В. Гапанюк // Теоретическая и прикладная механика: межведомственный сборник научно-методических статей. – Минск: БНТУ, 2011. – Вып. 26. – С. 248–252.
4. Компьютерная механика. Динамический и кинематический анализ: курс лекций/ С.А. Гляков [и др.]: под ред. М.А. Журавкова. -Минск: БГУ, 2006. -375с.
5. Бокун, Г. С. Использование функциональных представлений MATHCAD в задачах динамики по курсу ТММ / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, Д.В. Гапанюк // Теоретическая и прикладная механика: межведомственный сборник научно-методических статей. – Минск: БНТУ, 2010. – Вып. 25. – С. 312–316.

### SUMMARY

*The experience of the Department of Theoretical Mechanics in implementation of computational methods during training of students in the field of mechanisms design in the course of the Theory of Machines and Mechanisms is represented. The description of a multimedia lab for designing gear is given.*

**E-mail:** [tm@belstu.by](mailto:tm@belstu.by)  
[gapdm@mail.ru](mailto:gapdm@mail.ru)

Поступила в редакцию 10.09.2014



## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ НАНОТРУБОК ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ НАГРУЖЕНИЯ

д.ф.-м.н.<sup>1</sup>Журавков М.А., к.ф.-м.н.<sup>1</sup>Чумак Н.Г., к.ф.-м.н.<sup>2</sup>Мартыненко И.М.

<sup>1</sup>УО «Белорусский государственный университет», Минск

<sup>2</sup>УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Наноматериалы среди новых перспективных материалов занимают особое место. Использование нанокompозитных материалов в различных областях современного производства представляется вполне оправданным, так как этим материалам, как правило, присущи высокие значения прочности и трещиностойкости, они обладают особыми деформационными свойствами и характеристиками. Во всем многообразии наноматериалов выделяются углеродные наноматериалы, такие как углеродные нанотрубки (УНТ). Они могут быть представлены как в форме отдельных нанообъектов, так и в виде совокупностей или набора частиц, погруженных в матрицу другого материала.

Углеродная нанотрубка (УНТ) представляет собой однослойную либо многослойную цилиндрическую оболочку (рисунок 1) диаметром от одного до нескольких десятков нанометров и длиной от одной десятой до нескольких десятков микрон.

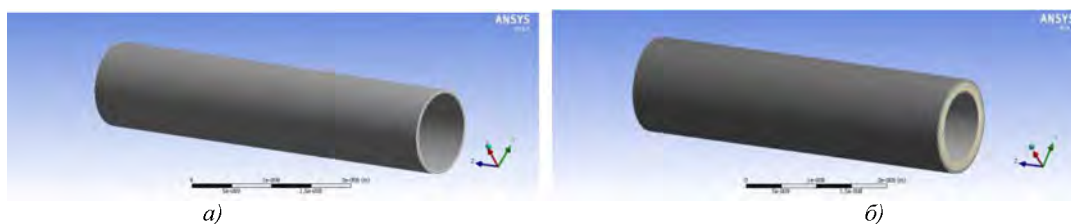


Рисунок 1.– Нанотрубки. а) однослойная б) пятислойная

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект № Ф13К-154)

Однослойная нанотрубка может быть представлена в качестве тонкой цилиндрической оболочки [1, 2]. Механические свойства протяженной цилиндрической оболочки характеризуются модулями упругости, представляющими собой коэффициенты пропорциональности между напряжением и деформацией такой оболочки в некотором направлении. Модули упругости определяются при условиях малой нагрузки, когда деформация имеет упругий обратимый характер.

В данной работе рассматриваются такие виды деформации нанотрубок, как осевое растяжение и сжатие вдоль центральной оси нанотрубки, а так же поперечный изгиб (рисунок 2).

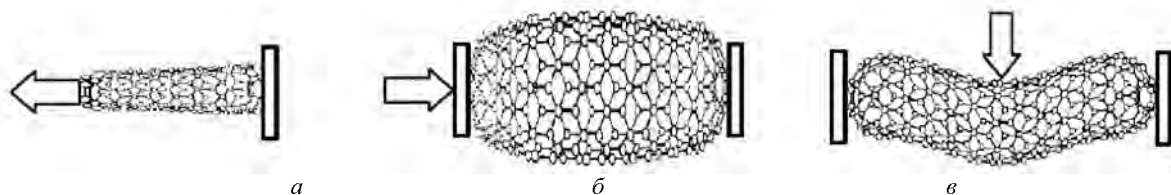


Рисунок 2.– Деформации нанотрубки: (а) осевое растяжение вдоль оси OZ; (б) осевое сжатие вдоль оси OZ; (в) поперечный изгиб

Наиболее важным параметром нанотрубки, характеризующим ее прочность на растяжение (рисунок 2а), является продольный модуль Юнга  $E$ , который можно определить из закона Гука [2]

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{N}{2\pi R h \varepsilon}, \quad (1)$$

где  $\zeta$  – продольное напряжение, представляющее собой отношение продольного растягивающего усилия  $N$ , приложенного к нанотрубке, к площади ее поперечного сечения,  $\varepsilon$  – относительное растяжение (изменение длины) нанотрубки при таком напряжении,  $R$  – радиус нанотрубки,  $h$  – толщина ее стенок.

Модули упругости, соответствующие поперечным (изгибным) деформациям протяженной цилиндрической оболочки, выражаются через ее модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . В соответствии с классической теорией упругости [1, 2], жесткость полого цилиндра по отношению к изгибу, определяемая как энергия, расходуемая для изгиба цилиндрической трубки на единичный угол, определяется следующей формулой:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (2)$$

где  $h$  — толщина стенок цилиндра.

При выполнении модельного анализа механических свойств УНТ в рамках механики сплошных сред и теории упругости, поверхность нанотрубки, составленная из атомов углерода, заменяется сплошной оболочкой, механические характеристики которой определяются исходя из соответствия результатам измерений или результатам последовательных расчетов. Такой подход на сегодня является наиболее распространенным при рассмотрении более сложных задач, относящихся, например, к установлению механических характеристик многослойных УНТ. Отметим, что в то же время такой подход является не единственным.

В качестве примера в таблице 1 [3] приведены результаты расчетов упругих характеристик для однослойных УНТ. Здесь  $(n_1, n_2)$  – индексы хиральности нанотрубки,  $R$  – ее радиус,  $B$  – объемный модуль упругости,  $E$  – модуль Юнга,  $M$  – модуль сдвиговой деформации (кручения относительно оси нанотрубки),  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Как следует из таблицы, расчетные значения модулей упругости УНТ весьма слабо чувствительны к ее геометрическим параметрам (диаметр и хиральность). Погрешность расчетов связана с неопределенностью значения толщины стенки нанотрубки и оценивается величиной порядка нескольких процентов.

$(n_1, n_2)$	$R$ , нм	$C_{11}$	$C_{33}$	$B$ , ТПа	$E$ , ТПа	$M$ , ТПа	$\nu$
(5, 5)	0,34	0,397	1,054	0,191	0,971	0,436	0,280
(6, 4)	0,34	0,397	1,054	0,191	0,972	0,437	0,280
(7, 3)	0,35	0,397	1,055	0,190	0,973	0,454	0,280
(8, 2)	0,36	0,397	1,057	0,190	0,974	0,452	0,280
(9, 1)	0,37	0,396	1,058	0,191	0,974	0,465	0,280
(10, 0)	0,39	0,396	1,058	0,190	0,975	0,451	0,280
(10, 10)	0,68	0,398	1,054	0,191	0,972	0,457	0,278
(50, 50)	3,39	0,399	1,054	0,192	0,972	0,458	0,277
(100, 100)	6,78	0,399	1,054	0,192	0,972	0,462	0,277
(200, 200)	13,5	0,399	1,054	0,192	0,972	0,478	0,277
Графит, вдоль гексагональной плоскости		1,06		0,0083	1,02	0,44	0,16
Графит, перпендикулярно гексагональной плоскости			0,036	0,0083	0,0365	0,004	0,012
Алмаз, вдоль кубической оси		1,07	1,07	0,442	1,063	0,5758	0,10415

Таблица 1.— Параметры однослойных УНТ различной структуры, рассчитанные на основе эмпирической модели силовых постоянных

Из таблицы видно, что значения модулей упругости нанотрубки практически не зависят от ее диаметра и индексов хиральности. Такой вывод является естественным для расчетов, выполненных на основании эмпирической модели силовых постоянных.

Вместе с тем, следует заметить, что, согласно соотношению (2), результаты определения модулей упругости нанотрубок весьма чувствительны к значению толщины стенок цилиндрической оболочки, которой моделируется рассматриваемый объект.

Рассмотрим различные виды деформации однослойной и пятислойной нанотрубок при различных видах нагружения. При моделировании рассматривались нанотрубки со следующими характеристиками: однослойная -  $R_{\min} = 5\text{нм}$ ,  $R_{\max} = 5,34\text{нм}$ ,  $L = 50\text{нм}$ ; пятислойная -  $R_{\min} = 5\text{нм}$ ,  $R_{\max} = 6,7\text{нм}$ ,  $L = 50\text{нм}$ . Расчетные значения модулей упругости УНТ брались из таблицы 1 при индексе хиральности нанотрубки (5, 5).

**1. Поперечный изгиб** однослойной и пятислойной нанотрубок под действием силы  $F = 1 \cdot 10^{-6}$  Н, приложенной на поверхности цилиндра в направлении оси  $Ox$  нанотрубки при жесткой заделке на ее концах (рисунок 3).

Примеры расчетов приведены на рисунках 4 – 6.



Рисунок 3.– Схема приложение силы  $F = 1 \cdot 10^{-6}$  Н для пятислойной нанотрубки

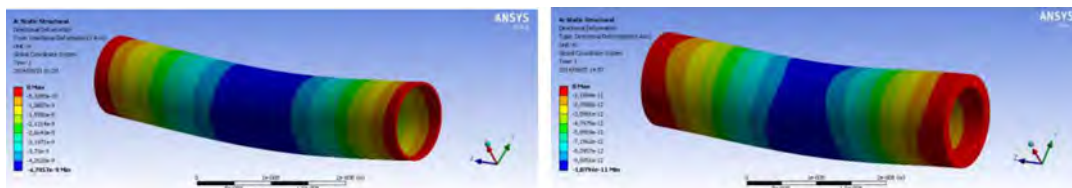


Рисунок 4.– Смещение вдоль оси  $Ox$  для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

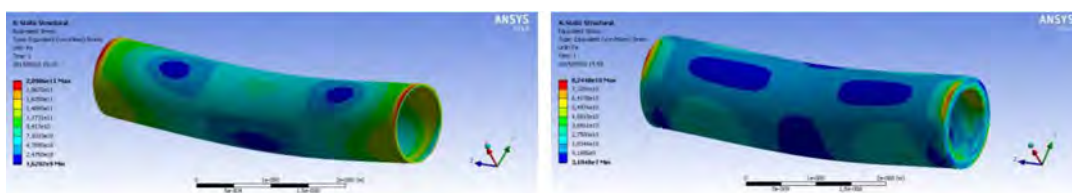


Рисунок 5.– Напряжения эквивалентные по Мизесу для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

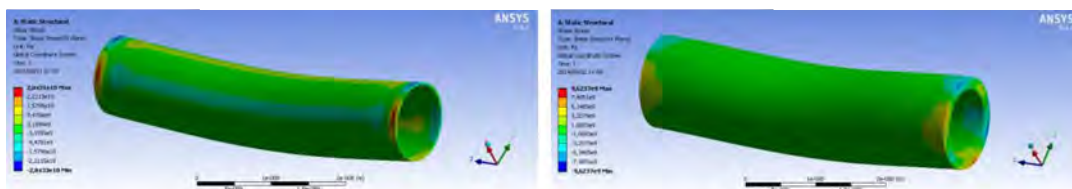


Рисунок 6.– Сдвиговые напряжения для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

**2. Растяжение нанотрубки** вдоль центральной оси.

При растяжении цилиндрической оболочки обычно происходит сокращение ее поперечного размера. Это свойство характеризуется коэффициентом Пуассона  $\nu$ , величина которого определяется как отношение относительного поперечного сжатия  $\tilde{\varepsilon}_2$  к относительному продольному растяжению  $\varepsilon$ :

$$\nu = \frac{\tilde{\varepsilon}_2}{\varepsilon}. \quad (3)$$

При этом величина  $\nu$  не может превышать 0,5 из физических соображений [3].

Рассмотрим осевое растяжение одно, двух и пятислойной нанотрубок вдоль оси OZ при действии силы  $F = 1 \cdot 10^{-6}$  Н, приложенной к одной из граней при жесткой заделке по другой грани (рисунок 7).

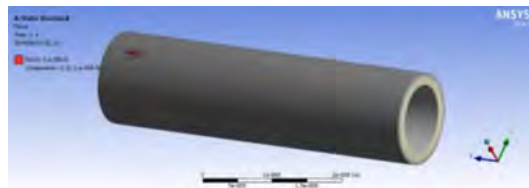


Рисунок 7.– Схема приложение силы  $F = 1 \cdot 10^{-6}$  Н для пятислойной нанотрубки при осевом растяжении

Результаты моделирования представлены на рисунок 8 – 10.

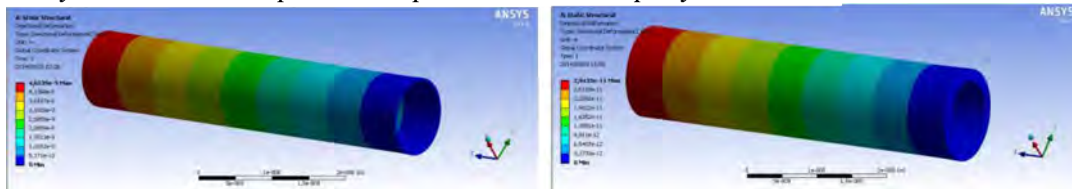


Рисунок 8.– Смещение вдоль оси OZ для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

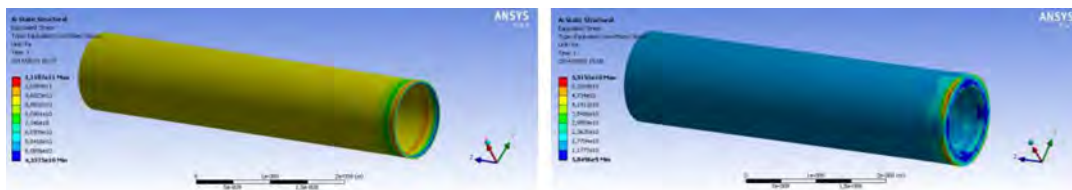


Рисунок 9.– Эквивалентные по Мизесу напряжения для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

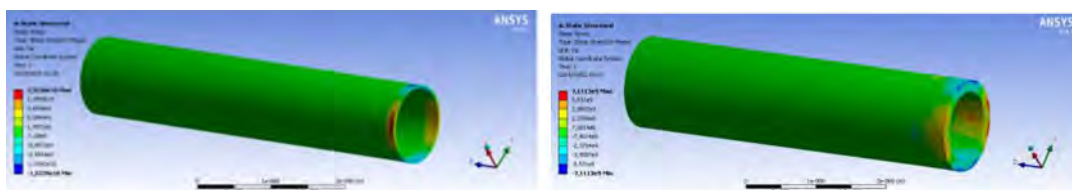


Рисунок 10.– Сдвиговые напряжения для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

### 3. Сжатие нанотрубки вдоль центральной оси.

Модули упругости, соответствующие сжатию и растяжению цилиндрической оболочки, выражаются через вторую производную от этой зависимости в точке минимума и в рамках классической теории упругости эти величины равны друг другу.

Однако растяжение и сжатие УНТ являются симметричными процессами только при бесконечно малых нагрузках, которые не нарушают структуру УНТ. При достаточно большом сжимающем усилии происходит резкое изменение структуры оболочки, которая сжимается в "гармошку". Такое сжатие, сопровождающееся изменением структуры, носит название "эйлеровской деформации" и имеет характер

неустойчивости. Порог данной неустойчивости характеризуется величиной предельного сжимающего усилия.

Рассмотрим осевое сжатие вдоль оси OZ для одно, двух и пятислойной нанотрубок при действии, как и в предыдущем случае, силы  $F = 1 \cdot 10^{-6}$  Н, приложенной к одной грани при жесткой заделке на другой грани.

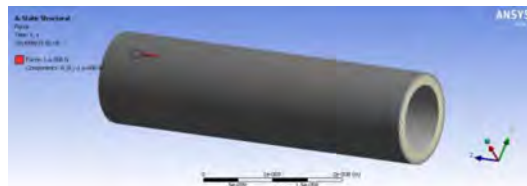


Рисунок 11.– Схема приложение силы  $F = 1 \cdot 10^{-6}$  Н для пятислойной нанотрубки при осевом сжатии

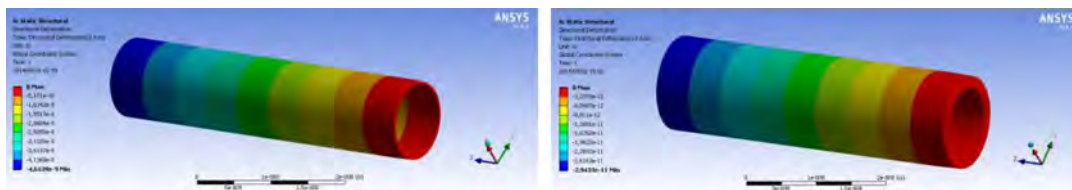


Рисунок 12.– Смещение вдоль оси OZ для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

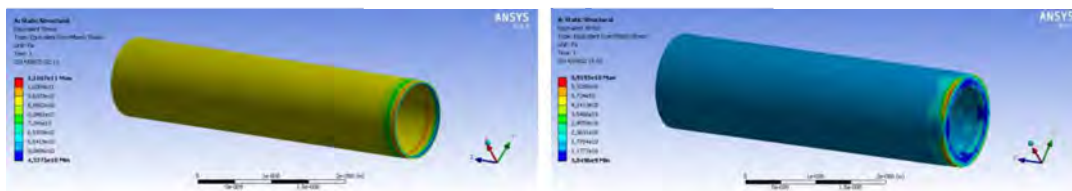


Рисунок 13.– Эквивалентные по Мизесу напряжения для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

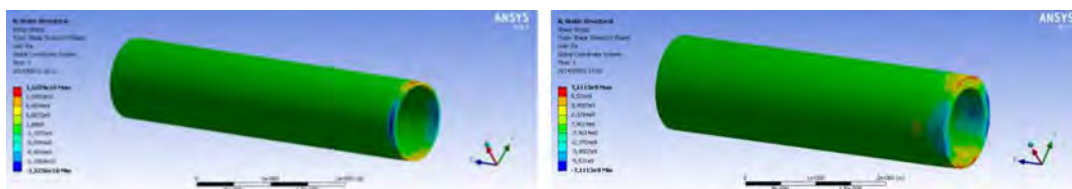


Рисунок 14.– Сдвиговые напряжения для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

#### 4. Прочность нанотрубок.

Согласно измерениям, опубликованным в [4], значение изгибной прочности многослойных УНТ оказалось равным  $14,2 \pm 0,8$  ГПа. Для однослойной это значение составляет  $31,2 \pm 0,6$  ГПа. Столь высокое значение изгибной прочности УНТ связано с их повышенной гибкостью. Значение прочности на разрыв однослойной нанотрубки имеет значения  $45 \pm 7$  ГПа, а для многослойной –  $1,72$  ГПа. Значение прочности при сжатии выбираем в соответствии с результатами экспериментов, приведенных в [4, 5, 6]: для пятислойной нанотрубки –  $1,6$  ГПа, а для однослойной –  $40$  ГПа.

Вычислим коэффициент напряжений, характеризующий запас прочности нанотрубок при изгибе, растяжении и сжатии, используя значения приведенных предельных напряжений. Значение усилия, действующего на нанотрубку, принимаем как и ранее равным  $F = 1 \cdot 10^{-6}$  Н.

Коэффициент напряжений  $\sigma_{1\max}^*$  будет рассчитывать как отношение вычисленного значения напряжений к их предельным значениям.

Результаты вычислений представлены на рисунках 15 – 17.

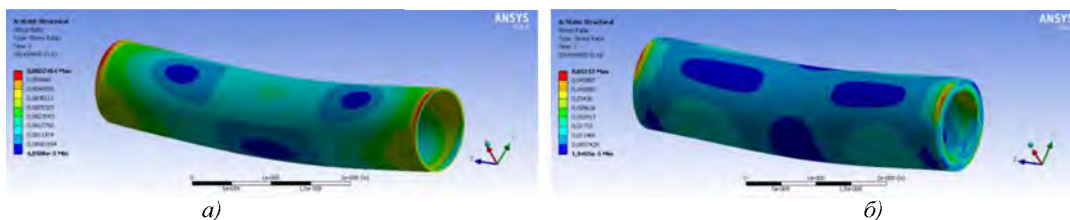


Рисунок 15.– Максимальные эквивалентные напряжения при изгибе: а) однослойной, б) двухслойной, в) пятислойной нанотрубок

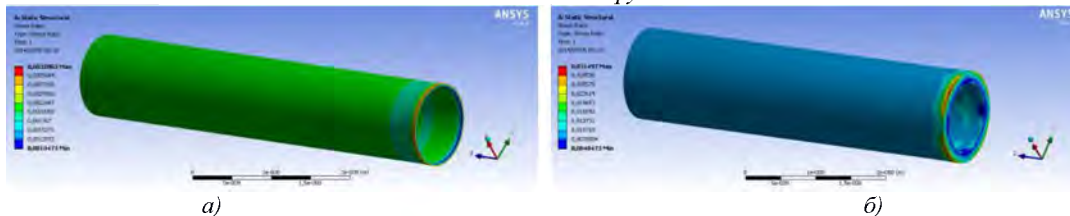


Рисунок 16.– Коэффициент напряжений при растяжении для: а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

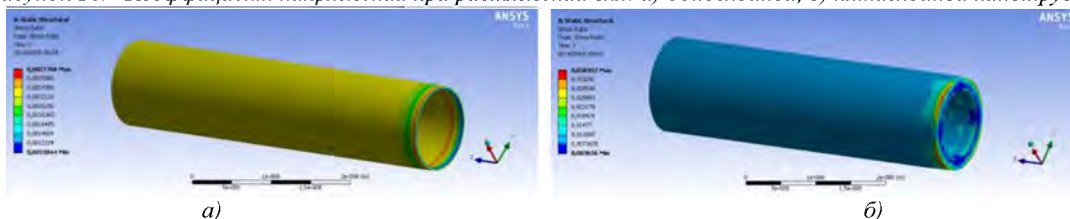


Рисунок 17. Коэффициент напряжений при сжатии для а) однослойной, б) пятислойной нанотрубок

**Вывод.** Выполнено компьютерное моделирование деформирования однослойной и пятислойной нанотрубок при различных типах их нагружения. Показано, что запас прочности у однослойной нанотрубки выше, чем у пятислойной. При этом коэффициент напряжений  $\sigma_{1\max}^*$  при различных видах нагружения для однослойной нанотрубки оказался меньше на 10% по сравнению с пятислойной.

## РЕЗЮМЕ

В работе на основе компьютерного моделирования выполнено исследование напряженно-деформированного состояния одна и пятислойных углеродных нанотрубок при индексе хиральности (5, 5) при различных типах их деформирования (осевом растяжении, сжатии, поперечном изгибе). Рассчитан коэффициент напряжения, характеризующий запас прочности нанотрубок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.– С. 204
2. Тимошенко С.П, Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Мир, 2-е изд.,1972.– С.576
3. Lu J. P. Phys. Rev. Lett. 79 1297 (1997)
4. Wong E W, Sheehan P E, Lieber Ch M Science 277 1971 (1997)
5. Venkateswaran U D et al. Phys. Rev. B 59 10928 (1999)
6. Gaal R, Salvetat J-P, Forro L Phys. Rev. B 61 7320 (2000)

## SUMMARY

*In the work on the basis of computer modeling a study of the stress-strained state single- and double-wall carbon nanotubes with chirality index (5,5) under various types of deformation have been performed. The stress ratio that characterizing the strength of the nanotubes have been calculated.*

**E-mail:** [Zhuravkov@bsu.by](mailto:Zhuravkov@bsu.by)

Поступила в редакцию 10.10.2014

## STRESS ANALYSIS OF DELTA FIN STRUCTURE AND DETERMINATION OF DEFORMATION

<sup>1</sup>Mostafa Essuri, <sup>2</sup>Benur Maatug, <sup>1</sup>Khalid Kurmaji

*Azawia University, Faculty of Engineering, Libya*  
*Al-Mergib University, Faculty of Engineering, Garaboulli, Libya*

### Introduction

Usually fin represent as one of the important structures in all type of airplane and the fin structure was greatly improved, especially for modern supersonic speed constructions. The main aim of delta fin construction is to minimize the weight of structure as much as possible and keeping the stiffness of material structural in margin of safety under design load [1]. The primary difference between classical method and finite element are the view structure and the ensuring solution procedure. Classical method considers the structure as a continuum whose behavior is governed by partial or ordinary differential equations [2]. By using finite element method consider the structure to be an assembly of small finite-sized particles. The behavior of the particles and the overall structure is obtained by formulating a system of algebraic equation that can be readily solved by developed methodology, which will be presented in form of software.

### Evaluation of stiffness of bearing shells with oblique spars

The finite difference method used for the evaluation of stiffens of bearing shells of delta fin. The wing is loaded from the system of evenly distributed vertical forces. The area of the bearing surface can be treated as a mesh with 24 small identical rectangles (Fig.1) with sides  $[D_x]$  and  $[D_y]$ . The geometric features of the delta fin as wall as the relevant loading were adopted from the literature [3]. The delta fin structure is composed of exterior composite skin, and interior metal (al-alloy) structure. General expression for the stiffness of the bearing surface (treated as a plate) can be obtained for each node in the following form:

$$D_x = \frac{Eh^2t_x}{2(1-\nu^2)} \quad ; \quad D_y = \frac{Eh^2t_y}{2(1-\nu^2)} \quad ; \quad D_{yx} = \frac{Eh^2t(1-\nu)}{2(1-\nu^2)}$$

Assuming that the skin (shell) and the oblique spars are subject to bending and that skin alone is subject to twisting. In expression above, denoted the height by  $[h]$  of the profile in each node with the thickness of the skin is not included [4]. Equalizing moments of inertia of the section  $[D_y]$  and  $[D_x]$  can calculate the effective widths of the skin of the idealized structure of the original wing and the model.

Moments of inertia  $[I_x]$ ,  $[I_y]$ , and the effective thickness  $t_x$ ,  $t_y$ , are averaged for the corresponding lengths  $[D_y]$  and a  $[D_x]$ , taking into account constructive elements which convey bending moments.

For example, to obtain the effective thickness for node  $i$  (given in Fig. 2) about the axes  $O_y$  and  $O_x$ , for examine one part of the section at the distance  $[D_y/2]$  and  $[D_x/2]$  measured from each side of the node [5]. For the case of oblique spar the effective thickness and moments of inertia is

$$2 \frac{\Delta y t h_i^2}{4} + \frac{b(h-t)^3}{12} \cos^3 \varphi = 2 \frac{\Delta y t_{x_i} h_i^2}{4} = I_y, \quad t_{x_i} = t + \frac{b(h-t)^3}{6 \Delta y h_i^2} \cos^3 \varphi$$

$$2 \frac{\Delta x t h_i^2}{4} + \frac{b(h-t)^3}{12} \sin^3 \varphi = 2 \frac{\Delta x t_y h_i^2}{4} = I_x, \quad I_y = I + \frac{b(h-t)^3}{12} \sin^3 \varphi$$

With  $b$  ( $h-t$ ) denoted the area of the cross section which is perpendicular to the axial axis.

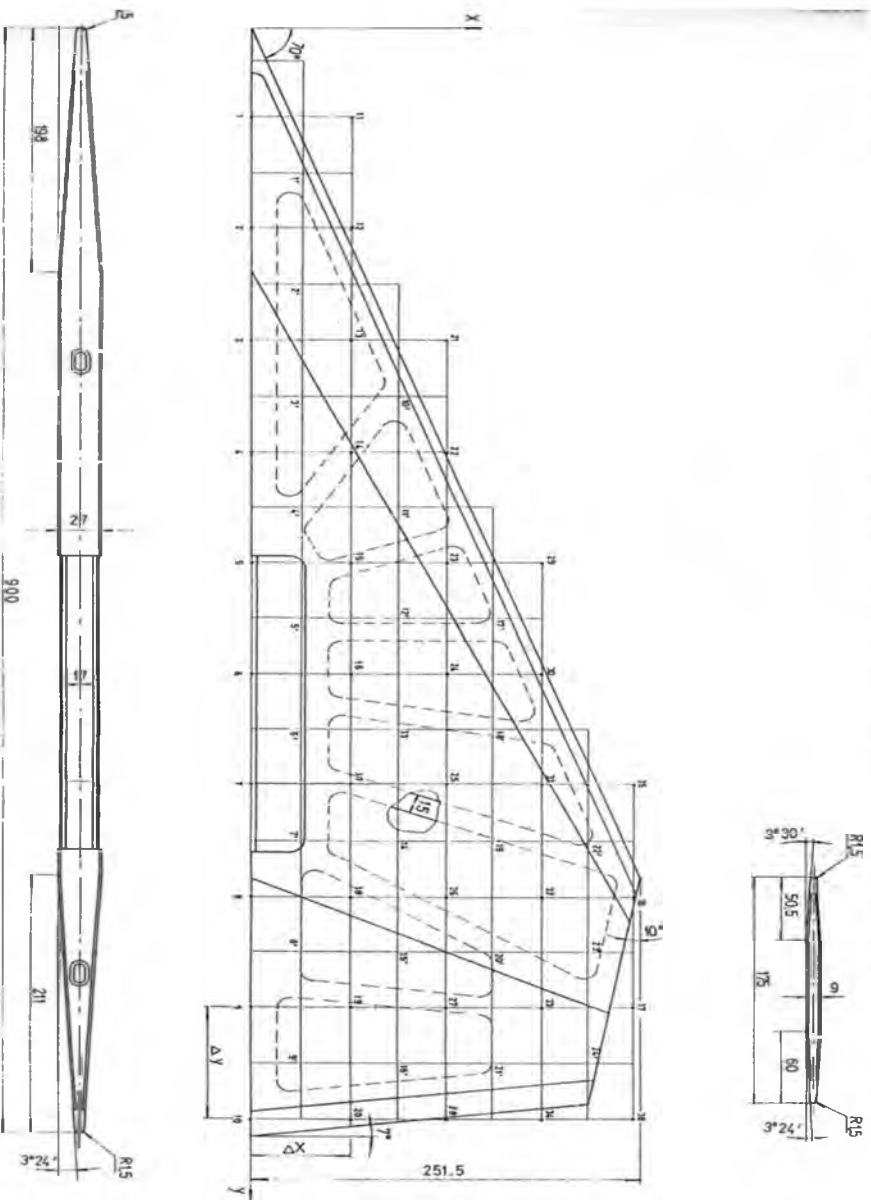


Fig. 1. – Model Geometry with Mesh of Bearing Surface

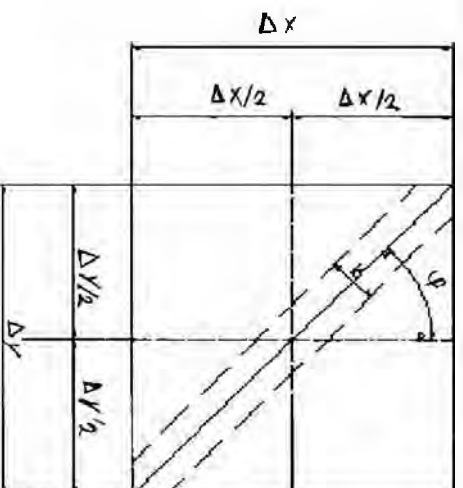


Fig. 2. – Effective thickness for node  $i$

### Numerical Result

The finite element method was used for the calculation of stress states in delta fin.

As the output the displacement vector, deformation and stress tensor were obtained. The Fig. 3 shows the delta wing displacement in millimeters.



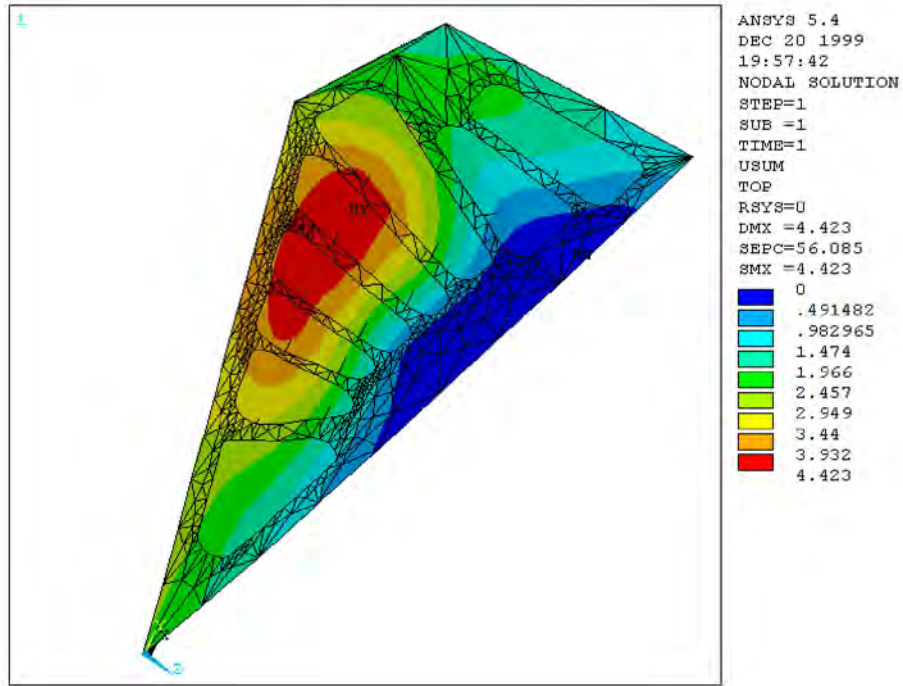


Fig. 3. – Delta fin displacement

Usually, the most useful stresses is Von Misses stress and the graphical results of the stress various in the form of colored area and from color area we can see distribution of Von Misses stress over skin and distribution of Von Misses stress in interior structure Fig. 4.

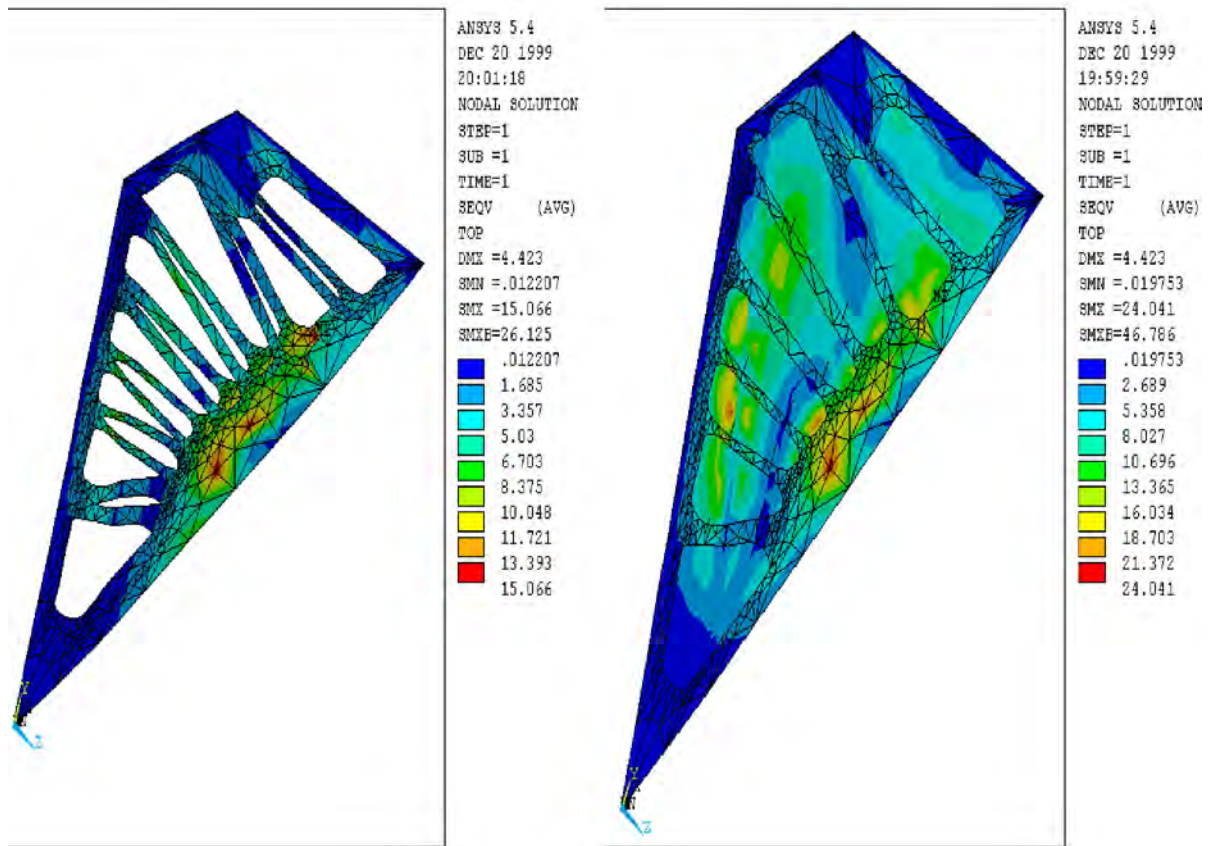
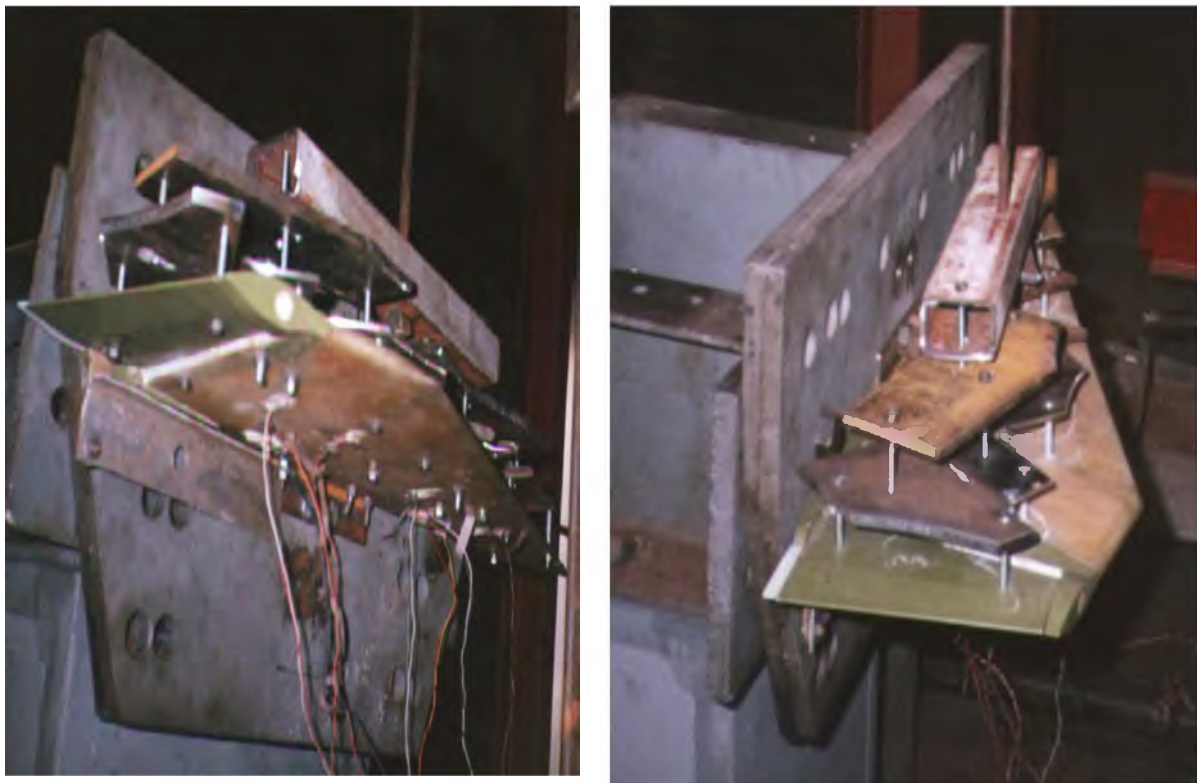


Fig. 4. – Distribution of Von Misses stress over skin and interior

By comparing numerical results, calculation and experimental tests, the high correlation degree of the results can be established.

### **Test Model**

Usually before starting experiment, checking the test surface fixing of strain gages on that surface where was glued way or not and other accessories like cables, wire connection.. The experiment verification of that model with proper loading in laboratory conditions will be given in detail, as static test, the strain gages have been selected in such way distribute on the surface of model and the strain gage must be small enough comparing with model size and that will allow us to glued many strain gages over the model as vortices of triangle as shown in fig.5, Load is transferred to the fin surface through 18 points by means of 6 triangle sheets coupled with two bigger triangle sheets connected to the spar. Sideways the model is fixed in the same as for the model computation (the same boundary condition) for accuracy the surface where the strain gages was fixed must be cleaned by special material, the strain gage connection with cable to the A/D converter and to the computer. Arrangement of strain gages that placed on the upper structure surface should be compatible with sheet of triangular shape, which used to develop forces of uniform load distribution on the model. And the load introduced gradually



*Fig. 5. – Test Model showing a mechanism for load distribution over fin surface*

### **Experimental Result**

The experiment has been done on the same model construct used for analysis, when the experimental incorrect start where the first reading taken by strain gages was with out any external loads, that means only the weight of the model with the accessories tools, which used for providing the experiment. By adding 125.4 daN the effected force will increase due to that the strain gages will take different reading according to their different position, as shown in Fig. 6 and then follow the same procedure by adding 125.4 daN in first four steps and then adding 31.35 daN until force becomes 627 daN.

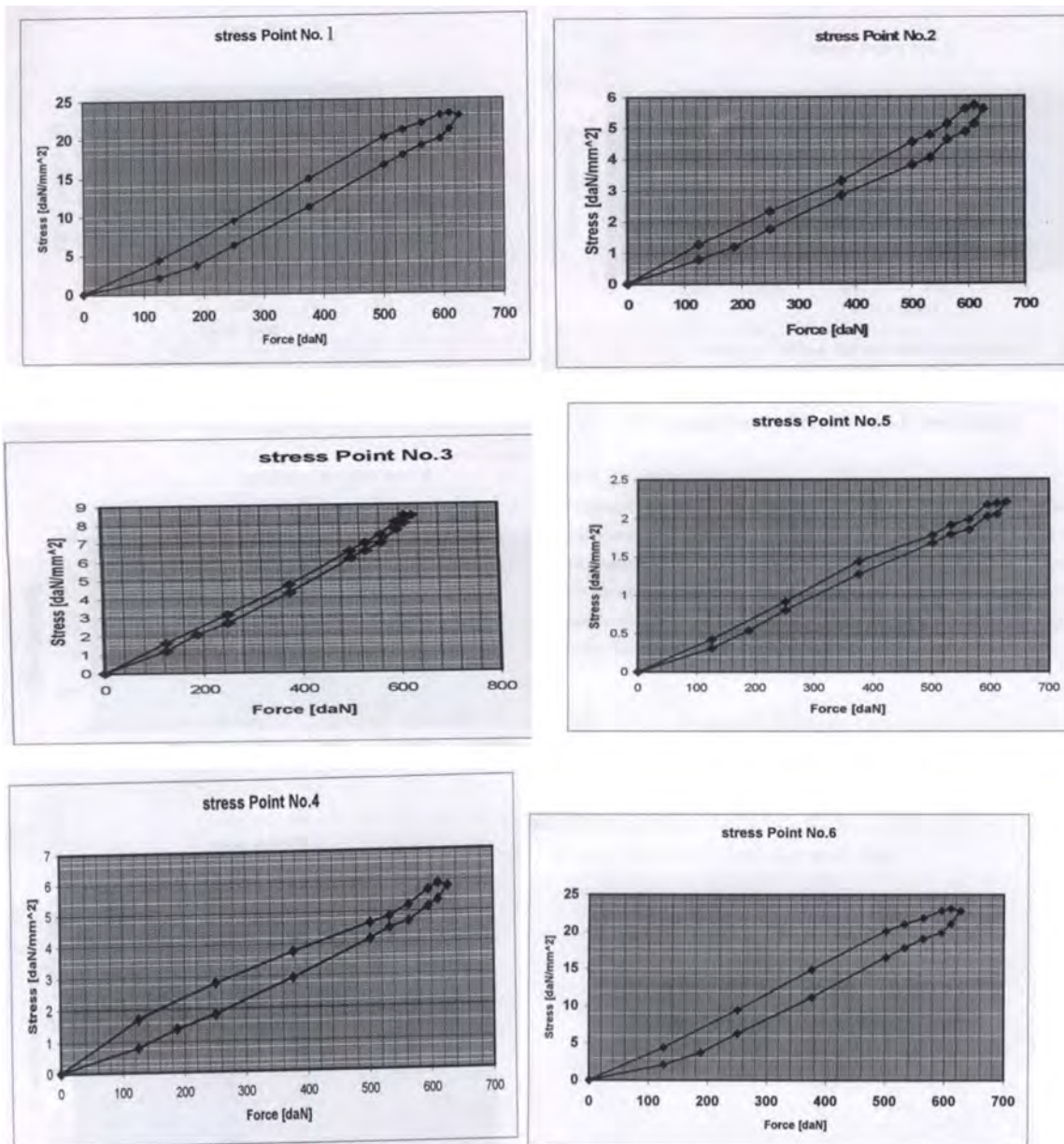


Fig 6. – Variation of measured stresses at the 6 strain gauges with applied load

To make a comparison between the experimental stress and the result obtained from the (ANSYS) software program, we chose the point of maximum load (627-daN). Table 1 shows the experimental results together with the numerical results. It is clear from the table that numerical values of stresses are in good agreement with experimentally measured stresses. At stress point 6 it is probably suffering from strain gauge malfunctioning.

Table 1. – Comparison between numerical analysis (ANSYS) and experiment

Strain gage	1	2	3	4	5	6
Experiment result	4.7	5.59	8.38	5.78	2.21	22.7
ANSYS result	4.7	5.56	8.6	4.9	2.3	16

### Conclusion

The numerical and experimental work done in this paper for delta fin model can be concluded in the following points:

- Finite element method together with experimental testing are successfully implemented for the evaluation of stiffness of bearing shells of delta fin in supersonic speed.
- The ANSYS stress results obtained from modeling the structure have maximum value near fixing position.
- From the stress results the developed structural model is free out from any type of failure under applied loads and there is close agreement between numerical and experimental results.
- The most concentrated elements were observed at element area near fixing position so that area should consider as critical elements.
- The value of displacement increment out word from root chord of the model to the tip chord.
- It is worth to note that numerical and experimental results show good agreement.

## REFERENCES

1. Constantine C. Spyrakos, 1994 - Finite element modeling in engineering practice.
2. Dr Mirko Josifovic, 1979 - osnovi strukturalne analize aerotehnickih konstrukcija.
3. B.E.Gatewood - virtual principles in aircraft structures volume 2 : Design, plates, finite elements.
4. Simic V. Srbuoljub, 1984 - contribution to estimate stresses state of rocket carrying surface using finite difference method.
5. Zoran C. Petrovic, 1995 "Konstrukcija I opterecenje delta krila" Beograd.

## SUMMARY

*Finite element method is successfully used for the evaluation of stiffness of bearing shells of delta fin in supersonic speed. The wing is loaded from the system of evenly distributed vertical forces the bearing surface is of monolithic type, manufactured from homogenous and isotropic material, with solid shell and strong oblique spars. The fin structure is studied numerically using finite element method (ANSYS) and results are verified by comparison with experiment. Six strain gages were used to measure stresses over expected critical locations. Experimental and numerical results are in good agreement. It is also found that the model withstands the applied loads.*

## РЕЗЮМЕ

В проекте исследуется прочность ответственных элементов конструкций современного авиастроения. Рассматривается деформирование крыла сверхзвукового самолета. Крыло нагружается системой равномерно распределенных вертикальных сил, материал принят однородным и изотропным. С помощью метода конечных элементов численно исследуется напряженно-деформированное состояние ребра крыла. Установлено, что модель выдерживает приложенные нагрузки. Представлено сравнение полученных численных результатов с результатами натуральных испытаний с помощью тензорезисторов. Экспериментальные и численные результаты хорошо согласуются (качественно и количественно). Погрешность для всех испытаний составила менее 3%.

**E-mail:** [mos479@gmail.com](mailto:mos479@gmail.com)  
[saif\\_matug@yahoo.com](mailto:saif_matug@yahoo.com)  
[K\\_kurmajii@yahoo.com](mailto:K_kurmajii@yahoo.com)

Поступила в редакцию 01.11.2014

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО НДС ДЛИННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАГРЕВЕ И НЕЙТРОННОМ ОБЛУЧЕНИИ

к.ф.-м.н. **Ширвель П.И.**

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

В различных отраслях современной техники широко используются конструктивные элементы, выполненные в виде тел цилиндрической формы. В процессе эксплуатации они могут подвергаться воздействию как силовых, так и немеханических нагрузок (термических, радиационных). Длительное нахождение тел в физических и механических полях приводит к возникновению деформаций тепловой и радиационной ползучести. Научные результаты исследования нелинейных процессов деформирования развивающихся во времени и пространстве, имеют важное значение при создании новых технологических процессов и аппаратов для использования на транспорте, в энергетике, авиации и атомной промышленности. Таким образом, разработка и развитие теории и методов расчета НДС цилиндрических тел, находящихся в условиях неоднородного термического и радиационного нагружений, в настоящее время актуальная проблема механики твердого тела, решение которой позволит корректно определять НДС, а также продлять ресурс компонентов оборудования и других конструкций в условиях сложных немеханических воздействий.

В предыдущих работах [1–4] был сформулирован вариант механико-математической модели определения неосесимметричного НДС, учитывающей изменение напряжений и деформаций по периметру цилиндрических тел с учетом влияния тепловых и радиационных эффектов в условиях плоской и обобщенной плоской деформации. Очевидно, что для окончательных заключений требуется детальное исследование моделей в широком поле изменения температур, окружной неравномерности, радиационных нагрузок. Задача настоящей работы заключается в проведении численных экспериментов и проверке разработанной модели на соответствие заявленным свойствам, в первую очередь, неосесимметричному деформированию в условиях ползучести и облучения. Также будут приведены результаты сравнения с осесимметричной моделью [5,6].

Таким образом, используя методику, приведенную в [1–4] выполним виртуальное моделирование  $2D(r, \theta)$  деформирования односвязного цилиндрического тела в условиях терморadiационных воздействий и подробно рассмотрим влияние окружной неравномерности на неосесимметричное НДС для различных значений амплитуд температур. В качестве модельных тел, будем рассматривать сплошные цилиндры, выполненные из конструкционного материала.

*Замечание:* неосесимметричное деформирование тепловыделяющего цилиндра было рассмотрено ранее в работах [7,8], вариант расчета полого цилиндра из конструкционного материала представлен в [9].

В качестве конкретного примера рассмотрим неосесимметричное НДС неравномерно нагретого по периметру длинного сплошного цилиндра без внутренних источников тепловыделения, облучаемого потоком быстрых нейтронов ( $\bar{E} > 0.1$  МэВ) плотностью  $\theta = 2.81 \cdot 10^{19}$  нейтрон/см<sup>2</sup>·ч. Стационарный температурный нагрев осуществляется по закону:

$$\Delta T(r, \theta) = T(r, \theta) - T_s = A \left( \frac{r}{R} \right)^4 \sin(4\theta), \quad (1)$$

где  $A=50$ ,  $R=0.003\text{ м}$ ,  $T_s=823\text{ К}$ . Упругие и теплофизические характеристики физико-механических свойств конструкционного материала соответствуют нержавеющей аустенитной стали (например, AISI 316):  $E=2.1 \cdot 10^5\text{ МПа}$ ;  $\mu=0,3$ ;  $\alpha=12,6 \cdot 10^{-6}\text{ 1/К}$ .

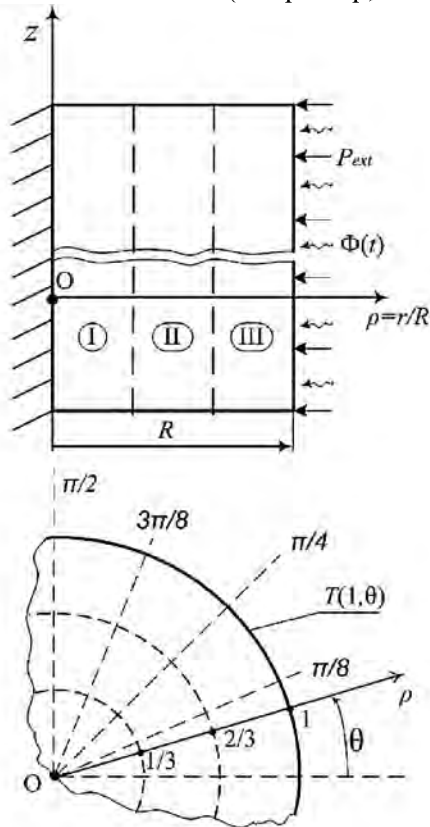


Рисунок 1. – Схема анализа неосесимметричного НДС

Механическое давление, равномерно распределенное по внешней поверхности цилиндра равно  $P_{ext}=8\text{ МПа}$ . Закон изменения радиационных деформаций задаем на основании экспериментальных данных по набуханию и формоизменению конструкционных материалов в терморadiационных потоках [9–13]. Для учета радиационного набухания используем наиболее общую зависимость, связывающую набухание аустенитных сталей с температурой облучения и флюенсом быстрых нейтронов [9]

$$S = \frac{\Delta V}{V} = A_{0S} A_S(T) \Phi^{\lambda_S(T)}, \quad (2)$$

здесь  $T$  – температура, К;  $A_{0S}=4.9 \cdot 10^{-51}$ ;  $\lambda_S(T)=1,71$  ( $T < 950\text{ К}$ );  $A_S(T) = 10^{\frac{1,55 \cdot 10^4}{T} - \frac{5,98 \cdot 10^6}{T^2}}$ ;  $\Phi = \theta t$  – флюенс нейтронов ( $\Phi \leq 7 \cdot 10^{22}\text{ нейтрон/см}^2$ );  $\bar{E} > 0.1\text{ МэВ}$ .

*Замечание:* различные варианты эмпирических коэффициентов закона набухания (2) для конкретных марок сталей можно найти в известных работах [9–13], а также в последних зарубежных публикациях, например [14, 15].

Закон терморadiационной ползучести задаем согласно [13] в соответствии с испытаниями на ползучесть облученной и необлученной стальной трубы под давлением инертного газа:

$$\dot{\epsilon}_u^c = (dce^{-ct} + B)\sigma_u^m + K_0 \exp(1.405 - 0.0027 \cdot T) f \phi \sigma_u, \quad (3)$$

где первая часть выражения задает термическую ползучесть, а вторая – радиационную. Константы ползучести следующие:  $m=5,1$ ;  $d=1.5 \cdot 10^{-13}\text{ МПа}^{-5,1}$ ;  $c=0.0016\text{ ч}^{-1}$ ;  $B=6.9 \cdot 10^{-17}\text{ МПа}^{-5,1} \cdot \text{ч}^{-1}$ ;  $f=1.75$ ;  $K_0=2.68 \cdot 10^{-28}(\text{МПа} \cdot \text{нейтр/см}^2)^{-1}$ ;  $\theta=2.81 \cdot 10^{19}\text{ нейтр}/(\text{см}^2 \cdot \text{ч})$  – поток быстрых нейтронов с энергией  $\bar{E} > 0.1\text{ МэВ}$ ,  $T$  – температура, К;  $t$  – время, ч.

*Замечание:* другие зависимости для терморadiационной ползучести можно найти в [9–16].

На основании общей методики, изложенной в [1–4, 6] проведено 2 серии расчетов: при минимальных нагрузках и различных значениях амплитуды окружной неоднородности и при нагрузках, позволяющих исследовать влияние на НДС температурного и радиационного фактора. Также рассмотрено влияние неравномерного температурного распределения на работоспособность модельного тела при изменениях температуры от  $500^\circ\text{С}$  до  $600^\circ\text{С}$  и величине флюенса нейтронов вплоть до  $10^{27}\text{ нейтрон/м}^2$ . В результате выполненных численных экспериментов получена общая картина характеристик неосесимметричного НДС в длинном сплошном цилиндре в условиях ползучести и облучения. Изменение по периметру тела полей напряжений показано на рисунках 2-4, изменение деформаций приведено на эпюрах 5-7. Анализ неосесимметричного НДС проведем по схеме рисунка 1.

Для начала рассмотрим изменение напряженного состояния цилиндра, как по периметру, так и во времени. Распределение полей напряжений в указанном диапазоне терморadiационных нагрузений в зависимости от окружной координаты показано на рисунке 2, в зависимости от радиуса на рисунке 4. Из эпюр рисунков 2-4 видно, что неоднородность напряженного состояния сглаживается по мере приближения к продольной оси, причем изменение интенсивности напряжений на внутреннем участке ( $0 \leq \rho \leq 1/3$ ) близко к равномерному. В целом уровень напряжений в точках сечения для  $1/3 \leq \rho \leq 2/3$  и  $\theta = [\pi/4; \pi/2]$  значительно выше, чем во всех остальных по периметру модельного тела. Это можно объяснить влиянием окружной температурной неравномерности согласно (1) и, как следствие, относительно небольшой, по сравнению с горячими сечениями термической ползучестью материала со временем на центральном и внешнем участке. Отметим, что даже при больших значениях флюенсов нейтронов возникающие в конструкции терморadiационные напряжения, не превышают предел пропорциональности.

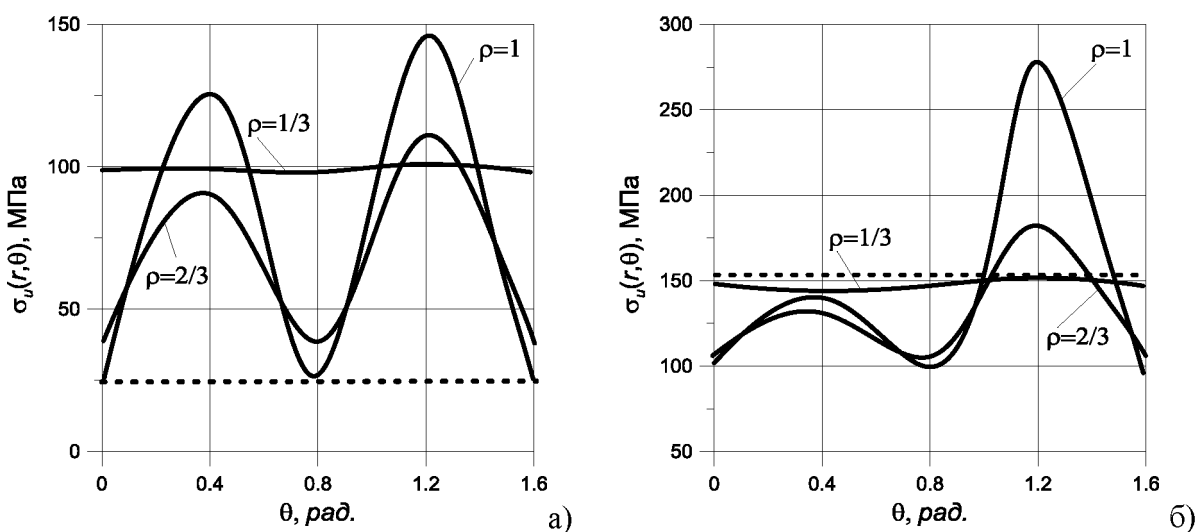


Рисунок 2. – Изменение интенсивности напряжений по периметру сечения при  $t=1000$ ч (а) и  $t=5000$ ч (б) с учетом (—) и без учета (---) окружной неравномерности температуры ( $A=50$ )

В тоже время, заметим, что учет окружной неравномерности, проявляющейся в первую очередь в увеличении доли объемных деформаций, со временем значительно увеличивает максимальные напряжения в холодных сечениях и снижает в горячих. Это хорошо видно на эпюрах рисунка 2: напряжения с учетом окружной неравномерности ( $A=50$ ) показаны сплошными линиями, без учета – штрихами.

Теперь сравним полученные результаты по осесимметричной и неосесимметричной моделям. Из графиков рисунков 2 видно, что изменение интенсивности напряжений на внутреннем участке равномерно в кольцевом направлении, причем при больших интервалах времени нагружения ( $t > 4500$ ч) величина интенсивности напряжений первого участка ( $0 \leq \rho \leq 1/3$ ) совпадает с результатами для осесимметричного деформирования (без учета окружной неравномерности температуры). В тоже время, на среднем ( $1/3 \leq \rho \leq 2/3$ ) и внешнем ( $2/3 \leq \rho \leq 1$ ) интервалах расчет напряжений по осесимметричной модели несколько завышает напряжения в горячих сечениях и значительно занижает в холодных. На начальных этапах нагружения осесимметричная модель дает неудовлетворительные результаты (рисунок 2, а). Можно предположить, что при больших интервалах времени деформирования ( $t > 5000$ ч) напряженное состояние по осесимметричной модели достаточно точно определяется на внутреннем участке. На центральном и внешнем интервалах результаты разнятся: завышаются для сечений  $\theta = [0; \pi/4]$  и занижаются для  $\theta = [\pi/4; \pi/2]$ . Так, сравнивая результаты приближенной и точной задач для  $\theta = [\pi/4; \pi/2]$  получаем, что

максимальные напряжения, определяемые по неосесимметричной модели в холодных сечениях в 1.8 раза больше напряжений, определенных по осесимметричной модели, что может привести, в свою очередь, к ошибочным рекомендациям при проектировании элементов конструкций. Очевидно, что это объясняется принятыми допущениями в осесимметричном случае. Погрешность такого расчета в сравнении с неосесимметричной моделью в первую очередь зависит от величины амплитуды окружной неравномерности и уровня температур, что определяет распухание материала и термическую ползучесть, а также некоторых других факторов: флюенса нейтронов, величины давления, физико-механические свойства материала. Следует отметить, что при  $A < 15$  распределение напряжений на I участке также становится осесимметричным, причем на II и III участках неоднородность напряженного поля при указанной амплитуде окружной развертки температур не превышает 9%.

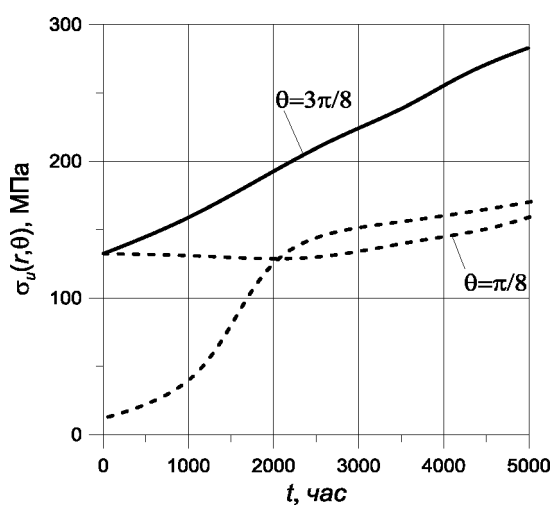


Рисунок 3. – Изменение интенсивности напряжений во времени для внешнего участка ( $\rho=1$ ) в случае неосесимметричного температурного поля (I) с учетом (—) и без учета (---) окружной неравномерности температуры ( $A=50$ )

На рисунке 2(б) график изменение интенсивности напряжений по периметру внутреннего участка модельного тела при  $A=15$  совпадает с распределением напряжений по периметру без учета окружной неравномерности деформирования (осесимметричное деформирование). Последнее свидетельствует о том, что при  $A < 15$  окружную неравномерность для упрощения задач можно не учитывать так, как значения возникающих напряжений совпадают с осесимметричным напряженным состоянием (максимальное расхождение составляет 9% для  $A=15$  при  $\rho=1$ ).

Ниже, на эпюрах рисунка 4, представлены терморadiационные напряжения для различных сечений в зависимости от радиальной координаты. Условия задачи те же: термосиловое нагружение с учетом действия максимального флюенса нейтронов.

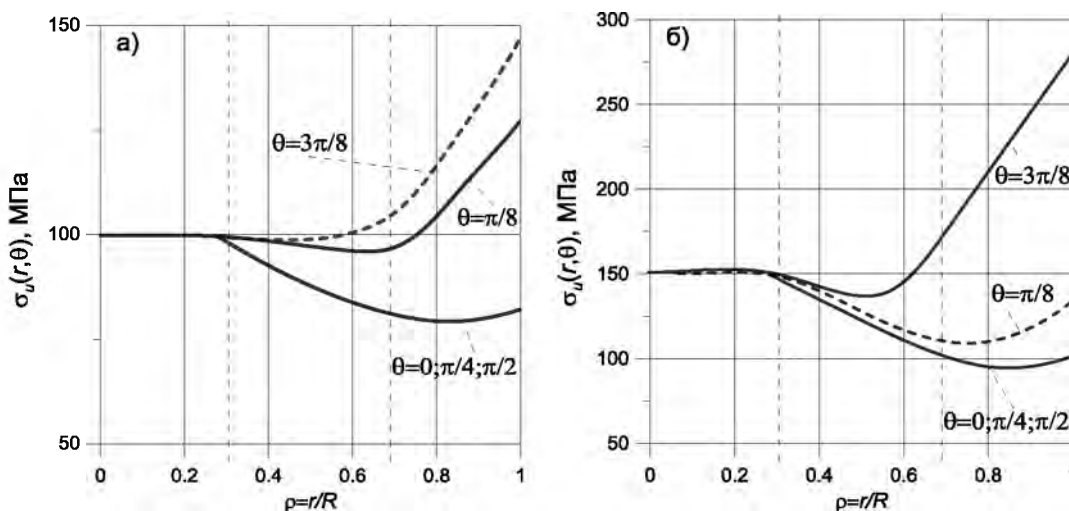


Рисунок 4. – Распределение напряжений вдоль радиуса при различных окружных координатах при  $t=1000$ ч (а) и  $t=5000$ ч (б)

Анализ влияния на напряженное состояние стального цилиндра переменности нагружения в окружном и радиальном направлениях показал, что значительная



неоднородность интенсивности напряжений на начальных этапах нагружения ( $t=0\dots 1000$ ч) обусловлена в первую очередь неосесимметричностью температурного поля  $T(r,\theta)$ . Причем при  $t=0\dots 500$  часов наибольшие значения получает осевая компонента тензора напряжений, а напряжения в плоскости сечения меняются незначительно в окрестности нуля. В дальнейшем при  $t=500\dots 1000$  часов эта неравномерность проявляется наиболее сильно на среднем и внешнем участках сечений для  $\theta=[0;\pi/4]$ . С течением времени (1000...5000ч) резкая неоднородность полей напряжений для II и III участков горячих сечений сглаживается. Это связано в первую очередь с большой термической ползучестью материала в горячих точках сечений. В то же время на III участке при  $\theta=[\pi/4;\pi/2]$  неравномерность распределения напряжений остается достаточно высокой, но вместе с тем, с течением времени, меняется характер такого распределения по периметру, что уже объясняется, в первую очередь, действием неоднородного радиационного распухания на материал. Распределение объемного радиационного распухания по периметру модельного тела показано на рисунке 5.

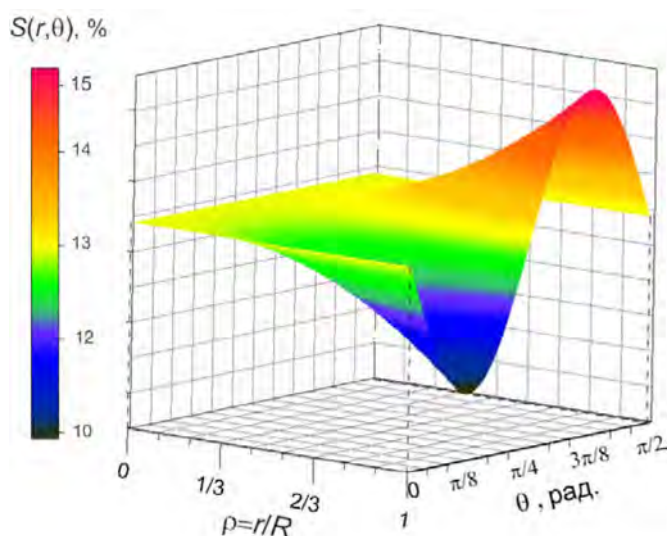


Рисунок 5 – Поверхность распределения радиационного распухания стального цилиндра за 5000ч облучения потоком быстрых нейтронов ( $E > 0.1$  МэВ) плотностью  $\theta = 2.81 \cdot 10^{19}$  нейтрон/(см<sup>2</sup>·ч) с учетом неосесимметричного нагрева ( $A=50$ )

Как видно из рисунка 5, распределение радиационного распухания в горячих и холодных сечениях, резко неравномерно, что обусловлено значительным влиянием окружной неосесимметричности температурного поля на третьем участке. В то же время абсолютные значения распухания на внешнем участке ( $1/3 \leq \rho \leq 2/3$ ) изменяются незначительно ( $\Delta S_{max} = 5\%$ ). Его величина достигает своего максимального значения на внешней поверхности при  $\theta = 3\pi/8$ , а минимум при заданных условиях терморadiационного нагружения внешней границе при  $\theta = \pi/8$ . В сечениях  $\theta = 0, \pi/4, \theta = \pi/2$  наблюдается равномерное распухание, причем величина необратимой объемной деформации одинакова ( $S \approx 13\%$ ).

Такое же значение принимают радиационные деформации при  $\rho < 1/3$  во всех окружных сечениях. Это обусловлено особенностями образования и соединения микропор в металле при облучении согласно моделям [16–18]. Указанный аспект подробно изложен в работах по физике твердого тела и радиационному материаловедению.

Нужно отметить, что в данном случае картина распределения радиационного распухания качественно повторяет распределение неосесимметричного температурного поля. Это можно объяснить тем, что температурный интервал нагружения частично совпал с диапазоном рабочих температур, при котором процесс распухания происходит наиболее интенсивно (для металлов, это значение лежит в пределах от  $0.2T_m$  до  $0.6T_m$ ,  $T_m$  – температура плавления). Также следует отметить, что картина радиационного распухания на первом участке (при  $\rho < 1/3$ ), имеет равномерный характер как по радиусу так и по окружности для всех амплитудных значений  $A < 80$ . На втором и третьем участках изменение параметра  $A$  существенно сказывается на распределении радиационных деформаций  $S[T(r,\theta), \Phi]$  (до 30%) и наблюдается сдвиг кривых объемных деформаций на этих участках в сторону продольной оси. Распределение объемного

радиационного распухания по периметру модельного тела при различных амплитудных значениях окружной неравномерности показано ниже на рисунке 6.

Таким образом, при облучении и неосесимметричном нагреве материал будет подвержен значительному неоднородному распуханию. Учет этой неравномерности, появляющейся в увеличении объемной деформации, и снижает максимальные сжимающие напряжения на 30%, что хорошо видно на графиках рисунков 2 и 4. С одной стороны такое снижение максимальных напряжений при неупругой работе материала, позволяет повысить допустимую величину терморadiационной нагрузки, но с другой стороны необходимо следить, чтобы растягивающие напряжения, возникающие при данном значении флюенса и температуры, не приводили к разрушению тела в зоне растяжения. Численные эксперименты показали, что большой флюенс нейтронов и высокая рабочая температура делает совершенно необходимыми дальнейший учет вязких деформаций тела, причем для описания ползучести должна использоваться теория, адаптированная для неосесимметричной модели деформирования в общем случае включающая как радиационную, так и термическую составляющую. Так, если при расчете холодных сечений целесообразно учитывать только радиационную ползучесть, то в горячих сечениях необходимо принимать во внимание как радиационную, так и тепловую составляющие необратимого деформирования.

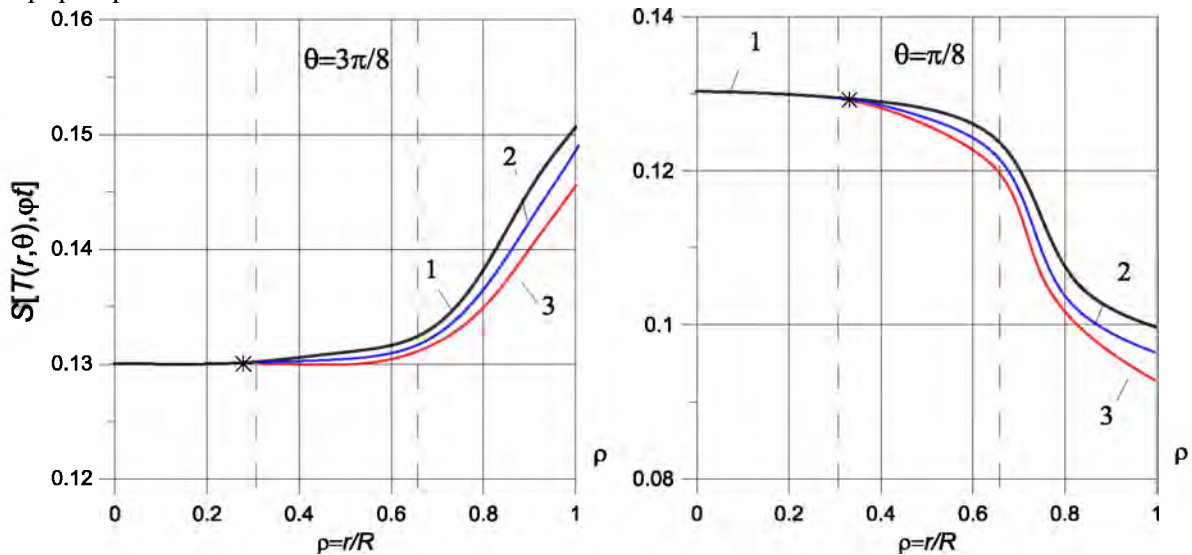


Рисунок 6. – Радиационное распухание в холодных (а) и горячих сечениях (б) стального цилиндра за 5000 ч облучения потоком быстрых нейтронов ( $\bar{E} > 0.1$  МэВ) плотностью  $\theta = 2.81 \cdot 10^{19}$  нейтрон/(см<sup>2</sup>·ч) и неосесимметричном нагреве (1) при различных значениях окружной неравномерности температур: 1 –  $A=50$ ; 2 –  $A=60$ ; 3 –  $A=70$

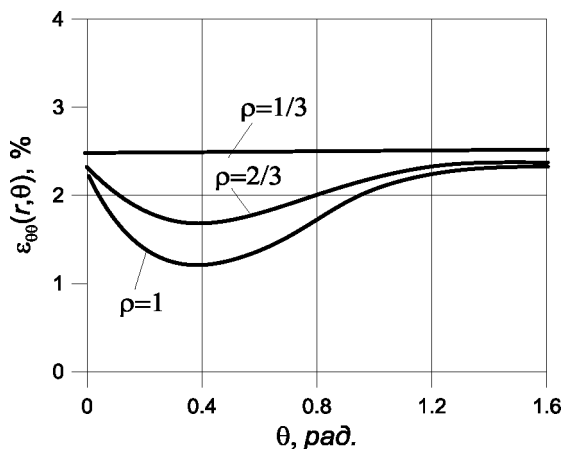


Рисунок 7. – Распределение окружных деформаций по периметру цилиндра в случае неосесимметричного температурного поля (4.2) с  $A=50$  для  $t=4000$ ч облучения

На рисунках 7 и 8 показано распределение деформаций по периметру модельного тела. Как можно заметить из эпюр рисунка 7, распределение деформаций в горячих сечениях ( $\theta = [0; \pi/4]$ ), резко неоднородно, что обусловлено большой тепловой ползучестью в неосесимметричном тепловом поле (1). В холодных сечениях основной вклад вносит радиационная ползучесть, слабо зависящая от температуры. Поэтому в сечениях  $\theta = [\pi/4; \pi/2]$  распределение деформаций близко к равномерному.

На эпюрах рисунка 8 показано изменение во времени полных окружных деформаций на внешнем, центральном и внутреннем участках для рассматриваемых горячих и холодных сечений.

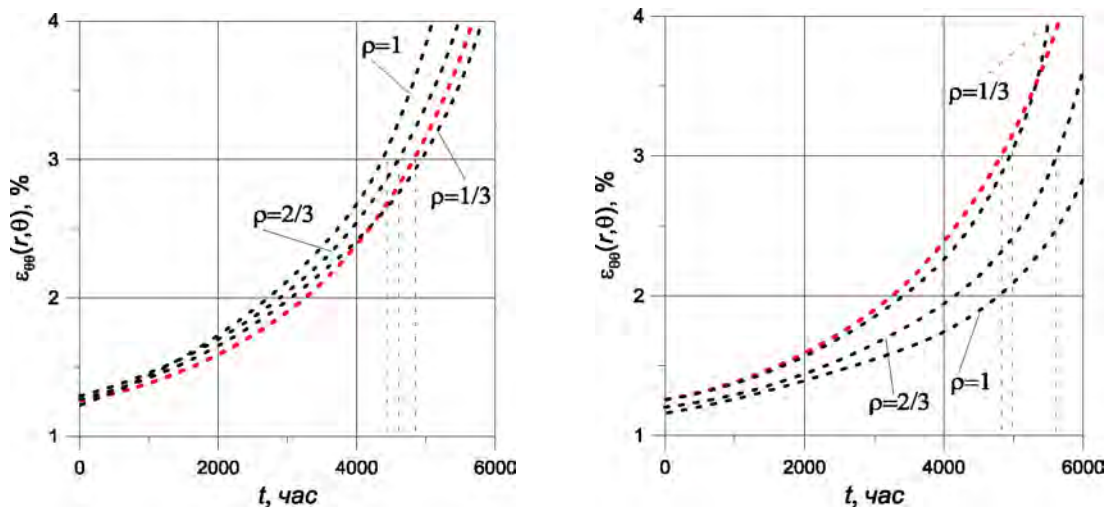


Рисунок 8. – Изменение максимальных окружных деформаций во времени для холодных ( $\theta=3\pi/8$ ) и горячих ( $\theta=\pi/8$ ) сечений с учетом (—) и без учета (---) окружной неравномерности температуры ( $A=50$ )

Если принять допускаемую деформацию равной  $[\varepsilon]=3\%$ , то для холодного сечения допускаемый ресурс времени  $[t]$  при учете и без учета окружной неравномерности температур, как показано на рисунке 8(а) изменится незначительно от 4500 до 4900. Максимум отклонения  $[t]$  составляет 350ч для внешнего ( $2/3 \leq \rho \leq 1$ ), 250ч для центрального ( $1/3 \leq \rho \leq 2/3$ ) и 50ч для внутреннего ( $0 \leq \rho \leq 1/3$ ) участков. В тоже время для горячих сечений (рисунок 8, б) окружная неравномерность температур дает существенный вклад при оценке работоспособности: максимум отклонения  $[t]$  для внешнего участка составляет 1150ч, а для центрального 750ч. Для внутреннего участка допускаемый ресурс времени  $[t]$  при учете и без учета окружной неравномерности температур изменится незначительно от 4850ч до 4950ч. Как видно, величина деформаций в осесимметричной задаче больше, чем неосесимметричной. Таким образом, оценкой деформаций в горячих сечениях по осесимметричной модели можно пользоваться даже с некоторым запасом. В холодных сечениях деформации отличаются незначительно, так как в этом случае основной вклад в неупругие деформации вносят распухание и радиационная ползучесть, которые в случае двух моделей близки по величине.

Результаты серии виртуальных испытаний свидетельствуют о том, что окружная неравномерность температур существенно ухудшит работоспособность холодных сечений ( $\theta=[\pi/4;\pi/2]$ ) со временем. Следует отметить, что особенно большое влияние оказывает неравномерное по окружности распределение температуры для больших флюенсов нейтронов  $\Phi_{max}=10^{27}$  нейтрон/м<sup>2</sup>. Учитывая то, что возникающие при указанных флюенсах деформации стали существенно зависят от температуры, очевидно, что неравномерное распределение последней и вызывает резко неравномерное по окружности распухание. В результате чего материал подвержен дополнительным необратимым деформациям в кольцевом направлении. Таким образом, из серии проведенных расчетов можно предположить, что для конструкционного материала флюенс нейтронов является основным фактором, влияющим на величину напряжений, а при его больших величинах, приводящих к радиационным деформациям более чем 3%, расчеты следует проводить с учетом радиационной ползучести. Численные эксперименты показали, что изменение окружной координаты незначительно влияет на величину напряжений при амплитудном значении неравномерности  $2A < 20$ . При этом увеличение  $2A$  с 20 до 30 снижает величину радиальных и тангенциальных напряжений на 4%, а максимальное

расхождение с осесимметричной моделью составляет 9% (при  $\rho=1$ ). Дальнейшее изменение амплитудного значения окружной неравномерности, например, при  $2A>40$  довольно сильно сказывается на максимальных значениях напряжений, особенно окружных. Анализ результатов показал, что использование осесимметричной модели НДС завышает деформации в горячих сечениях и занижает напряжения в холодных сечениях стального цилиндра по сравнению с неосесимметричной моделью. Для холодных сечений накопленные деформации отличаются незначительно, т.к. в этом случае основной вклад вносят радиационные деформации, которые в холодных сечениях в обоих случаях  $1D(r)$  и  $2D(r,\theta)$  моделях близки по величине. При этом, выявляется, что в случае горячих сечений, накопленные деформации по осесимметричной модели несколько больше, чем по неосесимметричной методике. В связи с этим, можно предположить, что оценкой неупругих деформаций по  $1D$  модели можно пользоваться с некоторым запасом с точки зрения работоспособности конструкции.

Проведенные исследования дают также основания сделать несколько важных выводов при изучении неосесимметричного НДС в условиях неравномерного нагрева и облучения.

- На начальных этапах нагружения терморadiационные напряжения в плоскости сечения сплошного цилиндрического тела в основном определяются тепловыделением и механической нагрузкой. Если тепловыделение отсутствует, то поперечные напряжения малы и определяются только механической нагрузкой, а продольные дополнительно зависят от поля температур. Причем для неосесимметричной термической задачи для сплошного цилиндра из конструкционного материала (без внутренних источников тепловыделения) поперечные напряжения равны нулю, а продольные полностью определяются неравномерностью температурного поля.

- В то же время для терморadiационной задачи напряженное состояние в поперечном сечении цилиндра отлично от нуля, как при наличии, так и при отсутствии внутреннего тепловыделения в модельном теле односвязной геометрии. А уровень напряжений в конструкционном материале в первую очередь определяется флюенсом нейтронов.

- Полученные данные свидетельствуют о том, что градиент температуры по периметру не сказывается на температурных напряжениях в сплошном цилиндре без внутренних источников тепла (конструкционный материал), но сказывается на радиационных напряжениях и терморadiационном НДС. Таким образом, градиент температуры по периметру существенно влияет на прочностные характеристики длинных тел односвязной цилиндрической геометрии при радиационном облучении.

- Окружная неравномерность ( $2A<50$ ), сильно сказывающаяся на поверхности цилиндрического тела (вплоть до  $\rho=2/3$ ) заметно сглаживается при  $1/3<\rho<2/3$ , а при  $\rho<1/3$  различие снижается до нуля.

- Для конструкционного материала при значениях параметра окружной неравномерности  $2A<20$ , определение НДС можно проводить по осесимметричной модели (различие 4-5%). При больших величинах окружной неравномерности температур расчеты следует проводить по неосесимметричной модели (расхождение более чем 5%). Таким образом, при решении практических задач окружную неравномерность в некоторых случаях (для упрощения) можно не учитывать.

- В тоже время, в общем случае решение неосесимметричной задачи определения НДС не может быть заменено решением ряда осесимметричных задач в соответствующих меридиональных сечениях, так как это может привести к количественно и качественно неверным результатам.

Отметим, что также как и в задаче [2] по определению термоупругого состояния сплошного цилиндра без внутренних источников тепловыделения, неосесимметричное

температурное поле  $T(r, \theta)$  не вызвало кроме продольных появления каких-либо других напряжений в сечении модельного тела. Этот факт согласуется с аналогичными аналитическими решениями для неосесимметричных стационарных термических задач, представленных Н.И. Мухелишвили на основании дислокационной аналогии [19]. Упомянутый автор впервые установил, что в свободном односвязном цилиндрическом теле без внутренних источников тепловыделения не возникает напряжений в поперечном сечении. В этой связи, предлагаемые общие терморadiационные решения можно считать расширением известных термоупругих решений на сплошные среды с нелинейными свойствами в условиях сложного немеханического нагружения.

Разработанная механико-математическая модель и общая методика определения неосесимметричного НДС, в процессе программного моделирования и отладки компьютерных расчетных средств, тестировались на соответствующих классических решениях для цилиндрических тел, представленных в работах [19–21]. Таким образом, решение ряда тестовых и модельных задач дает хорошее совпадение полученных численных результатов с известными решениями и расчетными данными других авторов [9–18]: для различных параметров отклонение составляет от 4.6% до 9% соответственно. Оценка точности выполнялась путем вычисления относительной погрешности.

### РЕЗЮМЕ

Общий случай неосесимметричного терморadiационного НДС значительно отличается от осесимметричного, а решение неосесимметричной задачи деформирования не может быть заменено решением ряда осесимметричных задач в соответствующих меридиональных сечениях. Если осесимметричные модели НДС дают представление об интегральных изменениях в цилиндрическом теле, то неосесимметричная  $2D(r, \theta)$  модель позволяет провести анализ его состояния в любой материальной точке как по радиусу, так и по периметру сечения с возможностью дальнейшей оценки прочности на основе того или иного критерия. Данные проведенных численных экспериментов свидетельствуют о том, что градиент температуры по периметру не сказывается на температурных напряжениях в сплошном цилиндре без внутренних источников тепла (конструкционный материал), но сказывается на радиационных напряжениях и терморadiационном НДС.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ширвель, П.И. О неосесимметричном НДС неравномерно нагретого длинного сплошного цилиндра, подверженного нейтронному облучению / П.И. Ширвель, И.С. Куликов // Машиностроение: респ. межвед. сб. в 2 т. – Минск: БНТУ, 2009. – Вып. 24, т. 1. – С. 185–191.
2. Куликов, И.С. Решение неосесимметричной задачи термоупругости для неравномерно нагретого длинного цилиндра в условиях ползучести / И.С. Куликов, П.И. Ширвель // Вестник Белорусского национального технического университета. – 2009. – № 4. – С. 75–80.
3. Ширвель, П.И. Определение неосесимметричного НДС длинного сплошного цилиндра в условиях ползучести и облучения / П.И. Ширвель // «Математическое моделирование и краевые задачи»: тр. VII Всероссийской науч. конф. с междунар. участием, Самара, 3–6 июля 2010 г.: в 2 ч. – Самара: СамГТУ, 2010. – Ч. 1. – С. 395–398.
4. Ширвель, П.И. Модель расчета неосесимметричного напряженно-деформированного состояния облучаемых тел цилиндрической геометрии в условиях пластичности и ползучести / П.И. Ширвель, И.С. Куликов // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-тэхн. навук. – 2012. – № 4. – С. 51–62.
5. Ширвель, П.И. Решение радиационно-термоупругой задачи для сплошного цилиндра / П.И. Ширвель // Теоретическая и прикладная механика: респ. межвед. сб. – Минск: БНТУ, 2008. – Вып. 23. – С. 55–63.

6. Ширвель, П.И. О численных методах исследования напряжено-деформированного состояния тепловыделяющих элементов АЭС / П.И. Ширвель // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-тэхн. навук. Приложение. – 2010. – Т. 5. – С. 226–235.
7. Чигарев, А.В. Исследование неосесимметричного напряженного состояния при квазистатическом термосиловом нагружении в условиях облучения высокоэнергетическими частицами / А.В. Чигарев, П.И. Ширвель // Наука и Техника. – 2013. – №4. – С.46–53.
8. Ширвель, П.И. Неосесимметричное напряженно-деформированное состояние длинного тепловыделяющего цилиндра в условиях квазистатического терморadiационного воздействия / П.И. Ширвель, И.С. Куликов, А.В. Чигарев// Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2014. – Вып. 29. – С. 79–85.
9. Лихачев, Ю. И. Прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов / Ю. И. Лихачев, В. Я. Пупко. - М.: Атомиздат, 1975. - 280 с.
10. Olander, D. R. Fundamental Aspects of Nuclear Reactor Fuel Elements/ D.R. Olander. – USA: Technical Information Center Energy Research and Development Administration, 1976. – 720p.
11. Тутнов, А. А. Методы расчета работоспособности элементов конструкций ядерных реакторов. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 183 с.
12. Тутнов, А. А. Математическое моделирование поведения теплофизических, прочностных и надежностных характеристик твэлов энергетических реакторов : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.14.03 / А.А. Тутнов, Рос. науч. центр "Курчат. Ин-т", Ин-т реактор. технологий и материалов. - М., 1998. - 54 с.
13. Куликов, И. С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / Под ред. В. Б. Нестеренко. - Минск: Наука и техника, 1984. - 103с.
14. Hall, M.M. Errata to: “Stress state dependence of in-reactor creep and swelling. Part I: continuum plasticity model”, Journal of Nuclear Materials 396 (2010) 112–118 and “Stress state dependence of in-reactor creep and swelling. Part II: experimental results”, Journal of Nuclear Materials 396 (2010) 119–129 / M.M. Hall Jr// J. of Nuclear Materials. – 2011. – Vol. 412, №2. – P. 278–279.
15. Karthik, V. Austenitic Stainless Steels for Fast Reactors - Irradiation Experiments, Property Evaluation and Micro structural Studies / V. Karthik, S. Murugan, P. Parameswaran, C.N. Venkiteswaran, K.A.Gopal, N.G. Muralidharan, S. Saroja and K.V. Kasiviswanathan // Energy Procedia. – 2011. – Vol.7. – P.257–263.
16. Рябов, В. М. Действие излучения на конструкционные материалы/В.М. Рябов. - 2-е изд., доп. - М.: МЭИ, 1990. - 58 с.
17. Киселевский, В. Н. Прочность конструкционных материалов ядерных реакторов / В. Н. Киселевский. - Киев: Наук. думка, 1990. – 163с.
18. Аль-Самави, А. Х. Радиационное распухание металлов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / А. Х. Аль-Самави - Барнаул, 2004. – 121 л.
19. Купрадзе, В. Д. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости: Классич. и микрополярная теория. Статика, гармон. колебания, динамика. Основы и методы решения / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. – М.: Наука, 1976. – 663 с.
20. Колтунов, М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел.-М.: Высш. школа, 1975.–526 с.
21. Лебедев, Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. – М. – Л.: Онти, 1937.–110 с.

#### SUMMARY

*A new model of 2D (r,θ) asymmetric stress/strain state taking into account the change of displacements, stresses and strains as a function of radial and circumferential coordinates has been suggested. The numerical solution to solve stress/strain state problem under creep, swelling and thermal strain has been obtained. The method of the numerical analysis has been offered. The original algorithms and computer software for solutions of 1D(r) and 2D (r,θ) stress/strain state under creep and nuclear radiation have been realized. The analysis of the mechanisms of nonlinear asymmetric deformation for cylindrical bodies was produced. Optimization performance characteristics of quasistatic loading of fast neutron flux and establish the optimal properties of the irreversible deformation processes for asymmetric stress/strain state have been done.*

**E-mail:** [Pavel.Shirvel@yandex.ru](mailto:Pavel.Shirvel@yandex.ru)

Поступила в редакцию 15.11.2013

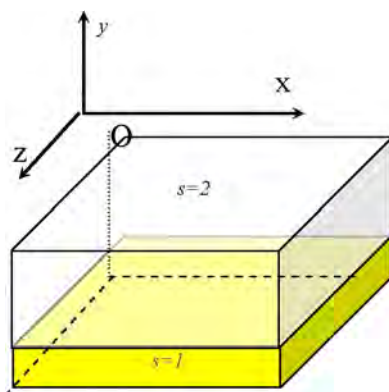
## МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БЕТОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО ПОДХОДОВ

д.т.н. Адищев В.В., к.т.н. Кучеренко И.В., Грачева М.С.

*ГОУ ВПО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск*

В настоящее время в расчетах при проектировании строительных конструкций некоторые структурно-неоднородные материалы (кирпичная кладка, бетон) рассматриваются как однородные, изотропные и линейно упругие [1]. При этом известно, что их физико-механические характеристики зависят от величины и формы экспериментальных образцов, условий их закрепления. Представляется более правильным рассматривать эти материалы как анизотропные и структурно-неоднородные [2] и определять их реальные физико-механические характеристики.

В [3] была предложена математическая модель, на основе которой по известным определяющим соотношениям субструктурных материалов, их расположению и объемному содержанию получены физические соотношения для композиционного материала. Предполагается, что между фазами отсутствует отрыв и проскальзывание (выполняются условия абсолютной адгезии), при этом границы раздела фаз параллельны плоскостям исходной прямоугольной декартовой системы координат и композит представляет в макромасштабе квазиоднородный материал с характерным непрерывно повторяющимся элементом (рисунок 1), модель всего образца представлена на рисунок 2а.



*Рисунок 1. Характерный структурный элемент двухфазного материала с продольным расположением фаз*

Материал каждой фазы считается ортотропным и подчиняется обобщенному закону Гука [4]:

$$\varepsilon^{(s)} = A^{(s)} \sigma^{(s)} \quad (s = 1, 2),$$

$$A^{(s)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(s)} & a_{12}^{(s)} & a_{13}^{(s)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{(s)} & a_{22}^{(s)} & a_{23}^{(s)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{(s)} & a_{32}^{(s)} & a_{33}^{(s)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} a_{ii}^{(s)} = \frac{1}{E_i^{(s)}}, \\ a_{ij}^{(s)} = -\frac{\nu_{ij}^{(s)}}{E_j^{(s)}}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ a_{ll}^{(s)} = \frac{1}{G_l^{(s)}}, \quad (l = 4, 5, 6). \end{cases}$$

Корректно сформулированные условия сопряжения на плоскостях раздела между фазами используются для построения определяющих соотношений композита по методике, описанной в [3]. Обобщенный закон Гука для характерного элемента (рисунок1) получен в аналитической форме:

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^3 B_{jk} \varepsilon_k, \quad \sigma_l = B_{ll} \varepsilon_l, \\ \varepsilon_j = \sum_{k=1}^3 b_{jk} \sigma_k, \quad \varepsilon_l = b_{ll} \sigma_l \quad (j=1,2,3, l=4,5,6), \quad (1)$$

где

$$B_{11} = \frac{(C_{12})^2}{C} + \sum_{s=1}^2 \frac{\omega_s a_{33}^{(s)}}{|A_{22}^{(s)}|}; \quad B_{22} = \frac{1}{C}; \quad B_{33} = \frac{(C_{23})^2}{C} + \sum_{s=1}^2 \frac{\omega_s a_{11}^{(s)}}{|A_{22}^{(s)}|}; \quad B_{44} = \frac{1}{\sum_{s=1}^2 \omega_s a_{44}^{(s)}}; \\ B_{55} = \sum_{s=1}^2 \frac{\omega_s}{a_{55}^{(s)}}; \quad B_{66} = \frac{1}{\sum_{s=1}^2 \omega_s a_{66}^{(s)}}; \quad B_{12} = B_{21} = \frac{C_{12}}{C}; \quad B_{13} = B_{31} = \frac{C_{12} C_{23}}{C} - \sum_{s=1}^2 \frac{\omega_s a_{13}^{(s)}}{|A_{22}^{(s)}|}; \\ B_{23} = B_{32} = \frac{C_{23}}{C}; \quad C = \sum_{s=1}^2 \frac{\omega_s |A_{12}^{(s)}|}{|A_{22}^{(s)}|}; \quad C_{12} = \sum_{s=1}^2 \frac{\omega_s |A_{12}^{(s)}|}{|A_{22}^{(s)}|}; \quad C_{23} = \sum_{s=1}^2 \frac{\omega_s |A_{23}^{(s)}|}{|A_{22}^{(s)}|};$$

$\omega_s$  - удельное объемное содержание материала s-й фазы,  $\sum_s \omega_s = 1$ ,  $|A^{(s)}|$  - определитель матрицы  $A^{(s)}$ ,  $|A_{jk}^{(s)}|$  - алгебраическое дополнение к элементу  $a_{jk}^{(s)}$  матрицы  $A^{(s)}$ ,  $b_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ) нетрудно получить обращением матрицы  $B_{jk}$ ,  $b_{ll} = (B_{ll})^{-1}$  ( $l = 4, 5, 6$ ).

С использованием вышеизложенной методики были определены обобщенные характеристики материала типа бетон, состоящего из двух фаз: первая - матрица заполнителя (цементный камень), для которой модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны  $E^{(1)}=24000$  МПа;  $\nu^{(1)}=0,2$ ; вторая - включения (гранит),  $E^{(2)}=49000$  МПа;  $\nu^{(2)}=0,12$ . Матрица жесткости из (1) в направлениях координатных осей x, y при вертикальной сжимающей нагрузке  $p=1$  МПа и удельном объемном содержании заполнителя  $\omega_1 = 0,22$  имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 43531 & 6824 \\ 6824 & 40505 \end{pmatrix} \text{ МПа},$$

деформации равны

$$\varepsilon_y = -2,47 \times 10^{-5}, \quad \varepsilon_x = 3,23 \times 10^{-6}. \quad (2)$$

Величина нагрузки соответствует упругой работе материала. Ранее этот подход был применен к моделированию НДС каменной кладки [5] и получены результаты, соответствующие экспериментальным данным.

Однако этот подход не позволяет оценить локальные явления, возникающие в структурно-неоднородном материале. Для оценки влияния структурных параметров на напряжено-деформированное состояние (НДС) в образце был проведен численный эксперимент в программном комплексе ANSYS.

Рассматривалась задача определения деформаций при вертикальной сжимающей нагрузке  $p=1$  МПа, приложенной к верхней грани образца, в плоской постановке. Для численного эксперимента в ПК ANSYS модель, представленная на рисунок 2а, была преобразована в модель, показанную на рис 2б, при этом в обоих образцах удельное



объемное содержание каждой фазы одинаково (22 % -цементный камень, 78 % - гранит).

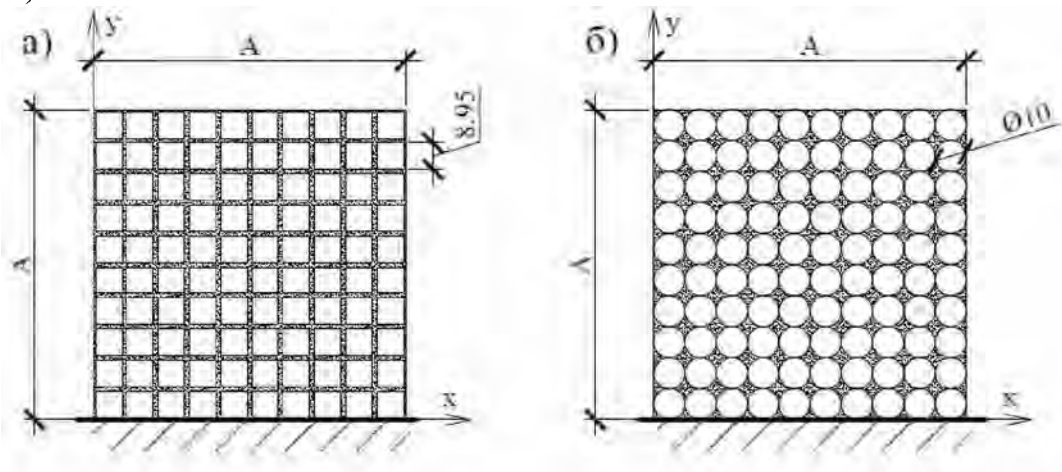


Рисунок 2. Модели образцов

Правомерность перехода от включений прямоугольной формы к круглым также была исследована с помощью ПК ANSYS. Рассматривался некоторый элемент с включениями различной формы (круг, ромб, квадрат), но одинаковой площади. Схема нагружения представлена на рисунке 3.

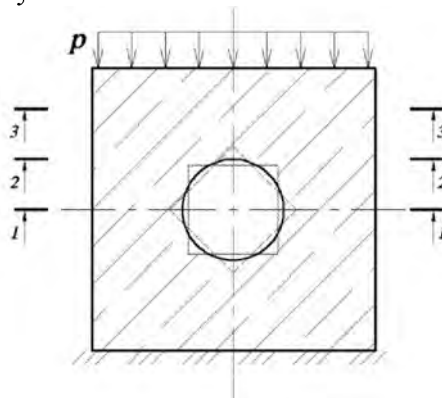


Рисунок 3. Геометрическая модель

Было установлено, что форма включения на расстоянии, сравнимом с размером включения, незначительно влияет на распределение напряжений, то есть напряженно-деформированное состояние не существенно зависит от формы включений [6].

С помощью ПК ANSYS было определено НДС образцов четырех размеров  $A \times A$ :  $50 \times 50$ ;  $70 \times 70$ ;  $100 \times 100$ ;  $150 \times 150$  мм, получены средние значения деформаций (таблица 1), а также выявлены характерные точки 1-4 в материале образца, представленные на рисунок 4.

Таблица 1. Средние значения деформаций в образцах, полученные с использованием описанных подходов

Размер стороны образца A, мм	$\Delta_y$ , м	$\epsilon_y' = \Delta_y/A$	$\epsilon_y$	$\Delta_x$ , м	$\epsilon_x' = \Delta_x/A$	$\epsilon_x$
50	-1,22E-06	-2,42E-05	-2,46E-05	1,80E-07	3,56E-06	3,23E-06
70	-1,70E-06	-2,40E-05		2,47E-07	3,49E-06	
100	-2,42E-06	-2,40E-05		3,48E-07	3,45E-06	
150	-3,62E-06	-2,39E-05		5,11E-07	3,38E-06	

$\Delta_y$ ,  $\Delta_x$  – осредненные значения вертикальных и горизонтальных перемещений верхней грани образца, полученные в результате численного моделирования в ПК ANSYS,  $\epsilon_y'$ ,  $\epsilon_x'$  – соответствующие им осредненные значения вертикальных и горизонтальных деформаций;  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_x$  – значения вертикальных и горизонтальных деформаций из (2).

Как следует из таблицы 1, средние значения вертикальных и горизонтальных деформаций, полученные с использованием описанных подходов, практически совпадают, что говорит об их корректности применительно к данной задаче.

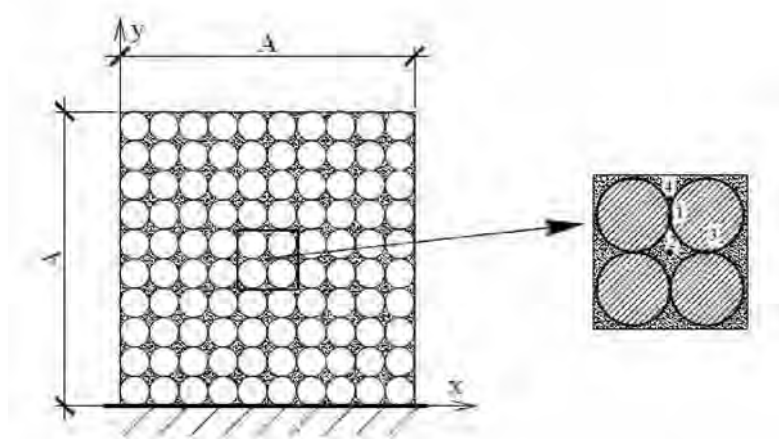


Рисунок 4. Характерные точки материала с включениями.

В таблице 2 представлены значения напряжений и деформаций в характерных точках 1-4, полученные для образца размером 100×100 мм, процент включений 78 %. Для образцов других размеров качественная картина распределения напряжений аналогична, величины напряжений уменьшаются с увеличением размеров образца.

Таблица 2. Напряжения и деформации в характерных точках образца размерами 100x100 мм.

	Напряжения	Значения напряжений	Деформации	Значения деформаций
Вертикальные	$\zeta_{v1}$	-3,66E+05	$\varepsilon_{v1}$	-1,48E-05
	$\zeta_{v2}$	-7,61E+05	$\varepsilon_{v2}$	-3,04E-05
	$\zeta_{v3}$	-1,25E+06	$\varepsilon_{v3}$	-5,06E-05
Горизонтальные	$\zeta_{x2}$	-9,32E+04	$\varepsilon_{x2}$	3,03E-06
	$\zeta_{x3}$	-3,71E+05	$\varepsilon_{x3}$	-2,11E-06
	$\zeta_{x4}$	5,30E+04	$\varepsilon_{x4}$	7,12E-06

Анализ результатов, представленных в таблице 2, позволяет сделать следующие выводы.

1. Наиболее близким к среднему является НДС в точке 2, которая находится в материале заполнителя и наиболее удалена от включений.
2. Максимальные сжимающие напряжения (вертикальные и горизонтальные) возникают в точке 3. Прочность структурно-неоднородного материала в точке 3 обеспечена, так как материалы и заполнителя, и включений хорошо работают на сжатие.
3. Максимальное горизонтальное растягивающее напряжение возникает в точке 4. Для всех рассмотренных образцов точка 4 находится на расстоянии 2 мм по вертикали от точки 1. Материал заполнителя плохо работает на растяжение, поэтому в точке 4 будет формироваться микротрещина нормального отрыва, что согласуется с известными экспериментальными данными
4. Максимальные сжимающие и растягивающие деформации больше средних примерно в два раза.

Ранее [6] с использованием ПК ANSYS было определено НДС образцов с другим удельным объемным содержанием материала фаз (10%, 30%, 50% включений). При этом при регулярном расположении включений они не соприкасаются и максимальные

растягивающие напряжения и деформации возникают в точке 1, находящейся на одной вертикали с точкой 4.

Представляется эффективным при расчете элементов конструкций из структурно-неоднородных материалов типа бетона комбинировать описанные два подхода. При расчете можно считать материал конструкции квазиоднородным, используя его реальные характеристики из (1). Наиболее опасные значения напряжений и деформаций определять, используя коэффициенты, полученные по результатам численных и физических экспериментов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13-08-00633).*

### РЕЗЮМЕ

Предлагается моделировать напряженно-деформированное состояние структурно-неоднородного материала с использованием аналитического и численного подходов. Использование аналитического подхода позволяет определять осредненные физические характеристики бетона как квазиоднородного анизотропного материала. ПК ANSYS дает качественную картину распределения напряжений и деформаций и позволяет выявить локальные зоны начала разрушения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. СНиП 2.03.01-84\* Бетонные и железобетонные конструкции. М.: Госстрой, 1989 г.
2. Ахвердов И.Н. Основы физики бетона. – М.: Стройиздат, 1981. – 464 с.
3. Резников Б.С., Никитенко А.Ф., Кучеренко И.В. Прогнозирование макроскопических свойств структурно-неоднородных сред. // Известия вузов. Строительство. – 2008. № 2. с. 10-17.
4. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. –М.: Наука, 1977.-400 с.
5. Адищев В.В., Кучеренко И.В., Грачева М.С. Моделирование физических характеристик каменных кладок. // Известия вузов. Строительство. – 2013 - № 2-3 - с.97-102
6. Адищев В.В., Кучеренко И.В., Грачева М.С. Определение напряженно-деформированного состояния структурно-неоднородного материала// Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады 3-ей Всероссийской конференции, Новосибирск, 15-17 апреля 2014 г, с26-33.

### SUMMARY

*Proposed to simulate the stress-strain state of structurally inhomogeneous material using analytical and numerical approaches. Using an analytical approach allows to determine averaged physical characteristics of concrete as a quasi-homogeneous aniso-tropic material. PC ANSYS provides a qualitative distribution pattern of stresses and strains and reveals the beginning of the destruction of the local area.*

**E-mail:** [kucher@ngs.ru](mailto:kucher@ngs.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ПЛАЗМЕННОЙ ДУГОЙ И ПОВЕРХНОСТЬЮ РЕЗА МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ЛИСТА

<sup>1</sup>Веремейчик А.И., д.т.н. <sup>1</sup>Сазонов М.И., к.т.н. <sup>1</sup>Хвисевич В.М., Ph.D <sup>2</sup>Цыганов Д.Л.

<sup>1</sup>УО «Брестский государственный технический университет», Брест

<sup>2</sup>Instituto de Plasmas de Fusao Nuclear, Instituto Superior Tecnico, Lisboa (Portugal)

### Введение

Плазменная резка широко применяется в различных областях производства, что обусловлено возможностью ее использования для резки с высокой производительностью и точностью как специальных сталей, так и цветных металлов [1]. В настоящее время накоплен определенный опыт ее практического применения [1]. Вместе с тем в существующей литературе ограничены работы по изучению физических и тепловых процессов, происходящих при резке металлов, т.к. при резке плазменной дугой возникает три источника тепла: подвижное пятно дуги, столб дуги и струя плазмы. Каждый из них вносит свою долю тепла по всей высоте реза. Для изучения процесса резки металлов и особенно теплообмена между плазменной дугой и поверхностью реза предлагается секционированная модель реза.

### Методика исследований и основные результаты

Экспериментальная установка состоит из серийно выпускаемого плазмотрона, систем питания электроэнергией, рабочим газом – воздухом и охлаждающей водой, секционированной модели реза и систем измерения распределения тепловых потерь и токов плазменной дуги вдоль полущели, моделирующей рез в листовом металле (рисунок 1).

Для проведения эксперимента использовался плазмотрон со сменными соплами с внутренним диаметром 3,5; 4,0; 5,0 мм. Расход воздуха через плазмотрон изменялся в пределах 1,0 – 4,0 г/с. Воздух подавался в дуговую камеру с закруткой с целью стабилизации дуги в дуговой камере на оси плазмотрона. Эксперименты проводились при прямой и обратной полярности подключения плазмотрона к источнику электропитания, когда внутренний электрод плазмотрона служил катодом или анодом.

В качестве модели полости реза использовался набор из охлаждаемых водой медных секций. Каждая секция диаметром 100 мм и толщиной 9,5 мм имела щель от центра секции по радиусу, причем ширина щели была выбрана равной 8 мм, характерной при резке металлов большой толщины. Секции при помощи болтов соединялись так, что их щели образовали единую полость, моделирующую рез в листовом металле. Для тепло- и электроизоляции между секциями модели устанавливались покрытые термостойким лаком стекловолоконные прокладки толщиной 0,2 мм. Высота секционированной модели в проведенных экспериментах составляла 107 мм. Модель устанавливалась на стойке под плазмотроном так, что образующая сопла плазмотрона проецировалась на оси полуокружности щели и секции.

Для изучения распределения тока дуги вдоль реза была применена электрическая схема измерений, приведенная на рисунке 1. Каждая секция модели электрически соединялась с положительным или отрицательным полюсом источника электропитания через амперметр типа Ц – 4311 класса точности 0,5. Для исследования распределения и тепловых потоков вдоль полости реза каждая секция модели отдельно охлаждалась водой. Индивидуальный подвод воды к секциям модели позволил провести измерение тепловых потерь от плазменной дуги в секции. Разность температур охлаждающей

воды, протекающей через каждую секцию, измерялась дифференциальными транзисторными термодатчиками, которые погружались в воду в линиях подвода и отвода воды для каждой секции. Каждая пара транзисторов включалась в мостовую схему измерений, которая подключалась к информационно-измерительной системе типа К-200/4. Напряжения, соответствующие разности температур охлаждающей воды, протекающей через каждую секцию, последовательно подавались на цифropечатающее устройство для последующей обработки данных.

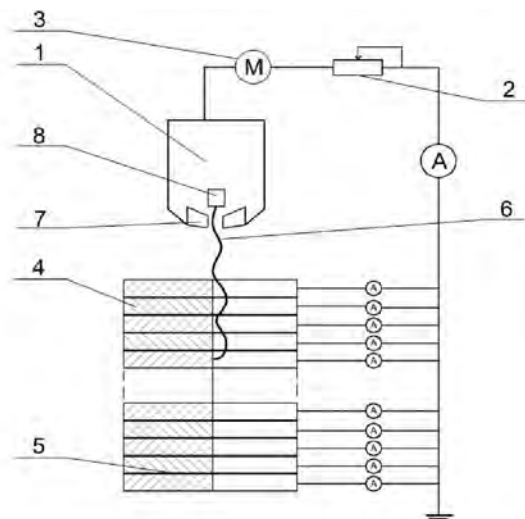


Рисунок 1 - Схема электропитания плазматрона и системы измерений  
 1 – плазматрон; 2 – балластное сопротивление; 3 – источник электропитания постоянного тока;  
 4 – секция модели полости реза; 5- изолятор; 6 – электрическая дуга, 7-сопло; 8- электрод

Следует отметить, что предложенная модель полости реза в некоторой степени отличается от реального реза в листовом металле, производимого при помощи плазматрона. Отличие заключается в том, что при резке в области взаимодействия плазменной дуги с металлом происходит его расплавление и испарение, а также вынос расплавленного металла потоком плазмы из полости реза. Условия горения дуги, установление ее средней длины при резке металла могут отличаться от условий горения в полости разработанной модели. Для выявления этих особенностей были проведены исследования вольт-амперных характеристик дуги при использовании секционированной модели. Результаты экспериментов были сравнены с вольт-амперными характеристиками дуги полученными непосредственно при резке металла. Сравнение вольт-амперных характеристик в исследованных диапазонах тока дуги и расхода рабочего газа показало, что их вид и величины напряжений при соответствующих токах отличаются незначительно. Это положение позволяет заключить, что условия горения дуги в секционированной модели приблизительно те же, что и условия горения дуги при резке металла. Тем не менее необходимы дальнейшие детальные исследования газодинамики и процессов установления длины дуги в полости реза с целью изыскания способов увеличения прорезающей способности плазменной дуги.

На рисунке 2 приведено типичное распределение тепловых потерь, приходящих на единицу длины вдоль оси модели полости реза при расходе воздуха  $G = 2,5$  г/с, токе дуги  $I = 140$  А, диаметре сопла  $d_c = 4$  мм и расстоянии от среза сопла до модели  $l = 12$  мм. На рисунке координаты секции отнесены к их среднему сечению. Как видно из рисунка, максимальный тепловой поток приходится на первые две секции, далее вниз по потоку он экспоненциально уменьшается.

Установлено, что изменение расхода в пределах 1,0-3,0 г/с рабочего газа через плазматрон позволяет незначительно перераспределить характер теплообмена плазменной дугой и металлом полости реза.

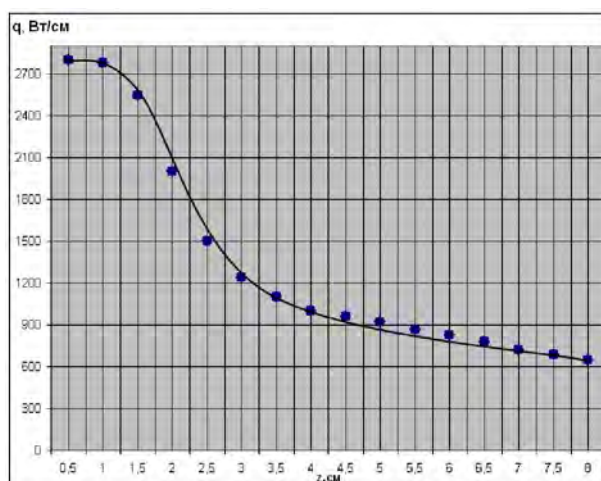


Рисунок 2 – Типичное распределение тепловых потерь вдоль рез при расходе воздуха  $G = 2,5$  г/с,  $I = 140$  А,  $d_c = 4$  мм,  $l = 12$  мм

Установлено также, что увеличение тока дуги от 60 до 160 А и ее мощности приводит к увеличению в 2 раза тепловых потоков в стенку реза и соответственно прорезающей способности плазмотрона.

Изучение распределения тепловых потерь вдоль полости реза при различных диаметрах сопла и расстояния плазмотрона до модели показали, что при изменении диаметра сопла от 3,5 мм до 5 мм и расстояния  $l$  от 12 мм до 20 мм тепловые потоки вдоль полости реза изменяются пренебрежимо мало. Однако следует отметить, что уменьшение диаметра сопла и расстояния  $l$  плазмотрона до модели приводит к слабому возрастанию тепловых потерь во всех сечениях реза и, следовательно, к улучшению прорезающей способности плазмотрона.

Для изучения поведения дуги при прямой 1 и обратной 2 полярностях в полости реза были проведены измерения распределения тока дуги вдоль реза. На рисунке 3 приведены типичные усредненные на единицу длины токи в сечении в зависимости от расстояния вдоль полости реза при токе дуги 90 А, диаметре сопла 5 мм, расстоянии плазмотрона от металла 12 мм и расходе воздуха 2,0 г/с. Из полученных результатов следует, что распределение тока дуги вдоль реза существенно зависит от полярности подключения дуги.

Из сравнения зависимостей 1 и 2 можно сделать вывод, что при малых толщинах разрезаемого листа металла для увеличения скорости резки следует применять прямую полярность подключения плазмотрона, а при резке металла большей толщины – обратную полярность.

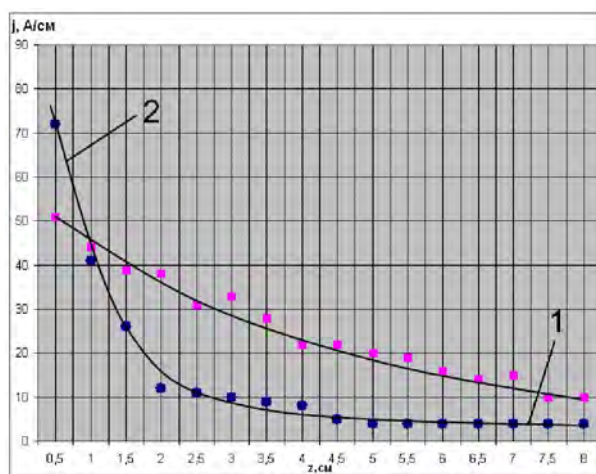


Рисунок 3 - Распределение усредненной плотности тока дуги вдоль реза при прямой 1 и обратной 2 полярностях  $G = 2,0$  г/с,  $d_c = 4$  мм,  $l = 12$  мм,  $I = 90$  А

Результаты исследования распределений тепловых потерь и тока дуги вдоль реза позволяют построить следующую газодинамическую модель потока газа и формирования дуги в полости реза.

При истечении газа в затопленное пространство из сопла плазмотрона плазменную струю можно представить состоящей из трех участков: начального, переходного и основного [2]. В области потенциального начального участка протяженностью 7–9 калибров скорость течения и температура газа приблизительно постоянна. За пределами потенциального ядра формируется турбулентный пограничный слой. Распределение скорости и температуры газа в основном участке исследованы достаточно подробно и могут быть рассчитаны с удовлетворительной точностью по методике [2,3].

При резке металлов, когда электрический столб дуги горит на оси плазменной струи и дуга замыкается на металл в результате процесса шунтирования, течение газа в промежутке между плазмотроном и поверхностью металла и в полости реза определяется рядом сложных явлений. Прежде всего следует отметить, что на выходе сопла плазмотрона в реальных условиях уже имеет место значительная турбулизация потока и по проведенным исследованиям степень турбулентности на начальном участке составляет 11–14 %, что определяется условиями подачи газа в плазмотрон [4,5]. Это приводит к тому, что в потенциальном ядре имеют место значительные пульсации и неравномерное распределение скорости потока. Кроме того, присутствие дуги на оси плазменной струи приводит к значительным градиентам температуры газа на этом начальном участке течения [5,6].

Результаты проведенных исследований распределения тепловых потерь и тока дуги вдоль реза позволяют построить следующую картину течения газа в процессе плазменной резки. При оптимальном расстоянии плазмотрона до поверхности разрезаемого металла, которое составляет 10–14 мм, начальный участок струи входит в полость реза. Это положение основывается на результатах проведения исследований, которые показывают, что полученные распределения тепловых потерь и тока дуги вдоль реза имеют характерный максимум в зависимости усредненной плотности тока дуги вдоль реза, приходящейся на 1–2 секции. Тогда, как известно [4,7], зона шунтирования начинается с некоторого сечения начального участка, где возможно возникновение пробоя между дугой и поверхностью полости реза, и простирается в переходном участке до основного участка течения или участка развитого турбулентного течения. Отметим, что при прямой полярности зона шунтирования располагается несколько выше по потоку, чем в случае обратной полярности подключения плазмотрона, так как условия пробоя когда дуга является для него катодом, а следовательно, источником электродов, будут более благоприятны и поэтому требуются меньшие пробивные напряжения.

Таким образом, течение газов в области полости реза рекомендуется разбивать на четыре зоны. Первая зона включает часть начального участка струи от среза сопла до поверхности разрезаемого металла. В этой зоне начинается размывание струи и образование конусообразного турбулентного слоя. Во второй зоне, простирающейся от поверхности разрезаемого металла до сечения, проходящего через конец начального участка пространственная стабильность дуги нарушается и развивается пробой между столбом дуги и поверхностью полости реза. Этот процесс определяет положение начала зоны шунтирования. Отметим, что с верхней кромки реза развивается второй пограничный слой по поверхности вдоль потока плазмы. Этот слой в конце начального участка смыкается, что определяет сечение начала третьей зоны – зоны перемежаемости, которая простирается до 4-й зоны – зоны развитого турбулентного течения. Из приведенных рисунков распределение тепловых потерь и тока дуги вдоль реза можно определить, что зона шунтирования простирается на 4–8 см.

## Заклучение

С целью изучения особенностей теплообмена дуги с поверхностью полости реза разработана и создана плазменная установка, которая позволяет смоделировать технологический процесс разделительной резки металлов. По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы: для увеличения прорезающей способности плазматрона обратной полярности должна быть снижена степень турбулентности потока на его начальном участке путем улучшения аэродинамического качества плазматрона: в полости реза необходимо перераспределить тепловые потоки вдоль полости реза путем организации дополнительного распределенного по резу вдува воздуха с малым расходом.

На основе измерений тепловых потоков и плотности тока в зависимости от расстояния от верхней кромки реза при малых толщинах разрезаемого листа металла для увеличения скорости резки рекомендуется применять прямую полярность подключения плазматрона, а при резке материалов большей толщины для повышения качества реза – обратную полярность.

## РЕЗЮМЕ

Для изучения процесса резки металлов предложена секционированная модель реза и проведены исследования формирования плазменной дуги и распределения плотности тока и тепловых потоков вдоль полости реза при прямой и обратной полярностях подключения плазматрона.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ширшов, И.Г., Котиков, В.Н. Плазменная резка // М.: Машиностроение, 1987, 162с.
2. Абрамович, Г.Н. Прикладная газовая динамика // Г.Н. Абрамович. – М: Наука, 1969. – 824 с.
3. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя // Г. Шлихтинг. – М: Наука, 1969. – 742 с.
4. Жуков, М.Ф. Прикладная динамика термической плазмы // М.Ф. Жуков, А.С. Коротаяев, В.А. Урюков. Акад. наук СССР, Ин-т теплофизики Новосибирск: Наука, 1975. – 298 с.
5. Zhukov, M.F., Zasyrkin, I.M., Mishne, I.I., Sazonov, M.I Voltage gradient of an electric arc in fully developed turbulent flow of air // Phenomena in Ionized Gases: the 13-th Int. conf., Berlin Leipzig, Sept. 12-17, 1977. Pt.2. - P.539-540
6. Жуков, М.Ф., Засыркин, И.М., Мишне, И.И., Сазонов, М.И. Напряженность электрического поля дуги в развитом турбулентном потоке воздуха // Журнал прикладной механики и технической физики. 1979. №6. - С.1
7. Жуков М.Ф., Засыркин И.М., Мишне И.И., Сазонов М.И. Теплообмен в выходном электроде плазматрона с межэлектродной вставкой // Известия Сибирского отделения Академии наук СССР. Серия технических наук. - 1979. - N 8, вып.2. - С.61

## SUMMARY

*In this article model the sectionalized model of cutting is proposed for study of process cutting metals. To studied the formation of the plasma arc, the current density distribution and heat flux along the cavity of cutting for direct and reverse polarity connection of plasmotron.*

**E-mail:** [vai\\_mrtm@tut.by](mailto:vai_mrtm@tut.by)  
[vmhvisevitch@bstu.by](mailto:vmhvisevitch@bstu.by)  
[tcl-tcl@rambler.ru](mailto:tcl-tcl@rambler.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014



## КОСОНАГРУЖЕННЫЙ ИЗГИБ ДИСКОВ И ДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ

д.т.н. <sup>1</sup>Антонюк В.Е., д.т.н. <sup>2</sup>Ярошевич Е. П.

<sup>1</sup> ГНУ «Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси», Минск  
<sup>2</sup> Белостокская политехника, Белосток, Польша

Требования к современным конструкциям машин по снижению металлоемкости и повышению долговечности связаны с необходимостью изготовления деталей со стабильной геометрической формой, для чего целесообразно использование процесса динамической стабилизации. Динамическая стабилизация основана на том, что при нагружении детали знакопеременной циклической нагрузкой происходит стабилизация геометрической формы детали относительно оси или плоскости приложения знакопеременной нагрузки.

Детали типа дисков широко используются в современных конструкциях машин. К ним относятся как относительно простые фрикционные диски, так и более сложные диски турбомашин. Однако все диски имеют одну общую особенность, связанную с тем, что они обладают малой относительной жесткостью, и при их изготовлении могут возникать остаточные напряжения. При сохранении остаточных напряжений в окончательно изготовленном диске при вследствие как релаксации, так и от эксплуатационных нагрузок происходит перераспределение и уменьшение остаточных напряжений, приводящих к изменению геометрических параметров дисков вследствие малой относительной жесткости.

Диски турбомашин работают при 12-15 тыс. оборотов в минуту и в них возникают напряжения 2500 ... 4000 МПа, которые приближаются к пределу пропорциональности материала диска [1]. При таких напряжениях будет происходить снижение остаточных напряжений, что может приводить к деформациям диска и изменению характера колебаний диска [2].

Что бы избежать возникновения деформаций диска в процессе работы, нужно снять или значительно уменьшить остаточные напряжения в диске. Лучше всего для этого подходит динамическая стабилизация, но для этого нужно максимально возможный объем диска нагружать знакопеременной нагрузкой уровня не менее предела пропорциональности [3].

Принципиальная схема рассматриваемого способа динамической стабилизации деталей типа дисков представлена рисунке 1.

По этой схеме наружный диаметр диска жестко закрепляется, а центральная часть диска поворачивается на угол  $\theta$ , в результате чего в полотно диска возникают две симметричные зоны нагружения  $A$  и  $B$ . Затем центральная часть диска приводится во вращение с уменьшением угла  $\theta$  от максимального до нуля. Две симметричные зоны нагружения  $A$  и  $B$  совершают круговое движение по полотну диска. В результате в полотне диска возникают знакопеременные симметричные напряжения с изменяющимся значением в течение цикла динамической стабилизации. Поворот центральной части диска относительно оси позволяет создать напряжения в полотне диска, а вращение – сделать эти напряжения циклическими.

Деформируемую часть диска можно представить как круглую пластину с наружным радиусом  $R_1$ , внутренним радиусом  $R_2$  и переменной толщиной с жестким закреплением по наружному контуру и по внутреннему отверстию.

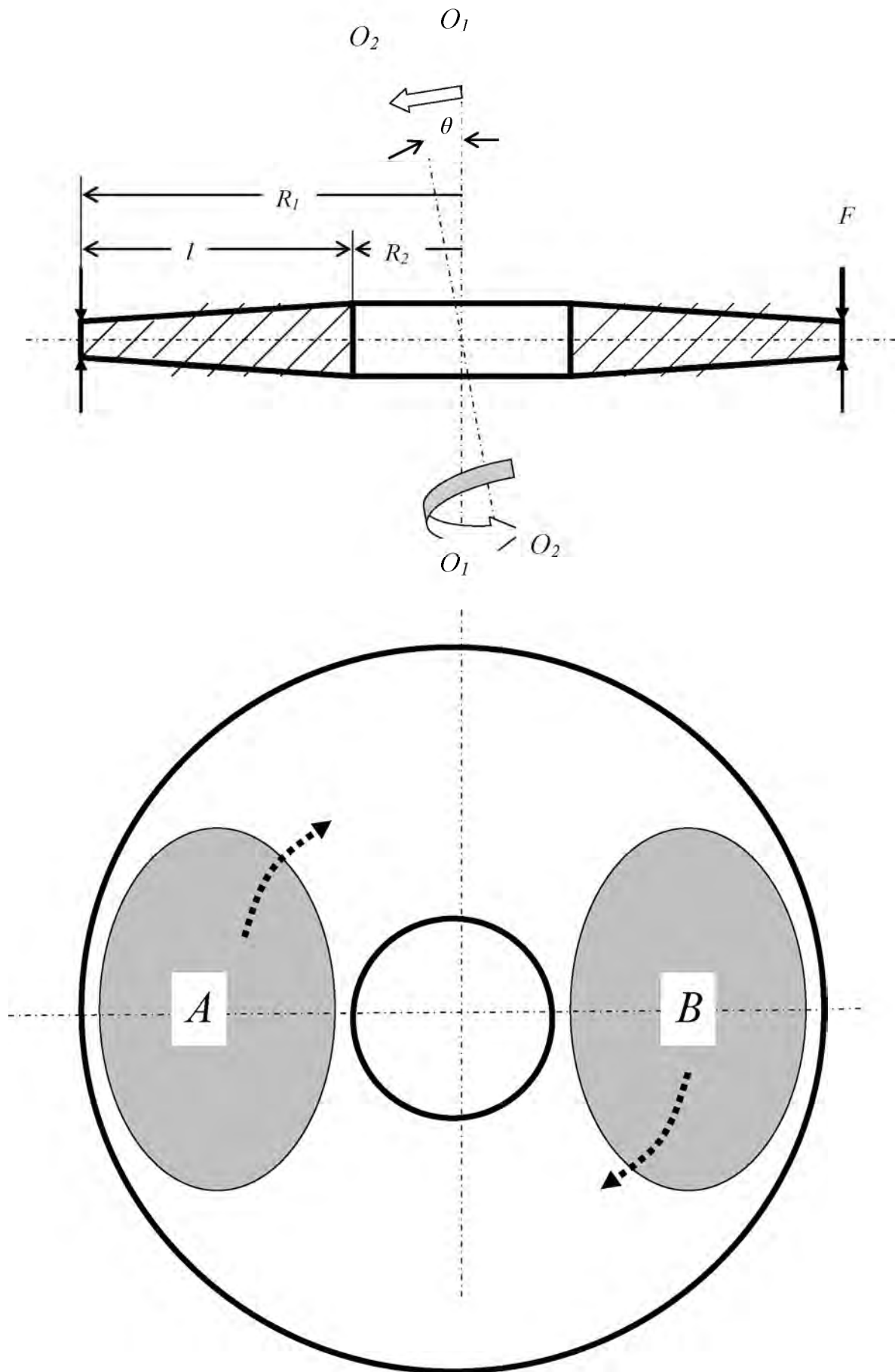


Рисунок 1 - Схема динамической стабилизации дисков переменного сечения с использованием косонагруженного изгиба

Дифференциальное уравнение упругой поверхности круглой пластины в полярных координатах представляется в виде [4]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} \right) = \frac{p}{D} \quad , \quad (1)$$

где  $W = W(r, \alpha)$  – прогиб срединной плоскости пластины;

$r, \alpha$  – полярные координаты, определяющие положение расчетной точки на срединной плоскости пластины;

$p$  – нормальное давление на поверхности пластины;

$D$  – цилиндрическая жесткость пластины.

Расчетная схема косо нагруженного изгиба диска представлена на рисунке 2.

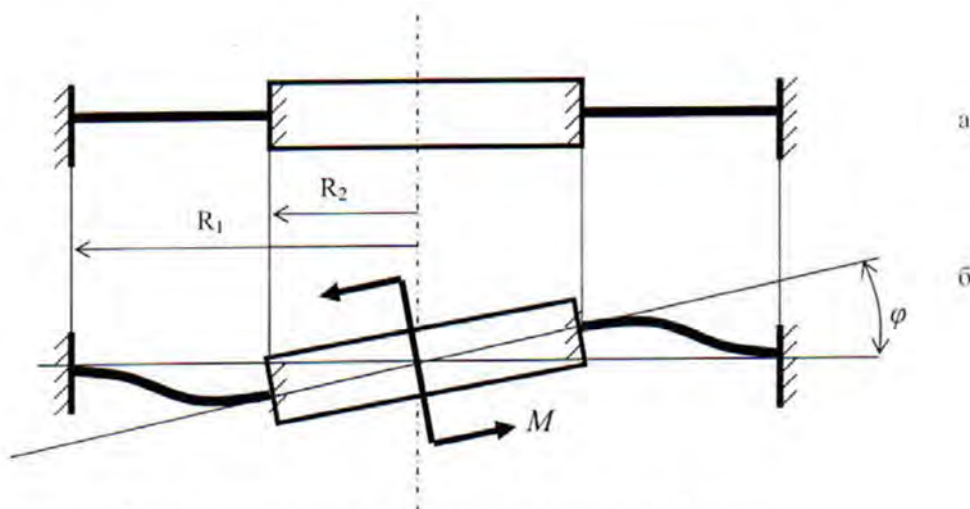


Рисунок 2 - Расчетная схема косо нагруженного изгиба диска:  
а - исходное состояние, б - деформированное состояние

В исходном положении (рисунок 2а) деформируемая часть диска рассматривается как круглая пластина переменной толщины, жестко заделанная по наружному краю и имеющая в середине жесткий центр, к которому прикладывается изгибающий момент  $M$  (рисунок 2б).

Значение угла поворота для достижения изгибающего момента  $M$  равно [5]

$$\varphi = \frac{M \left[ (a^2 + 1) \cdot \ln a - (a^2 - 1) \right]}{4\pi \cdot D \cdot (a^2 + 1)} \quad , \quad (2)$$

где  $a = \frac{R_1}{R_2}$ .

В результате анализа установлено, что наибольший изгибающий момент возникает в точке пластины с координатами  $r = R_2$

$$M_{изг} = \frac{M(a^2 - 1)}{2\pi \cdot R_2 \cdot (a^2 + 1)} \quad . \quad (3)$$

Максимальные напряжения в диске возникают в сечении максимального угла поворота и расчет напряженного состояния производится для этого сечения. На противоположной стороне полотна будут возникать такие же напряжения, но противоположного знака. Таким образом, за один оборот оси диска напряжения на одной стороне полотна меняют свое направление на противоположное на противоположной стороне полотна и дважды становятся равными нулю.

Предлагаемая схема косоагруженного изгиба может быть использована для реализации процесса динамической стабилизации применительно к дискам с переменным сечением.

### РЕЗЮМЕ

Дано обоснование возможности использования схемы косоагруженного изгиба диска при использовании динамической стабилизации для дисков с переменным сечением.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер, И.А. Расчеты на прочность деталей машин: Справочное пособие / И.А. Биргер, Б.Ф.Шорр, Р.М. Шнейдерович / под ред. И.А.Биргера – М.: Машиностроение, 1966. – с.616.
2. Jaroszewicz J. The method of partial discretization in free vibration problems of circular plates with variable distribution of parameters / J.Jaroszewicz, L. Zoryj // International Applied Mechanics, 2006, 42, 3, pp.364-373.
3. Антонюк, В.Е. Динамическая стабилизация геометрических параметров деталей знакопеременным нагружением / В.Е.Антонюк . –Минск: УП «Технопринт», 2004. – 184 с.
4. Амензаде, Ю.А. Теория упругости /Ю.А.Амензаде. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
5. Антонюк, В.Е. Исследование напряженного состояния дисков при косоагруженном изгибе / В.Е. Антонюк, А.М. Гоман // Материалы, технологии, инструменты. –2005.– Т.10. – № 2. – С.28–33.

**E-mail:** [bats@ncpmm.bas-net.by](mailto:bats@ncpmm.bas-net.by)  
[j.jaroszewicz@pb.edu.pl](mailto:j.jaroszewicz@pb.edu.pl)

Поступила в редакцию 24.11.2013

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ СЖАТОГО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

к.т.н. Косых Э.Г.

*УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель*

**Введение.** В работе проведено уточнение классического решения о критической силе для стойки, закрепленной в нижнем торце и сжатой распределенной нагрузкой переменной интенсивности, полученное Ясинским [1] (рисунок 1). В своем классическом решении он свел рассматриваемую проблему к краевой задаче с неполными граничными условиями. Полученное решение он использовал в задаче о критической нагрузке для шарнирно опертого стержня, нагруженного симметрично относительно среднего сечения. Значение критического напряжения в срединном сечении ( $x=L/2$ )  $\sigma_{kr} = 31.348E(i/l)^2$ , приведенное в [1], приблизительно, и согласно предлагаемому в настоящей работе уточненному решению должно быть уменьшено до значения  $\sigma_{kr} = 25.61E(i/l)^2$ . Ранее устойчивость стержней переменной жесткости исследовалась в работах [2, 3].

Ясинский рассмотрел случай переменной интенсивности нагрузки для указанной задачи, которая в применении к сжатым стержням открытого верхнего пояса моста, получила название «задача Ясинского». В этом случае с помощью замены переменных уравнение продольного изгиба сведено к уравнению второго порядка, но в соответствующей краевой задаче учтены не все граничные условия. В предлагаемой работе для «задачи Ясинского» поставлена краевая задача с учетом всех граничных условий.

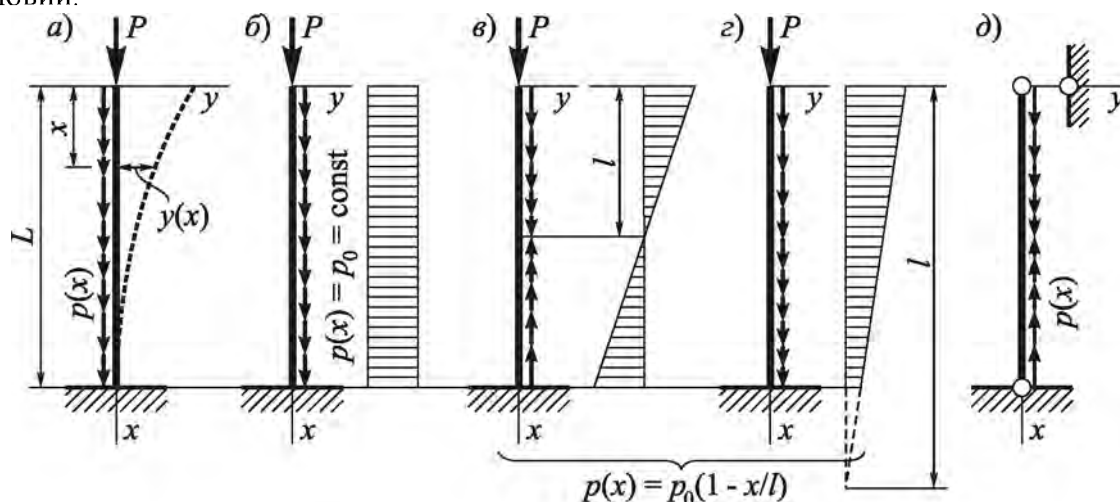


Рисунок 1.

**Постановка задачи.** Пусть функция нагружения  $p(x)$  представляет собой конечный многочлен

$$p(x) = p + p_1x + p_2x^2 + \dots$$

В этом случае внутренняя продольная сжимающая сила в произвольном сечении стержня будет

$$N(x) = P + \int_0^x p(x)dx = P + px + p_1 \frac{x^2}{2} + p_2 \frac{x^3}{3} + \dots$$

где  $P$  – сосредоточенная сила, приложенная в верхнем торце.

Соответствующее дифференциальное уравнение продольного изгиба в перемещениях  $Y$  будет [2, 3]:

$$(EIY'')'' + \left( \left( P + px + p_1 \frac{x^2}{2} + p_2 \frac{x^3}{3} + \dots \right) Y' \right)' = 0. \quad (1)$$

где  $EI$  – изгибная жесткость поперечного сечения.

В тоже время, соответствующее уравнение Ясинского можно получить из (1), убрав в каждом слагаемом одну операцию дифференцирования и введя новую переменную  $\theta = Y'$ . В результате имеем уравнение второго порядка:

$$EI\theta'' + \left( P + px + p_1 \frac{x^2}{2} + p_2 \frac{x^3}{3} + \dots \right) \theta = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим задачу о продольном изгибе как задачу Эйлера о бифуркации равновесных состояний сжатой стойки. Для этого решаем соответствующую краевую задачу, находя решение уравнения (1), удовлетворяющее некоторым граничным условиям  $G(x, y) = 0$ . Решение получим в матричном виде, сводя уравнение 4-го порядка (1) к двум уравнениям 2-го порядка. Для этого вводим переменные:  $Y_1 \equiv Y$ ;  $Y_2 \equiv Y'$ , а переменную  $Y$  сохраним для обозначения вектора с координатами  $Y_1, Y_2$ . Вместо дифференциального уравнения четвертого порядка получим матричное уравнение второго порядка для векторной переменной ( $Y$ ):

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta + \beta_1 x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \alpha + \beta \cdot x + \beta_1 \cdot \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

где безразмерные параметры нагрузки

$$\alpha = PL^2 / EI, \quad \beta = pL^3 / EI, \quad \beta_1 = p_1 L^4 / EI.$$

В примере все другие параметры равны нулю. С помощью замены векторной переменной  $(Y) = (V) \cdot (U)$  преобразуем уравнение (3).

Известно [6], что любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка (здесь и далее скобки при матрицах опущены):

$$Y'' + f_1(x)Y' + f_2(x)Y = 0 \quad (4)$$

может быть приведено к виду:

$$U'' + In(x) \cdot U = 0. \quad (5)$$

Матрицы-коэффициенты в (4) легко определяются сопоставлением уравнений (3) и (4). Выполняя указанную замену в исходном уравнении, получим:

$$(V'' + f_1 \cdot V' + f_2 \cdot V) \cdot U + (2V' + f_1 \cdot V) + V \cdot U'' = 0. \quad (6)$$

Выберем  $V$  так, чтобы существовала обратная матрица  $\bar{V}(x)$  и выполним условие

$$2V' + f_1 \cdot V = 0.$$

Решением этого уравнения будет функция - матрица

$$V(x) = e^{-\frac{1}{2} \int f_1 dx}.$$

Разлагая  $V(x)$  в ряд Тейлора, получим:

$$V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\beta \cdot x + \beta_1 \cdot \frac{x^2}{2}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что первая и вторая производные  $V(x)$  определяются линейно самой функцией  $V(x)$ . Это позволяет вынести за скобку в (6) справа матрицу  $V$  и, умножая (6) на обратную матрицу  $\bar{V}$  слева, получим:

$$U'' + \bar{V} \cdot [f_2(x) - \frac{1}{2}f_1'(x) - \frac{1}{4}f_1^2(x)] \cdot V \cdot U = 0,$$

где множитель при функции  $U(x)$  во втором слагаемом определен в [1] как инвариант линейной системы уравнений –  $In(x)$ .

Таким образом, система линейных уравнений (3) приведена к уравнению матричной форме специального вида (5). В задаче рассматриваемой в качестве примера инвариант  $In(x)$  принимает вид ( $In(x) = E(x)$ ):

$$E(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -0.5\beta_1 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5\beta & 0 \\ -0.5\alpha\beta & 0.5\beta \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0.25\beta_1 & 0 \\ -0.25(\beta^2 + \alpha\beta_1) & 0.25\beta_1 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.25\beta\beta_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.0625\beta_1^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^4. \quad (7)$$

**Решение краевой задачи.** Форма представления системы уравнений в виде (6) важна тем, что для матричного уравнения (7) получена фундаментальная система решений в виде функций представленных сходящимися степенными рядами [2]:

$$Com(\{E\}, x) = I + \sum_1^n (-1)^n x^{2n} \sum_{m=0}^{\max \sum k_i} x^m \sum_{\sum k_i=m} \prod_{n_i=1}^n (E_{k_i}) a_{n,i}, \\ Sim(\{E\}, x) = xI + \sum_1^n (-1)^n x^{2n+1} \sum_{m=0}^{\max \sum k_i} x^m \sum_{\sum k_i=m} \prod_{n_i=1}^n \{E_{k_i}\} b_{n,i}. \quad (8)$$

Здесь  $\{In\}$  – матрица–инвариант системы дифференциальных уравнений,  $\{E_{k_i}\}$  – соответствующие матричные коэффициенты при разложении матрицы-инварианта в степенной ряд. Скалярные множители  $a_{n,i}$ ,  $b_{n,i}$  в (8) определены формулами

$$a_{n,i} = \{k_i!(2n_i - 1 + \sum k_j)(2n_i + \sum k_j)\}^{-1}, \\ b_{n,i} = \{k_i!(2n_i + \sum k_j)(2n_i + 1 + \sum k_j)\}^{-1}.$$

Пользование последними формулами требует следовать правилам:

- 1)  $k_i = i$ ,  $i$  – порядок производной в разложении матрицы-инварианта;
- 2) при формировании общего коэффициента для произведения в суммах  $\sum k_j$  складываются текущий и все предыдущие  $k_i$ .

Например, для парных произведений скалярный коэффициент в (8) имеет вид  $a_{2,l}a_{2,q}$ . Тогда

$$a_{2,l}a_{2,q} = \{l!(1+l)(2+l)q!(3+l+q)(4+l+q)\}^{-1}.$$

Уместно будет обратить внимание на некоммутативность этих произведений. Действительно, поменяв местами индексы  $l$  и  $q$ , получим

$$a_{2,q}a_{2,l} = \{q!(1+q)(2+q)l!(3+l+q)(4+l+q)\}^{-1}.$$

Здесь результат умножения первых двух скобок существенно отличается от произведения первых двух скобок в предыдущей формуле.

Если рассматривать систему уравнений с постоянными коэффициентами, то в (8) отличной от нуля будет только матрица постоянных коэффициентов, которую можно получить как нулевую производную от матрицы-инварианта системы дифференциальных уравнений. В этом случае вместо (8) получим функции

$$Com(\{E\}, x) = I + \sum_1^n (-1)^n \frac{\{E_0\}^n x^{2n}}{2n!}; \quad Sim(\{E\}, x) = xI + \sum_1^n (-1)^n \frac{\{E_0\}^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

В работе [7] эти функции доопределяются дополнительными условиями и представлены как матричные косинус –  $\cos(\{e\},x)$  и синус –  $\sin(\{e\},x)$ , где  $\{e\}\{e\}=\{In\}$ , а  $e$  матрица  $\{e\}$  имеет обратную. Теперь возвращаемся к исходным переменным, т.е. к решению исходного уравнения (3) в форме (5) Тогда

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} &= V \cdot Com(E(x),x) \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + V \cdot Sim(E(x),x) \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}' &= V \cdot Com'(E(x),x) \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + V \cdot Sim'(E(x),x) \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + V' \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}' &= (V \cdot Com(E(x),x))' \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + (V \cdot Sim(E(x),x))' \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Определим постоянные  $(C),(D)$  начальными параметрами  $Y_1(0),(Y_2(0))$ . Из формул (8) следует

$$Com(In, 0) = I, Com'(In, 0) = (0), Sim(In, 0) = (0), Sim'(In,0) = I; V(0) = I,$$

где  $I$  единичная матрица.

Полагая  $x = 0$ , получим:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1'(0) \\ Y_2'(0) \end{bmatrix} - V'(0) \cdot \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix}; \text{ здесь } V'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно

$$C_1 = Y_1(0), C_2 = Y_2(0), D_1 = Y_1'(0), D_2 = Y_2'(0) + \frac{1}{2}\beta \cdot Y_1(0).$$

Подставим эти значения постоянных. Получим решение уравнения (4) в виде матричной функции и ее производной в зависимости от начальных параметров, фактически решение Коши:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y_1(x) \\ Y_2(x) \end{bmatrix} &= (V \cdot Com(E,x) - V \cdot Sim(E,x) \cdot V'(0)) \cdot \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} + V \cdot Sim(E,x) \cdot \begin{bmatrix} Y_1'(0) \\ Y_2'(0) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Y_1'(x) \\ Y_2'(x) \end{bmatrix} &= ((V \cdot Com(E,x))' - (V \cdot Sim(E,x) \cdot V'(0))') \cdot \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} + (V \cdot Sim(E,x))' \cdot \begin{bmatrix} Y_1'(0) \\ Y_2'(0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, в (9) приведено решение матричного дифференциального уравнения (3), линейно зависящее от начальных параметров. Очевидно, что нулевые начальные параметры определяют нулевое или, так называемое, тривиальное решение. Однако для краевых задач обычно заданы различные условия в произвольных местах границы. Например, для стержня это может быть другой конец при  $x=l$ . Пусть эти значения на границе будут равны нулю. Тогда, полагая в (9)  $x=l$ , получим однородную линейную систему уравнений:

$$\left( \begin{bmatrix} (V \cdot Com(E,1) - V \cdot Sim(E,1) \cdot V'(0)) & V \cdot Sim(E,1) \\ (V \cdot Com(E,1) - V \cdot Sim(E,1) \cdot V'(0))' & (V \cdot Sim(E,1))' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \\ Y_1'(0) \\ Y_2'(0) \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что система линейных уравнений (10) всегда имеет нулевое (тривиальное) решение, которое соответствует в задаче продольного изгиба неизогнутой форме равновесия. Но наряду с тривиальным решением может существовать и ненулевое, если определитель в (10) равен нулю:



$$\det \begin{pmatrix} (V \cdot \text{Com}(E,1) - V \cdot \text{Sim}(E,1) \cdot V'(0)) & V \cdot \text{Sim}(E,1) \\ (V \cdot \text{Com}(E,1) - V \cdot \text{Sim}(E,1) \cdot V'(0))' & (V \cdot \text{Sim}(E,1))' \end{pmatrix} = 0. \quad (11)$$

Это алгебраическое уравнение имеет бесконечное множество корней, т.н. собственных значений краевой задачи, если, конечно, решение существует.

В задаче о потере устойчивости прямой формы равновесия сжатой стойки интересен в первую очередь наименьший по значению из корней, соответствующий наименьшим, в определенном смысле, значениям силовых параметров. При достижении которых возникает продольный изгиб и с их ростом развивается изгибная форма равновесия. Если подставить полученные собственные значения в (11), то с помощью (10) получим уравнения изгибной формы равновесия, возникшей в результате бифуркации при продольном изгибе. Меньшему корню будет соответствовать первая собственная форма продольного изгиба. Для старших собственных значений могут быть получены старшие собственные функции.

Ясинский поставил задачу устойчивости для стержня под действием самоуравновешенной распределенной нагрузкой, представляя его как конструкцию из двух «полустержней» под действием сил, равных по величине и направленных противоположно – к общему сечению. Следуя Ясинскому первой задачей такого рода будет рассмотрена конструкция из «полустержней» под нагрузкой постоянной интенсивности (рисунок 2). Для стойки с заделкой в нижнем торце (рисунок 2, справа) граничные условия будут:

$$Y_2(0)=Y_1(1)=Y_1'(1)=Y_2'(1)=0.$$

Параметр нагрузки	Ось абсцисс	детерминанта (11)	
3.58895E+00	+	o	0.46
4.48619E+00	+	o	0.34
5.38343E+00	:	d	0.22
6.28066E+00	+ o		0.11
7.17790E+00	+		-0.00
8.07514E+00	o +		-0.11
8.97238E+00	o +		-0.22
9.86961E+00	o +		-0.33
5.82307E+00	+	o	0.053
5.92177E+00	+	o	0.044
6.02046E+00	:	d	0.034
6.11916E+00	+ o		0.025
6.21786E+00	+ o		0.016
6.31655E+00	+o		0.008
6.41525E+00	+		-0.000
6.51395E+00	o+		-0.008

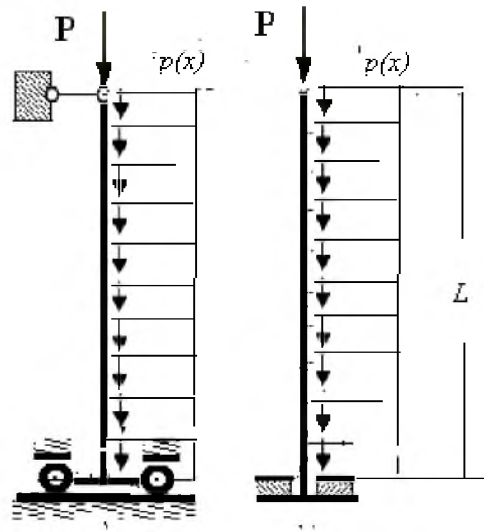


Рисунок 2

Тогда согласно решению (9) нижняя цифровая таблица на рисунке 2 дает для стойки  $p_{кр}=6.4106 EIL^3$ , но не  $p_{кр}=7.38 EIL^3$ , как это следует из приведенного в [1] решения уравнения (2). Соответственно, сжимающая сила в срединном сечении будет равна  $P_{кр}=25.64 EIL^2$  вместо  $P_{кр}=31.348EI/L^2$ .

В случае шарнирного опирания верхнего торца и подвижной заделки нижнего граничные условия будут

$$Y_2(0)=Y_1(0)=Y_1'(1)=Y_2'(1)=0.$$

Тогда согласно решению (9) верхняя цифровая таблица на рисунке 2 дает для стойки  $p_{кр}=7.178 EIL^3$ , но не  $p_{кр}=7.38 EIL^3$ , как это следует из приведенного в [1]

решения уравнения (2). Соответственно, сжимающая сила в срединном сечении будет равна  $P_{кр} = 28.71 EI/L^2$  вместо  $P_{кр} = 31.348 EI/L^2$ .

При исследовании устойчивости трехслойных элементов конструкций необходимо применять уравнения, полученные в [8]–[15].

**Выводы.** Предложенная методика расчета критических параметров устойчивости сжатых неравномерно распределенной нагрузкой стержней, уточняет известное решение и вносит поправки до 24 %.

#### РЕЗЮМЕ

Рассмотрена устойчивость сжатых стержней под действием неравномерно распределенной нагрузки. Приведено аналитическое решение и численные результаты для двух видов граничных условий. Показано, что поправки в известное решение составляют до 24 %.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М.-Л.: Госиздат. технико-теоретической литературы. –1952. – 427 с.
2. Косых Э.Г. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней. / Вестник СамГУ. Естественная серия. 2008. № 8/1 (67). – С. 390–399.
3. Косых Э.Г., Сейфер Д.В. Критическая нагрузка для сжатых стоек переменной жесткости. / Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 41–45.
4. Косых Э.Г. Собственные функции продольного изгиба стержней, сжатых распределенной нагрузкой. / Строительство и восстановление искусственных сооружений. Мат. III междунар. научно-практической конференции. Ч. 1. Гомель: БелГУТ. – 2014. – С. 64–70.
5. Косых, Э.Г. Устойчивость сжатых стоек переменной жесткости под воздействием распределенной нагрузки. / Строительство и восстановление искусственных сооружений: матер. Междунар. научно-практической конференции, Гомель, 29 марта 2013 г. / УО «БелГУТ». – Гомель: БелГУТ, 2013. – С. 100–105.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.:Физматгиз, 1959. – 328 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М: Гостехиздат, 1956. – 576 с.
8. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. – International Applied Mechanics. 2001. Т. 37. № 9. С. 1196–1203.
9. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39. – № 12. С. 1458–1463.
10. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Circular sandwich plates under local impulsive loads / International Applied Mechanics. 2003. Т. 39. № 8. – С. 945–952.
11. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39. № 8. – С. 945–952.
12. Старовойтов Э.И., Доровская Е.П. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. С. 45–50.
13. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. С. 45–50.
14. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. С. 45–52.
15. Starovoitov E.I., Nagiyev F.B. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity. Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.

#### SUMMARY

*The stability of the compressed rod under unevenly distributed load- Universe. The analytical solution and numerical results for the two types of boundary conditions. It is shown that the amendments to the known solution of up to 24%. Keywords: sustainability, the uneven distribution of the load, the task Yasinskiy.*

Поступила в редакцию 01.11.2014

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ СТУПЕНЧАТОГО ВАЛА

д.т.н. <sup>1</sup>Омаров Т.И., к.п.н. <sup>1</sup>Гончарова И.А., <sup>2</sup>Сибилькова Н.П.,  
студ. <sup>2</sup>Алпысбаева Б.М.

<sup>1</sup>Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы

<sup>2</sup>Филиал ФГБОУ ВПО «НИУ МЭИ» в г. Смоленске, Россия

В приводах исполнительных механизмов всех машинных агрегатов для передачи усилия от энергоносителя к рабочему органу машин используются трансмиссионные валы, зубчатые колеса, муфты, гибкие звенья (цепи, ремни). В процессе эксплуатации машины из-за податливости материала, из которого изготовлены несущие элементы, в них формируется упругая деформация кручения, способствующая возникновению и росту моментов сил упругости. Доминирующая составляющая моментов сил упругости будет формироваться в трансмиссионных валах привода. Для динамического исследования подобных механических систем необходимо определить численные значения некоторых параметров, важнейшим из которых является крутильная жесткость упругого элемента (вала). Трансмиссионные валы механизмов передвижения мобильных машин, как правило, имеют ступенчатую конфигурацию, что значительно усложняет задачу определения численного значения крутильной жесткости валов. Для вала, имеющего два участка с различными диаметрами, эквивалентная крутильная жесткость определяется как для последовательно соединенных упругих элементов с жесткостями  $C_1$  и  $C_2$  (рисунок 1) по формуле [1]

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

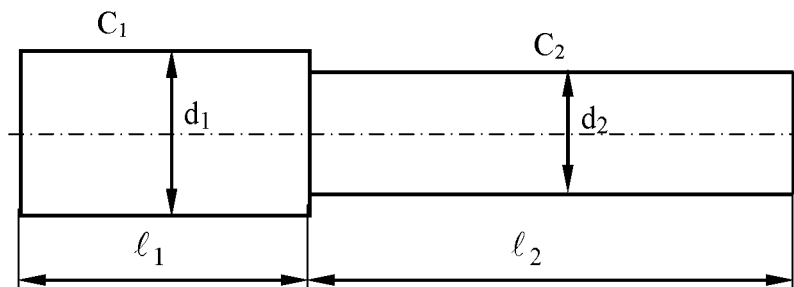


Рисунок 1 – последовательное соединение упругих элементов

При наличии более чем двух участков вала для определения эквивалентной крутильной жесткости удобно воспользоваться величиной, обратной жесткости, называемой податливостью  $e = \frac{1}{C}$ . При последовательном соединении упругих элементов (рисунок 2,а) их податливости складываются [2]. Ступенчатый вал можно рассматривать как последовательно соединенные дискретные тела с соответствующими диаметрами и длинами. Податливость такого вала определяется суммированием податливостей  $e$  участков вала:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \quad \text{или} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \quad (1)$$

По формуле (2) сначала определяется жесткость каждого участка вала, затем вычисляется эквивалентная крутильная жесткость всего вала. В таких случаях бывает

целесообразно ступенчатый вал (рисунок 2, а) заменить гладким валом эквивалентной жесткости (рисунок 2, б). При этом изменится общая длина вала, которая теперь будет называться приведенной длиной  $\ell$ . Диаметр гладкого вала постоянный по всей длине будет называться приведенным диаметром  $d$ . Диаметр и длина вала – основные геометрические размеры вала для определения численного значения крутильной жесткости.

Приведенный диаметр вала можно определить по формуле

$$d = \frac{d_1 \ell_1 + d_2 \ell_2 + d_3 \ell_3 + d_4 \ell_4}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4}. \quad (2)$$

Но без ущерба для расчета за приведенный можно принять диаметр любого из участков вала, желательнее наибольшего размера.

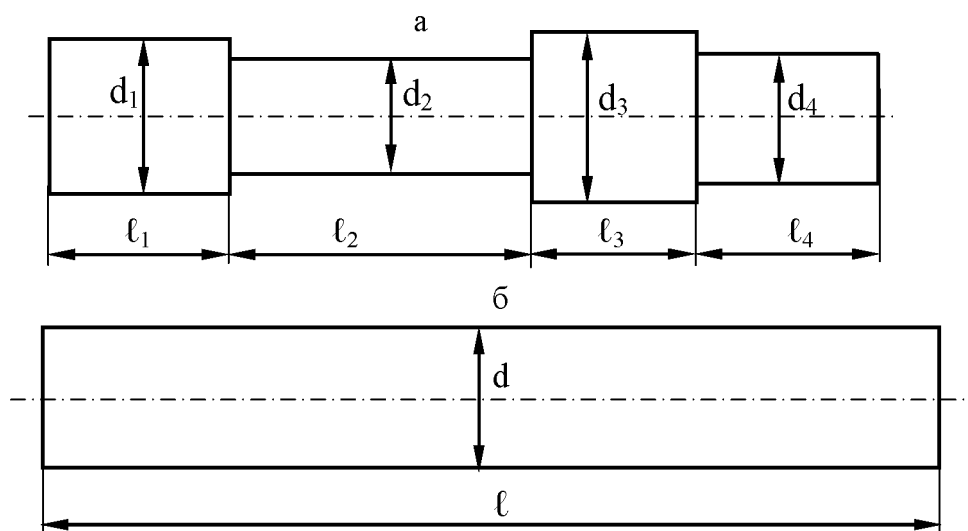


Рисунок 2 – Реальный (а) и приведенный (б) валы

Крутильная жесткость каждого участка вала

$$C_i = \frac{\pi G d_i^4}{32 \ell_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим

$$\frac{32 \ell}{\pi G d^4} = \frac{32 \ell_1}{\pi G d_1^4} + \frac{32 \ell_2}{\pi G d_2^4} + \frac{32 \ell_3}{\pi G d_3^4} + \frac{32 \ell_4}{\pi G d_4^4}. \quad (3)$$

Здесь  $\ell$  – приведенная длина вала,  $d$  – приведенный диаметр вала.

Таким образом, используя уравнение (3), получим формулу для определения приведенной длины вала:

$$\ell = \ell_1 \left( \frac{d}{d_1} \right)^4 + \ell_2 \left( \frac{d}{d_2} \right)^4 + \ell_3 \left( \frac{d}{d_3} \right)^4 + \ell_4 \left( \frac{d}{d_4} \right)^4. \quad (4)$$

В эксплуатационной практике очень часто для уменьшения веса детали применяют полые валы (рисунок 3). Как показывают расчеты, продольное отверстие внутри вала очень незначительно влияет на прочностные характеристики детали, поскольку максимальные касательные напряжения возникают на периферии диаметра вала.

Приведенная длина четырехступенчатого полого вала определяется по формуле [1]

$$\ell = \ell_1 \frac{d^4}{d_1^4 - d_0^4} + \ell_2 \frac{d^4}{d_2^4 - d_0^4} + \ell_3 \frac{d^4}{d_3^4 - d_0^4} + \ell_4 \frac{d^4}{d_4^4 - d_0^4},$$

где  $d$  – диаметр приведенного вала,  $d_0$  – внутренний диаметр полого вала.

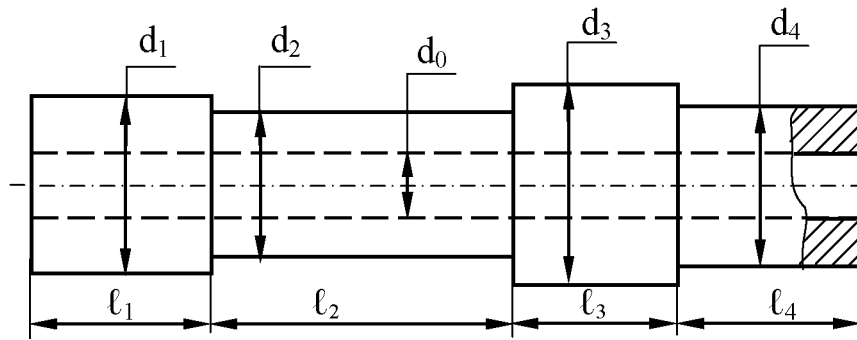


Рисунок 3 – Ступенчатый полый вал

Определим для примера используя формулы (2) и (4) приведенную длину и приведенный диаметр ведущего вала привода механизма передвижения рельсовой грузоподъемной машины [3] (рисунок 3). Вал имеет четыре ступени. Первый самый длинный участок вала (рисунок 3), фрагменты которого соединены с помощью зубчатых муфт принимается как одно тело.

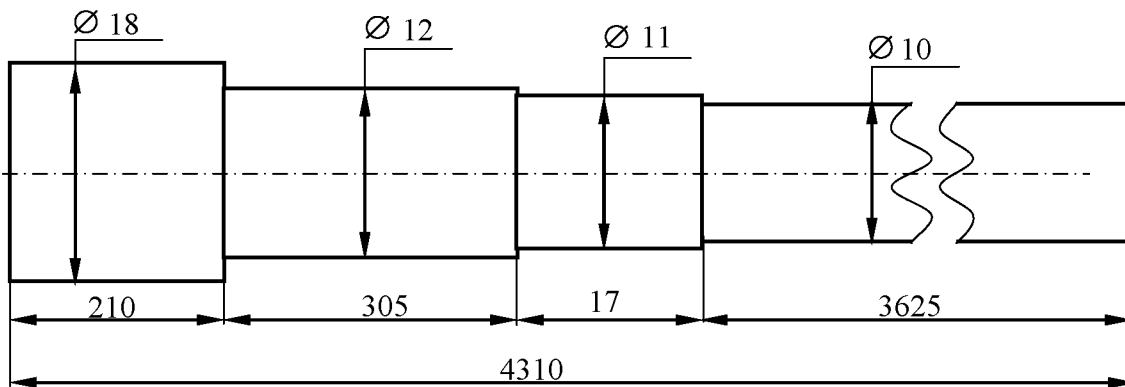


Рисунок 4 - Эскиз ведущего вала привода механизма передвижения рельсовой грузоподъемной машины

Геометрические размеры ступенчатого вала [4]: диаметры  $d_1 = 105$  мм,  $d_2 = 110$  мм,  $d_3 = 120$  мм,  $d_4 = 185$  мм; длины участков  $l_1 = 3625$  мм,  $l_2 = 170$  мм,  $l_3 = 305$  мм,  $l_4 = 210$  мм. Приведенный диаметр ведущего вала  $d$

$$d = \frac{105 \cdot 3625 + 110 \cdot 170 + 120 \cdot 305 + 185 \cdot 210}{3625 + 170 + 305 + 210} = 110 \text{ мм}$$

Приведенная длина ступенчатого вала  $\ell$

$$\ell = 3625 \left( \frac{110}{105} \right)^4 + 170 \left( \frac{110}{110} \right)^4 + 305 \left( \frac{110}{120} \right)^4 + 210 \left( \frac{110}{185} \right)^4 = 4778 \text{ мм.}$$

В рассматриваемом примере приведенная длина оказалась больше реальной длины ведущего вала привода механизма передвижения машины [3]. За приведенный диаметр можно, в сущности, принять диаметр любой ступени вала, что несколько облегчит вычисление значения приведенной длины вала.

Используя значения приведенной длины и приведенного диаметра, определим крутильную жесткость ведущего вала исследуемого механизма:

$$c_1 = \frac{G \pi d^4}{32 \ell} = \frac{8,1 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 110^4}{32 \cdot 4778} = 2,42 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{мм},$$

$$\text{или } c_1 = 2,42 \cdot 10^5 \text{ Нм}.$$

Здесь  $G = 8,1 \cdot 10^4$  МПа – модуль сдвига.

Жесткости валов и при кручении, и при растяжении и изгибе также удобно определять, используя такие параметры, как приведенная длина вала и приведенный диаметр вала.

Аналогичные формулы можно получить для невесомого ступенчатого стержня, работающего на растяжение (сжатие). Приведенный диаметр определяется по формуле (1). Обозначим площади поперечных сечений ступеней стержня  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$ . Податливость ступенчатого стержня при растяжении (сжатии)

$$e = \frac{\ell}{EA} = \frac{\ell_1}{EA_1} + \frac{\ell_2}{EA_2} + \dots + \frac{\ell_k}{EA_k} + \dots + \frac{\ell_n}{EA_n}, \text{ а его приведенная длина}$$
$$\ell = \frac{\ell}{EA} = \ell_1 \frac{A}{A_1} + \ell_2 \frac{A}{A_2} + \dots + \ell_k \frac{A}{A_k} + \dots + \ell_n \frac{A}{A_n}.$$

Здесь  $E$  – модуль упругости при растяжении (модуль Юнга).

Таким образом, используя такие понятия, как приведенная длина вала и приведенный диаметр вала можно значительно упростить вычисление параметров для составления динамической модели исследуемого объекта.

## РЕЗЮМЕ

Трансмиссионные валы приводов механизмов машин, как правило, имеют ступенчатую конфигурацию, что значительно усложняет задачу определения численного значения крутильной жесткости. В таких случаях бывает целесообразно ступенчатый вал заменить гладким валом эквивалентной жесткости из условия равенства потенциальных энергий приводимой и приведенной систем. При этом изменится общая длина вала, которая теперь будет называться приведенной длиной. Диаметр гладкого вала с постоянным по всей длине поперечным сечением будет приведенным диаметром. Диаметр и длина – основные геометрические размеры вала для определения значения крутильной жесткости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. – Киев: Наукова думка, 1996. – 288 с.
2. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. – Киев: Наукова думка, 1981. – 160 с.
3. Омаров Т.И. Динамика механизмов переменной структуры рельсовых машин – Алм-Ата, КазНТУ, 2014. – 231с.
4. Техническая документация напольной завалочной машины мартеновского цеха грузоподъемностью 15 тонн / Завод «Криворожсталь». – Кривой Рог, 1983.

## SUMMARY

*Machines transmission shafts drives tend to have a stepped configuration, which greatly complicates the task of determining the numerical values of torsional stiffness. In such cases it is advisable to replace the stepped shaft for smooth shaft with equivalent stiffness observing conditions of equality of potential energies of the driven and the present systems. In this case change the overall length of the shaft, which will now be called the reduced length.*

**E-mail:** [omarov\\_tim@list.ru](mailto:omarov_tim@list.ru)  
[GoncharovaImma@russia.ru](mailto:GoncharovaImma@russia.ru)  
[sibilkova@mail.ru](mailto:sibilkova@mail.ru)

Поступила в редакцию 01.11.2014

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ МАНИПУЛЯТОРА ДЛЯ ОБРАБАТЫВАЮЩЕГО ЦЕНТРА

к.т.н. Анципорович П.П., к.т.н. Акулич В.К., к.т.н. Дубовская Е.М.

*УО «Белорусский национальный технический университет», Минск*

Исследуемый манипулятор входит в состав устройства автоматической смены инструмента продольного фрезерно-расточного станка 6М610МФ4-20 (типа обрабатывающего центра), используемого на одном из машиностроительных заводов г. Минска и предназначенного для комплексной обработки корпусных, базовых и других деталей фрезерованием, растачиванием и сверлением. Манипулятор осуществляет обмен инструментом в вертикальном шпинделе ползуна, горизонтальном шпинделе накладной торцовой головки, транспортирование инструмента от магазина к бабке и обратно, а также установку инструмента в магазин и извлечение его из магазина.

Манипулятор состоит из каретки 1, головки 2, 3 и двухзахватной механической руки 4 (рисунок 1). Все необходимые движения осуществляются с помощью гидроцилиндров. С каждым звеном связываем систему координат. Система координат  $x_0 y_0 z_0$  – неподвижная, а остальные системы – подвижные. Обобщенными координатами являются параметры относительного движения звеньев –  $S_{10}$  (линейный),  $\varphi_{21}$  и  $\varphi_{32}$  (угловые),  $S_{43}$  (линейный). Таким образом, манипулятор имеет 4 степени свободы (без учета движения зажима – разжима схватов). очередность обработки обобщенных координат, соответствующая полному циклу работы манипулятора, показана на графиках  $S_{10}(t)$ ,  $\varphi_{21}(t)$ ,  $\varphi_{32}(t)$ ,  $S_{43}(t)$  (рисунок 2).

Для определения кинематических характеристик решается прямая задача кинематики манипулятора с использованием метода преобразования координат в матричной форме [2]. При этом для преобразования координат точек используются матрицы 4-го порядка  $T_{01}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{22'}$ ,  $T_{2'3}$ ,  $T_{34}$ , а для преобразования координат векторов – матрицы 3-го порядка, которые получаются из соответствующих матриц 4-го порядка путем вычеркивания 4-й строки и 4-го столбца. Указанные матрицы составлены по известной методике на основании принятого относительного расположения координатных систем.

Связь между координатами центров схватов  $M_1$  и  $M_2$  в неподвижной и подвижной системах координат выражается в виде матричных соотношений:

$$r_{M_1}^{(0)} = T_{04} r_{M_1}^{(4)}, \quad r_{M_2}^{(0)} = T_{04} r_{M_2}^{(4)} \quad (1)$$

где  $r_{M_1}^{(0)}$ ,  $r_{M_2}^{(0)}$ ,  $r_{M_1}^{(4)}$ ,  $r_{M_2}^{(4)}$  – столбцовые матрицы радиусов-векторов точек  $M_1$  и  $M_2$  в неподвижной и подвижной системах координат;

$$T_{04} = T_{01} T_{12} T_{22'} T_{2'3} T_{34}. \quad (2)$$

В результате перемножения матриц согласно уравнениям (1) и (2) получены выражения координат  $x_{M_1}^{(0)}$ ,  $y_{M_1}^{(0)}$ ,  $z_{M_1}^{(0)}$ ,  $x_{M_2}^{(0)}$ ,  $y_{M_2}^{(0)}$ ,  $z_{M_2}^{(0)}$ . Проекция векторов скоростей

$\bar{V}_{M_1}$  и  $\bar{V}_{M_2}$  получены путем дифференцирования соответствующих выражений координат. Например,

$$V_{M_1}^{x_0} = \dot{x}_{M_1}^{(0)} = \frac{\partial x_{M_1}^{(0)}}{\partial S_{10}} \dot{S}_{10} + \frac{\partial x_{M_1}^{(0)}}{\partial \varphi_{21}} \dot{\varphi}_{21} + \frac{\partial x_{M_1}^{(0)}}{\partial \varphi_{32}} \dot{\varphi}_{32} + \frac{\partial x_{M_1}^{(0)}}{\partial S_{43}} \dot{S}_{43},$$

при этом развернутые выражения в статье не приводятся. Аналогичным образом получены выражения координат центров масс звеньев и проекций векторов их скоростей.

Абсолютные угловые скорости звеньев находятся на основании теоремы о сложении скоростей. Например,

$$\omega_{40}^{(0)} = \omega_{43}^{(0)} + \omega_{32}^{(0)} + \omega_{21}^{(0)} + \omega_{10}^{(0)},$$

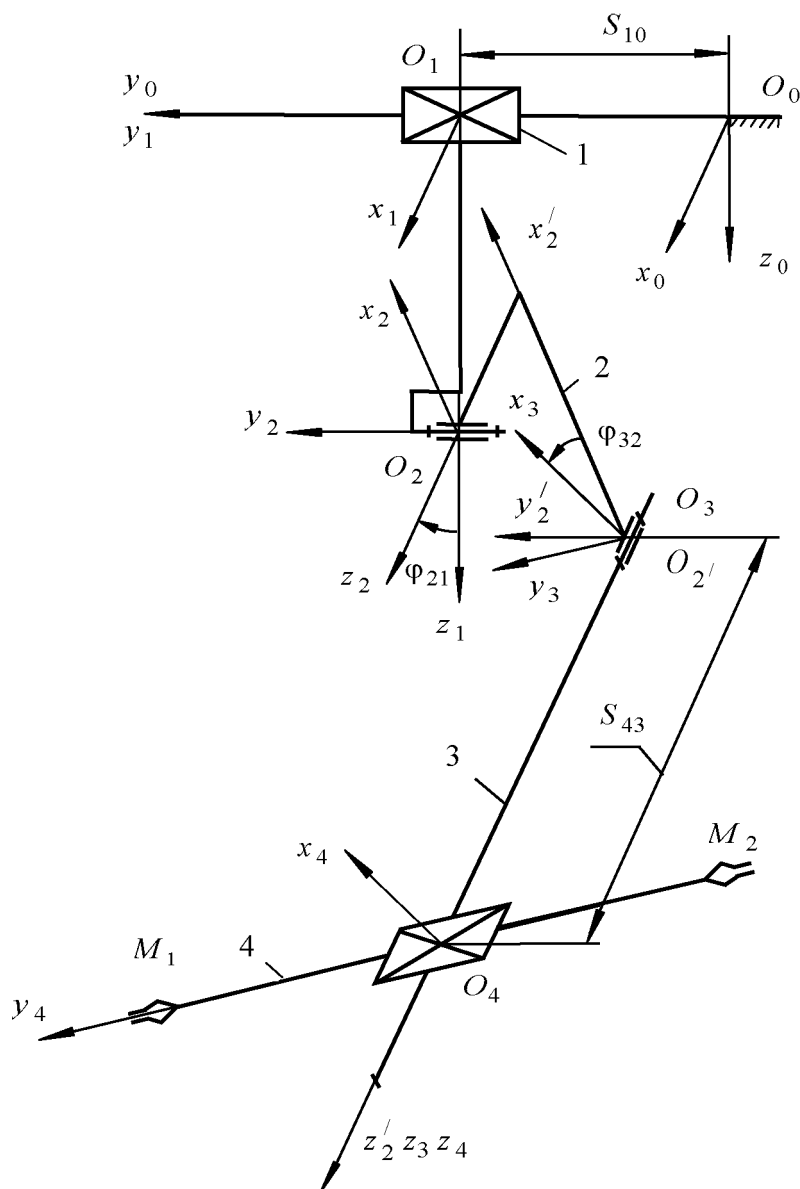
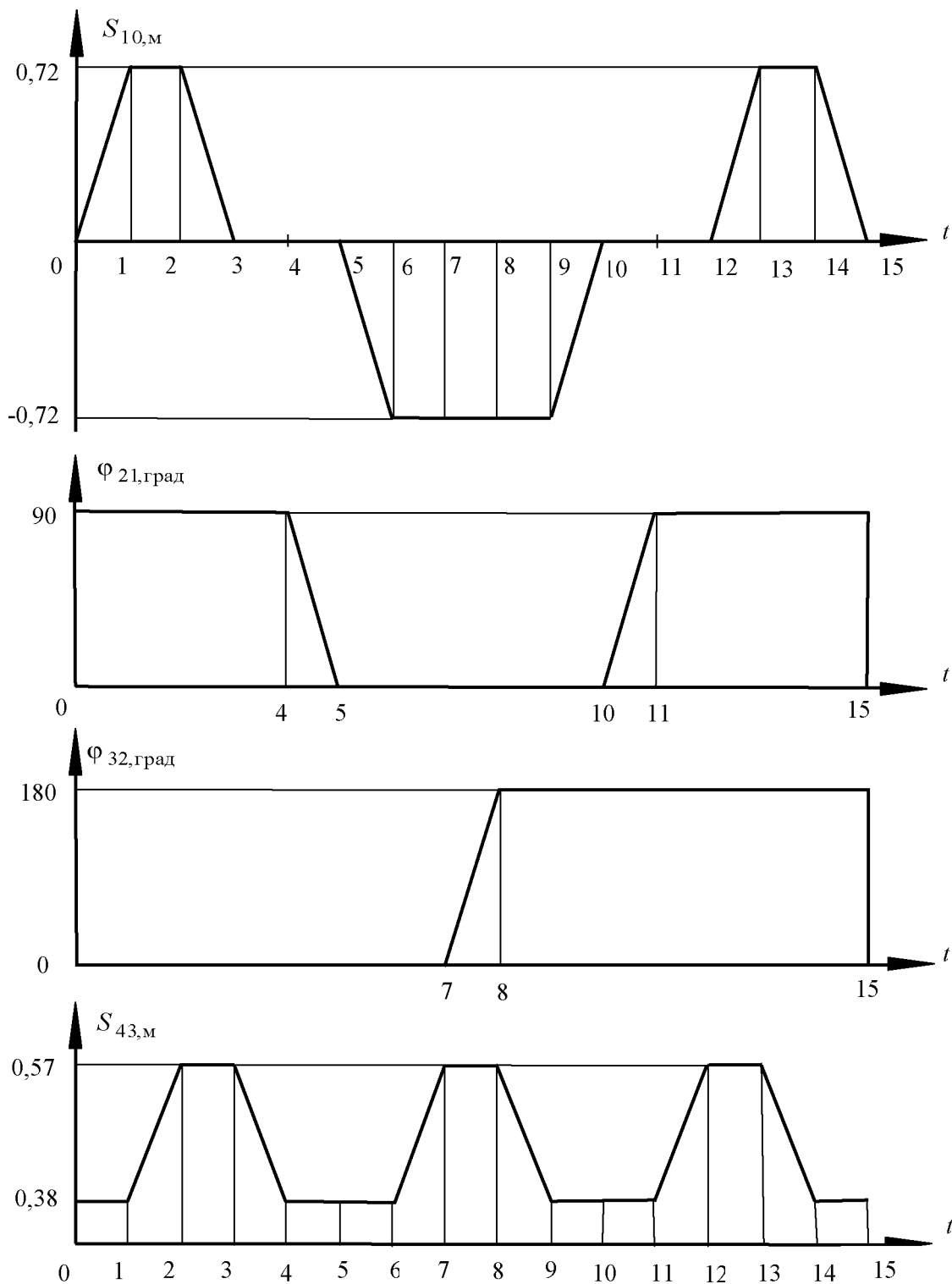


Рисунок 1. – Расчетная схема манипулятора





интервалы движения

Рисунок 2. – Циклограмм обработки обобщенных координат

откуда

$$\omega_{40}^{x_0} = \dot{\varphi}_{32} \sin \varphi_{21}; \quad \omega_{40}^{y_0} = \dot{\varphi}_{21}; \quad \omega_{40}^{z_0} = \dot{\varphi}_{32} \cos \varphi_{21}.$$

Для составления дифференциальных уравнений движения звеньев манипулятора в форме уравнений Лагранжа 2-го рода следует получить выражение кинетической

энергии манипулятора  $T$ , которое складывается из кинетических энергий отдельных звеньев и от массы инструментов  $m_{И1}$  (в точке  $M_1$ ) и  $m_{И2}$  (в точке  $M_2$ ), переносимых схватами:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_{И1} + T_{И2},$$

причем слагаемое  $T_{И1}$  учитывается на интервалах движения 1 – 9, а слагаемое  $T_{И2}$  – на интервалах движения 6 – 14 (см. рисунок 2). В частности, кинетическая энергия звена 4 выражается матричной формулой [2]:

$$T_4 = \frac{1}{2} \left\{ m_4 V_{S_4}^2 + (\omega_{40}^{(4)})^T [I_{S_4}] \omega_{40}^{(4)} \right\},$$

где  $[I_{S_4}]$  – тензор инерции звена 4 (в виде матрицы  $3 \times 3$ ) относительно осей собственной центральной подвижной системы координат.

Уравнения Лагранжа составлены в виде [1]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 4,$$

где  $q_1 = S_{10}$ ,  $q_2 = \Phi_{21}$ ,  $q_3 = \Phi_{32}$ ,  $q_4 = S_{43}$ .

Обобщенные силы находятся следующим образом:

$$Q_i = Q_{Дi} + G_1 \frac{\partial z_{S_1}}{\partial q_i} + G_2 \frac{\partial z_{S_2}}{\partial q_i} + G_3 \frac{\partial z_{S_3}}{\partial q_i} + G_4 \frac{\partial z_{S_4}}{\partial q_i} + G_{И1} \frac{\partial z_{M_1}}{\partial q_i} + G_{И2} \frac{\partial z_{M_2}}{\partial q_i},$$

где  $Q_{Дi}$  – обобщенная движущая сила, соответствующая обобщенной координате  $q_i$ ;  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_{И1}, G_{И2}$  – силы тяжести звеньев и инструментов.

Полученная система из 4 уравнений Лагранжа использована для нахождения обобщенных движущих сил  $Q_{Д1}, Q_{Д2}, Q_{Д3}, Q_{Д4}$ , соответствующих принятому закону изменения обобщенных координат и обобщенных скоростей. На каждом интервале движения обобщенная скорость изменяется по трехчастковому трапецеидальному закону (рисунок 3).

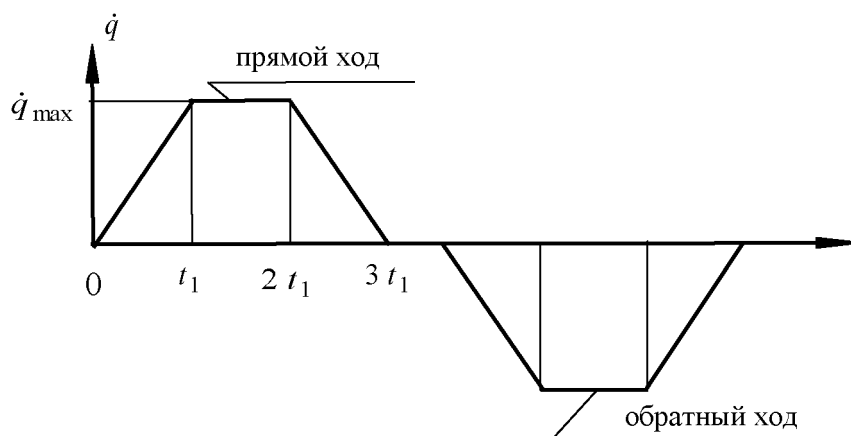


Рисунок 3. – Закон изменения обобщенных скоростей

Для определения динамических нагрузок в кинематических парах (реактивных сил и моментов) выполнен кинетостатический силовой анализ манипулятора. С этой целью получены проекции векторов ускорений центров масс и угловых ускорений звеньев, а также проекции главных векторов и главных моментов сил инерции звеньев. В частности, главный момент сил инерции в подвижной  $i$ -й локальной системе координат определяется на основании векторно-матричной формулы [2]

$$\bar{M}_{I_i}^{(i)} = -[I_{S_i}] \bar{\varepsilon}_i^{(i)} - \bar{\omega}_i^{(i)} \times [I_{S_i}] \bar{\omega}_i^{(i)}.$$

Далее рассматривается каждое звено отдельно (как статически определимая система), начиная с последнего, и составляются для него уравнения равновесия сил и моментов в неподвижной системе координат. Так, из уравнения равновесия для звена 4 получены вектор реакции  $\bar{R}_{43}$  и вектор реактивного момента  $\bar{M}_{R43}$ ,

действующие на звено 4 со стороны звена 3. Очевидно, что составляющая  $R_{43}^{z_4}$  реакции в поступательной паре представляет собой управляющее воздействие со стороны звена 3, т.е. обобщенную движущую силу. Таким образом,  $R_{43}^{z_4} = Q_{Д4}$ . Это положение может быть использовано для проверки и сопоставления результатов расчетов, полученных при решении уравнений Лагранжа и при использовании метода кинетостатики.

На основании полученных зависимостей выполнена программная реализация кинематического и динамического анализа рассмотренного манипулятора.

#### РЕЗЮМЕ

Рассмотрены особенности кинематического и динамического анализа манипулятора с 4 степенями свободы, предназначенного для обрабатывающего центра.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.И. Никитин. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1983. – 575 с.
2. Коловский, М.З. Основы динамики промышленных роботов / М.З. Коловский, А.В. Слоущ. – М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1988. – 240 с.
3. Механика промышленных роботов: учебное пособие для вузов: в 3 кн. / Под ред. К.В.Фролова и Е.И. Воробьева. Кн. 1: Кинематика и динамика / Е.И. Воробьев, С.А. Попов, Г.И.Шевелева. – М.:Высш. шк., 1988. – 304 с.
4. Филонов, И.П. Исследование динамики манипуляторов с использованием ЭВМ / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: БПИ, 1990. – 35 с.

#### SUMMARY

*In the article features kinematic and the dynamic analysis of the manipulator with 4 degrees of freedom, intended for the processing centre are considered.*

**E-mail:** [tmm@bntu.by](mailto:tmm@bntu.by)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

к.ф.-м.н. Конон П.Н., маг. Жук А.В.

*УО «Белорусский государственный университет», Минск*

**Введение.** В различных отраслях промышленности широко применение процессы, использующие движение слоя жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Например, при центробежном литье металла определение скорости вращения формы является одним из основных вопросов при разработке технологии литья и конструировании центробежных машин. Поэтому актуальность рассматриваемой проблемы не вызывает сомнений. Вместе с тем задача движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра имеет и свое классическое значение. Она относится к классу задач с неизвестной границей области со сложной геометрией течения, а при ее решении необходимо использовать криволинейные цилиндрические координаты.

Изучение нестационарного движения в рассматриваемой проблеме имеет большое практическое значение. Кроме того, получение уравнений эволюции слоя жидкости на поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра и исследование их решений представляет большой научный интерес, поскольку данная краевая задача достаточно сложна ввиду ее нелинейности и сложной области течения с неизвестной границей. Ей посвящено достаточно большое количество работ различных авторов, однако вопрос о решении задачи для слоя конечной немалой толщины при умеренных и больших числах Рейнольдса до сих пор был открытым.

Нестационарное движение плоского слоя вязкой жидкости на внешней и внутренней поверхности вращающегося цилиндра рассмотрено в работах [2,3]. Х. Моффатом было получено уравнение движения тонкой пленки в поле силы тяжести без учета капиллярных сил при умеренных числах Рейнольдса. В.В. Пухначевым при выводе уравнения свободной поверхности учтено влияние поверхностного натяжения. Авторами этих работ не рассматривался случай достаточно быстрого вращения цилиндра, не проводился подробный численный анализ и количественное сравнение с экспериментами. Исследования в более поздних работах посвящены в основном анализу этих уравнений. В [4] исследовано возмущенное движение слоя на внешней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки в поле сил инерции. Это значит, что движения нетонких конечных слоев на внутренней поверхности цилиндра при достаточно быстром его вращении с учетом инерционных сил требуют дальнейшего детального изучения. Именно такие течения реализуются при центробежном литье в металлургии.

**Постановка задачи и вывод уравнений эволюции.** Исследуется плоское движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности горизонтального вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил поверхностного натяжения, гравитации и инерции. Плоское течение вязкой жидкости в слое удобно рассматривать в относительной полярной системе координат  $O, \eta, \varphi$ , жестко связанной с вращающимся цилиндром, а вместо трансверсальной составляющей скорости  $w$  использовать относительную угловую скорость слоя  $\omega(\eta, \varphi, \tau) = w/\eta - 1$ . Движение описывается уравнениями Навье-Стокса, неразрывности и неизвестной свободной поверхности. Они дополняются граничными условиями прилипания к твердой поверхности цилиндра  $\eta=1$ , отсутствием вязкого взаимодействия с окружающей средой и непрерывностью нормальных напряжений на свободной поверхности

$\eta=h(\varphi, \tau)$ , условием периодичности течения по угловой координате, а также начальными условиями [5]. Начально-краевая задача содержит три безразмерных параметра – числа Рейнольдса, Фруда и Вебера:  $Re = R_0^2 \omega_0 / \nu$ ,  $Fr = R_0 \omega_0^2 / g$ ,  $We = \rho R_0^3 \omega_0^2 / \sigma$ , в которых  $R_0$  – радиус цилиндра,  $\omega_0$  – угловая скорость его вращения,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\zeta$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

В случае быстрого вращения характерные параметры задачи числа Рейнольдса, Фруда и Вебера значительно больше единицы, а радиальная составляющая скорости много меньше трансверсальной. Это дало возможность в из системы уравнений движения вязкой жидкости получить уравнения первого приближения, подобные уравнениям пограничного слоя. Решения полученных уравнений отыскивались прямым методом с учетом граничных условий прилипания на поверхности цилиндра и отсутствия вязкого взаимодействия с окружающей средой на свободной поверхности. В итоге в [5,6] с помощью интегрального метода путем дальнейших длительных преобразований впервые получены уравнения эволюции конечного, не обязательно тонкого слоя при умеренном и достаточно быстром вращении цилиндрической оболочки с учетом сил инерции. Они записаны для толщины слоя  $\delta(\varphi, \tau) = 1 - h(\varphi, \tau)$  и неизвестной величины  $T(\varphi, \tau)$ , входящей в формулу для относительной угловой скорости при удовлетворении граничных условий задачи:

$$\omega(\zeta, \varphi, \tau) = -T(\varphi, \tau) \zeta \left(1 - \frac{1}{2} \zeta\right), \quad \zeta = \frac{1 - \eta}{\delta(\varphi, \tau)}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (1)$$

Уравнения эволюции слоя представляются следующей системой:

$$\delta_\tau = H(\delta)T_\varphi + R(\delta, T)\delta_\varphi, \quad (2)$$

$$T_\tau = U(\delta, T)\delta_\varphi + V(\delta, T)T_\varphi + \frac{1}{We} \frac{60}{(1 - \delta)^4 E_0(\delta)} \left(6\delta_\varphi^3 + 6(1 - \delta)\delta_\varphi \delta_{\varphi\varphi} + (1 - \delta)^2 (\delta_{\varphi\varphi} + \delta_{\varphi\varphi\varphi})\right) + \frac{1}{Fr} \frac{30(\delta - 2) \cos(\varphi + \tau)}{E_0(\delta)} + \frac{1}{Re} \frac{10T}{\delta^2 E_0(\delta)} (6 + 3\delta - \delta^2), \quad (3)$$

где

$$H(\delta) = \frac{\delta(5\delta - 8)}{24(\delta - 1)}, \quad R(\delta, T) = \frac{T(5\delta - 4)}{12(\delta - 1)};$$

$$U(\delta, T) = T^2 U_2(\delta) + T U_1(\delta) + U_0(\delta); \quad V(\delta, T) = T V_1(\delta) + V_0(\delta);$$

$$U_2(\delta) = \frac{1}{\delta E_0(\delta)} \left( \frac{1}{42} (-336 + 553\delta - 38\delta^2) + \frac{5\delta - 4}{12(\delta - 1)} (20 - 50\delta + 27\delta^2) \right);$$

$$U_1(\delta) = \frac{40 - 50\delta}{E_0(\delta)}; \quad U_0(\delta) = \frac{60(\delta - 1)}{E_0(\delta)};$$

$$V_1(\delta) = \frac{1}{E_0(\delta)} \left( \frac{1}{21} (-336 + 161\delta + 34\delta^2) + \frac{5\delta - 8}{24(\delta - 1)} (20 - 50\delta + 27\delta^2) \right);$$

$$V_0(\delta) = \frac{\delta(40 - 25\delta)}{E_0(\delta)}; \quad E_0(\delta) = -20 + 25\delta - 9\delta^2.$$

В уравнениях (2), (3) нижний индекс обозначает соответствующую частную производную.

Уравнения эволюции (2),(3) дополняются условиями периодичности по угловой координате, а также периодическими начальными условиями

$$\delta(\varphi, \tau) = \delta(\varphi + 2\pi, \tau), \quad \delta_{\varphi}(\varphi, \tau) = \delta_{\varphi}(\varphi + 2\pi, \tau), \quad (4)$$

$$\delta_{\varphi\varphi}(\varphi, \tau) = \delta_{\varphi\varphi}(\varphi + 2\pi, \tau), \quad T(\varphi, \tau) = T(\varphi + 2\pi, \tau);$$

$$\delta(\varphi, 0) = \delta_0(\varphi), \quad T(\varphi, 0) = T_0(\varphi). \quad (5)$$

Система нелинейных уравнений (2), (3) в частных производных с граничными и начальными условиями (4), (5) является замкнутой и служит для определения эволюции свободной поверхности слоя  $\delta(\varphi, \tau)$ . Первое уравнение системы непосредственно получено из уравнения свободной поверхности, а второе – интегральным методом. В правой части последнего уравнения первые два слагаемые учитывают влияния инерционных сил, третье слагаемое – вклад сил поверхностного натяжения, четвертое – влияние сил тяжести, а последнее – вязких сил.

Для вязкого слоя, стекающего по наклонной поверхности, для его расхода и толщины получены уравнения В.Я. Шкадовым [1], развившем теорию волновых течений академика П.Л. Капицы. В литературе они носят название уравнений Капицы–Шкадова. Уравнения (2), (3), полученные в данной работе, являются новыми в гидромеханике волновых течений и могут быть названы уравнениями типа Капицы–Шкадова для возмущенного жидкого слоя на внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки в поле центробежных сил.

**Сопоставление с известными уравнениями.** Впервые уравнение движения тонкой пленки жидкости на поверхности цилиндра в поле силы тяжести при достаточно медленном его вращении без учета капиллярных сил при  $We^{-1} \ll (Fr^{-1} Re)^{1/2}$  получено Х. Моффатом [2]. В рассматриваемой относительной системе координат  $O, \eta, \varphi, \tau$ , жестко связанной с поверхностью вращающегося цилиндра, оно примет следующий вид:

$$\delta_{\tau} = \frac{1}{3} Re Fr^{-1} (\delta^3 \cos(\varphi + \tau))_{\varphi}, \quad (6)$$

причем должны выполняться условия:  $Re \delta_s^2 \ll 1$ ,  $\delta_s \ll 1$ . Здесь  $\delta_s$  – средняя толщина слоя.

Впоследствии В.В. Пухначевым [3] было рассмотрено влияние сил поверхностного натяжения и получено следующее уравнение эволюции тонкого слоя:

$$\delta_{\tau} = \frac{1}{3} Re Fr^{-1} (\delta^3 \cos(\varphi + \tau))_{\varphi} - \frac{1}{3} Re We^{-1} (\delta^3 \cdot (\delta_{\varphi} + \delta_{\varphi\varphi\varphi}))_{\varphi}, \quad \delta \ll 1. \quad (7)$$

К уравнениям (6), (7) необходимо добавить начальные условия и требование периодичности по углу  $\varphi$ . При выводе этих уравнений влиянием силы инерции на движение жидкости пренебрегалось. Исследование решений этих уравнений проводился рядом зарубежных ученых.

В отличие от уравнений (6), (7) система (2), (3) описывает движение плоского слоя вязкой жидкости не обязательно малой толщины с учетом всех значимых

физических факторов при числах Рейнольдса  $Re \gg 1$ , то есть когда влияние сил инерции существенно.

Важно отметить, что условия, при которых получены уравнения (6), (7) и система (2), (3), не являются противоречивыми. Если средняя толщина пленки  $\delta_s$  известна, то можно найти область значений числа  $Re$ , имеющую вид  $1 \ll Re \ll \delta_s^{-2}$ ,  $\delta_s \ll 1$ , которая удовлетворяет всем рассматриваемым условиям. Например, если  $\delta_s = 0,02$ , то должно быть  $1 \ll Re \ll 2500$ , и в качестве общего для всех уравнений интервала можно выбрать значения  $10 < Re < 250$ . Следовательно, можно поставить вопрос о совместимости решений системы (2), (3) и уравнений (6), (7) в определенной общей области значений чисел  $Re$ .

Система (2), (3) в случае тонкой пленки жидкости ( $\delta \ll 1$ ), при пренебрежении инерционными членами уравнений Навье-Стокса и выполнении неравенства  $Re \delta_s^2 \ll 1$ , примет вид

$$\delta_\tau = \frac{1}{3}(T\delta)_\varphi, \tag{8}$$

$$-\frac{1}{We}(\delta_\varphi + \delta_{\varphi\varphi\varphi}) + \frac{\cos(\varphi + \tau)}{Fr} - \frac{T}{Re \delta^2} = 0.$$

Второе уравнение системы (8) служит для определения величины  $T(\varphi, \tau)$ :

$$T = Re Fr^{-1} \delta^2 \cos(\varphi + \tau) - Re We^{-1} \delta^2 (\delta_\varphi + \delta_{\varphi\varphi\varphi}). \tag{9}$$

При таком значении  $T(\varphi, \tau)$  окружная компонента скорости  $w(\varphi, \tau)$  совпадает со значением этой величины в работе [3], а первое уравнение системы (2.40) – с уравнением (2.39), описывающим эволюцию тонкой пленки при медленном вращении цилиндра. Следовательно, в рассматриваемой области  $1 \ll Re \ll \delta_s^{-2}$ ,  $\delta_s \ll 1$ , то есть при определенных угловых скоростях вращения цилиндра, из системы (2.34), (2.35) можно вывести уравнения (2.38), (2.39), полученные Х. Моффатом и В.В. Пухначевым [2,3].

Таким образом, получена новая более общая система уравнений эволюции с учетом инерционных сил для слоев конечной толщины, позволяющая исследовать различные практические задачи, связанные с рассматриваемым течением, например, гидродинамические процессы центробежного литья.

**Результаты численных расчетов.** Исследования полученной системы уравнений проводятся численно комбинацией метода прямых и Рунге – Кутта четвертого порядка точности с учетом условия периодичности по угловой координате [4-6]. Точность вычислений контролировалась условием постоянства массы на цилиндре во все время движения.

Проследим за эволюцией формы свободной поверхности слоя, первоначально имеющего постоянную толщину  $\delta_0 = \text{const}$ . Численное решение задачи проводилось при следующих данных: жидкость – водные растворы глицерина с плотностью  $1260 \text{ кг/м}^3$ , кинематической вязкостью  $1,11 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{сек}$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $0,07 \text{ н/м}$  при температуре  $20^\circ \text{ С}$ . Радиусы цилиндра были равны  $2,5; 3,5 \text{ см}$ , а угловые скорости вращения вариировались от  $0,5$  до  $5$  оборотов в секунду. Результаты исследований и подробные комментарии приведены на рисунках 1-3.

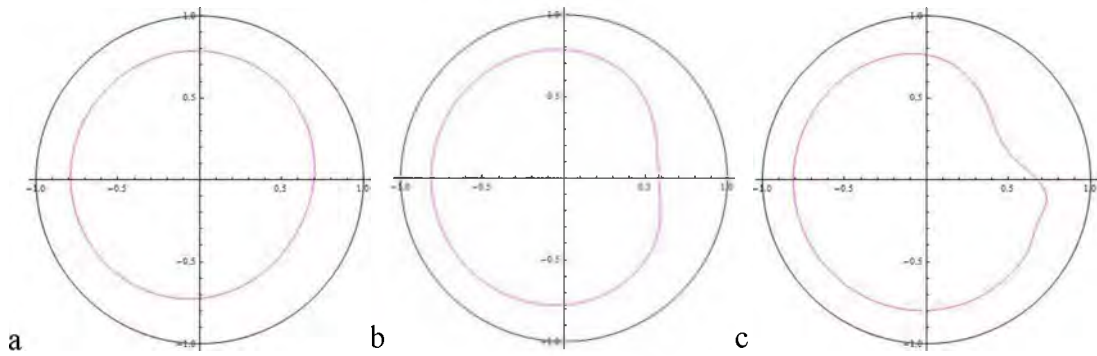


Рисунок 1 – Формы свободной поверхности слоя жидкости при  $\delta_0 = 0,25$ ,  $Re = 12,38$ ,  $Fr = 1,23$ ,  $We = 136$  в моменты времени  $a - \tau = \pi/2$ ,  $b - \tau = \pi$ ,  $c - \tau = 3\pi/2$

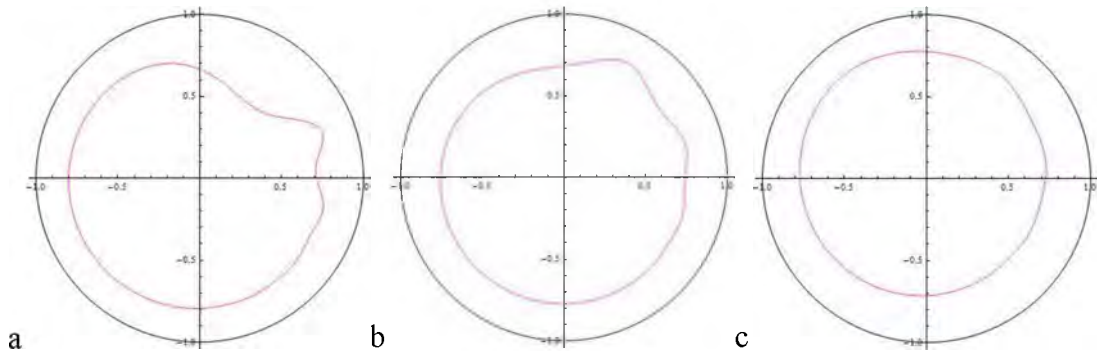


Рисунок 2 – Формы свободной поверхности слоя жидкости при  $\delta_0 = 0,25$ ,  $Re = 12,38$ ,  $Fr = 1,23$ ,  $We = 136$  в моменты времени  $a - \tau = 2\pi$ ,  $b - \tau = 5\pi/2$ ,  $c - \tau = 3\pi$

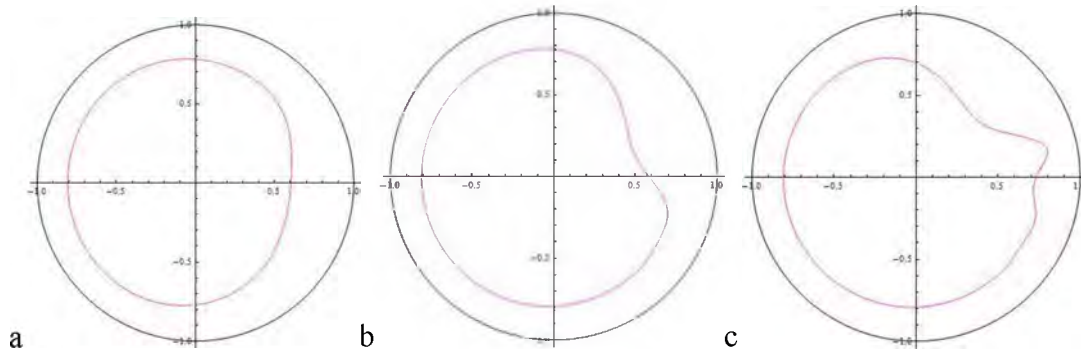


Рисунок 3 – Формы свободной поверхности слоя вязкой жидкости при  $\delta_0 = 0,25$ ,  $Re = 12,38$ ,  $Fr = 1,23$ ,  $We = 136$  в моменты времени  $a - \tau = 7\pi/2$ ,  $b - \tau = 4\pi$ ,  $c - \tau = 9\pi/2$

Вначале при  $\tau = \pi/2$  наиболее явно проявляется влияние силы тяжести, когда толщина слоя больше на нижней части цилиндра. Вращение цилиндра против часовой стрелки способствует увеличению массы жидкости в левой части цилиндра при подъеме слоя и уменьшению в правой вследствие ускоренного его движения. Это явление характерно для любого момента времени. Затем сила инерции поднимает собравшуюся жидкость при  $\tau = \pi$ . В момент  $\tau = 3\pi/2$  можно видеть, что сила инерции продолжает вращать собравшийся объём жидкости против часовой стрелки, а также возникает провисание жидкости из-за влияния силы тяжести. Для  $\tau = 2\pi$  характерно наибольшее развитие возмущений с появлением трех экстремумов вследствие нелинейного взаимодействия возмущений. В дальнейшем можно наблюдать, что развитие возмущений и подъём значительного количества жидкости к верхней части цилиндра сменяется затуханием возмущений. Сила инерции стягивает жидкость с верхней части цилиндра, как показано на рисунке 2 в моменты времени  $\tau = 5\pi/2$  и  $\tau = 3\pi$ . Затем наблюдается примерное повторение процесса с определенным периодом, а именно, сила инерции поднимает часть жидкости, появляются возмущения, вызванные



силой тяжести, сила инерции перебрасывает часть жидкости с верхней части цилиндра, и возмущения затухают.

Отметим, что форма свободной поверхности при больших угловых скоростях может оставаться невозмущенной и вращаться с цилиндром как единое целое, что необходимо при центробежном литье в металлургии.

**Заключение.** В результате исследований получена система дифференциальных уравнений в частных производных для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя конечной толщины при умеренных и больших числах  $Re$  с учетом сил инерции. При пренебрежении инерционными членами из полученной системы выводится уравнение, полученное в [3] для тонкой пленки. Разработан численно-аналитический метод и решена нестационарная задача о движении плоского слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволил проследить за механизмом эволюции поверхности слоя при  $Re \gg 1$ .

### РЕЗЮМЕ

Получена система дифференциальных уравнений в частных производных для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя конечной толщины при умеренных и больших числах  $Re$  с учетом сил инерции. Они могут быть названы уравнениями типа Капицы–Шкадова для возмущенного жидкого слоя на внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки в поле центробежных сил. Показано, что при пренебрежении инерционными членами из полученной системы выводится уравнение Пухначева для тонкой пленки. Разработан численно-аналитический метод и решена нестационарная задача о движении плоского слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволил проследить за механизмом эволюции поверхности слоя при  $Re \gg 1$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В.Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1968. – № 2. – С. 20-25.
2. Moffat Н.К. Behavior of a viscous film on the outer surface of rotating cylinder // Journal de Mehanique. V. 16, № 8, 1977. P. 651-673.
3. Пухначев В.В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // ПМТФ. - 1977. - N 3. - С. 78-88.
4. Епихин В.Е., Конон П.Н., Шкадов В.Я. О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра // ИФЖ. -1994. - Т.66, N 6. - С. 689-694.
5. Конон П.Н., Жук А.В. Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки // Механика машин, механизмов и материалов. Минск. - 2013. - №4 (25) – С. 32-37.
6. Шкадов В.Я., Конон П.Н., Жук А.В. Возмущенное движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра./ 5-ая Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения», Бийск, 2014, с. 110

### SUMMARY

*Plane motion of viscous layer of fluid in the gravity field, surface tension and inertia on inner surface of rotating with constant angular velocity cylinder is considered. Cylinder is located horisontally. System of partial differential equations was obtained for evolution of free surface of planar layer for large and moderate Reynolds numbers. Neglecting inertial terms we can get equation obtained by Puhnachev V.V. for thin film. Numerical method was developed and unsteady motion problem was solved.*

**E-mail:** [kononp@tut.by](mailto:kononp@tut.by)

Поступила в редакцию 02.11.2014

## **ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОРГАНАМИ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМАХ**

к.т.н. Гулай А.В., к.т.н. Зайцев В.М.

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Системы технического назначения, в том числе мехатронные системы, при введении в их состав процессорных и программных средств цифровой обработки информации приобретают существенные функциональные преимущества по гибкости системных настроек, точности преобразования сигналов, сокращению состава оборудования и улучшению показателей надежности [1, 2]. В указанных мехатронных системах для организации циклов управления исполнительными органами применяется типовая (по сути классическая) функциональная схема: формирование векторных параметров текущего состояния исполнительных органов; прием требуемых значений задающих параметров функционирования; выработка соответствующих параметров текущего управления; физическая отработка управляющих воздействий [3]. Интеллектуализация управления путем введения процессоров цифровой обработки сигналов и необходимых программных средств в прямые цепи управления и в цепи обратной связи превращают мехатронную систему в технический комплекс гибридного типа.

Однако при этом возникает ряд специфических проблем, касающихся технического построения прямой цепи управления и цепи обратной связи, а также ряд вопросов программной поддержки процессов функционирования мехатронной системы. В связи с этим в работе проанализирована обобщенная схема организации автоматического управления исполнительными органами в интеллектуальных мехатронных системах. Рассмотрены особенности построения прямой цепи управления и цепи обратной связи при введении в их состав процессоров цифровой обработки сигналов. Для описания функциональных циклов интеллектуальной мехатронной системы построена совокупность рекуррентных разностных уравнений. Предложена схема рациональной организации вычислительного процесса в указанной системе с разложением функциональных циклов на такты преобразования и обработки сигналов. Проанализированы также условия информационной совместимости взаимодействующих компонентов интеллектуальной мехатронной системы.

### **Структура и функции каналов управления в интеллектуальной мехатронной системе**

Один из возможных вариантов построения канала управления интеллектуальной мехатронной системы представлен на рисунок 1. В мехатронных системах различного функционального назначения в качестве исполнительных органов выступают выходные механические звенья. Чаще всего это такие технические средства, как электрические двигатели, муфты, клапаны, регуляторы, а также электромагнитные силовые блоки и другие устройства [3]. Для получения параметров текущего состояния исполнительных органов применяются соответствующие сенсорные блоки. Необходимые интерфейсы между аналоговым и цифровым оборудованием поддерживаются с помощью аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей (АЦП и ЦАП).

Задатчик и соответствующий преобразователь обеспечивают ввод в систему исходного электрического сигнала  $X(t)$  и получение кода дискретного отсчета этого сигнала  $KX[k \cdot dt]$ , где  $k$  — текущий номер цикла (отсчета);  $dt$  — длительность одного

цикла управления. Кодовый параметр  $KX[k \cdot dt]$  используется процессорами цифровой обработки сигналов в алгоритме вычисления значения текущего отсчета  $U[k \cdot dt]$  и кода  $KU[k \cdot dt]$  для возбуждения прямой цепи управления системы. Кодовое представление отсчета  $KU[k \cdot dt]$  текущего параметра управления с помощью ЦАП преобразуется в электрический сигнал управляющего воздействия  $EU[k \cdot dt]$ .

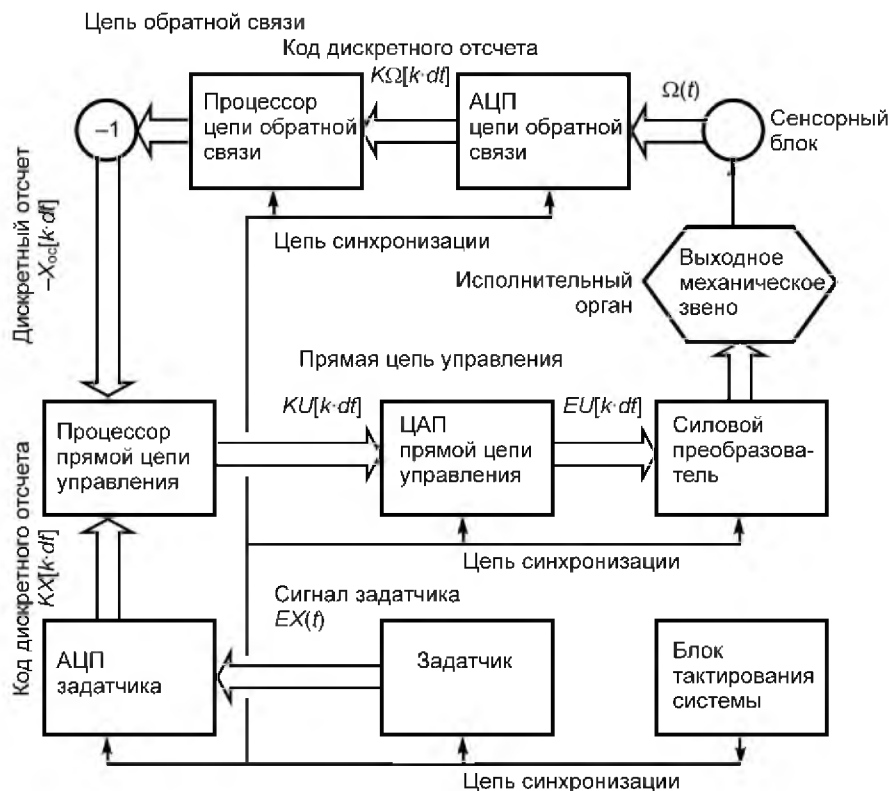


Рисунок 1. – Техническое построение прямой цепи управления и цепи обратной связи интеллектуальной мехатронной системы.

Физическую отработку управляющих воздействий в системе обеспечивает исполнительный орган, результаты функционирования которого отображаются параметром положения или перемещения выходного механического звена  $\Omega(t)$ . Сенсорный блок на основе параметра  $\Omega(t)$  вырабатывает сигнал возбуждения цепи обратной связи. После преобразования в цифровую форму сигнал определенным образом перерабатывается процессором этой цепи и в виде результирующего отрицательного дискретного отсчета  $-X_{oc}[k \cdot dt]$  смешивается с сигналом  $X[k \cdot dt]$ , замыкая тем самым цикл управления. Блок тактирования формирует временную диаграмму функционирования системы и синхронизирует работу всех составных частей в каждом цикле управления. Таким образом, преимущества, достигаемые за счет гибридного построения мехатронной системы, требуют достаточно сложных логических схем преобразования и переработки сигналов.

В математической модели канала управления целесообразно использовать линейную концепцию процессов, а также категории, обычные для систем этого типа, в том числе передаточную функцию прямой цепи управления  $W_{пцу}(p)$  и передаточную функцию цепи обратной связи  $W_{цос}(p)$ . Такой подход позволяет избежать излишних усложнений и перенести учет необходимых дополнительных факторов на этап отработки программных средств системы. Если  $\Omega(t)$  — выходной параметр положения или перемещения исполнительного органа (например, линейные или угловые

перемещения, скорости или ускорения перемещения), то для изображений по Лапласу непрерывных сигналов основное уравнение системы будет иметь следующий вид:

$$[X(P) - \Omega(P)W_{\text{цос}}(P)]W_{\text{шпу}}(P) = \Omega(P). \quad (1)$$

При разложении цикла управления на отдельные такты уравнение (1) позволяет получить совокупность из пяти рекуррентных разностных уравнений цифрового управления исполнительным органом [4]. Для цикла с номером  $k$  уравнения будут иметь следующий вид:

$$\{\Delta\Omega[(q-1)dt] = \Omega[(q-1)dt] - \Omega[(q-2)dt]\}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (2)$$

$$\Omega[(-1)dt] = \Omega[(-2)dt] = 0, \quad (3)$$

$$X_{\text{цос}}[k \cdot dt] = \sum_{q=0}^k \Delta\Omega(q-1)\zeta[q-1]h_{\text{цос}}[(q-1)dt], \quad (4)$$

$$\{\Delta X[q \cdot dt] = X[q \cdot dt] - X[(q-1)dt]\}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (5)$$

$$X[0] = X(t=0); X[(-1)dt] = 0, \quad (6)$$

$$X[k \cdot dt] = \sum_{q=0}^k \Delta X[q \cdot dt]\zeta[q], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} X[k \cdot dt] - X_{\text{цос}}[k \cdot dt] &= \\ &= \sum_{q=0}^k \Delta X[q \cdot dt]\zeta[q] - \sum_{q=0}^k \Delta\Omega[(q-1)dt]\zeta[q-1]h_{\text{цос}}[(q-1)dt], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Omega[k \cdot dt] = \{X[k \cdot dt] - X_{\text{цос}}[k \cdot dt]\}h_{\text{шпу}}[k \cdot dt]. \quad (9)$$

В уравнениях (2)-(9) приняты следующие условные обозначения:  $X[0] = X(t=0)$ ,  $X[q \cdot dt]$ ,  $X[(q-1)dt]$  — значения отсчета сигнала задатчика, соответственно, начальное, в цикле  $q$  и цикле  $q-1$ ;  $X[-1] = 0$ ;  $\zeta[q]$  — функция Хевисайда;  $h_{\text{шпу}}(t) = L_{\text{обр}}\{W_{\text{шпу}}(P)/P\}$ ,  $h_{\text{цос}}(t) = L_{\text{обр}}\{W_{\text{цос}}(P)/P\}$  — переходная характеристика, соответственно, прямой цепи управления и цепи обратной связи мехатронной системы;  $L_{\text{обр}}$  — обратное преобразование Лапласа. Характеристики  $h_{\text{шпу}}(t)$ ,  $h_{\text{цос}}(t)$  могут быть построены на основании своих изображений по Лапласу  $W_{\text{шпу}}(P)/P$  и  $W_{\text{цос}}(P)/P$ , которые образуются из соответствующих передаточных функций цепей управления путем добавления нулевого полюса в каждую из функций.

При построении цифровых систем управления исполнительными органами на основе рассмотренной схемы и рекуррентных уравнений следует акцентировать внимание, прежде всего, на следующих важнейших аспектах:

- создание условий для информационной совместимости оцифрованной информации в цепи прямого управления и в цепи обратной связи;
- обеспечение корректной численной реализации процедур обратного преобразования Лапласа программными компонентами процессоров цифровой обработки информации;
- обоснованный выбор тактовой частоты процессоров.

### **Обеспечение информационной совместимости компонентов интеллектуальной мехатронной системы**

Информационная совместимость должна обеспечиваться во всех элементах мехатронной системы, которые чаще всего оперируют сигналами различной физической природы и разными форматами системного представления. О важности информационной составляющей в проектировании мехатронных систем говорит тот факт, что многие неудачные проекты связаны, прежде всего, с попытками применения готовых программных компонентов во вновь создаваемых гибридных комплексах без

должного изучения авторской документации. Такой подход сопровождается, в частности, рядом нарушений в части условий совместимости и взаимодействия цепей прямого управления и обратной связи.

Условия совместимости указанных взаимодействующих цепей предполагают применение в них одной базы оцифровки сигналов и одинакового формата представления данных. Значения некоторого реального физического сигнала  $X_i$  обычно регламентируются следующими уставками:

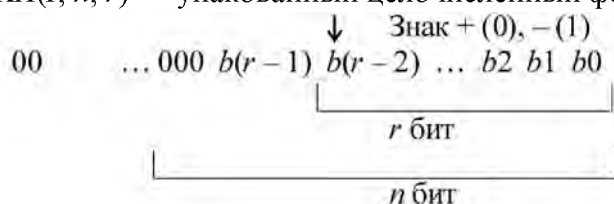
$$X_{\min} \leq X_i \leq X_{\max}; \quad (10)$$

$$X_{\max} - X_{\min} = RX \text{ — размах сигнала.} \quad (11)$$

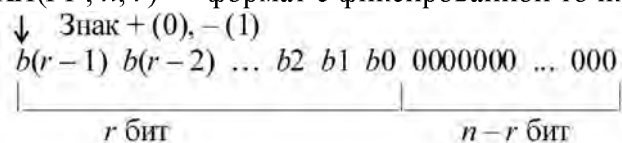
Данные параметры определяют базу оцифровки сигнала с последующим его кодовым представлением с помощью  $r$  бит. Для размещения кодовых значений оцифрованного сигнала обычно применяются двоичные кодовые комбинации длиной в  $n$  бит, причем  $r \leq n$ .

На практике обычно используются три типа форматов представления оцифрованного сигнала:  $KX(I, n, r)$  — упакованный целочисленный формат;  $KX(FP, n, r)$  — формат с фиксированной точкой;  $KX(R, n, m, r)$  — формат с плавающей точкой. Упакованный целочисленный формат является базовым интерфейсным форматом при приеме в процессор информации от  $r$ -разрядного АЦП и при ее выводе в  $r$ -разрядный ЦАП. При необходимости введения знака кода используется его старший разряд. Форматы с фиксированной и с плавающей точкой являются форматами непосредственной цифровой обработки сигналов в процессорах.

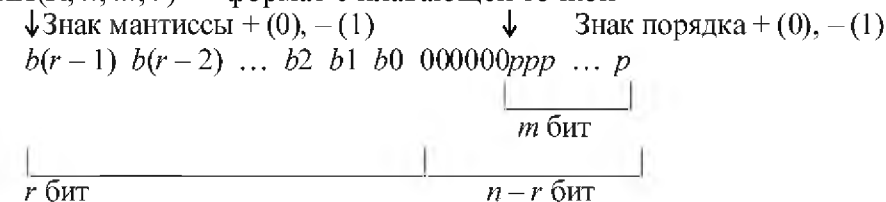
$KX(I, n, r)$  — упакованный целочисленный формат



$KX(FP, n, r)$  — формат с фиксированной точкой



$KX(R, n, m, r)$  — формат с плавающей точкой



При проектировании процессов обмена и цифровой обработки информации предварительно должен быть выбран формат обработки. В общем случае в технологическом отношении наиболее удобным для сложной цифровой обработки является формат с плавающей точкой  $KX(R, n, m, r)$ . Выбор данного формата позволяет избежать сложных операций масштабирования операндов в наиболее массовых операциях сложения/вычитания и деления.

Технология оцифровки некоторого значения  $X_i$  включает следующие процессорные процедуры.

1. Расчет нормализованной величины модуля значения:

$$|KX_i(R, n, m, r)| = \{ |(X_i - X_{\min})/R| \& \underbrace{0111 \dots 111000000011 \dots 11}_{\substack{\downarrow \text{ Знак +} \\ r \text{ бит мантиссы} \quad m \text{ бит порядка}}} \}$$

$$0 \leq |KX_i(R, n, r, m)| \leq 1.$$

2. Реформатизация результата путем перевода в формат  $KX(FP, n, r)$ :

$$M_i = \{ |(X_i - X_{\min})/R| \& \underbrace{0111 \dots 1110000000 \dots 00}_{\substack{\text{Знак мантиссы +} \\ \text{Знак порядка}}} \}$$

$$P_i = \{ |(X_i - X_{\min})/R| \& \underbrace{000 \dots 0000011 \dots 11}_{m \text{ бит порядка}} \}$$

$KX(FP, n, r) = M_i$ , если  $\text{Sign}(P_i) = 0$ :

$$P_i = \{ |(X_i - X_{\min})/R| \& \underbrace{000 \dots 0000010 \dots 00}_{m \text{ бит порядка}} = 0;$$

$KX(FP, n, r) = M_i \rightarrow$  [СДВИГ ВПРАВО НА  $|P_i|$  бит], если  $\text{Sign}(P_i) = 1$ :

$$P_i = \{ |(X_i - X_{\min})/R| \& \underbrace{000 \dots 0000010 \dots 00}_{m \text{ бит порядка}} = 1.$$

3. Получение упакованного целочисленного результата:

$$KX(I, n, r) =$$

$$= \underbrace{KX(FP, n, r)}_{r \text{ бит}} \& 111 \dots 111100 \dots 00 \rightarrow \text{[СДВИГ ВПРАВО на } n - r \text{ бит]}.$$

Если при цифровой обработке применяется формат с фиксированной точкой, то первая операция выполняется с учетом масштабирования значений исходных параметров. Для перехода от кода  $KX(I, n, r)$  к значению  $X_i$  операции выполняются в обратном порядке.

ПРИМЕР:  $n = 16, r = 10, m = 5, X_{\min} = 5,0, X_{\max} = 6,7. \quad X_i = 5,92.$

Процесс оцифровки сигнала:

- размах  $R = 6,7 - 5,0 = 1,7$ ;  $X - X_{\min} = 5,92 - 5,0 = 0,92$ ;
- $|KX(FP, n, r, m)| = 0,0541176$  (10 с/с) = 0110111011010100 (2 с/с);
- мантисса  $M_i = |KX_i(FP, n, r, m)| \& 0111111111000000 = 0110111011010100 \& 0111111111000000 = 0110111011000000$ ;
- порядок  $P_i = |KX(FP, n, r, m)| \& 0000000000011111 =$   

$\text{Знак порядка } -(1) \quad \downarrow$

 $= 0110111011010100 \& 0000000000011111 = 0000000000010100$ ;
- $KX(FP, n, r) = M_i \rightarrow$  [СДВИГ ВПРАВО НА 4 бита] =  
 $= 0110111011000000 \rightarrow$  (4 бита) = 0000011011101100;
- $KX(I, n, r) =$   
 $= KX(FP, n, r) \& 0111111111000000 \rightarrow$  [СДВИГ ВПРАВО на  $16 - 10 = 6$  бит] =  
 $= 0000011011101100 \rightarrow$  (6 бит) = 00000000011011.

### Рациональная организация вычислительного процесса в интеллектуальной мехатронной системе

Вопросы расчета реакций прямой цепи управления и цепи обратной связи на скачки  $\Delta X$ ,  $\Delta Q$  сигналов возбуждения предлагается рассматривать с учетом применения технологии численной реализации обратного преобразования Лапласа. Технология предложена достаточно давно [5], однако до массового появления на рынке высокоскоростных сигнальных процессоров она имела сугубо теоретическое значение. В предлагаемом решении по сравнению с технологией расчета системных реакций на основе дискретных сверток самих сигналов отсутствует необходимость хранения и использования отсчетов достаточно длительной предистории, так как обработке подлежат только реальные скачки  $\Delta X$ ,  $\Delta Q$  сигналов возбуждения цепей. В данном случае появляется возможность уменьшения вычислительной сложности и тактовой емкости алгоритмов управления и реального повышения реактивности системы в целом. Для получения количественных оценок целесообразно проведение дополнительных теоретических и экспериментальных исследований в этом направлении.

Достаточно тесно с рассмотренными вопросами связано обоснование выбора тактовой частоты процессоров цифровой обработки сигналов. Алгоритмы обработки скачков, как наборы действий и инструкций, описывающих процесс получения результатов, сами представляют собой системы. Они имеют делимость на блоки, которые являются вершинами графа процессов обработки информации. В алгоритмах могут быть выделены простые арифметические, логические и логико-арифметические блоки, а также блоки условий (переходов). Обычно алгоритм представляется в виде древовидного графа с вершинами в виде блоков  $B_j$ :

$$GA = \{B_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, f \rightarrow B_j \quad (12)$$

Указанные блоки состоят из групп отдельных операций, причем проход по той или иной ветви графа от корневой вершины к тупиковой соответствует реализации алгоритма. Количество различных ветвей графа — это количество возможных реализаций алгоритма. Выбор конкретной ветви на реализацию предопределяет количество и типы выполняемых операций. Сам по себе выбор конкретной ветви — процесс вероятностный. Но этот процесс экспертно или в результате моделирования может быть оценен вероятностями выбора, так что можно говорить о среднем количестве операций каждого типа при реализации алгоритма.

Вычислительная сложность алгоритма — это функция зависимости объема работы, выполняемой некоторым алгоритмом, от параметров исходных данных. Объем работы оценивается либо количеством элементарных операций, либо количеством

процессорных тактов, необходимых для выполнения алгоритма [6]. Различают пространственную и временную сложность. Пространственная сложность — это категория состава и количества типовых операций, а также объемов памяти, требуемых для исполнения алгоритма. Временная сложность — это категория продолжительности исполнения алгоритма, она зависит от технических характеристик процессорной основы обеспечения исполнения. Эти понятия взаимосвязаны, но пространственная сложность в ряде случаев рассматривается как первичная. Наилучшими приемами установления взаимосвязи являются системный анализ алгоритмов, устойчивые экспертные оценки и моделирование.

Для оценки пространственной вычислительной сложности алгоритмов целесообразно использовать кортежи (векторы–строки) следующего вида:

$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, \dots\} \text{ (команд)}. \quad (13)$$

В них путем системного анализа операций, требуемых для реализации алгоритмов, или путем их предварительного моделирования устанавливаются следующие усредненные параметры — оценка количества команд:

- $w_1$  — ... типа сложения/вычитания с фиксированной точкой;
- $w_2$  — ... типа умножения с фиксированной точкой;
- $w_3$  — ... типа деления с фиксированной точкой;
- $w_4$  — ... типа сложения/вычитания с плавающей точкой;
- $w_5$  — ... типа умножения с плавающей точкой;
- $w_6$  — ... типа деления с плавающей точкой;
- $w_7$  — ... поразрядных логических операций;
- $w_8$  — ... переходов по признакам и условиям.

Состав типов команд уточняется в соответствии с архитектурой процессоров цифровой обработки сигналов — претендентов на введение в систему. При работе нескольких экспертов может быть оценен разброс и доверительная вероятность значений параметров вектора-строки. Для предварительно выбранной структуры процессоров цифровой обработки сигналов и типового командно-тактового цикла составляется вектор–столбец значений тактовой емкости команд  $T_{w1}, T_{w2}, T_{w3}, \dots$  путем разложения команд процессора на такты. Наименее короткими по количеству тактов являются команды поразрядных логических операций и команды переходов по признакам и условиям. Наиболее емкими являются команды деления с фиксированной и плавающей точкой.

Фактор конвейерного параллельно-последовательного выполнения команд не учитывается, поэтому расчетные значения количества тактов можно рассматривать в качестве верхних границ тактовой емкости команд процессора. Тактовая емкость алгоритма  $T_a$  определяется произведением вектора–строки  $W$  и вектора-столбца  $T_w$ :

$$T_a = WT_a = w_1T_{w1} + w_2T_{w2} + \dots \quad (14)$$

Верхняя граница временной емкости алгоритма, как правило, задается в виде требования к предельной длительности цикла управления  $dt$ . Если задано предельное время реализации  $i$ -го алгоритма в цикле управления  $dt_i$ , то максимальная длительность командного такта для этого алгоритма определяется следующим отношением:

$$T_{кти} = dt_i/T_{ai}, \quad (15)$$

а минимальная тактовая частота процессора для этого алгоритма равна:

$$F_{ти} = 1/T_{кти} = T_{ai}/dt_i. \quad (16)$$

Параметры процессоров цифровой обработки сигналов задаются исходя из потребностей всей группы критичных ко времени исполнения алгоритмов управления:

$$T_{кт пр} = \min_i \{T_{кти}\}, \quad (17)$$

$$F_{т пр} = \max_i \{F_{ти}\}. \quad (18)$$



Таким образом, существует объективная целесообразность проектной ориентации процессоров на комплекс исполняемых алгоритмов в прямой цепи управления и в цепи обратной связи интеллектуальной мехатронной системы.

### РЕЗЮМЕ

Рассмотрена обобщенная схема организации автоматического управления исполнительными органами в интеллектуальных мехатронных системах. Проанализированы особенности построения прямой цепи управления и цепи обратной связи при введении в их состав процессоров цифровой обработки сигналов. Для описания функциональных циклов интеллектуальной мехатронной системы построена совокупность рекуррентных разностных уравнений. Предложена схема рациональной организации вычислительного процесса в указанной системе с разложением функциональных циклов на такты преобразования и обработки сигналов. Проанализированы условия информационной совместимости взаимодействующих элементов интеллектуальной мехатронной системы. Приведены примеры используемых форматов представления оцифрованного сигнала.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка информации / А. Б. Сергиенко. — СПб.: Питер, 2002.
2. Смит, С. Цифровая обработка информации / С. Смит. — М.: Издательский дом «ДодЭка-XXI», 2008.
3. Федотов, А. В. Использование методов теории автоматического управления при разработке мехатронных систем / А. В. Федотов. — Омск: Изд. ОмГТУ, 2007.
4. Колобов, А. М. Избранные главы высшей математики / А. М. Колобов. — Минск: Высшая школа, 1965.
5. Зайцев, В. М. Численный метод реализации обратного преобразования Лапласа для дробно-рациональных изображений / В. М. Зайцев, В. Н. Путков. — Известия АН БССР. Серия физико-технических наук. — 1974. — № 4.
6. Абрамов, С. А. Лекции о сложности алгоритмов / С. А. Абрамов. — М.: Изд. МЦН МО, 2009.

### SUMMARY

*Analysis of the generalized organization scheme for management of executive bodies in mechatronic systems has been carried out. Peculiarities of construction of the direct and feedback circuit have been considered when they were included to digital signal processors. The totality of recurrent difference equations has been built for description of functional cycles in the mechatronic system. The scheme of rational organization of the computing process has been proposed along with disintegration of functional cycles to conversion steps and signal procession. Conditions of informational compatibility of interacting components in the intellectual mechatronic system have been analyzed. Examples of the used formats for digitized signal provision have been given.*

**E-mail:** [altaj@tut.by](mailto:altaj@tut.by)  
[is@bntu.by](mailto:is@bntu.by)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## MECHATRONICS TEACHING IN PREPARING AGRICULTURAL ENGINEERS FOR PRECISION FARMING TECHNOLOGY DEVELOPMENT

*Ph.D*<sup>1</sup>Navitski P., <sup>2</sup>Norton T., <sup>2</sup>Clare D., <sup>2</sup>Peets S.

<sup>1</sup>*EE «Belarusian State Agricultural Academy», Gorki, Belarus*

<sup>2</sup>*Harper Adams University, Newport, Sropshire, Great Britain*

### **Introduction**

Farming represents the coupling of mechanical, chemical, biological technologies with plant/animal growing methods in order to optimize profitable outputs while minimizing environmental pollution. Smart Farming can be considered as the use of computer-based and satellite technologies to improve productivity, quality, environmental impact, energy efficiency, reduce operator error during agricultural operations. Information and Communications Technology (ICT) is emerging as an important enabler in achieving these objectives efficiently.

The concepts of "Smart Farming" or "Intelligent Agriculture" are growing in importance for modern agriculture and novel agricultural technologies that effectively optimize farm management operations are rapidly emerging. This trend in agricultural technology is the next step in the development of conventional precision farming systems but at a higher technological level. Engineering is core to these developments, with mechatronic systems, robotics, drones, modern agricultural machines, farm management with telematic systems now being central to recent innovations.

Considering the strategies of computer technologies in agricultural business processes, it should be noted the advantages of an integrated approach to automation of technological processes and production compared with point or "patchwork" activities. An integrated approach to intelligent agriculture begins not only with the planning of agricultural production, including the collection and analysis of information, decision-making, improving manufacturing operations, but also to the teaching of agricultural specialists. Mechatronic engineering is an increasingly important discipline as most modern vehicles and machinery incorporate multiple mechatronic systems.

Various machines are used in Belarus agriculture now. To create and maintain these machines and mechanisms function perfectly highly qualified engineers are needed. Belarusian State Agricultural Academy (BSAA) is the leading agricultural higher establishment in Belarus. Mechanical engineering faculty of the BSAA trains agricultural mechanical engineers and engineers for mechanisation of land reclamation work. Students study such special subjects as agricultural machines, mechanisation of agricultural farms, theory of machines and mechanisms, resistance of materials, engines and their parts and others. The laboratories of the faculty are equipped with modern machinery. There are practical classes at the machine testing range. Therefore, learning to intelligent agricultural technique is very necessary.

### **Overview of Harper Adams University**

Harper Adams University was founded in 1901 and has had a long and proud tradition of working closely with rural and land-based industries. The university has been acknowledged widely for its quality of education, being short-listed in the 10th annual Times Higher Education Awards, in recognition of its work during the 2012-13 academic year, during which Harper Adams secured university title, recruited its highest ever undergraduate intake, took research student numbers to a record high, and saw 100 per cent growth in

research income. For teaching and research HAU has facilities including an Engineering Complex, Soil Hall, Machinery Demonstration Hall, Off-road Vehicle Test Track, Engineering Design Centre and Agricultural Engineering Innovation Centre.

The Agricultural Engineering Innovation Centre (Fig. 1 a), home to the National Centre for Precision Farming, is a new building which opened in October 2013 and provides 'clean' engineering facilities including: electronics/mechatronics lab, hydraulic lab, research lab for tractors and machines, accommodation for staff, rooms for continuing professional development, a state-of-the-art lecture theatre with space for a tractor.

The large covered Soil Hall (Fig. 1 b) measures 60m x 30m and provides facility for carrying out practical demonstrations and research into the behaviour and performance of off-highway vehicles and field machinery without the influence of the weather and uses irrigation to change soil conditions. A machinery demonstration hall provides storage and demonstration facilities for off-highway and agricultural machines. Off-road Vehicle Test Track if for demonstrating all sorts of off-road vehicles.

Fig. 1c shows some the electronic communications teaching equipment designed and constructed by the Mechatronics teaching team at HAU (Dr Peets; Mr Clare). CAN bus is a message-based protocol, which is widely used in automotive applications and the equipment acts as a primary teaching aid in demonstrating the fundamental aspects of the of this protocol to Agricultural and Off-Road Vehicle Design Engineers.



*Figure 1. – Harper Adams University Engineering Complex facilities*

Related areas are the National Centre for Precision Farming and Academic Departments. One of the academic Departments is Engineering Department. It is responsible for teaching a range of undergraduate and postgraduate engineering courses, with core subjects in mechanical engineering, mechanical science, materials, electronics and mechatronics, engineering design and maths. Students can also study a number of specialist modules, depending on the route chosen, which include off-road vehicle design, terramechanics, agricultural engineering principles, soil and water and hydraulic system design and control. One of them is the MSc course on Applied Mechatronic Engineering.

### **Mechatronics teaching at Harper Adams University**

The course of Applied Mechatronic Engineering at Harper Adams is designed for students with a strong academic background but limited industrial experience. It is intended to expedite the experiential development of these engineers through a series of industrially linked projects. Students will complete the course with a view to taking leading positions in manufacturing companies designing innovative machinery and equipment by employing new and emerging technologies to develop mechatronic systems, machinery and solutions.

The final award is MSc and the intermediate awards are PgC and PgD. The course Applied Mechatronic Engineering has the following duration: MSc takes one year full-time and PgC/PgD takes one year full-time or two-three years part-time.

This course builds on the Engineering Department's long history of working closely with industry teaching students how to apply engineering science to industrial product design. Mechatronics is a multi-disciplinary field of engineering that combines with mechanical, electronic, computer, software, control and systems design engineering in the design and manufacture of useful products. It is an increasingly important discipline as most modern vehicles and machinery incorporate multiple mechatronic systems.

Some of the technologies that mechatronics encompasses include: robotics, vision systems, satellite navigation systems, communications technology, and biometric and other new advanced sensors. Introduction of these new technologies means that engineers cannot rely upon prior knowledge when designing machinery. As a consequence it has become normal practice for new highly technical equipment to be developed by specialist manufacturers, either through subcontract subsystem devolution or commercial partnership.

When developing new products, much of the work of the engineer involves the recombination or reapplication of previously un-combined technologies to solve new problems or enable new functionalities. Engineers therefore need to develop the greatest possible body of knowledge as a resource to call upon during the resolution of novel challenges in new or different environments.

This course provides an understanding of the practical application of engineering science and mathematics to the development of mechatronic systems. It is designed to aid students with good engineering qualifications, but limited applied industrial experience, learn the skills to take leading positions in manufacturing companies designing innovative machinery and equipment by employing new and emerging technologies to develop mechatronic systems, machinery and solutions.

This is quite innovative and progressive course. That is why there are specific requirements for candidates. For example, they must have an honours degree in a relevant engineering discipline, with either a first or an upper-second class honours classification or an equivalent award. But if some candidates already have a postgraduate diploma in a relevant engineering discipline or an equivalent award, they can enter this course. This postgraduate programme builds upon students' existing engineering skills and knowledge developed through prior education and focuses them into a more specific and applied area of study. This approach is designed to allow students to expand their applied knowledge and develop the necessary powers of analysis required to solve complex design problems. Learning largely takes place through a series of individual and group engineering projects intended to enable students to apply their existing academic skills and knowledge to the design, fabrication and testing of new products or systems. Where applicable, projects will be sponsored and supported by engineering companies and will focus on the development of mechatronic systems, machinery and equipment.

### **Future collaboration between BSAA and HAU**

There is strong necessity of teaching mechatronic engineering in Belarus agricultural education system. And there are possibilities for doing it. One of them is to build education

collaboration of BSAA and HAU in Erasmus project on BSAA ag-engineering course improvement to provide BSAA engineering students with the skills to develop Precision and Smart Farming technologies. There are number of core disciplines could be used in this process, based on mechatronics, robotics, modern agricultural machines and development, Farm Management.

### SUMMARY

*Smart Farming integrates the use of machines, computers, satellite and sensor technologies to improve efficiency of agricultural operations. This paper considers the problems of preparing mechanical agricultural engineers and carried out necessary teaching mechatronics and gives an introduction to Harper Adams University (HAU), along with an outline on the current education in Mechatronic Engineering. It finishes by defining some actions for future collaboration activities between Belarusian State Agricultural Academy and HAU through European programmes.*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Инновации в механизации земледелия и защиты растений на agritechnica-2013 / А. В. Клочков, П.М. Новицкий, А.Е. Маркевич // Земледелие и защите растений. – 2014. – № 1. – С. 75.
2. Materials website <http://www.harper-adams.ac.uk/>.
3. Materials website <http://www.BAA.by>

### РЕЗЮМЕ

Smart Farming объединяет использование машин, компьютеров, спутниковых и сенсорных технологий для повышения эффективности сельскохозяйственных операций. В статье рассмотрены проблемы подготовки инженеров-механиков для агропромышленного комплекса и обоснована необходимость преподавания мехатроники, рассмотрен опыт Университета Харпер Адамс в преподавании мехатроники в соответствии с существующим учебным планом. В заключении определены возможности для будущего сотрудничества между Белорусской государственной сельскохозяйственной академией и Университетом Харпер Адамс через европейские программы.

**E-mail:** [Navitski\\_Pavel@tut.by](mailto:Navitski_Pavel@tut.by)

Поступила в редакцию 05.10.2014

## ЭЛАСТОПЛАСТЫ: МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ В ДЕМПФИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ

Шилько С.В.

*ГНУ «Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого»  
НАН Беларуси, Гомель*

**Введение.** Эластопласты на основе высокомолекулярных соединений (полимеров и эластомеров), сочетающие высокую вязкость с низкими значениями модуля упругости и предела текучести, широко используются в демпфирующих системах, позволяя получить требуемое сочетание податливости и диссипативных характеристик при высокой технологичности переработки в изделия, включая возможность их рециклинга после исчерпания ресурса.

Рассуждая в духе работ [1,2], заметим, что передовые материаловедческие решения в этой области возможны при анализе механических свойств биотканей, выполняющих амортизирующую функцию. Так, например, высокая демпфирующая способность межпозвоночного диска обусловлена сочетанием упругого фиброзного кольца и квазижидкого вязкого ядра. Сустав хорошо амортизирует динамические нагрузки благодаря эластичности пористого хряща и вязкому сопротивлению при выдавливании через поры хрящевого матрикса т.н. синовиальной жидкости, существование предела текучести которой обусловлено жидкокристаллической структурой. Периодонтальная связка зубочелюстной системы, образованная прочными упругими коллагеновыми волокнами и достаточно вязкой соединительной тканью, эффективно демпфирует разнонаправленные жевательные нагрузки на зубы.

Эластопласты, являясь синтетическими аналогами указанных реологически сложных биоматериалов, в той или иной степени проявляют упругие, вязкие и пластические свойства. Ниже рассматриваются соответствующие механико-математические модели эластопластов, пригодные для использования в расчетах различных амортизирующих устройств, общие схемы которых показаны на рисунок 1.

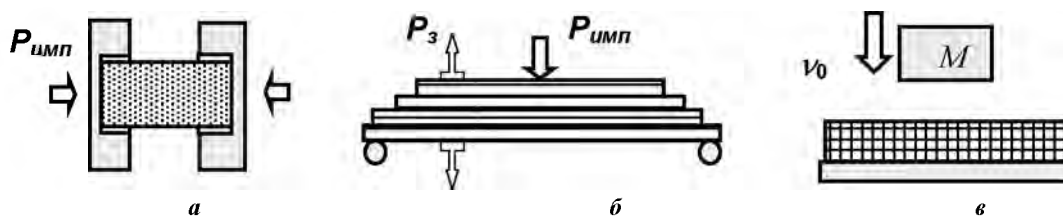


Рисунок 1. – Амортизация при сжатии (а), изгибе (б) и контактном индентировании (в)

**1. Модели упругого деформирования** эластопластов достаточно просты и применимы в качестве первого приближения для анализа процесса демпфирования импульсной нагрузки  $P_{имп}$  в условиях сжатия (рисунок 1а) и изгиба (рисунок 1б), а также ударного воздействия индентора массой  $M$ , движущегося с начальной скоростью  $v_0$  (рисунок 1в). Однако, даже в случае идеально упругого материала указанных демпфирующих элементов, часть энергии рассеивается в зонах проскальзывания при внешнем трении. Диссипация растет при увеличении площади контактной поверхности и коэффициента трения, давлений и амплитуды проскальзывания в контакте, что достигается, например, применением работающей на изгиб многолистовой рессоры с предварительной затяжкой (рисунок 1б). Такие амортизаторы показали свою эффективность в ортопедии при изготовлении пластинчатого протеза стопы и в транспортном машиностроении.

Анализ упругих направленно-армированных эластопластов усложняется их выраженной анизотропией. В качестве примера была построена конечноэлементная модель пакета листов из ортотропного материала с упругими константами  $E_x, E_y, \nu_x, \nu_y$ , нагруженного сосредоточенной силой в центре и усилием затяжки с шарнирным закреплением в опорах (рисунок 1б). При постоянном поперечном модуле упругости  $E_y = 10$  ГПа отношение  $E_x/E_y$  материала листа изменялось в пределах от 1 до 10, т.е. рассматривался переход от изотропного материала ( $E_x = E_y$ ) к однонаправленному композиту. Коэффициенты Пуассона  $\nu_x, \nu_y$  изменялись от 0,4 (для  $E_y = E_x$ ) до 0,25 (для  $E_y = 10E_x$ ), что приближенно учитывало повышение объемного содержания армирующего стекловолокна ( $\nu_{\text{стекла}} \approx 0,2$ ). Коэффициент трения  $f$  на контактной поверхности листов варьировался в интервале  $0 \leq f \leq 1,0$ .

Моделирование позволило определить соотношение коэффициента трения, упругих характеристик и усилия затяжки листов, обеспечивающее максимальную диссипацию энергии при проскальзывании. Анализ контактных давлений в процессе нагружения композитной рессоры (рисунок 1в) свидетельствует о возможности нарушения прилегания листов, что вносит дополнительную нелинейность. Значительные резервы по демпфированию выявляются при использовании упругих ауксетичных материалов с высоким сопротивлением формоизменению [3].

**2. Модели вязкоупругого деформирования.** Для описания вязкоупругого поведения эластопластов, как демпфирующих материалов, применима феноменологическая модель в виде соединения элемента Максвелла и упругих элементов (рисунок 2а).

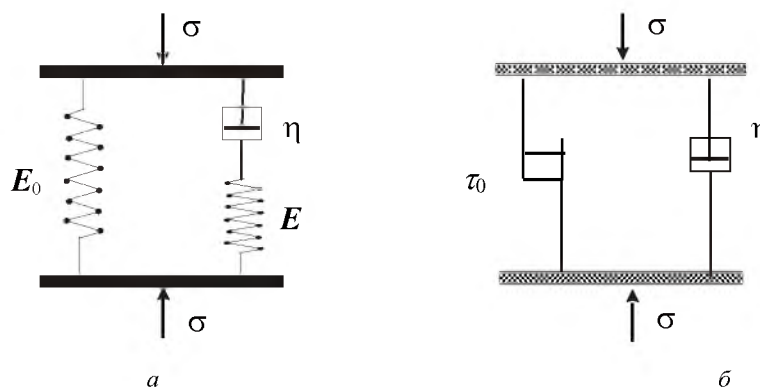


Рисунок 2 – Вязкоупругая (а) и вязкопластическая (б) модели эластопластов

Данная модель обладает свойством наследственности, т.к. напряжения в любой момент времени определяются историей нагружения и релаксацией напряжений, а также допускает мгновенную и исключает остаточную деформацию. Соответствующее дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1}{\eta}\sigma = (E_0 + E_1) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_0 E_1}{\eta} \varepsilon,$$

где  $t$  – время;  $E_0, E_1$  – модули упругости материала,  $\eta$  – коэффициент вязкости.

Для известного закона деформирования  $\varepsilon(t)$  имеем решение

$$\sigma(t) = (E_0 + E_1)\varepsilon(t) - \frac{E_1}{\eta} \int_0^t \varepsilon(s) e^{-\frac{E_1}{\eta}(t-s)} ds.$$

Напряжение  $\zeta(t)$  определяется значением  $\varepsilon(t)$  в данный момент времени и историей изменения  $\varepsilon(s), s \in (0, t)$ . Как показано в [5], для определения вязкоупругих характеристик эластопластов в условиях работы амортизаторов сжатия целесообразно использовать метод динамического индентирования.

Нелинейные механические свойства имеют пористые эластопласты, например, пенополиуретаны, используемые для изготовления демпфирующих покрытий салона

автомобиля. Вязкоупругость открытопористых эластопластов малой плотности ( $V_f < 0,08$ ) можно описывать, заменяя ячейки материала стержневыми структурными элементами [6] с параметрами ядра  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  релаксации Ржаницына

$$R(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}.$$

Связь напряжений и деформаций устанавливается соотношением

$$s_{px} = 2G_f \left( v_{px} - \int_0^t R(t-\tau) v_{px}(\tau) d\tau \right), \quad \sigma = 3K_f \varepsilon,$$

где  $s_{px}$ ,  $v_{px}$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_f$ ,  $K_f$  – модули сдвига и всестороннего сжатия твердой фазы.

Исходя из указанных соотношений, были получены зависимости «напряжение-деформация», которые сравнивались с диаграммами деформирования пенополиуретана для нескольких значений скорости деформации  $\varepsilon$ . Использование эквивалентного структурного элемента позволяет прогнозировать нелинейное деформирование пористых эластопластов с различной конфигурацией ячеек при объемном содержании твердой фазы  $V_f < 0,08$  и уровне сжатия до 50%.

**3. Модели вязкопластического течения.** Весьма высокие показатели гидравлических амортизаторов достигаются диссипацией энергии за счет вязкого трения при движении жидкой рабочей среды в кольцевом зазоре (течение Куэтта) или ее дросселировании через цилиндрический канал (течение Пуазейля) (рисунок 3).

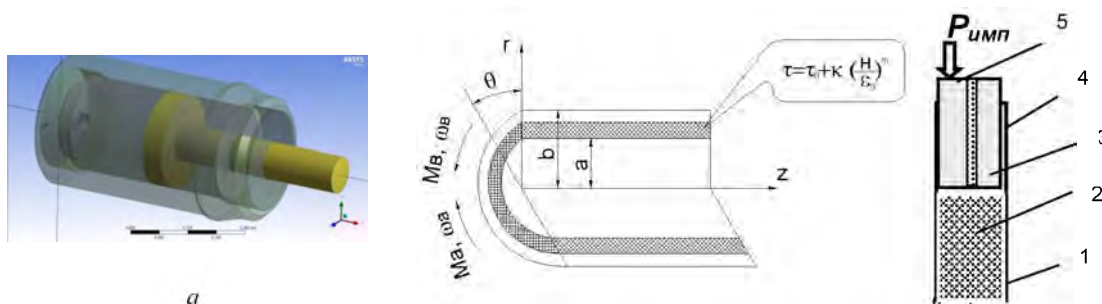


Рисунок 3 – Амортизатор (а), работающий в режиме куэттовского (б) и пуазейлевского (в) течения рабочей среды: 1 – корпус, 2 – рабочая среда, 3 – плунжер, 4 – зазор, 5 – дросселирующее отверстие

В расчетах гидравлических амортизаторов обычно используют модель рабочей среды с линейной вязкостью. Однако эластопласты, применяемые в высоконагруженных (давление до 500 МПа) поглощающих аппаратах автосцепки ж/д подвижного состава [7,8], демонстрируют нелинейную вязкопластичность (пороговое напряжение, скоростную чувствительность), что предполагает использование моделей (рисунок 2б). Для определения вязкопластических параметров стандартными методами должны быть заданы угловые скорости и моменты вращения соосных цилиндров реометра (течение Куэтта) либо расход среды и давление на входе и выходе капилляра (течение Пуазейля). Знание реологических констант позволяет проектировать демпферы для конкретных приложений, оптимизируя условия течения (зазоры, дросселирующие отверстия) либо состав эластопласта.

**Демпфирование в кольцевом канале.** В работе [9] анализировалось куэттовское течение вязкопластического материала при крутильных колебаниях демпфера (рисунок 3а). Диссипация энергии в этом случае обусловлена вязким трением в зазоре между коаксиальными цилиндрами с радиусами  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ), вращающимися вокруг общей оси с угловыми скоростями  $w_a$  и  $w_b$  под действием моментов  $M_a$  и  $M_b$  соответственно (рисунок 3б). Принималось, что цилиндры являются недеформируемыми, окружная скорость течения в зазоре является непрерывной и монотонной функцией радиуса, а на границах кольцевого канала заданы условия адгезии.



Записывались уравнения движения среды в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  с осью  $z$ , совпадающей с осью вращения цилиндров, и краевые условия для поля скоростей  $U_\varphi(a) = w_a a$ ,  $U_\varphi(b) = w_b b$ . Определяющие соотношения для несжимаемого материала имеют вид [10]

$$S_{ij} = \left( \frac{2}{3} \frac{\tau}{H} \right) \xi_{ij}, \text{ где } S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}; \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk};$$

$$\tau = \tau_0 + K \left( \frac{H}{\varepsilon_0} \right)^m, \text{ при } \tau \geq \tau_0 \text{ и } H = 0 \text{ при } \tau < \tau_0.$$

Здесь  $\xi_{ij}$ ,  $S_{ij}$  – компоненты девиатора тензоров скоростей деформаций и напряжений,  $\delta_{ij}$  – символ Кронеккера,  $\varepsilon_0$  – характерная скорость деформации,  $\tau_0$  – предел текучести (пороговое напряжение);  $\tau$ ,  $H$  – интенсивности сдвиговых напряжений и сдвиговых скоростей деформации;  $m$ ,  $K$  – константы материала ( $m$  – параметр скоростной чувствительности).

Было показано, что алгоритм определения момента вращения коаксиальных цилиндров при решении прямой задачи устойчив и обладает удовлетворительной сходимостью в исследуемом диапазоне  $\tau'_0$ . Определение реологических констант  $\tau_0$ ,  $K$ ,  $m$  по известным значениям  $w_a$ ,  $w_b$ ,  $M_a$ ,  $M_b$  (решение обратной задачи) осуществлялось путем вычислительного эксперимента.

С целью проверки методики проводились испытания на ротационном вискозиметре с отношением радиусов коаксиальных цилиндров, равным 0,98. Для идентификации модели материала было выполнено 3 эксперимента для различных угловых скоростей с регистрацией моментов. Контрольный эксперимент показал приемлемую точность идентификации вязкопластической модели.

**Демпфирование в цилиндрическом канале.** Исходя из определяющих соотношений для течения Пуазейля, в [11] получены расчетные зависимости для описания течения вязкопластичной среды через цилиндрический канал (рисунок 3в) при осевом нагружении демпфера, показанного на рисунок 3а.

$$\frac{2\pi l}{K^n |\Delta p_i| (n+1)(n+2)(n+3)} \left( \frac{1}{2} \frac{|\Delta p_i|}{l} a - \tau_0 \right)^{n+1} \left\{ (n+1)(n+2)a^2 + 2r_0^2 + 2ar_0(n+1) \right\} = Q_i;$$

$$i = 1, 2, 3,$$

где  $r_0 = \frac{2\tau_0 l}{|\Delta p|}$  – радиус квазитвердой области;  $\Delta p$  – перепад давления;  $\mu$ ,  $n$ ,  $\tau_0$  –

реологические константы;  $\left| \frac{dp}{dz} \right|$  – градиент давления,  $a$ ,  $l$  – радиус и длина канала,  $k = \frac{r_0}{a}$ ;

$Q_i$  – объемный расход среды в единицу времени.

По экспериментальным данным могут быть определены значения реологических констант  $\tau_0$ ,  $k$ ,  $n$  для последующего использования в расчете амортизатора. Контрольный тест при скорости течения 2,8 м/с показал, что относительная погрешность расчета  $\tau_0$ ,  $n$ ,  $k$  не превышает 1%. При  $n$ , близком к единице, и достаточно большом перепаде давления возможна приближенная оценка расхода рабочей среды, которая при  $r_0 \leq r \leq 0,5R$  отличается от точной не более, чем на 30% для любых нелинейно-вязкопластичных материалов

$$Q_n = \frac{\pi}{(4\mu)^n} \left\{ \left| \frac{dp}{dz} \right| \right\}^n (R - r_0)^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} (R^2 + r_0^2) \right\}.$$

**Заключение.**

На основе эластопластов, обладающих выгодным сочетанием механических свойств, могут быть созданы эффективные демпфирующие системы технического и медицинского назначения. Этому способствует формализация нелинейно-упругого, вязкоупругого и вязкопластического поведения эластопластов путем использования механико-математических моделей и определения упругих и реологических констант из сравнительно простых, в большинстве случаев, стандартизованных испытаний. Выбор реологических параметров является эффективным средством оптимизации демпфирующих характеристик амортизаторов с использованием эластопластов в качестве рабочей среды.

*Работа выполнена в рамках задания «Анализ и оптимизация демпфирующих характеристик гидравлических амортизаторов с эластомерной рабочей средой» ГПНИ «Механика 1.43»*

### РЕЗЮМЕ

Обсуждается применение эластопластов в качестве материала демпфирующих элементов амортизаторов удара и колебаний. Рассматриваются упругие, вязкоупругие и вязкопластические модели указанных материалов. Анализируются факторы, влияющие на диссипацию энергии при внешнем и внутреннем трении.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плескачевский, Ю.М. Биологические и технические системы – конкуренция и синтез / Ю.М. Плескачевский, А.В. Чигарев, С.В. Шилько // Механика машин, механизмов и материалов. – 2007. – Т. 1, № 1. – С. 78–89.
2. Shilko, S. Adaptive Composite Materials: Bionics Principles, Abnormal Elasticity, Moving Interfaces / In Book: Advances in Composite Materials – Analysis of Natural and Man-Made Materials / Ed. P. Tesinova, InTech, 2011. – Chapter 23. – P. 497–526.
3. Термоэластопласт полиэфирный БЕЛАСТ. ТУ РБ 03535279.055-98.
4. Плескачевский, Ю.М. Ауксетики: модели и приложения / Ю.М. Плескачевский, С.В. Шилько // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2003. – № 4. – С. 26–36.
5. Nonlinear viscoelastic behavior of flexible cellular plastics: refined rod model / D.A. Chernous [et al.] // Int. J. of Applied Mech. and Eng. – 2003. – № 1. – P. 27–41.
6. Рудницкий, В.А. Оценка свойств эластомерных материалов при постоянной скорости индентирования / В.А. Рудницкий, А.П. Крень, С.В. Шилько // Трение и износ. – 2001. – Т. 22, № 5. – С. 502–508.
7. Болдырев, А.П. Расчет и проектирование амортизаторов удара подвижного состава / А.П. Болдырев, Б.Г. Кеглин. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 199 с.
8. Манашкин Л. Гасители колебаний и амортизаторы ударов рельсовых экипажей (математические модели) / Л. Манашкин, С. Мямлин, В. Приходько – Днепропетровск: ДГУ, 2007. – 196 с.
9. Гавриленко С.Л., Шилько С.В., Васин Р.А. Определение характеристик вязкопластического материала в условиях течения Куэтта // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – № 3. – С. 502–508.
10. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. – М.: МГУ, 1977. – 373 с.
11. Гавриленко, С.Л. Метод описания течения и определения реологических констант вязкопластичных биоматериалов / С.Л. Гавриленко, Р.А. Васин, С.В. Шилько // Российский журнал биомеханики. – 2002. – Т. 6, № 3. – С. 90–96.

### SUMMARY

*Application of elastic, viscoelastic and viscoplastic mechanical and mathematical models of polymers and elastomers for description of damping process is discussed.*

**E-mail:** [Shilko\\_mpri@mail.ru](mailto:Shilko_mpri@mail.ru)

Поступила в редакцию 30.10.2014

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ В ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

к.т.н. **Гончаров М.В.**, к.ф.-м.н. **Кончина Л.В.**, к.т.н. **Куликова М.Г.**,

студ. **Романова О.Н.**

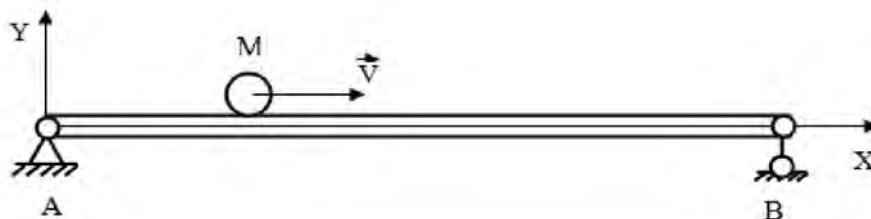
*ФГБОУ ВПО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Россия*

Производственная деятельность любого современного пищевого предприятия связана с перемещением большого количества разнообразных грузов, будь то сырье, полуфабрикаты или готовая продукция. Наряду с различными средствами механизации особое место принадлежит подъемно-транспортным установкам, которые служат для механизации наиболее трудоемких процессов перемещения грузов. Распространенным видом транспортирующих машин в пищевой промышленности являются ленточные конвейеры. Они применяются для транспортировки как сыпучих, так и штучных грузов. Остановка конвейерной системы вызывает остановку производства и срыв выпуска продукции. Следовательно, надежность работы конвейера и долговечность его узлов являются решающими факторами производственной деятельности современного предприятия и основным условием выпуска промышленной продукции.

Сахарное производство при транспортировке свеклы в моечные отделения сталкивается с такой проблемой как неравномерная загрузка ленты продуктом, которое способствует появлению сложного колебательного процесса, приводящего к разрушению конвейерного полотна.

Рассмотрим равномерное движение ленточного конвейера с приблизительно равномерным распределением масс. Целью исследования является определение характеристик колебательных движений конвейерной ленты в середине пролета, возникающих при движении неравномерно распределенного груза.

Для проведения расчетов произведем замену конвейера системой с одной степенью свободы, предполагая балку невесомой и несущей в среднем сечении сосредоточенную массу (подобная модель встречается при транспортировании штучных грузов). Массой движущегося по ленте конвейера груза ввиду ее малости в сравнении с массой конвейера пренебрегаем (рисунок 1).



*Рисунок 1 – Схема 1 конвейерной ленты с грузом*

Груз, меняющий свое положение на конвейере, условно заменим приведенным грузом.

Рассмотрим груз в положении, когда он находится в середине конвейера с длиной пролета, равной  $l$ . Прогиб середины ленты конвейера, как показывает практика, происходит по синусоидальному закону. Предполагая, что прогиб ленты в этом случае равен прогибу от груза, получим значение возмущающей силы в середине ленты конвейера

$$P' = P \sin(\omega t), \quad (1)$$

где  $v$  - скорость перемещения груза по ленте конвейера. При этом предполагается, что перемещение груза по ленте конвейера происходит по закону

$$x = vt, \quad (2)$$

а частота возмущающей силы при заданной постановке задачи зависит от скорости движения груза по ленте конвейера

$$\alpha = \frac{\pi v}{\ell}. \quad (3)$$

Таким образом, задача сводится к решению задачи о вынужденных колебаниях материальной точки, сосредоточенной в середине пролета ленты конвейера. Выбирая начало отсчета в положении статического равновесия сосредоточенной массы, в общем случае дифференциальное уравнение движения можно представить в следующем виде [1]:

$$\ddot{y}_1 + k^2 y_1 = P'' \sin(\alpha t), \quad (4)$$

ось  $Oy_1$  направлена параллельно оси  $Ay$ , точка  $O$  является положением статического равновесия приведенного груза,  $k$  - круговая частота рассматриваемых колебаний.

Решение дифференциального уравнения (4), как известно, записывается в общем виде [1]:

$$y_1 = a \sin(kt + \delta) + \frac{P''}{k^2 - \alpha^2} \sin(\alpha t), \quad (5)$$

где параметры  $a$  и  $\delta$  определяются начальными условиями движения рассматриваемой механической системы, приведенной к системе с одной степенью свободы.

По виду уравнения (5) можно сделать вывод, что лента конвейера будет совершать сложное колебательное движение, являющееся «сложением» собственных колебаний с частотой  $k$  и вынужденных колебаний с частотой, равной частоте  $\alpha$  возмущающей силы. При этом очевидно, что увеличивая частоту  $\alpha$ , амплитуду собственно вынужденных колебаний можно приблизить к нулю. Если же частота собственных колебаний  $k$  окажется равной частоте возмущающей силы  $\alpha$ , то, как известно, амплитуда вынужденных колебаний неограниченно растет, наступает явление резонанса, а решение дифференциального уравнения (4) имеет в данном случае вид [1]:

$$y_1 = a \sin(kt + \delta) - \frac{P'' t}{2k} \cos(kt). \quad (6)$$

Исследуя выражение (5), можно сделать вывод о том, что наибольшее влияние на колебательное движение ленты транспортера случай, когда

$$\alpha^2 = k^2 \text{ или } \frac{\alpha}{k} = 1, \quad (7)$$

то есть избежать явления резонанса можно при выполнении неравенства

$$v \neq \frac{k\ell}{\pi}.$$

(8)

Если предположить, что перемещение под грузом весом  $P$  в данный момент времени соответствует статическому прогибу от давления, производимого грузом на ленту конвейера, то с помощью принципа Даламбера можно определить значение давления

$$R = P \left( 1 - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right). \quad (9)$$

Используя в выражении (9) формулу для прогиба балки, шарнирно закрепленной на двух опорах (рисунок 1), из сопротивления материалов

$$y = \frac{Px^2}{3EJl} \cdot (\ell - x)^2, \quad (10)$$

получим значение искомого давления в виде

$$R = P \left( 1 - \frac{v^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = P \cdot \left( 1 - \frac{v^2}{g} \cdot \frac{2}{3} \frac{P}{EJl} (6x^2 + \ell^2 - 6x\ell) \right). \quad (11)$$

Аналогичную модель и исследование движений можно провести также для случая, когда лента конвейера расположена под некоторым углом  $\varphi$  к вертикали (рисунок 2) с учетом равномерности распределения нагрузки по ленте, что часто встречается в пищевой промышленности.

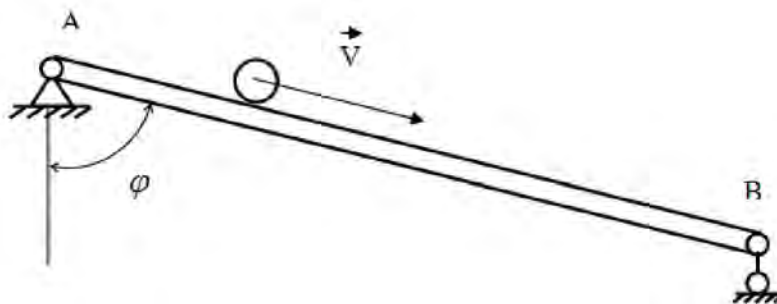


Рисунок 2 – Схема 2 конвейерной ленты с грузом

Полученные результаты могут быть использованы при определении параметров ленты транспортеров, консольных грузоподъемных устройств (динамические модели рассмотрены в работах авторов [2], [3]), применяемых, как в пищевой, так и в горнорудной промышленности.

## РЕЗЮМЕ

Рассматривается равномерное движение ленточного конвейера с равномерным распределением масс. Для решения задачи предлагается замена конвейера системой с одной степенью свободы. Определяются характеристики колебательных движений, возникающих при движении по ленте конвейера неравномерно распределенного груза.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч.1 – Санкт-Петербург.: Лань, 2009. – 480 с.
2. Омаров Т.И., Тулегенова К.Б., Бекенов Е.Т., Кончина Л.В., Гончарова И.А. Математическое описание колебаний консольного грузоподъемного устройства
3. // Теоретическая и прикладная механика. - Минск: БНТУ, 2014. Вып.29. - С. 137-140.
4. Омаров Т.И., Тулегенова К.Б., Кончина Л.В., Гончарова И.А. Составление динамической модели для исследования колебаний консольной балки переменного поперечного сечения // Энергетика, информатика, инновации. - Смоленск: Универсум. 2012. №1. - С. 289-293

## SUMMARY

*This research considers the uniform motion of slider conveyor with equal mass distribution. As a solution it is suggested to install a system with one degree of freedom instead of the conveyor. Features of vibrational motion, that arrives from the unevenly distributed burden movement along the belt, are being established.*

**E-mail:** [la\\_kon@mail.ru](mailto:la_kon@mail.ru)  
[kulikova0808@rambler.ru](mailto:kulikova0808@rambler.ru)  
[ola-romanova25@ya.ru](mailto:ola-romanova25@ya.ru)

Поступила в редакцию 27.10.2014

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗНАЧЕНИЙ УДАРНОЙ ВЯЗКОСТИ

к.т.н. Хмелев А.А., студ. Орсич Ю.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Для оценки пригодности материалов сопротивлению ударным нагрузкам и их склонности к охрупчиванию производят стандартные испытания на ударную вязкость в диапазоне температур от  $+20$  до  $-40^{\circ}\text{C}$ . Значение последней зависит от температуры испытания, остроты надрезов и размеров контрольных образцов. В дополнение к указанным факторам, высокая скорость деформирования при разрушении настолько усложняет напряженное и деформированное состояние при разрушении, что теоретический анализ ударной вязкости до сих пор не осуществлен.

Считается, что чем острее надрез, вплоть до усталостной трещины, в контрольном образце и чем больше размер образца, тем ценнее результаты испытаний, которые можно применять к оценке ударостойкости реальных конструкций. Исходя из этой предпосылки, применяют 20 типов стандартных ударных образцов и для каждого из них установлен стандартный оценочный критерий. В дополнение к этому в настоящее время существуют и разрабатываются дорогостоящие мощные копры для ударных испытаний крупногабаритных образцов падающим грузом.

В данной работе предлагается теоретический метод оценки значений ударной вязкости или поглощенной энергии разрушаемым образцом для диапазона температур эксплуатации по результатам испытаний наиболее простого образца (тип I с U-образным надрезом) с привлечением к расчетам сертификатных данных механических характеристик материала. Для этой цели удобно применять известные [1] диаграммы хрупковязкого состояния сталей, рисунок 1.

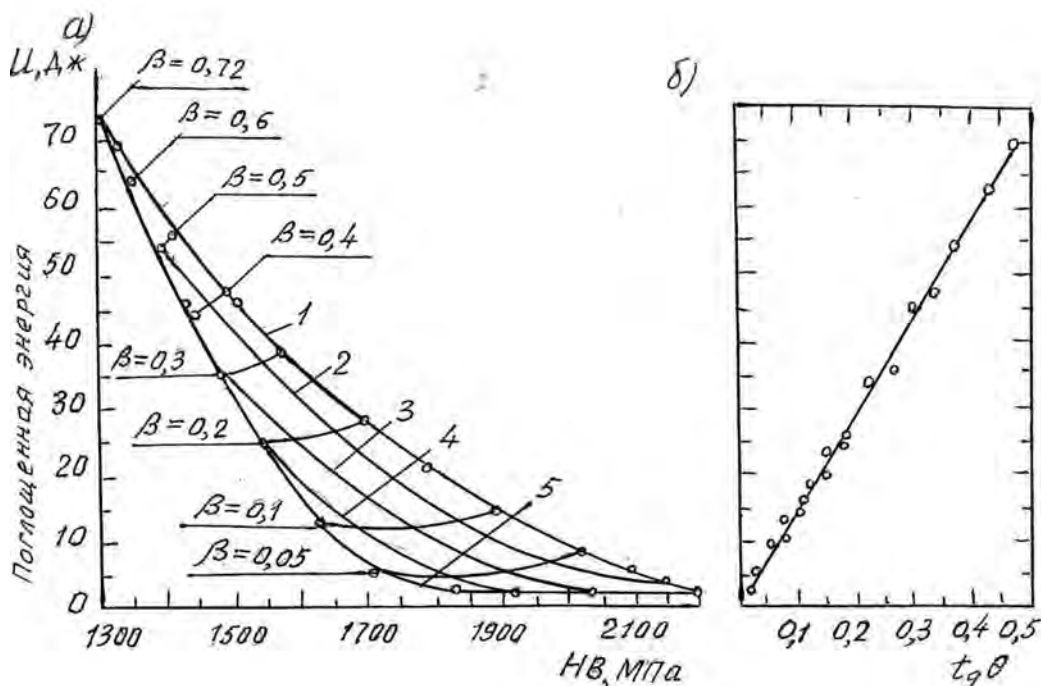


Рисунок 1. - Диаграмма хрупковязкого состояния стали ВСтЗсп5 (а) и зависимость поглощенной энергии от угла изгиба образца  $\theta$  (б): 1-5 – температуры испытания:  $+20$ ,  $0$ ,  $-20$ ,  $-40$  и  $-60^{\circ}\text{C}$  соответственно.

На данном рисунке показаны диаграммы хрупковязкого состояния сталей, включающие в себя зависимости поглощенной энергии, как критерия энергоемкости

разрушения, от характеристик прочности, пластичности и температуры испытания. В указанных диаграммах характеристики материала проще определить через его твердость, и в связи с тем, что при пластическом прочностии выражены через твердость по Бринеллю. Это вызвано тем, что в реальной конструкции прочность деформировании материала его твердость возрастает, достигая максимального значения на поверхности разрушения.

При этом максимальное значение определяют по формуле

$$HB_{max} = HB_0 e^{\varphi}, \quad (1)$$

где  $HB_0$  и  $\theta$  – твердость по Бринеллю и относительное сужение стали в состоянии поставки.

Известно [2], что одним из наиболее удобных критериев оценки состояния стали является критерий  $\beta$ , выступающий одновременно как характеристика энергопоглощения и пластичности стали для исследуемого состояния, и определяемый по формуле

$$\beta = \frac{U}{A \cdot HB} = \frac{U \cdot C}{A \cdot \sigma_B} = \frac{a_H}{HB}, \quad (2)$$

где  $U$  – поглощенная энергия разрушаемым образцом, Н·мм;  $A$  – площадь сечения, мм<sup>2</sup>;  $HB$  – твердость стали для контролируемого состояния, МПа;  $C$  – коэффициент пропорциональности между  $\zeta$  и  $HB$  по ГОСТ 22761-7;  $a_H$  – ударная вязкость, Н·мм/мм<sup>2</sup>.

Значения  $\beta$  на диаграмме хрупковязкого состояния приведены на рисунок1. Измеряясь в мм, значение  $\beta$  пропорционально прогибу ударного образца, или

$$y = K_{\beta} \cdot \beta, \quad (3)$$

где  $y$  – прогиб образца, мм;  $K_{\beta}$  – угловой коэффициент взаимосвязи между  $y$  и  $\beta$ .

Из геометрических размеров образца значение его прогиба, определяемого после совмещения его разрушенных половинок, определяется по формуле

$$y = \frac{l}{2} \sin \theta = 20 \sin \theta, \quad (4)$$

где  $l = 40$  мм – расстояние между опорами копра;  $\theta$  – угол изгиба образца.

Из формулы (2) с учетом (3) и (4) получаем формулу для определения поглощенной энергии

$$U = \frac{20 \cdot A \cdot HB}{K_{\beta}} \sin \theta, \quad (5)$$

С другой стороны известно [2], что полное значение поглощенной энергии разрушаемым образцом описывается уравнением

$$U = K_{\Phi} \cdot a_v b h^2 \operatorname{tg} \theta, \quad (6)$$

где  $K_{\Phi} = (4 - 4,2)$  - коэффициент формы надреза для стандартного ударного образца типа I;  $a_v$  – удельная работа пластического деформирования, являющаяся константой для каждой конкретной плавки стали;  $b = 10$ ,  $h = 8$  мм – ширина и высота образца в сечении по надрезу.

Из формул (5) и (6) следует, что значение поглощенной энергии зависит от констант стали, ее прочности, пластичности и геометрических размеров образца. Важнейшим из

указанных факторов является значение угла изгиба образца, величину которого определяют по результатам стандартных испытаний при температуре +20°C, а из линейной зависимости между  $U$  и  $\text{tg } \theta$  (рисунок 1 б) определяют значение углового коэффициента

$$K_{\theta} = \frac{U}{\text{tg } \theta}, \quad (7)$$

Значение удельной работы пластического деформирования определяем из совместного решения (5) и (7)

$$a_v = \frac{K_{\theta}}{K_{\phi} \cdot b h^2}, \quad (8)$$

Совместное решение (6) и (8) позволяет определить текущее значение угла изгиба образца  $\text{tg } \theta$  и значение  $\sin \theta$  - по формуле (5).

Для применения изложенного метода по теоретическому определению значений ударной вязкости или поглощенной энергии достаточно при испытании материалов на ударную вязкость при температуре +20°C дополнительно определить значение прогиба образца на длине между опорами копра  $l = 40$  мм и значения угловых коэффициентов  $K_{\beta}$  и  $K_{\theta}$ .

#### РЕЗЮМЕ

Рассмотрены взаимосвязи сертификатных механических характеристик материалов и их твердости со значениями поглощенной энергии (ударной вязкости) на основе диаграмм хрупковязкого состояния. Приведены теоретические формулы оценки ударной вязкости пригодные для образцов любой формы и размеров. По полученным формулам можно теоретически определять значения ударной вязкости как оценочного критерия состояния конструкции, не прибегая к вырезке образцов из исследуемой конструкции, а лишь используя значения максимальной твердости металла опасной зоны и сертификатные характеристики стали.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хмелёв А.А., Реут Л.Е. Расширение возможностей оценки качества сталей по результатам исследования на ударную вязкость// Весці НАН Беларусі.-2009.-№2.-с.71-75.
2. Жданович Г.М., Хмелёв А.А. //Проблемы прочности. 1981.-№1.-с.85-89.

#### SUMMARY

*Considers the relationships of certificate of mechanical characteristics of materials and their hardness with the values of absorbed energy (toughness) based on the diagrams hрупkovyazkogo state. The theoretical formula assessing toughness suitable for samples of all shapes and sizes.*

**E-mail:** [orsi4.julia@gmail.com](mailto:orsi4.julia@gmail.com)

Поступила в редакцию 19.09.2012



## К РЕШЕНИЮ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛА

**Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В., к.т.н. Хвисевич В.М.**

*УО «Брестский государственный технический университет»*

Создание конструктивных элементов механизмов и машин всегда основывается на снижении их материалоемкости при одновременном повышении прочности и жесткости. В реальных условиях эксплуатации эти элементы подвергаются воздействию температуры, механических усилий, имеют сложную геометрию области. Осуществить аналитическое решение задач теплопроводности и термоупругости в общем случае практически невозможно. Наиболее распространенными численными методами являются методы конечных и граничных элементов. С учетом некоторых преимуществ метода граничных элементов актуальным является вопрос развития и усовершенствования этого метода.

Немаловажным аспектом с позиции снижения материалоемкости элементов является учет неоднородности материала. В работе [1] на примере задачи о нагреве цилиндра показано, что напряжения, подсчитанные с учетом только изменения модуля упругости  $E$  от температуры на 40% меньше, чем напряжения при независимом от температуры модуле.

Неоднородность упругих свойств материалов может возникать в грунтах, процессах формирования тел, технологических процессах, при эксплуатации элементов с учетом влияния окружающей среды (воздействия температуры, радиации, активных жидкостей, газов и т.д.). С учетом характера зависимости упругих параметров среды (параметры Ламе) от координат выделяют три типа неоднородностей: непрерывная, кусочная, случайная.

Рассмотрим упругое, изотропное тело. При воздействии стационарного температурного поля модуль упругости  $E$ , коэффициент линейного расширения  $\alpha$  являются функциями температуры  $T$ , коэффициент Пуассона  $\nu = const$  (согласно [2] для многих материалов наблюдается независимость  $\nu$  от температуры). Граница  $L$  плоской области  $D$  рассматриваемого тела может быть кусочно-гладкой, многосвязной. Для постановки краевой задачи термоупругости в перемещениях необходимы уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^T \alpha(T) dt \right) + \\ + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dt \delta_{ij} \right] = 0; i=1,2. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\theta = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ ,  $\theta = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, и граничные условия

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right] n_j = \frac{1+\nu}{E} q_i(x_s) + \frac{1+\nu}{1-2\nu} n_i \int_0^T \alpha(T) dT. \quad (2)$$

Согласно Тростелю [3], введем малый параметр  $\varphi$ , определяемый функцией

$$E(T): \frac{1}{E} \left( \frac{dE}{dT} \right) = \frac{d}{dT} \left| \ln \frac{E}{E_0} \right| = \varphi A(T).$$

Учтем, что  $\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{1}{E} \frac{dE}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_j} = \varphi \cdot A(T) \frac{\partial T}{\partial x_j} = \varphi \cdot B_j(x_s)$ . Тогда с учетом этих соотношений уравнение (1) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^T \alpha(T) dt \right) + \\ + \varphi B_j \left[ \frac{\hat{a}_i}{\hat{\alpha}_j} + \frac{\hat{a}_j}{\hat{\alpha}_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dt \delta_{ij} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Воспользуемся методом возмущений (границы применимости получаемых решений исследованы в [1]). Решение задачи будем разыскивать в виде степенного ряда по малому параметру  $\varphi$

$$u_i = u_i^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k u_i^k. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2) и (3) получим краевую задачу для вектора  $u_i^0$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i^0 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta^0}{\partial x_i} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^T \alpha(T) dt \right), \\ - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{a}_i^0}{\hat{\alpha}_j} + \frac{\hat{a}_j^0}{\hat{\alpha}_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right] n_i = \frac{1+\nu}{E} q_i(x_s) + \frac{1+\nu}{1-2\nu} n_i \int_0^T \alpha(T) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

а также последовательность краевых задач для векторов  $u_i^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i^k + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta^k}{\partial x_i} = -B_j \left[ \frac{\hat{a}_i^{k-1}}{\hat{\alpha}_j} + \frac{\hat{a}_j^{k-1}}{\hat{\alpha}_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \theta^{-1} \delta_{ij} \right], \\ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{a}_i^k}{\hat{\alpha}_j} + \frac{\hat{a}_j^k}{\hat{\alpha}_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right] n_j = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Напряжения определяются с помощью закона Гука.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \frac{E(T)}{1+\nu} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{a}_i^0}{\hat{\alpha}_j} + \frac{\hat{a}_j^0}{\hat{\alpha}_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\hat{a}_k^0}{\hat{\alpha}_k} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dt \delta_{ij} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{a}_i^k}{\hat{\alpha}_j} + \frac{\hat{a}_j^k}{\hat{\alpha}_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\hat{a}_k}{\hat{\alpha}_k} \delta_{ij} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, краевая задача термоупругости неоднородного тела сводится к краевой задаче термоупругости и последовательности краевых задач теории упругости однородного тела.

Для решения задачи (5) сначала необходимо решить краевую задачу теплопроводности. Пусть коэффициент теплопроводности является функцией температуры, тогда уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0. \quad (8)$$

Используя функцию  $T^* = \int_0^T \lambda(T) dT$ , получим  $\frac{\partial T^*}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$  и уравнение (8)

преобразуется в уравнение Лапласа для функции  $T^*$ . Если, например, коэффициент теплопроводности является линейной функцией температуры  $\lambda = \lambda_0(1 - kT)$ , получим соотношение:

$$T = \frac{1}{k} \left( 1_0 - \sqrt{1 - 2k \frac{T^*}{\lambda_0}} \right), \quad (9)$$

где  $k$  - постоянный коэффициент, определяемый экспериментально.

Функцию  $T^*$  представим в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев:

$$T^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[ \frac{dT^*(y)}{dn_y} \ln \frac{1}{r} - T^*(y) \frac{d}{dn_y} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right] dl_y, \quad (10)$$

где  $r$  - расстояние между параметрической  $x(x_1, x_2)$  и текущей  $y(y_1, y_2)$  точками при интегрировании,  $y \in L$ ,  $\cos \varphi = n_i(y) \beta_i$ ,  $\bar{n}(y)$  - вектор внешней нормали в точке  $y$  к контуру  $L$ ,  $\beta_i$  - направляющие косинусы.

С учетом предельных значений всех слагаемых получаем интегральное уравнение краевой задачи теплопроводности

$$\pi T(x_L) = \int_L \left[ \frac{dT^*}{dn_y} \ln \frac{1}{r} + T^*(y) \frac{\cos \varphi}{r} \right] dl_y. \quad (11)$$

Здесь  $\cos \varphi = n_i(y) \cdot \beta_i$ ;  $\beta_i$  - направляющие косинусы вектора  $\bar{r}$ .

Решение задачи (5) будем разыскивать в виде:

$$u_i^0 = u_i^u + u_i^T, \quad (12)$$

где  $u_i^0$  - решение однородного уравнения, частное решение  $u_i^T$  представим в виде

$$u_i^T = \frac{\partial W}{\partial x_i}. \quad (13)$$

Вектору  $u_i$  соответствует тензор

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^u + \sigma_{ij}^T. \quad (14)$$

Краевую задачу термоупругости (5) сводим к задаче изотермической теории упругости, подставляя в граничные условия этой задачи решение (12) с учетом (13). Тогда на границе  $L$  рассматриваемой области будет действовать приведенная нагрузка

$$\bar{\rho}_{np} = \bar{\rho}_L + \bar{\rho}_T, \quad (15)$$

где  $\bar{\rho}_T$  - фиктивная поверхностная температурная нагрузка ( $\rho_i^T = -\sigma_{ij} \cdot n_j$ ),  $\rho_L$  - механическая нагрузка.

При подстановке (13) в уравнение равновесия (5) последнее удовлетворится, если

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^T \alpha(T) dT. \quad (16)$$

Для многих материалов коэффициент  $\alpha$  имеет зависимость

$$\alpha(T) = \alpha_0 (1 + \gamma T), \quad (17)$$

где  $\alpha_0$  - значение коэффициента при исходном состоянии тела,  $\gamma$  - постоянная, определяемая из экспериментов.

С учетом (16) и (17)

$$\Delta W = abT - acT^*, \quad (18)$$

здесь  $a = \alpha_0 \frac{1+\nu}{1-\nu}$ ,  $b = 1 + \frac{\gamma}{k}$ ,  $c = \frac{\gamma}{k\lambda_0}$ .

Представляя  $T$  с помощью потенциалов, получаем:

$$\Delta W = -\frac{ab}{4\pi} \int_D T(y) \Delta \left( \ln \frac{1}{r} \right) dD_y - \frac{ac}{2\pi} \left\{ \int_L \left[ \frac{dT(y)}{dn_y} \Delta W^* - T(y) \Delta \left( \frac{\partial W^*}{\partial n} \right) \right] dl_y, \text{ где} \right.$$

$W^* = \frac{r^2}{4} (1 - \ln r)$  – фундаментальное решение Лауричелла для плоской области.

Тогда

$$W = \frac{ab}{2\pi} \int_D T(y) \ln \frac{1}{r} dD_y - \frac{ac}{2\pi} \int_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} \left[ \frac{r^2}{4} (1 - \ln r) - T(y) \left[ \frac{r}{4} \cos \varphi (1 - 2 \ln r) \right] \right] \right\} dl_y, \quad (19)$$

Если (12) подставить в уравнения Дюамеля-Неймана, то

$$\sigma_{ij}^T = \frac{E(T)}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \sigma_{ij} \right) \text{ и с учетом (19) получим интегральное представление}$$

добавок температурных напряжений

$$\sigma_{ij}^T(x) = -\frac{aE(T)}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{b}{\pi} \left[ 2\pi T(x) \delta_{ij} + \int_D T(y) \frac{2\beta_i \beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dD_y \right] + \right. \\ \left. + c \int_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} r \beta_i (2 \ln r - 1) - T(y) [2\beta_i \cos \varphi + n_i(y) (2 \ln r - 1)] \right\} dl_y \right\}. \quad (20)$$

В контурных точках формулы напряжений примут вид:

$$\sigma_{ij}^T(x_L) = -\frac{aE}{2(1+\nu)} \left\{ bT(x_L) [n_i(x_L) n_j(x_L) + 2\delta_{ij}] + \right. \\ \left. + cT(x_L) n_i(x_L) n_j(x_L) + \frac{b}{\pi} \int_D T(y) \frac{2\beta_i \beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dD_y + \nu.p. \sigma_{ij}^L(x), \right. \quad (21)$$

где  $\nu.p.$  - главное значение второго интеграла в (21).

Интегральное представление напряжений  $\sigma_{ij}^u(x)$  имеется, например, в [4] и оно построено на основе фундаментального решения плоской теории упругости.

Систему сингулярных интегральных уравнений (СИУ) можно получить, подставляя интегральное выражение для (14) в граничные условия задачи, т.е.

$$v_i(x_L) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L v_i(y) \cos \psi [(1-2\nu) + 2\beta_i^2] + \\ + v_j(y) \left\{ (1-2\nu) [n_j(x_L) \beta_i - n_i(x_L) \beta_j] + 2\beta_i \beta_j \cos \psi \right\} \frac{dl_y}{r(x,y)} = p_{np}(x_L), \quad (22)$$

где  $\cos \psi = n_i(x) \beta_j$ .

Интегральные уравнения (20), (21), (22) с учетом (15) дают решение плоской краевой задачи термоупругости.

Напряжения, найденные в результате решения этой задачи, используются на последующем шаге метода возмущений. Решение  $k$ -й краевой задачи будем разыскивать в виде:

$$u_i^k = u_i^u + u_i^N, \quad (23)$$

где  $u_i^N$  - частное решение неоднородного дифференциального уравнения, которое с помощью фундаментального решения плоской теории упругости запишется в виде:

$$u_i^N = -2(1-\nu) \int_D \left( \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_p} \sigma_{ip}^{(0)} \right) \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + \beta_i \beta_j \right] \frac{1}{E(T)} dD. \quad (24)$$

Тензор напряжений на первом приближении:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^U + \sigma_{ij}^N, \quad (25)$$

где  $\sigma_{ij}^U$  приводится в [4],  $\sigma_{ij}^N$  - компоненты добавок напряжений, обусловленные неоднородностью материала.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^N(x) = & -\frac{(1+\nu)E(T)}{2\pi(1-\nu)} \int_D \rho_k^p(y) \frac{dE}{dT} \cdot \left\{ \frac{1}{r} [(1-2\nu) \cdot (\delta_{ik}\beta_{jk} + \delta_{jk}\beta_{ki} - \delta_{ij}\beta_k) + \right. \\ & \left. 2\beta_i\beta_j\beta_k] - \frac{1}{2E^2} \frac{dE}{dT} \left[ \frac{\partial T}{\partial x_i} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{jk} + \beta_j\beta_k \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial T}{\partial x_j} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ik} + \beta_i\beta_k \right] + \delta_{ij} \sum_{m=1}^2 \frac{\partial T}{\partial x_m} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{mk} + \beta_m\beta_k \right] \right] \right\} dD_y, \end{aligned} \quad (26)$$

здесь  $\rho_1^p = \frac{\partial T}{\partial x_1} \sigma_{11}^{(0)} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \sigma_{12}^{(0)}$ ;  $\rho_2^p = \frac{\partial T}{\partial x_1} \sigma_{21}^{(0)} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \sigma_{22}^{(0)}$ .

Зная  $\sigma_{ij}^N(x)$ , определяем фиктивную нагрузку  $p_i^N$ :

$$p_i^N = -\sigma_{ij}^N(x) \cdot n_j, \quad (27)$$

которая подставляется в систему СИУ (22), вместо  $p_{np}$ .

Решая (22), находим плотность потенциала  $v_i(y)$ , после чего определяем перемещения  $u_i^{(1)}(x)$  и напряжения  $\sigma_{ij}^{(1)}$ . Процедура вычислений на следующих приближениях повторяется. Таким образом, полученные интегральные уравнения позволяют решить плоскую краевую задачу неоднородной термоупругости.

Для реализации интегральных уравнений на ПЭВМ разработан соответствующий алгоритм. На первом этапе нулевого приближения реализуется краевая задача теплопроводности (11) и вычисляются температурные добавки перемещений  $u_i^T$  и напряжений  $\sigma_{ij}^T$  и фиктивная поверхностная нагрузка.

На первом этапе реализуется система СИУ (22), в результате решения которой определяется плотность потенциала  $v_i(y)$ , после чего вычисляются перемещения  $u_i^{(0)}(x)$  и напряжения  $\sigma_{ij}^{(0)}$ . На втором приближении вычисляются перемещения (24), напряжения (26) и фиктивная нагрузка  $p_i^N(x)$ . Далее процесс повторяется как и на предыдущем шаге. Для вычисления интегралов использовались квадратурные формулы Гаусса и Лащенко.

Реализован тестовый пример (задача о нагреве толстостенного длинного цилиндра). Решение с достаточной степенью точности получено на втором приближении. На рисунке 1а показана зависимость радиальных и окружных напряжений ( $\zeta_r^*$ ,  $\zeta_v^*$ ) от радиуса при постоянном модуле упругости  $E=1$  и при модуле упругости, зависящем от температуры ( $\zeta_r$ ,  $\zeta_v$ ):

$$E(T) = E_0 \cdot e^{-\beta T},$$

где  $\beta = \chi = \ln(b/a)/T_a$ ,  $b/a = 2$  - отношения радиусов,  $T_a = 1$  - температура на внутреннем радиусе.

Значения коэффициентов линейного расширения и Пуассона были приняты  $\alpha=1$ ,  $\nu=0,3$ .

Результаты численного решения по разработанному алгоритму (рисунок 1а) качественно совпадают с аналитическим решением, приведенным в [1] (рисунок 1б), которое учитывает и продольные напряжения  $\zeta_z$ . Это говорит о достоверности разработанного алгоритма.

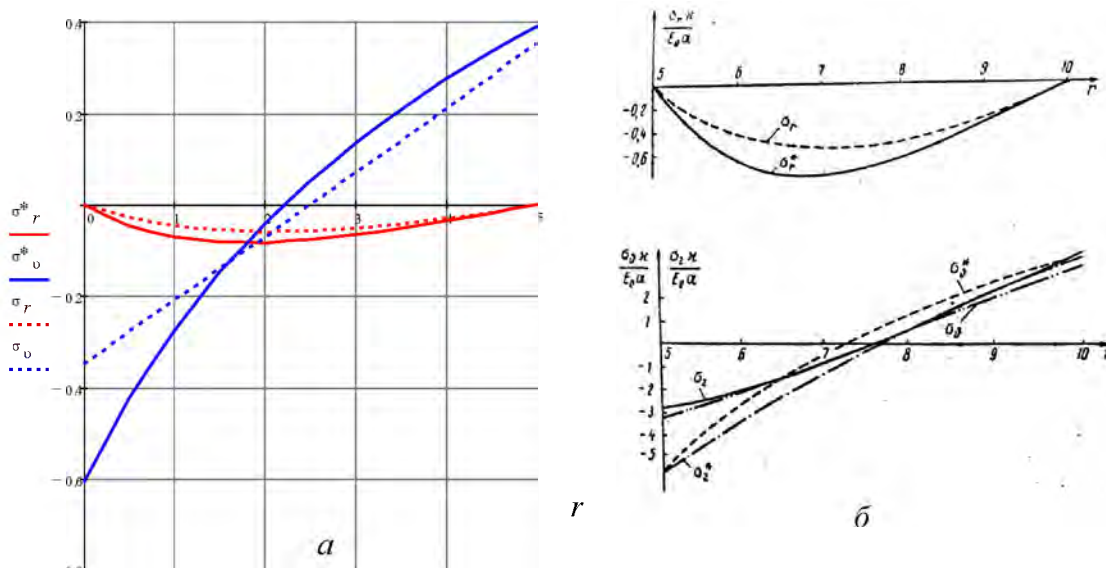


Рисунок 1 – Зависимость напряжений от радиуса

$a$  – численное решение по разработанному алгоритму;  $b$  – известное аналитическое решение.  
 $\zeta_r, \zeta_\theta, \zeta_z$  – радиальные, окружные и продольные напряжения при переменном модуле упругости  
 $\zeta^*$  – напряжения при постоянном модуле упругости

## РЕЗЮМЕ

Построены интегральные уравнения плоской краевой задачи неоднородной термоупругости. Разработан алгоритм численного решения задачи. Составлена FORTRAN-программа и реализован тестовый пример. Достоверность алгоритма проверена путем сравнения полученных результатов с известным аналитическим решением.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин, В.А. Теория упругости неоднородных тел / А.В. Ломакин. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 361 С.
2. Писаренко, Г.С. Прочность материалов при высоких температурах / Г.С. Писаренко. – Киев: "Навукова думка", 1966. – 260 С.
3. Trostel, R. Statioäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Stofwerten / R. Trostel. - Ingenieur - Archiv, 1958, №26.
4. Хвисевич, В.М. Интегральные уравнения и алгоритм решения плоской краевой задачи стационарной теплопроводности методом потенциала / В.М. Хвисевич // Строительная механика и расчет сооружений, 1991. – №2. – С. 48 - 51.

## SUMMARY

The integrated equations of a flat edge task of non-uniform thermo elasticity are constructed. The algorithm of the numerical solution of a task is developed. FORTRAN program is made and the test example is realized. Reliability of algorithm is checked by comparison of the received results with the known analytical decision.

E-mail: [vai\\_mrtm@tut.by](mailto:vai_mrtm@tut.by)  
[vmhvisевич@bstu.by](mailto:vmhvisевич@bstu.by)  
[tdl-tdl@rambler.ru](mailto:tdl-tdl@rambler.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

к.ф.-м.н. **Акимов В.А.**, к.ф.-м.н. **Гончарова С.В.**

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Как известно [2], решение плоской задачи теории упругости сводится к нахождению функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению и статическим граничным условиям на поверхности тела.

Изложенный в [1] подход наводит на мысль впервые представить бигармоническую функцию напряжений в декартовой системе координат в операторно-символическом виде:

$$\varphi = [(A + By)\sin(yd_x) + (C + Dy)\cos(yd_x)]f(x), \quad (1)$$

где  $d_x = \partial/\partial x$ ;  $A, B, C, D$  – операторные постоянные;  $f(x)$  – произвольная функция.

Можно непосредственно убедиться, что введенная таким образом функция  $\varphi(x, y)$  тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению  $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$

$$(d_x^4 + 2d_x^2 d_y^2 + d_y^4)\varphi = 0, \text{ где } d_x = \partial/\partial x, \quad d_y = \partial/\partial y$$

Представим функцию  $f(x)$  в виде тригонометрического ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (E_n \sin \lambda_n x + F_n \cos \lambda_n x). \text{ Тогда получим:}$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} ch \lambda_n y + C_{2n} sh \lambda_n y + C_{3n} ch \lambda_n y + C_{4n} ysh \lambda_n y) \sin \lambda_n x + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (D_{1n} ch \lambda_n y + D_{2n} sh \lambda_n y + D_{3n} ch \lambda_n y + D_{4n} ysh \lambda_n y) \cos \lambda_n x \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь обозначено  $CE_n = C_{1n}$ ,  $AE_n = C_{2n}$ ,  $DE_n = C_{3n}$ ,  $BE_n = C_{4n}$ ,  $CF_n = D_{1n}$ ,  $AF_n = D_{2n}$ ,  $DF_n = D_{3n}$ ,  $BF_n = D_{4n}$ .

Разложение (2) в ряды по синусам и косинусам совпадает с общеизвестным [2 (стр. 369)]. Это обстоятельство подтверждает правильность нового операторного представления (1).

Выражения для напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = & \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1n} \lambda_n^2 ch^2 \lambda_n y + C_{2n} \lambda_n^2 sh^2 \lambda_n y + C_{3n} \lambda_n (2sh \lambda_n y + \lambda_n y ch \lambda_n y) + \\ & + C_{4n} \lambda_n (2ch \lambda_n y + \lambda_n ysh \lambda_n y)] \sin \lambda_n x, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = & - \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1n} ch \lambda_n y + C_{2n} sh \lambda_n y + C_{3n} ych \lambda_n y + C_{4n} ysh \lambda_n y] \lambda_n^2 \sin \lambda_n x, \\ \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = & - \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1n} \lambda_n ch \lambda_n y + C_{2n} \lambda_n ch \lambda_n y + C_{3n} (ch \lambda_n y + \lambda_n ysh \lambda_n y) + \\ & + C_{4n} \lambda_n (sh \lambda_n y + \lambda_n ych \lambda_n y)] \cos \lambda_n x. \end{aligned} \quad (3)$$

Постоянные интегрирования, входящие в (3) определяются из граничных условий на гранях балки.

Теперь будем представлять функцию напряжений в виде полиномов различных степеней, а тригонометрические функции будем разлагать в ряды Маклорена. Объемные силы будем полагать равными нулю.

Так как бигармоническое уравнение имеет четвертый порядок, то полиномы степени ниже четвертой тождественно удовлетворяют бигармоническому уравнению

$$(\partial x^4 + 2\partial x^2 \partial y^2 + \partial y^4)\varphi = 0, \text{ где } \partial y = \partial / \partial y$$

Для полинома четвертой степени, запишем:

$$\varphi_4 = \left[ (A + By)(ydx - \frac{y^3 dx^3}{6}) + (C + Dy)(1 - \frac{y^2 dx^2}{2} + \frac{y^4 dx^4}{24}) \right] (a_3 x^3 + a_4 x^4)$$

Проделав указанные операции, получим:

$$\varphi = (A + By)[y(3a_3 x^2 + 4a_4 x^3) - y^3(a_3 + 4a_4 x)] + (C + Dy)[a_3 x^3 + a_4 x^4 - 3y^2(a_3 x + 2a_4 x^2) + a_4 y^4]$$

Выписывая однородный полином четвертой степени, и обозначая  $Ca_4 = a_4 / 12$ ,  $4Aa_4 = b_4 / 3$ ,  $Da_3 = c_4 / 3$ ,  $Ba_3 = d_4 / 6$ , окончательно получим:

$$\varphi = \frac{a_4}{12}(x^3 y - xy^3) + \frac{b_4}{3}(x^3 y - xy^3) + \frac{c_4}{3}(x^3 y - 3xy^3) + \frac{d_4}{6}(3x^2 y^2 - y^4) \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что все слагаемые в формуле (4) удовлетворяют бигармоническому уравнению. Данное выражение можно записать в виде

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{12}(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) + \frac{b_4}{6}x^3 y + \frac{c_4}{6}xy^3 + \frac{d_4}{4}(x^2 y^2 - \frac{1}{3}xy^4).$$

Здесь последние три слагаемых в точности совпадают с приведенными в [2], стр.354. А вот первое слагаемое значительно отличается от своего аналога, которое в [2] имеет вид  $\frac{a_4}{12}(x^4 - y^4)$ .

Как будет видно в дальнейшем, для более высоких степеней полиномов, все слагаемые будут новыми.

Повышая степени полиномов, можно получить решение задач для более сложных случаев нагруженных полос. Например, с помощью функции напряжений в виде полинома шестой степени решается задача об изгибе консоли нагрузкой, изменяющейся по линейному закону. При нагрузке изменяющейся по квадратичному подходу полином седьмой степени. Поэтому, учитывая практическую важность отмеченных выше случаев, применим разработанный алгоритм для нахождения новых видов функций напряжений  $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$ . Выпишем их:

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{20}(y^5 + 5x^4 y - 10x^2 y^3) + \frac{b_5}{12}(x^3 y^2 - xy^4) + \frac{c_5}{20}(x^5 + 5xy^4 - -10x^3 y^2) + \frac{d_5}{4}(y^5 - 6x^2 y^3 + yx^4);$$



$$\varphi_6 = \frac{a_5}{30}(6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5) + \frac{b_6}{10}(5x^4y^2 - 10x^2y^4 + y^6) + \frac{c_5}{30}(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + \frac{d_5}{5}(x^5y - 10x^3y^3 + 5xy^5);$$

$$\varphi_7 = \frac{a_7}{42}(7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7) + \frac{b_7}{12}(6x^5y^2 - 20x^3y^4 + 6xy^6) + \frac{c_7}{42}(x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6) + \frac{d_7}{6}(x^6y - 15x^4y^3 + 15x^2y^5 - y^7).$$

Построенные новым способом полиномы отличаются от известных до сих пор, но все они тождественно удовлетворяют бигармоническому уравнению. Это обстоятельство позволяет получить новые решения плоских задач теории упругости. Принципиальных различий в них не будет, и скорее всего они будут носить сравнительный характер. При решении задач можно попытаться подобрать подходящую комбинацию из отдельных членов полиномов различных степеней. В некоторых случаях помогает учет условий симметрии или антисимметрии.

### РЕЗЮМЕ

На основе операторного метода разработан алгоритм построения новых решений бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости. Приведены конкретные примеры построения бигармонических полиномов четвертой, пятой, шестой и седьмой степени.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Минск: УП «Технопринт», 2003. – 101 с.
2. Соппротивление материалов с основами теории упругости. Учебник под ред. Варданяна Г.С.. М., изд. АСВ, 1995. – 568 с.

### SUMMARY

*On the basis of an operator method the algorithm of creation of new solutions of the biharmonic equation of a flat task of the theory of elasticity is developed. Concrete examples of creation of biharmonic polynoms of the fourth, fifth, sixth and seventh degree are given.*

**E-mail:** [yakim50@mail.ru](mailto:yakim50@mail.ru)

Поступила в редакцию 29.10.2014

## АТТЕСТАЦИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ПРИМЕРЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

н.с. Гавриленко С.Л.

*ГНУ «Институт механики металлополимерных систем НАН Беларуси  
им. В.А. Белого», Гомель*

**Введение.** При описании и моделировании процессов методами механики деформируемого твердого тела, кроме основополагающих знаний о деформационном поведении материала, необходимы также сведения о корректности и возможности применимости модели. В более широком смысле необходимы знания об алгоритме аттестации модели.

Для проведения моделирования, кроме знания математической постановки задачи, необходимы количественные оценки погрешности проведенных расчетов и истинности использованной модели материала. Для этого требуется определение параметров и материальных функций модели, устойчивости последних относительно начальных и граничных условий, оценка погрешности при приближенных значениях кинематических или силовых граничных условиях.

При математическом моделировании (аналитическом, численном) необходимо знание области применимости модели (характерные диапазоны скоростей деформации, деформации, температур и других механических параметров). Все это необходимо представить процедурой (алгоритмом) аттестации механико-математической модели, который включает идентификацию и верификацию.

Целью настоящей работы является апробация процедуры аттестации механико-математических моделей на примере одноосного растяжения призматических образцов и сжатия цилиндрических образцов антифрикционных композитов.

**1. Алгоритм аттестации механико-математических моделей.** В данной работе алгоритм аттестации модели включает следующие действия:

1. Оценка области применимости модели на основе использования «стандартных» подходов (путем идентификации модели, сравнением с имеющимися данными);
2. Описание типа модели (качественная оценка механических свойств материала и характера деформирования);
3. Запись полной системы уравнений модели материала (для одноосного случая, в тензорной форме);
4. Определение полного набора материальных функций (с указанием их аргументов) и/или параметров;
5. Описание минимального набора испытаний, достаточного для построения всех материальных функций, обеспеченного аттестованными методиками;
6. Описание области использования модели (диапазон изменения деформаций, скоростей деформаций, температуры и т.д.); соответствие расчетов моделируемым явлениям;
7. Соответствие модели основным термодинамическим принципам;
8. Возможность обобщения на иные известные испытания (не обязательно);
9. Описание особенностей постановки и решения начально – краевой задачи с использованием предложенной модели.

Идентификация состоит из метода определения параметров модели (констант и/или материальных функций). Для этого могут быть использованы классические

подходы, методы, развиваемые в последнее время (теория решения некорректных обратных задач, методы математической статистики, вариационное исчисление, методы теории оптимальных процессов и др. ). Идентификация включает, в основном, п. 1 – 5.

Верификация состоит в основном из оценки области применимости модели (указания диапазонов деформаций, скоростей деформации, качественно иных испытаний в сравнении с использованными при идентификации), проверки определения констант и материальных функций модели материала на устойчивость по отношению к экспериментальным данным, начальным и граничным условиям. Верификация включает п. 5 – 9.

Следует отметить, что невозможно строго определить методы идентификации и методы верификации. Так, например, определяя параметры или материальные функции модели, можно конкретизировать диапазон изменения последних.

Данная работа посвящена апробации алгоритма аттестации (идентификации и верификации) нелинейной вязкопластической модели материала с малым ненулевым пределом текучести. Нелинейность модели объясняется более широкой областью применимости и возможностью использования. Ненулевой предел текучести характеризует модель, которая является обобщением неньютоновской жидкости, как твердое тело. Ненулевой предел текучести является дополнительным признаком нелинейности и его следует учитывать при решении идентификационных задач.

Для достижения результата используются следующие подходы:

1. Точная математическая постановка и решение начально-краевых задач о движении (равновесии) материала в квазистатическом режиме.
2. Использование приближенных подходов для построения решения начально – краевых задач (п.1). Для этого можно использовать разложение в ряд Тейлора (или степенной ряд) с пренебрежением малых по сравнению с предыдущим, слагаемых, разложение по собственным (в том числе ортогональным функциям), представление непрерывных функций кусочно – непрерывными с использованием предельных переходов и др.
3. Использование приближенных моделей (методов) для решения начально – краевых задач (п.1) с оценкой максимальной возможной погрешности моделирования.
4. Составление и определение параметров модели (материальных функций) с помощью подходов п.п. 1-3.
5. Варьирование входных параметров в пределах экспериментальной погрешности и определения погрешности расчета выходных параметров.
6. Составление системы нелинейных, в общем виде интегро-дифференциальных, уравнений для параметров (материальных функций) используя результаты механических испытаний и аналитические, точные и приближенные решения прямых начально – краевых задач обобщением метода наименьших квадратов.
7. Представление качественно «новых» процессов или испытаний для описания предложенной механической моделью и оценка погрешности измеряемых параметров.

**2. Математическое моделирование ползучести упруговязкопластических композитов. Постановка задачи.** Искомыми функциями задачи являются компоненты вектора скорости. В общем случае эти 3 компоненты зависят от 4 переменных (цилиндрических координат и времени)[1,2]:

$$V_r = V_r(r, \varphi, z, t), \quad V_\varphi = V_\varphi(r, \varphi, z, t), \quad V_z = V_z(r, \varphi, z, t).$$

Считаем, что компоненты тензора скоростей деформации связаны с компонентами вектора скорости соотношениями Коши, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [1,2]:

$$\xi_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad \xi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r}; \quad \xi_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z};$$

$$\xi_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right); \quad \xi_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right); \quad \xi_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right).$$

Последние соотношения верны при малых градиентах компонент вектора скорости. Малые градиенты могут быть обеспечены при условии небольшой скорости нагружения и относительно большой рабочей длины образца.

Исходной является модель нелинейного упруговязкопластического материала с ненулевым пределом текучести. Аналитическая форма модели имеет следующий вид [2]:

$$\begin{cases} S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\tau}{H} \xi_{ij} \\ \tau = \tau_0 + K \left( \frac{H}{\varepsilon_0} \right)^m \text{ при } \tau \geq \tau_0, \\ \sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \text{ при } \tau < \tau_0 \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

здесь  $S_{ij}$  и  $\xi_{ij}$  – соответственно девиаторы напряжений и скоростей деформации,  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – соответственно тензора напряжений и деформации,  $\tau$  и  $H$  – интенсивности тензора напряжений и скоростей деформации соответственно,  $\tau_0$  – предел текучести,  $m$  –

параметр скоростной чувствительности,  $K$  – коэффициент вязкости,  $\varepsilon_0$  – некоторая характерная скорость деформации,  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе,  $\operatorname{div}$  – оператор дивергенции.

Постановка задачи о моделировании растяжения призматического образца с помощью нелинейной вязкопластической модели представлена более подробно в [3].

Граничные условия для этой системы уравнений имеют вид:

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma} = 0,$$

здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений Коши,  $\Gamma$  – подвижная боковая граница образца,  $n_j$  – нормаль к границе  $\Gamma$ .

Процесс движения разобьем на несколько состояний. Для каждого состояния верны следующие предположения:

- 1) изменением размеров тела можно пренебречь (аналогично квазистатическому подходу)
- 2) на верхнем торце образца задан постоянный вектор скорости, на боковых торцах нулевые усилия (свертка тензора напряжений и внешней нормали равна нулю), нижнее и верхнее сечения свободно скользят.

При сделанных предположениях относительно продольной скорости сделаем допущение:

$$V_z = -\frac{v}{l_m} z.$$

Оператор дивергенции в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Далее делаем предположение, что  $\frac{\partial V_r}{\partial r}$  и  $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$  являются функциями только времени. В силу сделанных предположений вектор скорости имеет вид:

$$V_r = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m} r, \quad V_\varphi = 0, \quad V_z = -\frac{v}{l_m} z.$$

Находим тензор скоростей деформации, для этого воспользуемся соотношениями Коши:  $\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$ , где  $V_i$  – компоненты вектора скорости,  $x_i$  – декартовы координаты,  $i, j = 1, 2, 3$ . После несложных математических операций, получаем компоненты тензора скоростей деформации. Они имеют вид:

$$\xi_{11} = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m}, \quad \xi_{22} = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m}, \quad \xi_{33} = -\frac{v}{l_m}, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = 0, \quad \xi_{23} = 0$$

После того, как компоненты тензора скоростей деформаций известны, находим интенсивность скоростей деформации (второй инвариант тензора) по известной формуле:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 + \xi_{33}^2)}$$

Последнее равенство верно для тензора скоростей деформации диагонального вида. После подстановки компонент имеем:

$$H = \frac{v}{l_m}$$

Воспользовавшись вторым соотношением в определяющих соотношениях модели, получим интенсивность девиатора напряжений  $\tau$ :

$$\tau = \tau_0 + K \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m$$

Согласно векторным соотношениям модели определим компоненты девиатора тензора напряжений. После несложных математических преобразований получим:

$$S_{11} = \frac{1}{3} \left( \tau_0 + K \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right), \quad S_{22} = \frac{1}{3} \left( \tau_0 + K \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right), \quad S_{33} = -\frac{2}{3} \left( \tau_0 + K \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right),$$

$$S_{12} = 0, \quad S_{13} = 0, \quad S_{23} = 0.$$

$$\text{Значение силы определяется выражением: } P_T(t_i) = \pi r_i^2 \left( \tau_0 + K \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right).$$

**2.1 Моделирование одноосного сжатия.** Для определения параметров модели материала Флувис 20 проведено испытание на сжатие цилиндрических образцов радиусом 10 мм и высотой 30 мм со скоростью движения захвата  $V = 5, 40, 100$  мм/мин (Instron 5567). Зависимости «Усилие - перемещение» приведены на рисунке 1.



Рисунок 1. – Зависимость «Усилие (Н) – перемещение (мм)» для материала Флувис 20. Скорости 5(нижняя), 40(средняя), 100(верхняя) мм/мин.

Из зависимости «Усилие - перемещение» методом наименьших квадратов и значения точки перегиба кривой получены параметры модели в вязкопластической области:

$$\tau_0 = 16,16 \text{ МПа.}$$

$$\text{При } \dot{\varepsilon}_{хар} = 0,0033 \text{ с}^{-1}: m=9,017; K=36,22 \text{ МПа}; \varepsilon = 0,0036 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{При } \dot{\varepsilon}_{хар} = 0,026 \text{ с}^{-1}: m=4,717; K=39,88 \text{ МПа}; \varepsilon = 0,03 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{При } \dot{\varepsilon}_{хар} = 0,067 \text{ с}^{-1}: m=6,094; K=41,77 \text{ МПа}; \varepsilon = 0,07 \text{ с}^{-1}.$$

**2.2 Моделирование текучести.** Более полное описание задачи о текучести цилиндрических образцов представлено в [4]. При известных параметрах вязкопластической модели проведено моделирование текучести материала *FLUVIS 20*. С этой целью проведено испытание на текучесть при постоянной силе  $P=12000 \text{ Н}$  и  $P=15000 \text{ Н}$ . Данное значение силы достигалось движением захватов со скоростью  $V = 10 \text{ мм/мин}$ .

При текучести образца материала имеет место следующая зависимость перемещения текучести от времени:

$$\kappa \dot{u} = \frac{du}{l_0 - u}$$

где  $l_0$ - высота образца, соответствующая началу текучести ( $l_0 = 25,09 \text{ мм}$ ),  $l_1$ - начальная высота образца ( $l_1 = 30 \text{ мм}$ ) для  $P=15000 \text{ Н}$ ,  $r_0$  - начальный радиус образца ( $r_0 = 10 \text{ мм}$ ),  $\kappa$  - коэффициент, определяемый из следующего соотношения:

$$P_T(t_i) = \frac{\pi r_0^2 l_1}{l_0 - u} \left( \tau_0 + K \left( \frac{1}{\varepsilon_0} k \right)^m \right)$$

Из предположения пропорциональности скорости деформации при ползучести приложенной силе на образец, получаем зависимость характерной скорости деформации при ползучести при силе  $P_2$ :

$$\varepsilon_{02} = \frac{P_2}{P_1} \varepsilon_{01}$$

Интегральная зависимость текущего перемещения текучести от времени:

$$\frac{P_1}{P_2} \frac{K m}{\varepsilon_{01}} \int_0^{\frac{P_{мек} l_0}{\pi r_0^2 l_1}} \frac{1}{\frac{P_{мек} (l_0 - u)}{\pi r_0^2 l_1} x(x - \tau_0)^{\frac{1}{m}}} dx = t$$

где значения параметров  $K$  и  $m$  взяты из испытания со скоростью 5 мм/мин.

Из последнего соотношения получаем зависимость полного перемещения текучести от времени. Результаты сравнительного анализа расчетного и экспериментального значения, относительной погрешности представлены в таблице 1. ( $P_2=15000$  Н).

Таблица 1. Результаты сравнительного анализа ( $P_2=15000$  Н).

№	1	2	3	4	5
$t$ , с	20	40	60	80	100
$u_{calc}$ , мм	1,19	1,53	1,73	1,88	2,01
$u_{test}$ , мм	1,09	1,47	1,70	1,89	2,02
$\delta$ , %	9,2	4,1	1,8	0,5	0,5

**Заключение.** Приближенное решение квазистатической задачи о сжатии цилиндрического образца и разработанная методика моделирования текучести хорошо согласуется с экспериментальными данными при больших временах деформирования. Более точное описание предполагает точное аналитическое решение задачи о сжатии цилиндрического образца и учета изменения параметров упруговязкопластической модели в процессе текучести.

Разработанный подход может быть использован в инженерных методиках расчета параметров формоизменения элементов узлов трения из нелинейных упруговязкопластических материалов.

### Список обозначений

$r, \theta, z$  – цилиндрические координаты,  $x_i$  – декартовы координаты,  $S_{ij}$  – девиатор тензора напряжений,  $\xi_{ij}$  – девиатор тензора скоростей деформации,  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе,  $div$  – оператор дивергенции,  $K$  – пластическая вязкость,  $\tau_0$  – предельное напряжение сдвига (предел текучести),  $m$  – параметр скоростной чувствительности,  $\varepsilon_0$  – характерная скорость деформации,  $H$  – интенсивность девиатора тензора скоростей деформации,  $\Delta \omega_{\alpha}^i$  –  $i$ -ая разность угловых скоростей внешнего и внутреннего цилиндров,  $\sigma_{r\varphi}$  – компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат,  $P_2$  – усилие на образец при ползучести,  $l_0$  – высота образца,

соответствующая началу текучести,  $l_1$  - начальная высота образца,  $r_0$  - начальный радиус образца,  $\Gamma$  - подвижная боковая граница образца,  $\kappa$  - коэффициент, определяемый из соотношения для усилия.

### РЕЗЮМЕ

Представлен алгоритм аттестации механико-математических моделей полимерных материалов, который апробирован для нелинейной вязкопластической модели, с учетом значительного предела текучести и скоростной чувствительности. По результатам испытаний полимерного материала и композита на сжатие и растяжение проведена идентификация и верификация модели. Установлено, что методика является устойчивой к вариации экспериментальных данных без использования процедуры регуляризации.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
2. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. – М.: МГУ, 1977. – 373 с.
3. Гавриленко С.Л., Шилько С.В. Идентификация модели нелинейного вязкопластического материала при статическом растяжении с учетом изменения площади поперечного сечения образца // Материалы Технологии Инструменты. –2009. –Т. 14. –№ 1. –С. 22–27.
4. Гавриленко С.Л. Моделирование текучести нелинейно упруговязкопластических материалов в условиях одноосного сжатия // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – № 26. – С. 132–137.

### SUMMARY

*An algorithm for the attestation of mechanical and mathematical models has been suggested using the formulations and solutions of the initial-boundary value problem of solid mechanics. The developed approaches have been tested for polymeric materials with significant yield strength and velocity sensitivity.*

**E-mail:** [serega48@mail.ru](mailto:serega48@mail.ru)

Поступила в редакцию 04.10.2014



## ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КАРКАСА ПЛАТФОРМЫ СПОРТИВНОГО ГРУЗОВОГО АВТОМОБИЛЯ В СИСТЕМЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА MSC/NASTRAN

к.т.н. **Вихренко Д.В., Пацкевич Г.А.**

*ОАО «МАЗ» – Управляющая компания холдинга «БЕЛАВТОМАЗ», Минск*

В отечественной практике конструирования и исследования узлов автомобиля динамической виброн нагруженности таких узлов, как грузовая платформа, уделяется недостаточно внимания. Связано это с тем, что при движении по дорогам с асфальтобетонным покрытием платформа в основном испытывает вертикальные нагрузки от веса груза, и достаточно статического расчета с некоторым коэффициентом динамичности. При движении по ухабистым дорогам или бездорожью скорость движения, как правило, небольшая, на платформу дополнительно действуют нагрузки от скручивания рамы, которые, опять же, можно, учесть при статическом расчете.

В настоящей работе рассматривается платформа спортивного грузового автомобиля МАЗ-5309RR, предназначенного для участия в соревнованиях по ралли-рейдам, т.е. автомобиль должен передвигаться в условиях бездорожья с максимально возможной скоростью, и динамические нагрузки должны учитываться более точно. Платформа представляет собой трубчатый каркас с пластиковой обшивкой и алюминиевыми дверьми. Рассматриваемая здесь часть каркаса состоит из передней дуги (главной дуги безопасности) трубчатого сечения размером 60×6 мм с раскосами вдоль оси автомобиля, задней дуги трубчатого сечения размером 45×3 мм с раскосами вдоль оси автомобиля, и связи между ними (бокового каркаса) стержневой системы из труб размера 38×1,5 мм. Боковой каркас соединяется с дугами через резинометаллические шарниры (далее - РМШ) (рисунок 1).

Эта конструкция была разработана в 2011 г. и с незначительными изменениями применялась в спортивных автомобилях на протяжении нескольких лет. Сначала существенных нареканий не было, но по мере накопления опыта участия в соревнованиях скорости движения стали возрастать, и к 2014 г. поломки труб каркаса стали приобретать катастрофический характер – во время соревнований приходилось ежедневно заваривать трещины труб, вваривать раскосы и усилители. Если с боковым каркасом такой подход – увеличение жесткости и прочности за счет увеличения количества вертикальных стоек – оказался оправданным, то отказы в виде трещин деталей задней дуги в зонах 1 и 2 (указатели на рисунке 1б) прогрессировали.

Так как общая масса пластиковых деталей обшивки и дверей не превышает 150 кг, статический расчет деталей каркаса не позволяет найти решение проблемы отказов ввиду малости внешней нагрузки. Становится очевидной необходимость динамического анализа элементов каркаса.

Уравнения динамики в общем случае имеют вид [1]:

$$[M] \cdot \{x(t)\} + [B] \cdot \{\dot{x}(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

где  $[M]$  – матрица масс конструкции,

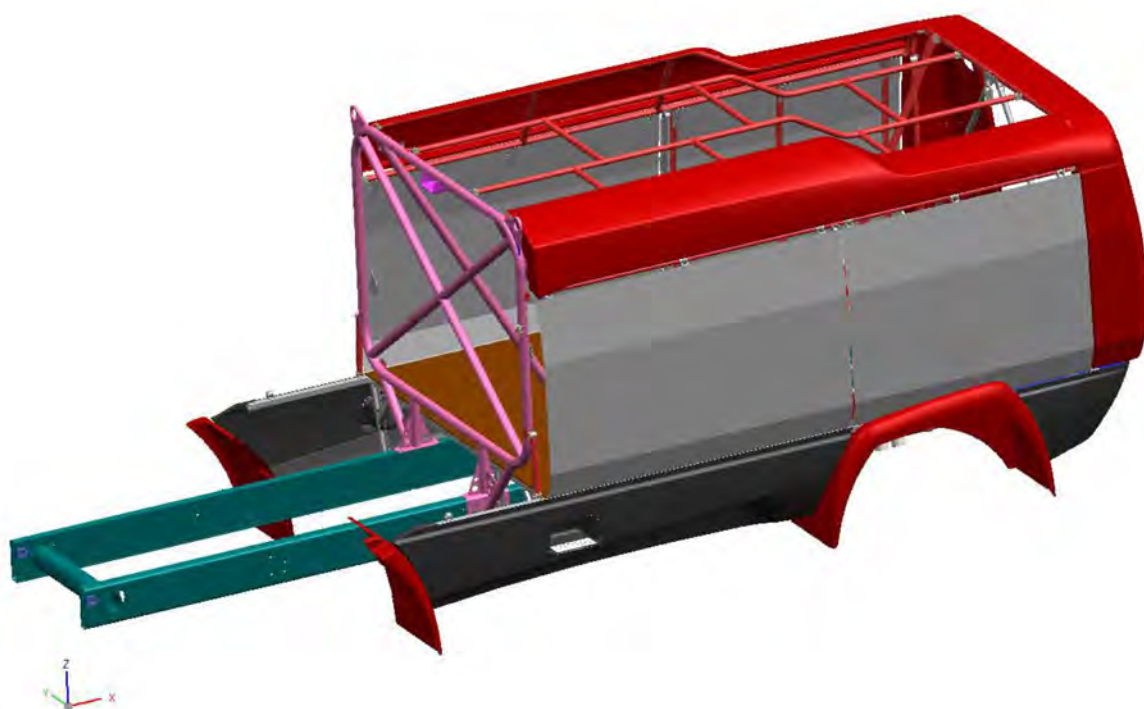
$[B]$  – матрица вязкого демпфирования,

$[K]$  – матрица жесткости,

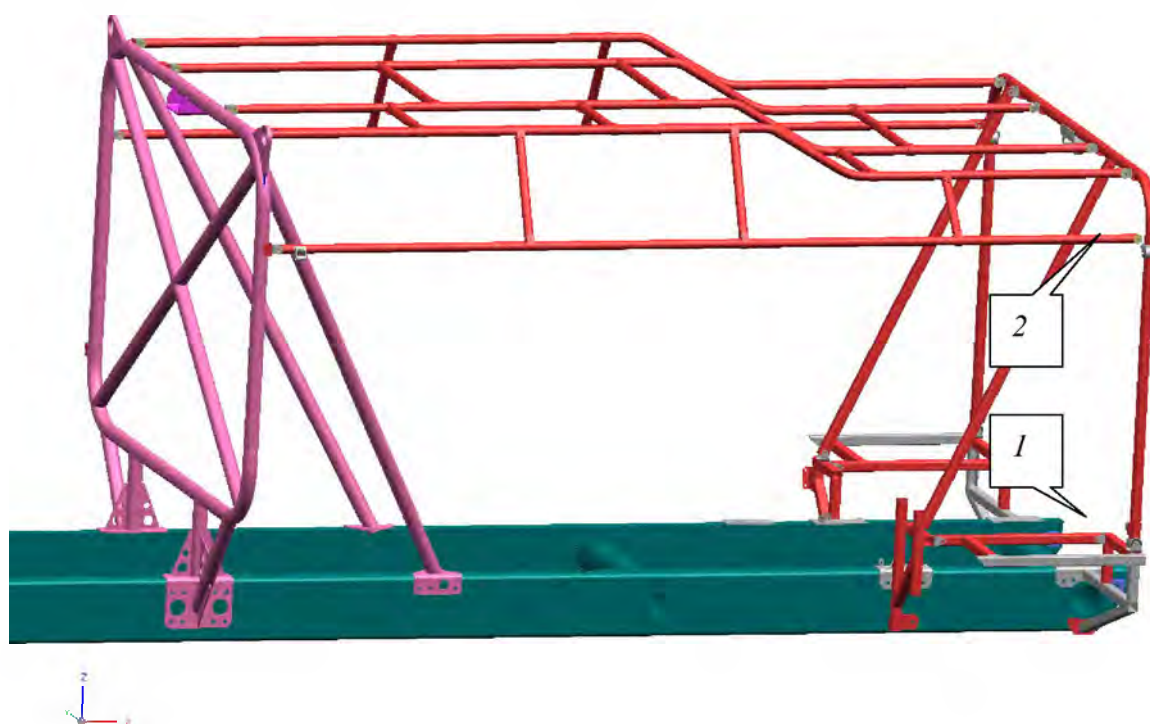
$\{F(t)\}$  – вектор внешней нагрузки, зависящий от времени  $t$ ,

$\{x\}$  – искомый вектор перемещений точек конструкции,

$\{\dot{x}\}$  и  $\{\ddot{x}\}$  – соответственно первая и вторая его производные по времени.



a)



б)

Рисунок 1 – Платформа спортивного грузового автомобиля (а) и ее каркас (б)

Очевидно, что внешняя динамическая нагрузка зависит от целого ряда факторов: дорожных условий, скорости движения автомобиля, конструктивных параметров

автомобиля и его подвески. Все это достаточно сложно воспроизвести в режиме реального времени при расчете конструкции.

Поэтому на первом этапе анализа динамического поведения конструкции приходим к расчету собственных колебаний конструкции. В этом случае правая часть уравнения (1) равна нулю, демпфирование не учитывается, и уравнения движения приобретают вид

$$[M] \cdot \{x\} + [K] \cdot \{x\} = 0. \quad (2)$$

Решение ищем в форме

$$\{x\} = \{\phi\} \sin \omega t, \quad (3)$$

где  $\{\phi\}$  – собственный вектор или форма колебаний,

$\omega$  - круговая собственная частота.

После подстановки  $\{x\}$  в уравнение (2) получим

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = 0. \quad (4)$$

Из условия наличия нетривиального решения системы линейных алгебраических уравнений (4) находим спектр собственных частот  $\omega_i$  ( $i=1,2,3\dots$ ) и соответствующие им формы колебаний  $\{\phi_i\}$ .

Матрицы масс  $[M]$  и жесткостей  $[K]$  формируются в среде конечно-элементного анализа MSC/Patran-Nastran автоматически на основе созданной пользователем конечно-элементной модели. Расчетная модель для расчета собственных частот и форм колебаний включает в себя модель рамы из пластинчатых конечных элементов и модель каркаса из балочных конечных элементов. РМШ смоделированы в виде упругих связей с коэффициентами жесткости, соответствующими жесткости реальных шарниров.

В результате расчета собственных колебаний исследуемой конструкции определено, что первые четыре формы колебаний лежат в диапазоне частот до 20 Гц, и три из них представляют собой колебания задней дуги в вертикальной поперечной плоскости (рисунок 2).

Несмотря на то, что формы колебаний – величины относительные и сами по себе не могут быть использованы для оценки динамического поведения, т.к. действительные перемещения элементов конструкции определяются линейной комбинацией всех ее нормальных форм, на основе полученных результатов можно сформировать нагрузочный режим для расчета вынужденных колебаний конструкции, а также предварительно оценить влияние изменений в конструкции.

Уже на этом этапе можно определить компоненты тензора напряжений в исследуемых балках и оценить их вклад в общее напряженно-деформированное состояние (далее – НДС). Так, определено, что в опасных зонах конструкции (указатели 1 и 2 на рисунке 1б) основной вклад в напряженное состояние вносят напряжения изгиба. На основе этого можно предложить изменение конструкции – вместо жесткой установки нижней части задней дуги, приводящей к напряжениям изгиба в заделке, использовать шарнирную установку с раскосами в плоскости дуги с целью замены изгибных нагрузок на растяжение-сжатие.

Для количественной оценки того, как изменения в конструкции скажутся на ее динамическом поведении, необходимо задать внешнюю нагрузку, а также выбрать тип динамического анализа.

Основываясь на результатах расчета собственных форм, делаем вывод, что внешняя нагрузка должна приводить к поперечному смещению задней дуги каркаса. Этого можно добиться, задавая кососимметричную нагрузку, приводящую к закручиванию рамы относительно продольной оси. С учетом того, что первые формы колебаний в основном идентичны, делаем вывод, что именно они будут давать

основной вклад в перемещения элементов каркаса. Следовательно, имеет смысл выполнить расчет вынужденных колебаний в виде гармонического анализа в частотной области.

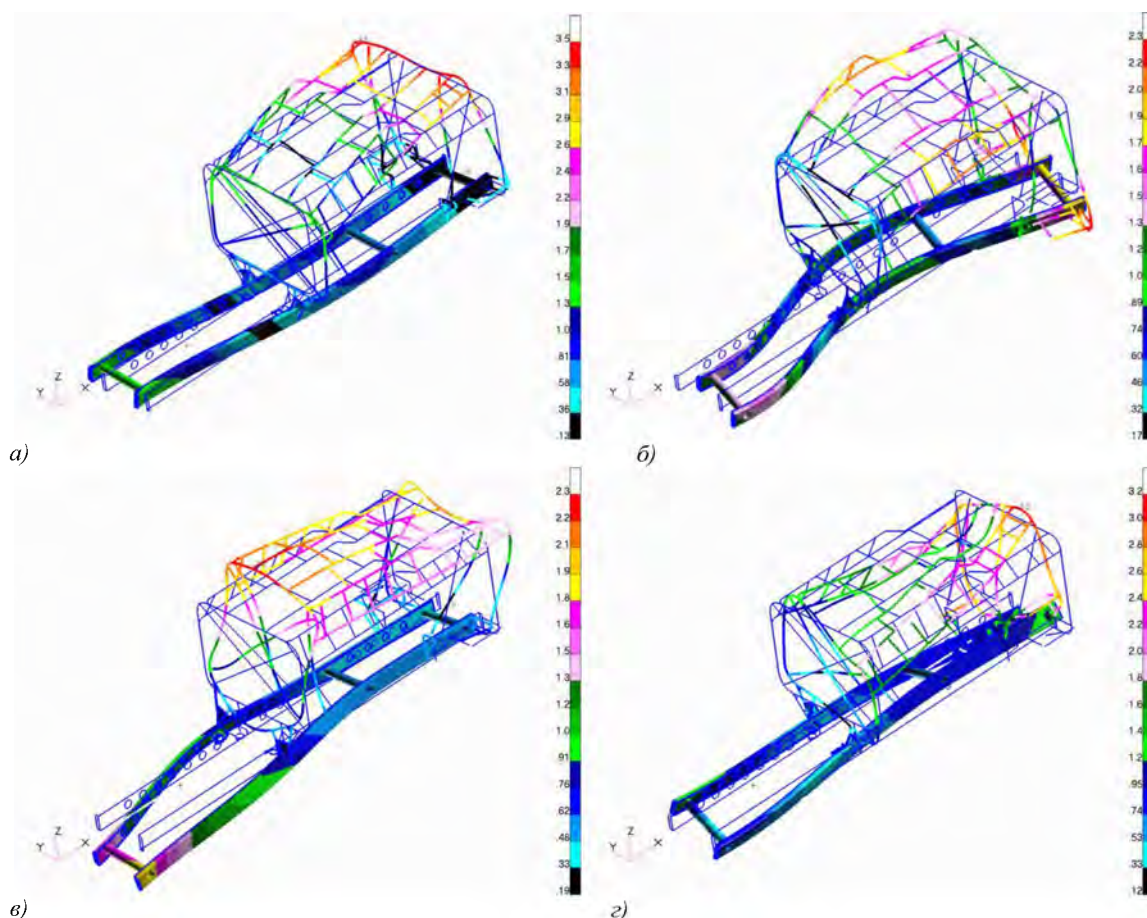


Рисунок 2 – Собственные формы колебаний каркаса платформы:  
 а) частота 11,7 Гц  
 б) частота 15,7 Гц  
 в) частота 18,0 Гц  
 г) частота 18,3 Гц

Для задания нагрузочного режима в расчетную модель добавлены балочные конечные элементы, имитирующие рессоры и мосты, и к точкам установки рессор на мосты задается нагружение в виде перемещений типа (рисунок 3)

$$\Delta = A \sin \omega t, \quad (5)$$

где  $A$  – амплитуда перемещений. Принято  $A=50$  мм для диапазона частот  $0 \dots 20$  Гц с линейным уменьшением до  $A=10$  мм при частоте 100 Гц, что приближенно позволяет учесть сглаживание высот неровностей дороги при возрастании скорости движения.

В частотной области уравнение (1) переписывается в виде

$$[-\omega^2 M + i\omega B + K] \{u(\omega)\} = F(\omega), \quad (6)$$

где  $\{u(\omega)\}$  – вектор комплексных перемещений,

$i$  – мнимая единица.

Искомый вектор перемещений точек будет равен

$$\{x\} = \{u(\omega)\} e^{i\omega t} \quad (7)$$

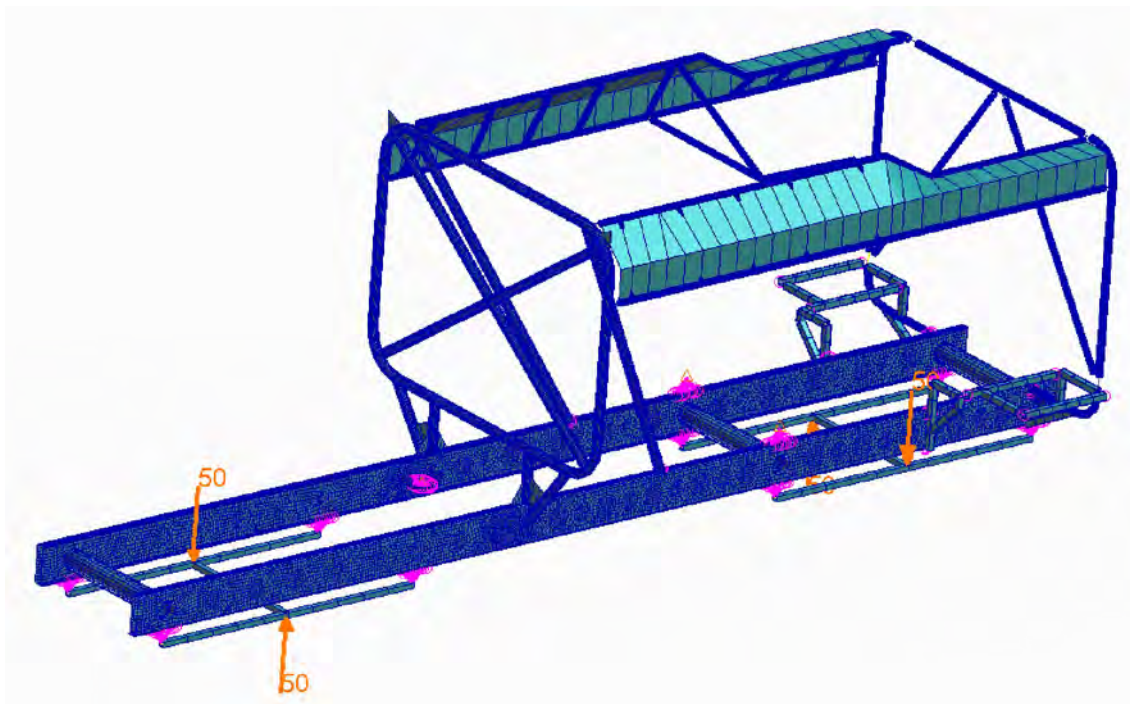


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель и ее нагружение при динамическом анализе

Матрицу вязкого демпфирования  $[B]$  можно не задавать, вместо этого задается коэффициент демпфирования  $G$ , поскольку известно, что наибольшее влияние на рассеяние энергии при механических колебаниях оказывает конструкционное демпфирование. Для всего объекта в сборе принимаем  $G=0,3$  [2], и уравнение (6) приобретает вид

$$[-\omega^2 M + iGK + K]\{u(\omega)\} = F(\omega). \quad (8)$$

В результате решения получаем перемещения всех точек конструкции при заданной частоте. Расчет каркаса ведем в диапазоне частот до 100 Гц с шагом в 1 Гц. Когда известны действительные перемещения точек конструкции, по закону Гука легко определяются напряжения в элементах.

В таблице и на рисунке 4 приведены расчетные значения напряжений в опасных зонах задней дуги каркаса.

Таблица – Максимальные напряжения в опасных зонах задней дуги

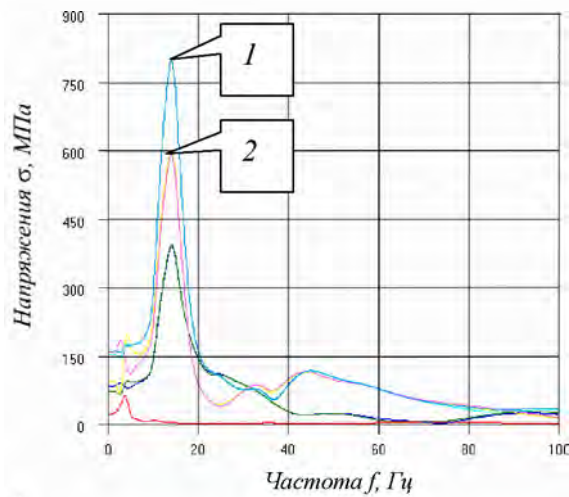
Опасная зона	Напряжения $\zeta$ , МПа, при различных вариантах конструкции		
	Исходный вариант	Вариант с увеличенным диаметром трубы	Вариант с шарнирами и раскосами в плоскости дуги
1	800	800	Менее 100
2	600	620	330

Из рисунка 4 следует, что во всем диапазоне частот напряжения в опасных зонах дуги имеют ярко выраженный максимум при частоте 15 Гц, а на частотах выше 20 Гц существенно снижаются.

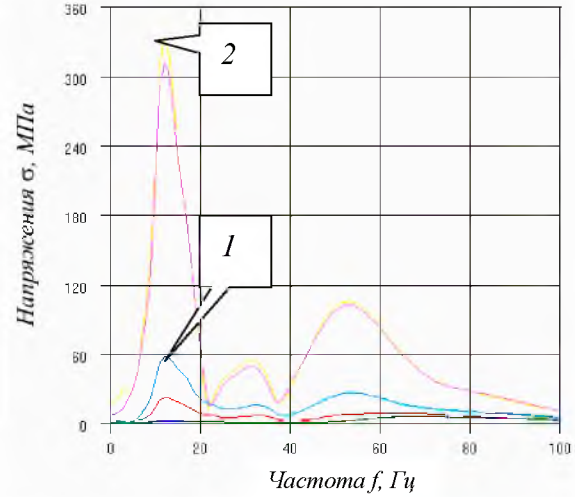
При расчетах различных вариантов конструкции определено:

- раскосы задней дуги, расположенные в продольной плоскости, не оказывают существенного влияния на напряжения в опасных зонах;
- увеличение диаметра труб задней дуги с 45 до 60 мм не дает снижения напряжений в опасных зонах;

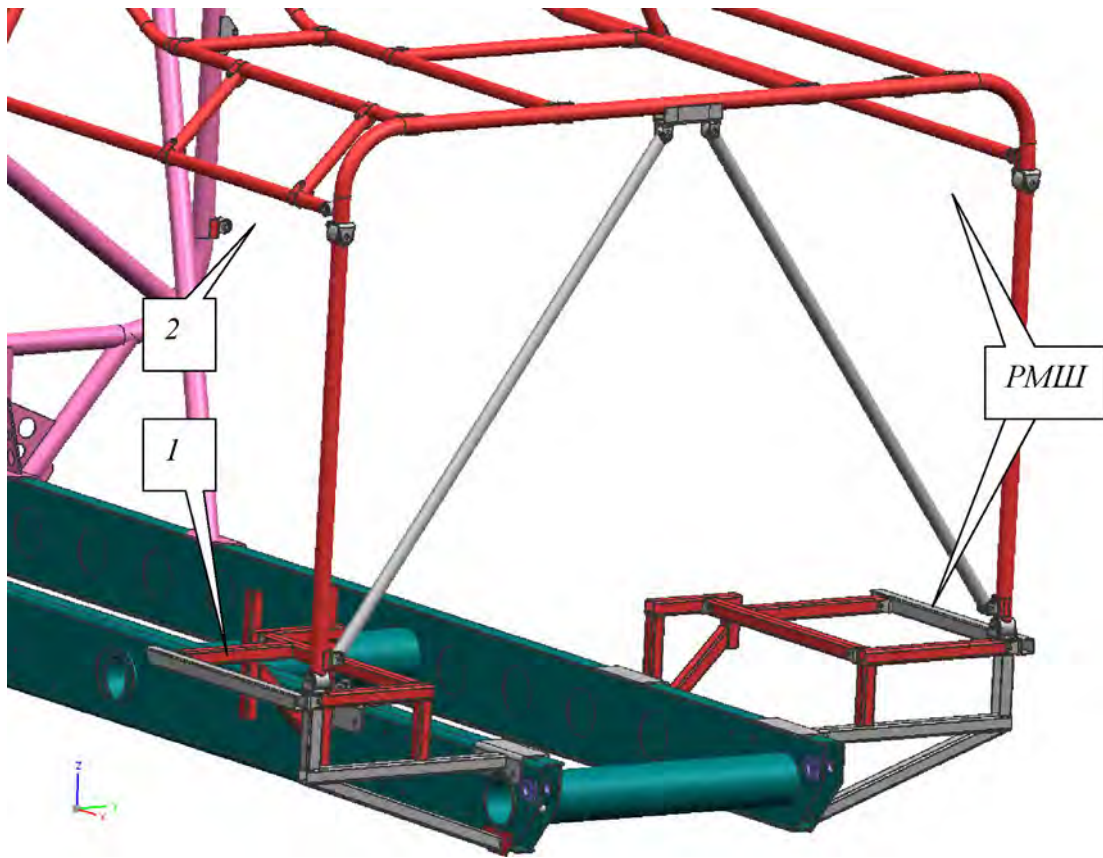
- введение раскосов в плоскости задней дуги позволяет снизить напряжения в опасных зонах;
- введение шарниров в нижней части задней дуги позволяет снизить напряжения в зоне 1, но напряжения в зоне 2 увеличиваются;
- введение шарниров как в нижней, так и в верхней части задней дуги совместно с раскосами в плоскости дуги (рисунок 4в) позволило существенно снизить напряжения в опасных зонах (максимальные напряжения снизились в 2,4 раза) без увеличения массы конструкции.



а)



б)



в)

Рисунок 4 – Напряжения в опасных зонах:

а) в исходной конструкции

б) в улучшенной конструкции

в) конструкция задней дуги каркаса платформы с улучшенными прочностными свойствами

## РЕЗЮМЕ

В данной работе представлены результаты расчета собственных частот каркаса платформы с использованием системы конечно-элементного анализа MSC/Nastran. По результатам расчета собственных частот выбран способ оценки динамического поведения конструкции, а именно гармонический анализ вынужденных колебаний в частотной постановке, определен способ задания нагрузочного воздействия на каркас. По результатам расчета вынужденных колебаний предложена конструкция задней дуги каркаса, позволяющая существенно снизить напряжения в опасных зонах без увеличения массы конструкции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. MSC/NASTRAN Encyclopedia V70.5 (271 Мб) - MSC.Software Corporation, 1998. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
2. Писаренко, Г.С. Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. – Киев: Наукова думка, 1985. – 240 с.

## SUMMARY

*This paper presents the results of the platform frame normal modes calculation with the use of finite element analysis of MSC/Nastran. According to the results of normal modes calculation the method of estimating the dynamic behavior of structures is chosen, specifically the modal frequency response analysis, and the way to specify the load effects on the frame is defined. According to the results of the forced oscillations calculation the design of the rear rollbar is proposed, which significantly reduce the stress in dangerous sections without increasing the weight of the structure.*

**E-mail:** [dvikhr@mail.ru](mailto:dvikhr@mail.ru)  
[globus639@mail.by](mailto:globus639@mail.by)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЯЗКОЙ КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ОЧИСТКИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОРУДОВАНИЯ АЭС

<sup>1</sup>Каменев А.Я., д.ф.-м.н. <sup>2</sup>Куликов И.С., <sup>1</sup>Климова Л.А.,  
к.ф.-м.н. <sup>3</sup>Ширвель П.И., <sup>3</sup>Глембоцкий А.В.

<sup>1</sup>ГНУ "Объединенный институт энергетических и ядерных исследований -  
Сосны" НАН Беларуси, Минск

<sup>2</sup>Смоленский государственный университет, Россия

<sup>3</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск

В ядерной энергетике сформировалась особая область очистки поверхности, называемая дезактивация. Как правило, очистка производится в растворах поверхностно-активных веществ, смесей минеральных кислот с ингибиторами коррозии и т.д. Однако, существуют такие изделия, которые по весогабаритным характеристикам невозможно погрузить в раствор или необходимо очищать лишь локальные зоны изделий, в таких случаях удобнее всего использовать дезактивирующие пасты. В нашей лаборатории разработана специальная паста, с помощью которой можно очистить и дезактивировать нержавеющие и черные стали, медные, латунные, титановые, алюминиевые и других сплавы, а также керамические и стеклянные материалы, лакокрасочных и полимерных покрытия и другие материалы от наносных радиоактивных отложений.

Паста может быть также использовано в других областях народного хозяйства, где необходимо осуществлять очистку металлических поверхностей от ржавчины, окисных пленов и других загрязнений перед нанесением покрытий, для очистки сварных швов при производстве ремонтных работ, в городском хозяйстве, в сфере теплофикации, а также кузовного ремонта легковых автомобилей и ряда других областей. Паста очищает металлические и иные поверхности путем воздействия на них химически активной композицией, обладающей сорбционными свойствами, которая существует в виде вязкой, липкой массы, удерживающейся, как на горизонтальной, вертикальной, так и на потолочной плоской поверхности.

При работе АЭС в течение суток образуется до 100г продуктов коррозии. Таким образом, с течением времени работы станции внутри первого контура количество продуктов коррозии неуклонно возрастает и при этом прогоняется через активную зону реактора, где под действием нейтронов образуется радиоактивные нуклиды. Эти нуклиды захватываются гидроокислами железа и вместе с ними осаждаются на внутренней стороне трубы главного трубопровода, на деталях насосов, в застойных зонах, в вентилях и других элементах оборудования АЭС. Вследствие этого, затрудняется обслуживание и ремонт оборудования, возрастает совокупное дозовое облучение персонала, увеличиваются затраты на эксплуатацию АЭС. Поэтому периодически возникает необходимость в химической дезактивации оборудования, что также связано с большими затратами. Помимо этого, возникает проблема утилизации громадного количества жидких радиоактивных отходов.

Известно, что дезактивирующие растворы функционируют неэффективно, так как с поверхностью загрязненного металла контактирует незначительный объем раствора. Более эффективно используется химически активные составляющие в составе вязких композиций наносимых на поверхность в виде тонкого слоя толщиной 1-2 мм. Использование композиции не приводит к образованию большого количества ЖРО.

Суда по литературе и полученным патентам, в мире идет активный поиск новых составов гелей и вязких композиций. Например, известен способ обработки поверхности с помощью очистного геля, его применение и очистной гель [1]. Способ



заключается в нанесении химически активного геля на дезактивируемую поверхность, причем, гель обладает свойством высыхания. После того, как он произвел свое функциональное действие, его удаляют с поверхности встряхиванием, обстукиванием или другим способом в виде компактных кусочков и частиц, которые впитали радиоактивные загрязнения. Гель состоит из коллоидного раствора, в состав которого входят смесь из пирогенетического кремнезема с осажденным кремнеземом, активного очищающего агента и окислительного агента, причем, в качестве активного агента используется азотная кислота, а так же  $\text{Ce}(\text{NO}_3)_4$  или  $(\text{NH}_4)_2 \text{Ce}(\text{NO}_3)_6$ . В качестве активного агента используют также соляную, серную, фосфорную кислоты и их смеси. Недостатком этого способа обработки является длительное время использования 2-5 часов и более, недостаточно высокий коэффициент очистки на уровне 10-15 крат от фиксированных на поверхности алюминия и нержавеющей стали металлических окисных отложений, образование твердых частиц сложного состава, которые могут попасть в активную зону атомного реактора, в арматуру, уплотнения, а также сложность утилизации образующейся массы.

Известен способ удаления радиоактивных загрязнений, состоящий в снятии радиоактивных загрязнений путем нанесения на очищаемую поверхность пленкообразующего состава на основе поливинилового спирта, в который вводят тонкоизмельченный клиноптилолит и карбонат натрия, или нитрит натрия [2]. После затвердения пленки, она обрабатывается раствором кислоты, с которой реагирует карбонат с выделением газа, что способствует отслаиванию покрытия. Недостатком способа является то, что данный состав не может дезактивировать поверхность нержавеющей и черной стали с фиксированными окислами и отложениями в силу отсутствия в составе пленки химически активных компонент, которые используются только на заключительной стадии в виде азотной, серной, соляной, фосфорной и щавелевой кислот для вспучивания пленки.

Известен способ удаления железо-окисных отложений с помощью пасты под названием «Целогель», предложенной сотрудником Института органической химии им. Н.Д. Зелинского В.В.Патрикеевым и состоящей из смеси соляной кислоты, уротропина, тонкоизмельченной бумаги и жидкого конторского клея или жидкого стекла, которую наносят на очищаемую поверхность и выдерживают на ней при комнатной температуре 0,5-12 часов [3]. Недостатком предложенной композиции является длительность ее воздействия, склонность к разжижению в течение времени использования, сложность приготовления, недостаточная сорбционная способность, кроме того, она с трудом наносится на очищаемую поверхность и не позволяет использовать напыление, валик, кисть.

Полученная нами паста способна дезактивировать и очищать металлические и иные поверхности оборудования АЭС от радиоактивных загрязнений, высокотемпературных отложений, окалины. Она существует в виде вязкой, липкой массы, способной удерживаться как на горизонтальной, так и на вертикальной. Воздействует на поверхность, быстро, разрушая окисные отложения, пленки, ржавчину, впитывает и удерживает продукты реакции, а после использования, остается в исходном состоянии и легко удаляется с поверхности.

Композиция прозрачна и вязка. Соотношение компонентов выбиралось из условий приготовления композита и максимально быстрого его воздействия на металло-окисные отложения и радиоактивные загрязнения.

Воздействие  $\gamma$ -облучения на предложенную композицию дозой 5-10 Мрад в течение 5 часов показало, что она под воздействием облучения сохраняет свою консистенцию и функциональные свойства.

При повышении температуры до 60-80 °С композиция вспучивается и высыхает, оставаясь прозрачной, а при прокаливании обугливается и превращается в черную

сажеподобную массу с минимальным выделением летучих продуктов. Таким образом, композиция после нанесения и насыщения преобразованными радиоактивными продуктами взаимодействия может быть скомпактирована термическим разложением, и захоронена в весьма компактном виде. В состав композиции входят из простых веществ: флокулянт, сорбент и химически активная добавка, которая синергетически воздействует на поверхность, доставляя к ней химически активное вещество и сорбируя продукты реакции. Вязкая композиция может быть использована при снятии оборудования АЭС с эксплуатации с целого дезактивации массивных изделий из нержавеющей стали перед переплавкой, а также другого оборудования и механизмов поверхностно загрязняющих радионуклидами.

Композиция состоит из недефицитных, легко утилизируемых, водорастворимых компонентов и легко приготавливается на месте использования. Испытания композиции в лабораторных условиях показали, что даже застарелая ржавчина разрушается и отделяется от поверхности стали в течении 15-20 минут. Композиция может быть использована для очистки сварных швов нержавеющей сталей от сварочных окисных пленок. Композиция не содержит вредных веществ.

В настоящее время на данный состав подана заявка на изобретение.

Состав композиции может быть модифицирован в зависимости от конкретной задачи. Композиция может использоваться в широком диапазоне температур.

## РЕЗЮМЕ

В работе описаны возможные области применения вязкой композиции и представлены результаты патентных и литературных исследований. Авторы разработали свой вариант пасты для дезактивации и описали основные ее преимущества.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Способ обработки поверхности с помощью очистного геля, его применение и очистной гель. Патент RU № 2291895 С2, (G21F 9 /00, C23G 1/14, 1/02, C11B 10/02)/ ФОР Сильвен (FR), ФУРНЕЛЬ Брюно (FR), ФУЭНТ Поль (FR), ЛАЛЛО Иван (FR); Бюл. №2, 2007 г.
2. Способ удаления радиоактивных загрязнений. Патент SU №1797387 А1 (G21F 9 /28)/ Рыбаков К.А., Ковалева В.Л., Тимофеев С.Н., Назарова В.В.; Заявитель(и): Всесоюзный научно-исследовательский институт неорганических материалов им. акад. Бочвара А.А.; Бюл. №4, 1997 г.
3. Седов В.М., Крутиков П.Г., Шишкунов В.Г. Физико-химические методы исследования внутриконтурных химических процессов в системах атомных энергетических установок. -Л.-1980.-ЦНИИ Атоминформ.- ВНИИПИ Энергетической технологии, С.5

## SUMMARY

*In the project possible field of application of viscid composition are described and the results of patent and literary researches are presented. Authors developed the variant of paste for radiological recovery and described its basic advantages.*

**E-mail:** [iskulikov@vandex.ru](mailto:iskulikov@vandex.ru)

Поступила в редакцию 21.08.2013

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОЛИТНО-ПЛАЗМЕННОЙ ПОЛИРОВКИ ПРИ ДЕЗАКТИВАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ НЕРЖАВЕЮЩЕЙ СТАЛИ**

<sup>1</sup>Каменев А.Я., д.ф.-м.н. <sup>2</sup>Куликов И.С., <sup>1</sup>Климова Л.А.,  
к.ф.-м.н. <sup>3</sup>Ширвель П.И., <sup>3</sup>Глембоцкий А.В.

<sup>1</sup>ГНУ "Объединенный институт энергетических и ядерных исследований -  
Сосны" НАН Беларуси, Минск

<sup>2</sup>Смоленский государственный университет, Россия

<sup>3</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск

В настоящее время для очистки, травления, электрополирования и дезактивации поверхности конструкционных материалов АЭС широко используются различные химически активные растворы и композиции, часто включающие агрессивные коррозионно опасные, летучие, ядовитые, горючие компоненты, в том числе на основе смесей сильных кислот.

В качестве альтернативы предложены слабые водные растворы нейтральных солей, в которых под воздействием электрического тока эффективно очищается поверхность черных, углеродистых, нержавеющей сталей и других материалов и которые легко самоочищаются от шлама и радионуклидов простым отстаиванием.

На основе экспериментальных исследований процесса очистки, полировки, дезактивации в растворах различного состава и исследований поверхности широкого круга материалов с использованием методов гравиметрии, металлографии и микроскопии, получены данные о влиянии состава сталей, их структуры, напряженного и деформированного состояния, сварки, при кратковременной (до 8 минут) и длительной обработке (до 600 минут) на чувствительность материалов к растрескиванию, питингообразованию, межкристаллитной коррозии. Обработка проводилась как с катода, так и с анода при напряжении на электродах до 350 В. Для экспериментов в обоих случаях выбирались U-образные образцы с заневоленными концами.

Исследования показали, что химический состав образцов имеет большее влияние на технологический процесс полирования, чем структура, деформация и механические напряжения. Сварной шов полируется также хорошо, как и основной металл. Установлено, что длительная полировка приводит к истончению деформированного и напряженного образца без его растрескивания и сохранения блестящей поверхности. Полировке и очистке поддаются даже изделия из фольги толщиной более 0,1 мм. Методом электролитно-плазменной полировки получены также качественные металлографические шлифы обработанных образцов. Приготовлены демонстрационные изделия с использованием старогодных деталей сильфонной арматуры, деталей манометров высокого давления, термодарных каналов и других изделий, используемых в ядерной энергетике. Найдены универсальные составы электролитов для полировки черных, нержавеющей сталей.

### **Электролитно-плазменная полировка**

В основе электролитно-плазменной обработки лежит принцип использования импульсных электрических разрядов, которые происходят вдоль всей поверхности изделия, погруженного в электролит. Совместное воздействие на поверхность детали химически активной среды и электрических разрядов создает эффект полирования изделий. В технологии плазменно-электролитной полировки обрабатываемая деталь является анодом, к которому подводится положительный потенциал от источника тока. Площадь катода должна быть не менее чем в 5 раз больше площади анода. В

зависимости от приложенного напряжения при прохождении электрического тока через водный раствор электролита наблюдаются различные режимы электрических процессов вблизи анода [1]. После превышения некоторых критических величин плотностей тока и напряжения вокруг металлического анода образуется газоплазменное облако, оттесняющее электролит от поверхности металла. При этом возникает многофазная система металл-плазма-газ-электролит, а явления, происходящие в приэлектродной области, не укладываются в рамки классической электрохимии.

При напряжении более 200 В вокруг анода образуется устойчивая пароплазменная оболочка, характеризующаяся малыми колебаниями тока при  $U = \text{const}$ . В этой области напряжений (200-350 В) происходит процесс электролитно-плазменной обработки. Плотность тока уменьшается до 0,5-1,0 А/см<sup>2</sup>. Сплошная пароплазменная оболочка вокруг анода имеет толщину порядка 50 мкм и постоянно изменяет свою форму [2].

Электрический ток в прианодной области протекает от металлического анода к электролитному катоду через сложную систему металл-плазма-газ-электролит. Напряженность электрического поля в оболочке достигает  $10^4$ - $10^5$  В/см. При температуре около 100 °С такая напряженность вызывает ионизацию паров, эмиссию ионов и электронов, необходимую для поддержания стационарного тлеющего электрического разряда в оболочке. Вблизи микровыступов напряженность электрического поля возрастает и на этих участках возникают импульсные искровые разряды [1].

В настоящее время методом электролитно-плазменной полировки производится обработка широкого класса металлов и сплавов: нержавеющей и черной стали, медь, латунь, алюминий, магний, титан, цирконий и др.

### **Применение электролитно-плазменной полировки при дезактивации поверхности нержавеющей и углеродистой стали**

При работе АЭС образуются радиоактивные продукты коррозии, которые поступают в водный теплоноситель и откладываются на поверхности оборудования, входящего в состав циркуляционного контура и прочно с ней связываются. Вследствие этого оно становится радиоактивным, что затрудняет его обслуживание и ремонт. По этой причине радиоактивные отложения периодически удаляют, используя различные способы воздействия на них с целью разрушения [3].

Указанный метод электролитно-плазменной полировки пригоден для дезактивации и очистки поверхности оборудования АЭС, изготовленного из нержавеющей и черных сталей от фиксированных отложений и окалин с эффектом полировки.

Для осуществления процесса дезактивации к загрязненному изделию подключается положительный полюс источника тока повышенного напряжения, а отрицательный полюс прикладывается к металлической ванне, в которой находится электролит. При погружении изделия в электролит вокруг изделия образуется тонкая парогазовая подушка, а напряженность электрического поля резко возрастает до уровня, когда химические, ковалентные, металлические и другие связи разрушаются, возникают знакопеременные окислительно-восстановительные процессы, которые переводят элементы, находящиеся в поверхностном слое в соединения, легко отделяющиеся от поверхности.

Обработку ведут в электрогидродинамическом режиме в водном растворе сульфата аммония с добавкой А при температуре 70-85 °С и напряжении 250-350 В. Обработка проводится в течение 1-6 минут при плотности тока 0,1-0,2 А/см<sup>2</sup>.

При таком способе дезактивации не используются концентрированные кислоты и хромовый ангидрид, а снятые с поверхности загрязнения переводятся в нерастворимые соединения (гидроокиси), выпадающие в осадок, вследствие чего количество радиоактивных отходов резко сокращается на один - два порядка. При этом, электролит весьма устойчив при длительном использовании, эффективен при низких плотностях тока (менее 0,2 А/см<sup>2</sup>), обладает свойством самоочищения путем отстоя.

Описанный метод дезактивации с помощью электролитно-плазменной полировки был опробован на старогодных деталях сифонной арматуры, деталях манометров высокого давления, термопарных каналов и других изделий, используемых в ядерной энергетике. Для демонстрации представлен сифон (рисунок 1), который эксплуатировался в диссоциирующем теплоносителе в течение 5000 часов.



Рисунок 1. – Сифон до и после очистки

### РЕЗЮМЕ

В работе описаны процесс электролитно-плазменной полировки и ее области применения. Авторы предлагают использовать метод электролитно-плазменной полировки для дезактивации и очистки поверхности оборудования АЭС.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дураджи В. Н., Парсадян А. С. Нагрев в электролитной плазме. – Кишинев: Штинца, 1988, – 213 с.
2. Куликов И.С., Ващенко С.В., Каменев А.Я. Электролитно-плазменная обработка материалов. – Мн.: Беларуская навука, 2010. –231.
3. Ампелогова Н.И., Симоновский Ю.М., Трапезников А.А. Дезактивация в ядерной энергетике. – М.: Энергоиздат, 1982. – 256 с.

### SYMMARY

*In the project process of electrolytic-plasma polishing and its field of application are described. The authors propose to use the method of electrolytic-plasma polishing for radiological recovery and cleaning of surface of equipment NPP.*

**E-mail:** [iskulikov@yandex.ru](mailto:iskulikov@yandex.ru)

Поступила в редакцию 24.08.2013

## ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ВОДОПОДГОТОВКИ

к.т.н. **Куликова М.Г.**, к.ф.-м.н. **Кончина Л.В.**, Толкова Т.С.  
*ФГБОУ ВПО «НИУ «МЭИ»» в г. Смоленске, Россия*

Минерализация воды (количество растворенных солей) относится к контролируемым показателям качества питьевой воды. Предельно допустимые концентрации солей в воде задаются соответствующими нормативными документами. Высокий уровень минерализации является индикатором потенциальной опасности, вызванный, как правило, содержанием калия, солей хлористоводородной кислоты и натрия, ионы которых имеют небольшой или краткосрочный эффект. Кроме того, в воде могут содержаться токсичные ионы (арсенат свинца, кадмий, нитрат и другие), представляющие опасность для живых организмов. В связи с этим весьма актуальным является изучение методов деминерализации (обессоливания) воды, а также создание технических средств для совершенствования данной технологии.

В настоящее время можно выделить несколько основных методов обессоливания воды:

- термический;
- ионообменный;
- обратный осмос;
- электродиализ;
- вымораживание.

Рассмотрим основные принципы, лежащие в основе этих методов.

При термическом способе получение обессоленной воды осуществляется ее дистилляцией – испарением с последующей конденсацией. Метод считается наиболее энергоемким, что связано с большими затратами энергии на выпаривание.

Ионообменный метод основан на последовательном пропускании растворов неорганических солей через катионитовые и анионитовые фильтры. Основные недостатки метода – большой расход реагентов на регенерацию ионитных смол, значительный сброс засоленных стоков в канализацию и загрязнение окружающей среды, высокая величина капитальных затрат.

В основе метода обратного осмоса лежит разделение исходных растворов путем фильтрования через мембраны, обладающие избирательной проницаемостью, а именно: их поры пропускают молекулы воды, но не пропускают гидратированные соли или молекулы недиссоциированных соединений. Данный метод является весьма перспективным. Однако для его применения необходимо, чтобы вода, подаваемая на мембраны, соответствовала определенным нормам. Для этого необходимо проводить предварительную очистку воды. Это является важным условием для обеспечения нормальной эксплуатации обратноосмотических установок

Электродиализ – процесс мембранного разделения, в котором ионы растворенного вещества переносятся через мембрану под действием электрического поля. Движущей силой процесса является градиент электрического потенциала. Как и в случае обратного осмоса, вода, подлежащая обессоливания, должна пройти предварительную очистку.

Одним из относительно редко используемых методов частичного обессоливания воды является метод вымораживания, основой которого являются фазовые переходы вещества из твердого состояния в жидкое с последующим извлечением материала с высоконцентрированным содержанием солей.

На кафедре «Технологические машины и оборудование» ФГБОУ ВПО «НИУ «МЭИ»» в г. Смоленске разработан проект деминерализационного аппарата (рисунок 1).

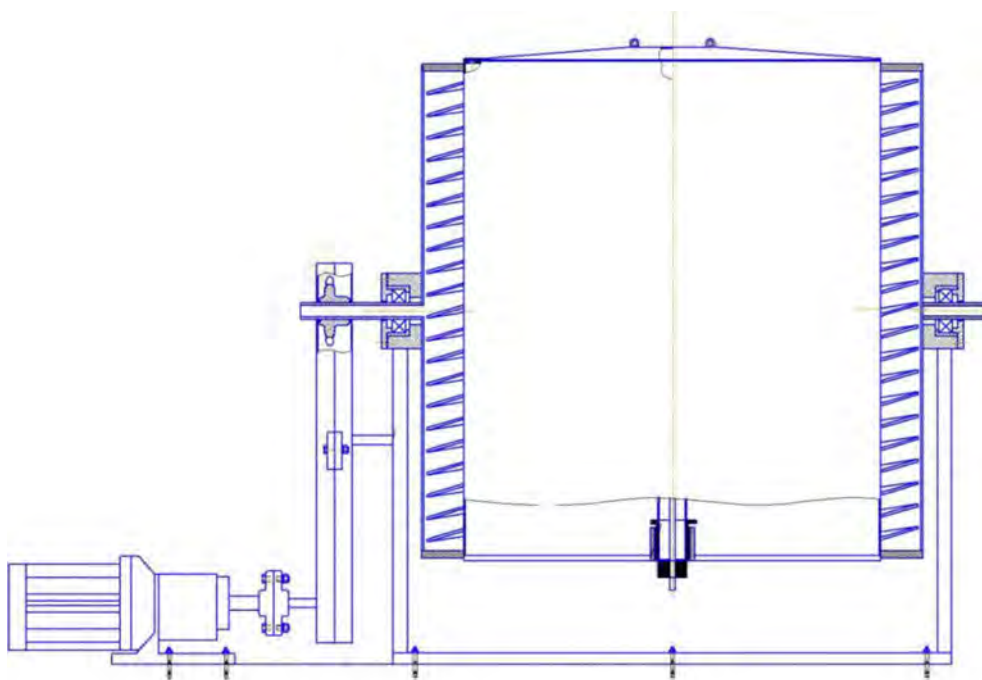


Рисунок 1. – Деминерализационный аппарат

Принцип работы разработанного деминерализационного аппарата состоит в постепенном замерзании воды с движением фронта кристаллизации от стенки аппарата к его оси. При этом происходит «вытеснение» солей к центру аппарата. Это связано с тем, что температура замерзания чистой воды ниже температуры замерзания солевого раствора. [1]

После полного завершения кристаллизации аппарат переворачивается, включается расположенный в центральной части аппарата нагревательный элемент, что приводит к постепенному плавлению льда в аппарате, начиная с центральной части. Получаемая на первом этапе жидкость содержит большое количество солей, и она сливается через отверстие в поддон, установленный на тензометрическом датчике. После слива 15% массы исходной воды аппарат возвращается в исходное положение и производится плавление оставшегося льда. Таким образом получают обессоленную воду. В ходе проектирования аппарата [2] проведены необходимые тепловые, прочностные расчеты, определены механические характеристики (все инженерные расчеты выполнены согласно ГОСТ Р52857.1-2007).

Достоинством аппарата является автоматизация всего процесса и заключения его в цикл, а так же простота в эксплуатации.

На рисунке 2 представлена кинематическая схема аппарата, где:

- 1 – Электродвигатель
- 2 – Муфта
- 3 – Ведущая звездочка цепной передачи
- 4 – Корпус сосуда
- 5 – Цепь
- 6 – Ведомая звездочка цепной передачи

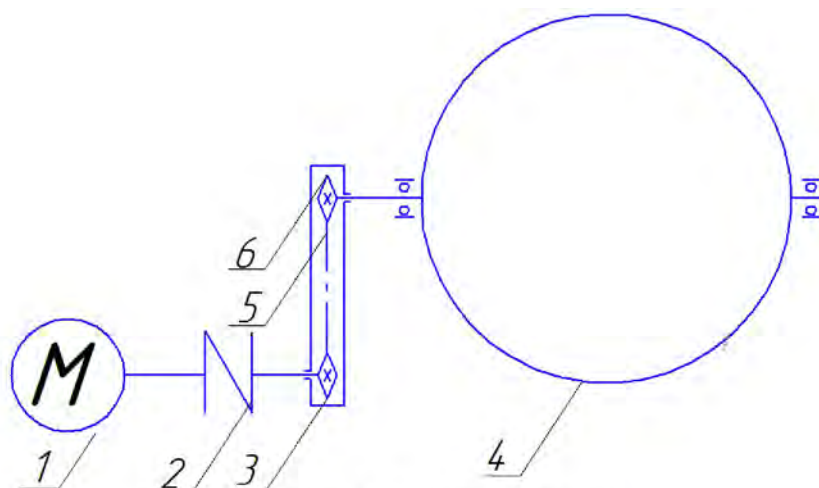


Рисунок 2 – Кинематическая схема

Характерных требований для места и условий эксплуатации аппарата нет.

Предложенный метод обессоливания характеризуется относительно низким (около 15 %) выходом концентрированных солей, что упрощает их утилизацию. Это актуально для производств, расположенных вне городской черты, где отсутствует развитая канализационная сеть.

Кроме того, данный метод помимо очистки воды от солей так же обеспечивает получение «талой» воды, обладающей, по мнению потребителей, высокой биологической активностью. Применение такой технологии может служить эффективным маркетинговым ходом на рынке питьевой воды.

#### РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается принцип работы аппарата для обессоливания воды, основанный на использовании метода вымораживания. Данный аппарат разработан на кафедре «Технологические машины и оборудование» ФГБОУ ВПО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске. Описаны преимущества рассматриваемой технологии для обессоливания воды. Проведены тепловые и прочностные расчеты оборудования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кончин П.И., Кончина Л.В. Обессоливание воды методом вымораживания // Энергетика, информатика, инновации. - Смоленск: Универсум. 2013. №1. - С. 200-202.
2. Анурьев В.И. Справочник конструктора – машиностроителя. – М.: Машиностроение, 2001. – 920 с.

#### SUMMARY

*The article discusses the principle of operation of the apparatus for water desalination which is based on the freezing method. This machine was developed at the Smolensk branch of National Research University "Moscow Power Engineering Institute", department "Technological machines and equipment". The advantages of the technology for water desalination are described in this article. There are also thermal and strength calculations of equipment.*

**E-mail:** [kulikova0808@rambler.ru](mailto:kulikova0808@rambler.ru)  
[la\\_kon@mail.ru](mailto:la_kon@mail.ru)  
[tat.tolckova@yandex.ru](mailto:tat.tolckova@yandex.ru)

Поступила в редакцию 24.10.2014



## СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЯТИ ТИПОВ ВИБРОАМОРТИЗАТОРОВ

к.ф.-м.н. Докукова Н.А., Кафтайкина Е.Н., студ. Конон Н.П.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

**Введение.** Комфортабельность транспортных средств, его качество и надежность существенно зависят от уровня виброзащиты и влияния динамических нагрузок. Для изоляции от вредных колебательных режимов широко используются различные виброзащитные системы с металлическими, пневматическими, гидравлическими и резино-пластическими упругими элементами. Основными факторами добротности этих систем являются собственная частота колебаний и несущая способность. Совершенствование способов виброгашения в настоящее время идет по пути снижения низшей частоты колебаний защищаемого объекта. Разработка простых и эффективных конструкций автономных подвесок, обеспечивающих улучшение ходовых характеристик, удобство при езде и долговечность эксплуатации для широкого класса автомобилей малых и средних классов, входит в число важнейших проблем сегодняшнего автомобилестроения.

Современные конструкции виброзащитных систем, подвесок кресел водителей, отвечающие требованиям санитарных норм, имеют элементы автоматики, требуют наличия пневмосистем высокого давления, а также демпфирующих устройств. Такие системы дорогостоящи в изготовлении, сложны в обслуживании и требуют при изготовлении высокоточных и специальных производств. Поэтому разработка системы виброзащиты водителя, которая при невысокой стоимости обладает улучшенными, по сравнению с существующими, статическими и динамическими характеристиками и, в то же время, проста в изготовлении и эксплуатации, является весьма актуальной задачей.

В работе проведены сравнения пяти перечисленных подвесок транспортных средств по характеристикам внутренних сил сопротивления и их возможностям обеспечивать быстрое затухания вредных колебательных режимов во время нормальной эксплуатации мобильного устройства и при перегрузках.

**Постановка задачи.** Исследуем пять типов виброзащитных систем с пневматической подвеской [1]; с «фермой Мизеса» [2]; с системой Алабужева, упругие части которых обеспечивают квазиулевою жесткостью [3]; с квазиулевою жесткостью и силой кулонового трения [4]; с упругими пружинами и демпфирующими амортизаторами [5, 6], по их характеристикам внутреннего затухания колебаний, вызванных влиянием внешних факторов, например, нагрузкой, отнесенной к единице массы, не превышающей величины ускорения свободного падения  $g \cos(\omega t)$ . В общей постановке задача динамики подвески сиденья транспортного средства является нелинейной. В силу громоздкости рассмотрим ее в общем виде

$$\ddot{x} + k^2 x = F_{comp}(x, t), \quad (1)$$

$$F_{comp}(x, t) = g \cos(\omega t) - a_1(t)\dot{x} - a_2(t)x. \quad (2)$$

**Пневматические подвески с квазиулевою жесткостью для легковых автомобилей «Таврия» и ВАЗ-21099.**

Одним из методов снижения частоты с сохранением необходимой несущей способности является использование пневматической виброзащитной системы с квазиулевою жесткостью [1]. Работа сил сопротивления при ограниченном размахе колебаний в пределах  $[-A; A]$  при  $x = A \sin \omega t$  для расчетной модели (1), (2) представлена на рисунке 1.

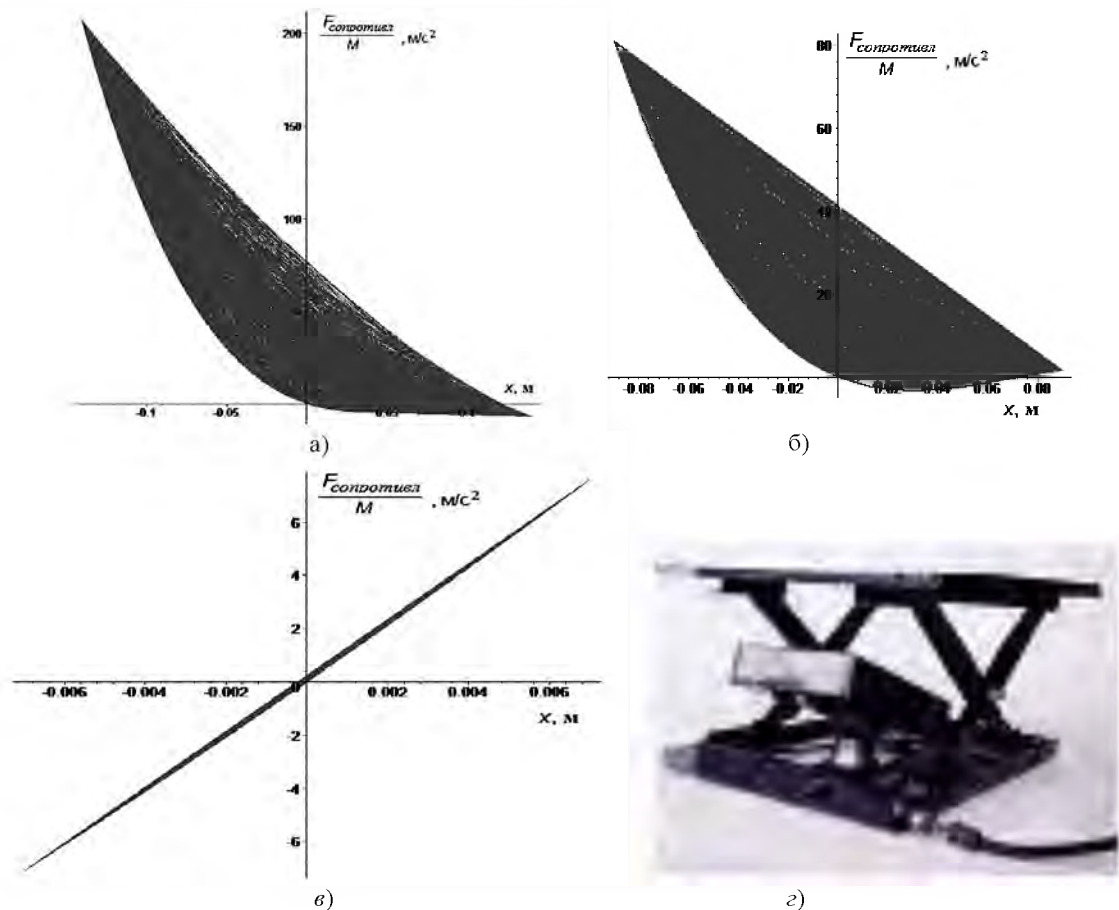


Рисунок 1 – Работа сил сопротивления при  $x=0.135\sin\omega t$  (м) на резонансной частоте  $\omega=1.15$  (Гц) – на а; на б –  $x=0.09\sin\omega t$  (м) при частоте  $\omega=5.5$  (Гц); на в –  $x=0.0085\sin\omega t$  (м) на частоте  $\omega=15$  (Гц). Образец автономного виброзащитного модуля, с подключением к пневмосистеме транспортного средства – на г

Сила сопротивления на рисунке 1 а, отнесенная к единице массы, в ускорениях вблизи околорезонансной зоны велика, превышает нагрузочный режим в один  $g$  в 21.5 раза. Такая большая сила создается компрессором, нагнетаемым воздух под давлением в камеру пневмоамортизатора. Общий вид подвески сиденья водителя с разработанной конструкцией виброзащитного модуля [1] приведен на рисунке 1 г.

Сила сопротивления на рисунке 1 б на частотах зарезонансной зоны в 8.25 раз превышает нагрузочный режим в один  $g$ , в высокочастотной зоне на рисунке 1 в имеет практически линейный характер с минимальной петлей гистерезиса и составляет  $\pm 0.7g$ . Колебания сиденья водителя на резонансной частоте 1.15 Гц происходят с амплитудой  $\pm 13.5$  см.

### Виброзащитная система с квазиулевым жесткостью конструкции «Ферма Мизеса».

Чем меньше первая собственная частота, тем шире диапазон частот вынуждающей силы, при котором работа виброизолятора эффективна. Для получения виброзащитных систем с малой собственной частотой колебаний требуются упругие элементы с малым коэффициентом жесткости. Возможность использования систем с квазиулевым жесткостью на основе «фермы Мизеса» [2] на рисунке 2 для виброизоляции динамических объектов впервые была высказана профессором Алабужевым П.М.

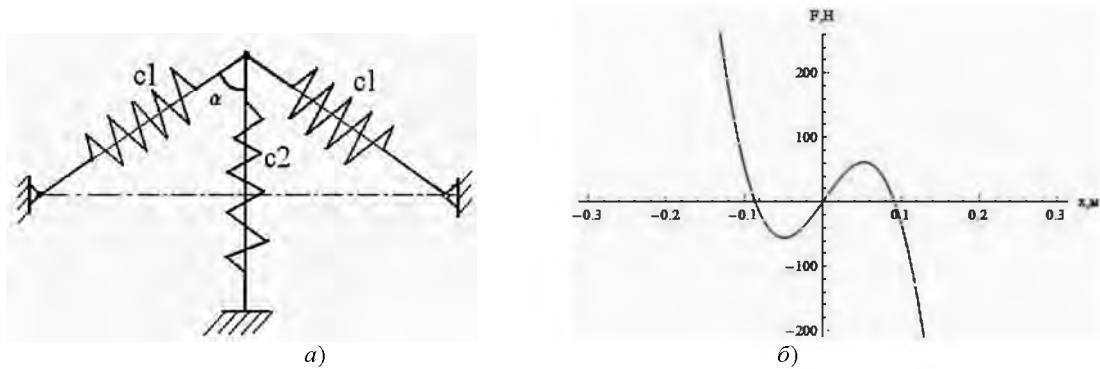


Рисунок 2 – Схема «Ферма Мизеса» на а, на б – зависимость возвращающей силы от перемещения со знакопеременной упругостью

Если приложить к данной виброзащитной системе гармоническую возмущающую силу  $F_0 \cos(\omega t)$  и возвращающую силу на рисунке 2 б, как это сделано в [2] при  $F_0 = 20$  Н,  $\omega = 56.73$  Гц,  $m = 534.62$  кг, то получаются колебания, изображенные на рисунке 3 а и б, из решения дифференциального уравнения

$$m\ddot{x}(t) + c_2 x(t) - 2c_1 \sin\left(\arctg\left(\frac{x(t)}{0.35}\right)\right) \left(0.5 - \sqrt{0.35^2 + x(t)^2}\right) = F_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

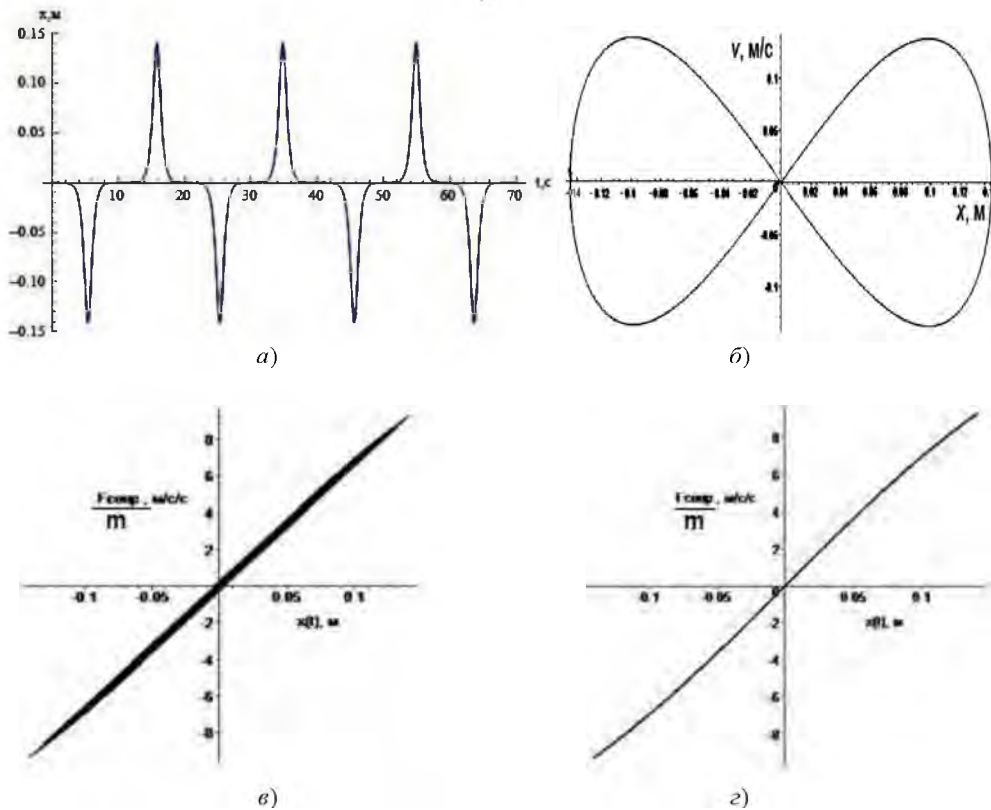


Рисунок 3 – Зависимость перемещения тела с массой  $m$  от времени  $t$  при  $\omega = 56.73$  (Гц) – на а; на б – фазовая траектория; работа сил сопротивления, отнесенных к единице массы, при  $\omega = 56.73$  (Гц) и  $x = 0.15 \sin \omega t$  (м) – на в; и на резонансной частоте  $\omega = 0.05$  (Гц) – на г

Численная реализация нелинейной задачи (3) о движениях виброизолируемой системы позволяет явно наблюдать амплитуды колебаний  $\pm 15.0$  см на рисунке 3 а, и проявляются они как внезапные «всплески» за малый промежуток времени на общем фоне квазинулевой амплитуды. Такое явление можно интерпретировать как многочисленные удары, «перескоки», биения изолируемого объекта, происходящие периодически и имеющие высокие скорости восстановления, рисунок 3 б. На фазовой

плоскости видны два участка резкого перепада скорости на перемещениях [10 см; 14 см] и [-10 см; -14 см].

Одним из основных недостатков таких методик виброизоляции является небольшой диапазон перемещений, на котором жёсткость действительно равна нулю и, соответственно, перемещения невелики. На рисунке 3 а это можно наблюдать на интервалах временной оси [8 с, 12 с], [18 с, 22 с] и т.д. При изменении веса защищаемой от вибрации массы необходимо настраивать характеристику силы упругости, жесткость  $c_2$ , заново. Работа сил сопротивления на графиках  $b$ ,  $z$  рисунка 3 на резонансной частоте  $\omega = 0.05$  Гц и зарезонансной  $\omega = 56.73$  Гц по преодолению воздействующей на виброизолируемую систему гармонической возмущающей силы  $Mg\cos(\omega t)$  – незначительна. Соответствующие площади петель гистерезиса практически нулевые.

### **Виброзащитная система Алабушева с демпфирующими амортизаторами.**

Эффект квазинулевой жесткости применяют в различных областях техники. Отличительной особенностью большинства существующих систем с квазинулевой жесткостью является относительно малый рабочий диапазон силовой характеристики. Виброзащитная система Алабушева с квазинулевой жесткостью предназначена для защиты от случайных ударов. Снижает ускорение тела после удара до безопасных пределов, гарантирует нормальную работу механических объектов, как во время динамического воздействия, так и после него. Демпфирующие элементы обеспечивают плавное гашение энергии импульса удара во время колебаний, и обеспечивают возврат системы в исходное положение после окончания действия ударного импульса [3].

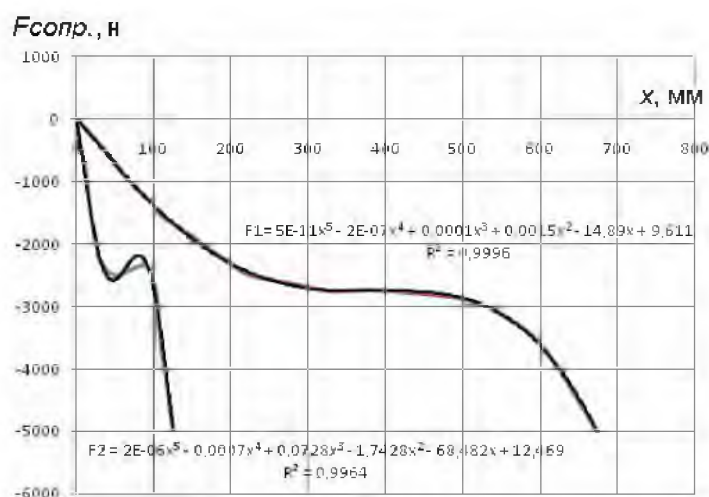


Рисунок 4 – Интерполяция восстанавливающей силы от перемещения для системы Алабушева и Пилипенко

Считается, что одной из особенностей виброзащитных систем Алабушева является малый диапазон перемещений в несколько сантиметров за счет применения виброзащитных систем с квазинулевой жесткостью. Хотя это не очевидно в проведенных нами расчетах с интерполированными данными восстанавливающих сил, полученными экспериментальным путем в [3], и представленными на рисунке 4. В диапазоне высоких частот все виброизолированные системы имеют малые амплитуды. В диапазоне низких частот расчеты показали, что смещения тел превышают 10–20 см и более. Достоинством методики виброизоляции Алабушева – Пилипенко является смещение области резонансных частот в начало отсчета на координатной оси. Это обстоятельство позволяет незаметно для механической системы обойти самую неприятную частотную зону и обеспечить работу механизмов в зарезонансной области с небольшими амплитудами колебаний. При этом следует подбирать физические параметры элементов, входящих в общую механическую систему так, чтобы в

диапазоне низких частот амплитуды были действительно малыми и не формировали периодических всплесков, ударов, за бесконечно малый промежуток времени. Площадь петли гистерезиса равна нулю. Сопротивление затуханию колебаний ничтожно.

#### Амортизаторы с квазиулевой жесткостью и переменным кулоновым трением.

Амортизаторы с переменным кулоновым трением разработаны на основании пневматических виброзащитных систем с квазиулевой жесткостью на рабочем участке статической характеристики, рисунок 5, для принципиально новых подвесок легковых автомобилей различных классов. Указанные подвески, по мнению авторов [4], не требуют установки гидравлического демпфера, удовлетворяют требованиям плавности хода и устойчивости движения автомобиля высокого класса. К недостаткам данной виброзащитной системы, кроме небольшого диапазона перемещений, следует отнести отсутствие демпфирования. Защита от ударных воздействий здесь не может быть в полной мере эффективной. Упругие элементы расположены под определенными, расчетными углами. Это ударозащитная упругая система, состоящая из линейных пружин с квазиулевой жесткостью и механизма, сдерживающего передачу силы удара на основание. Для этого применяется поглотитель энергии удара за счет кулонова трения. Зависимость восстанавливающей силы которого от перемещения для механической системы представлена на рисунке 5 а. Площадь петли гистерезиса существенна. Сопротивление затуханию колебаний велико. Масса изолируемого объекта 142,85 кг.

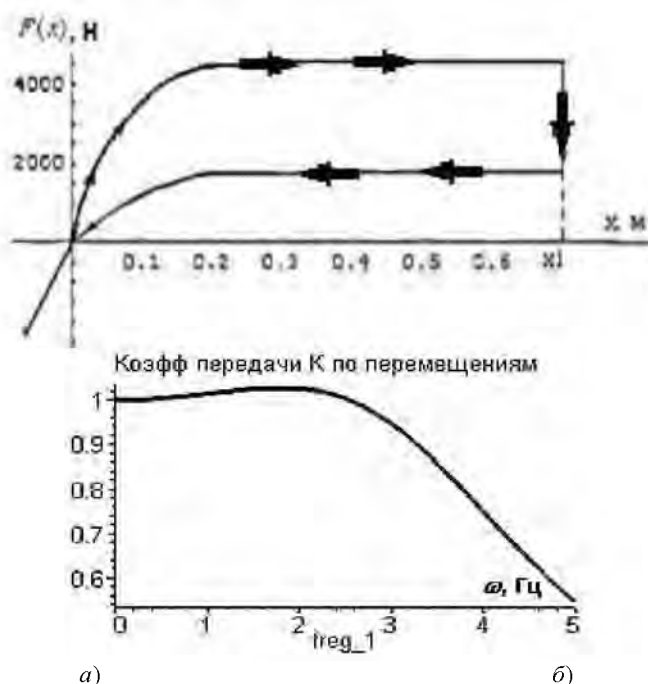


Рисунок 5 – Зависимость восстанавливающей силы от перемещения в виде двух функций на а и коэффициента передачи  $K$  от частоты  $\omega$  на б

Проведенные исследования виброзащитной системы с квазиулевой жесткостью и переменным кулоновым трением показали, что она наиболее эффективна для гашения колебательных режимов из четырех представленных, обеспечивает быстрое затухание, в том числе для ударных нагрузок, и имеет самый низкий коэффициент передачи колебаний на основание, рисунок 5 б. Для данного случая площадь гистерезиса, вычисленная численным способом равна  $S = 234.7$  Дж [4]. Потери энергии за одно колебание для данного случая является коэффициентом поглощения энергии  $K_n$

$$K_n = \frac{2}{mv^2} S, \quad (4)$$

где  $mv^2/2 = 2000$  Дж [4]. Тогда  $K_n = 0.117$  в долях или 11,7%, что является очень хорошим результатом для пассивной защиты от ударов.

#### **Виброзащитная система с упругими пружинами и демпфирующими амортизаторами [5].**

В заявленной конструкции подвески сидения трактора [5] все основные характеристики улучшены за счет изменения геометрии расположения элементов и добавления нового амортизатора вязкого трения. Проведенные расчеты [6], отражены на рисунке 6. Представлен коэффициент передачи усилий на виброизолируемый объект для динамического нагрузочного режима  $Mg\cos(\omega t)$  рисунок 6 б. На низких частотах его величина не превышает 1.25, на высоких частотах стремиться к нулю. На резонансной частоте  $\omega = 1.8$  Гц смещения сидения водителя происходят в пределах 8,0 см от  $-4.4$  см до 3.6 см на рисунке 6 а. На высоких частотах амплитуда колебаний существенно снижается. По виду силы сопротивления, отнесенной к единице массы, можно утверждать, что она не превышает  $\pm 5.6$  м/с<sup>2</sup>, и имеет практически прямоугольную площадь, характеризующую достаточную величину рассеивания энергии, реобразования ее из кинетической в тепловую. Коэффициент поглощения энергии  $K_n = 0.489$  в долях или 48.9%, является лучшим результатом из здесь рассмотренных виброгасящих систем пассивной виброзащиты.

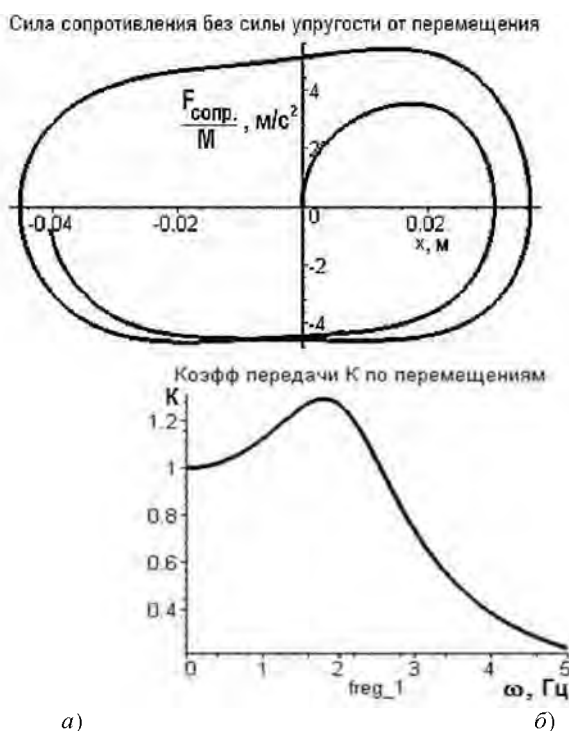


Рисунок 6 – Работа сил сопротивления, отнесенных к единице массы, на резонансной частоте  $\omega = 1.8$  (Гц) и перемещении  $x=0.04\sin\omega t$  (м) – на а; зависимость коэффициента передачи  $K$  от частоты  $\omega$  на б

**Заключение.** Выделены основные типы современных виброизолирующих устройств, встречающихся в машиностроении; исследованы конструкционные особенности нескольких типов виброзащитных систем: пневматические подвески с квазинулевой жесткостью, виброзащитная система с квазинулевой жесткостью конструкции «Ферма Мизеса», виброзащитная система Алабужева с демпфирующими амортизаторами, амортизаторы с квазинулевой жесткостью и переменным кулоновым трением, виброзащитная система с упругими пружинами и демпфирующими амортизаторами; изучены соответствующие им динамические схемы; проведено математическое моделирование уравнений движения виброизолируемых объектов; линеаризованы и исследованы математические модели; сопоставлены результаты численных расчетов с экспериментальными данными, приведенными в научной литературе; представлен

новый вид амортизатора из патента на полезную модель, показаны его преимущества по коэффициенту передачи усилий на виброизолируемый объект и по коэффициенту поглощения энергии; сравнены расчетные характеристики рассмотренных типов виброамортизаторов.

### РЕЗЮМЕ

Представлены основные типы современных виброизолирующих устройств, встречающихся в машиностроении: пневматические подвески с квазиулеевой жесткостью, виброзащитная система с квазиулеевой жесткостью конструкции «Ферма Мизеса», виброзащитная система Алабужева и демпфирующими амортизаторами, амортизаторы с квазиулеевой жесткостью и переменным кулоновым трением, виброзащитная система с упругими пружинами и демпфирующими амортизаторами; изучены соответствующие им динамические схемы; линеаризованы и исследованы их математические модели; сопоставлены результаты численных расчетов с экспериментальными данными, приведенными в научной литературе; представлен новый вид амортизатора из патента [5] на полезную модель, сравнены расчетные характеристики с известными основными типами виброамортизаторов, показаны его преимущества по коэффициенту передачи усилий на виброизолируемый объект и по коэффициенту поглощения энергии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипенко В.В., Пилипенко О.В., Запольский Л.Г. Пневматические системы виброзащиты с квазиулеевой жесткостью// Техн. механика. – 2008. – № 2.
2. Зотов А. Н. Виброизоляторы с квазиулеевой жесткостью // Научно-технический и производственный сборник статей III международной научно-технической конференции «Вибрация машин, снижение, защита». Донецк. – 2005 г. – С. 80.
3. Алабужев П.М. Виброзащитные системы с квазиулеевой жесткостью/ Алабужев П.М. и др. Под ред. К.М. Рагульскиса. – Л.: Машиностроение. – 1986. – 96 с.
4. Зотов А.Н., Ахияров Д.Т. Надыршин Р.Ф./ Ударозащитная система с квазиулеевой жесткостью// Нефтегазовое дело. – 2006. – С. 1-15.
5. Докукова Н.А., Голод С.Н., Кафтайкина Е.Н. Подвеска сиденья транспортного средства /Патент на полезную модель. № 8521, 2012.08.30, В 60N 2/54. Патент получен 28.08.2012.
6. Докукова Н.А., Голод С.Н., Кафтайкина Е.Н. Исследование макета подвески сиденья транспортного средства // Механика машин, механизмов и материалов. Минск. – 2013. – Вып. 29. – С. 156-161.

### SUMMARY

*The main types of modern vibration isolation devices encountered in mechanical engineering; studied the corresponding dynamic scheme; linearized and investigated their mathematical models; Numerical results are compared with the experimental data presented in the literature; represented a new kind of shock absorber patent for utility model authors, compare the calculated characteristics of the known main types of vibration dampers, showing its advantages transfer coefficient efforts on an insulated object vibration and energy absorption coefficient.*

**E-mail:** [dokukova@mail.ru](mailto:dokukova@mail.ru)

Поступила в редакцию 02.11.2014

## ВИБРОИНЕРЦИОННЫЕ ПРИВОДЫ МОБИЛЬНЫХ МАШИН

к.т.н. **Балицкий В.А.**

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

В работе рассмотрены конструктивно-технологические вопросы создания принципиально новых виброинерционных приводов.

Предложен метод создания однонаправленного усилия на рабочем органе мобильных машин.

Интенсификация рабочих процессов мобильных машин может осуществляться с помощью виброинерционных приводов. Это механизмы, в работе которых используются силы инерции. Эти механизмы условно можно разделить на три группы. В первой – силы инерции позволяют осуществить работу рабочего органа машины по симметричному циклу (рисунок 1а), во второй – по асимметричному (рисунок 1б), и в третьей – по пульсирующему (рисунок 1в). Вибромеханизмы первой группы широко используются в различных отраслях техники. Ко второй группе можно отнести гусеничную машину с инерционно-импульсным приводом. [1,2]

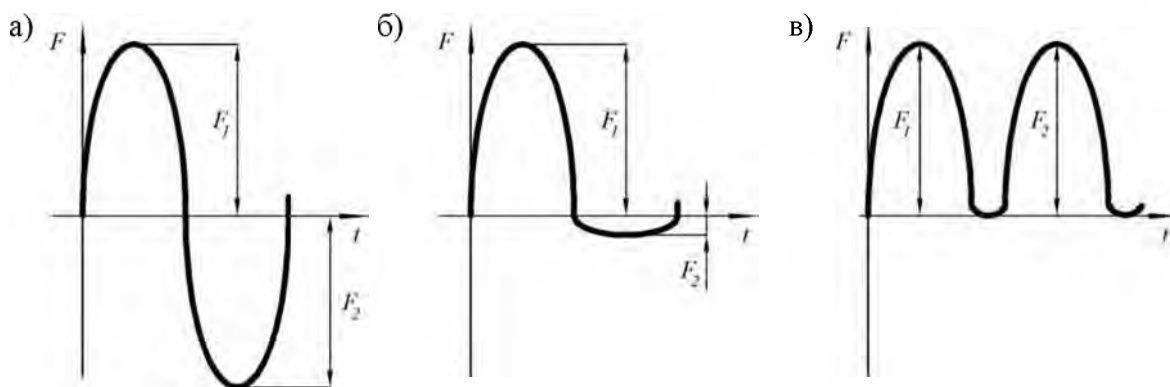


Рисунок 1 – Графическое изображение циклов работы рабочего органа  
а) симметричный; б) асимметричный; в) пульсирующий

К третьей группе так называемые механизмы-инерцоиды. [3]

Работоспособность и демонстрация их опытных моделей вызвала категоричное отрицание многих ученых.

Однако имеются опытные модели, которые показывают регистрируемую однонаправленную силу тяги.

На основе изучения несвободных механических систем нами сформулирован принцип безреактивного движения. Так же разработаны и созданы модели безреактивных, т.е. без опоры на внешние среды, приводов. (рисунок 3,4)

Проработан эскизный проект вертолета с безреактивными движителя – роторами. (рисунок 5)

Один из этих приводов продемонстрирован на научном семинаре.



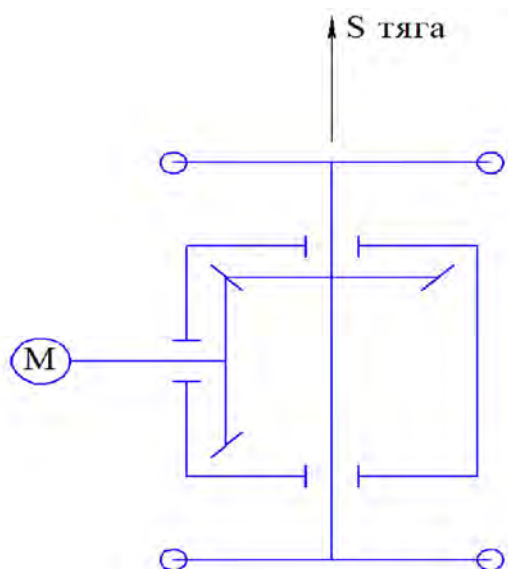


Рисунок 3. – Схема виброинерционного однонаправленного привода

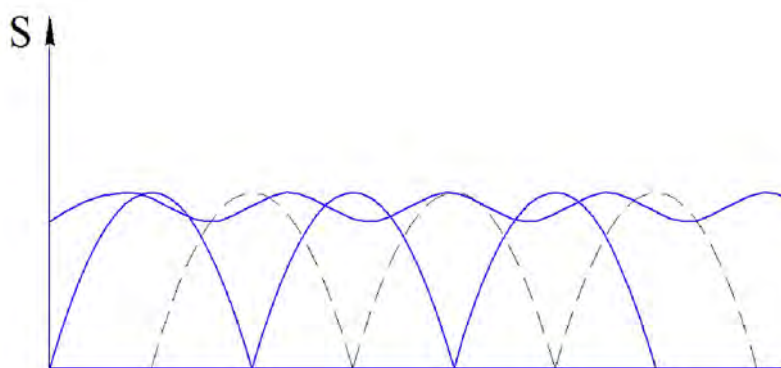


Рисунок 4. – Схема выпрямленных инерционных импульсов



Рисунок 5. – Эскизный проект модернизации вертолета

## РЕЗЮМЕ

Показана возможность создания безреактивных виброинерционных приводов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Балицкий В.А. К обоснованию тягово-инерционного привода колёсно-гусеничных машин // Автотракторостроение. – 1980. – №14. – С 56–60.
2. Балицкий В.А. Автоматическое регулирование тягово–скоростным режимом работы почвообрабатывающих машинно–тракторных агрегатов // Автотракторостроение. – 1981. – №16. – С 76–78.
3. Толчин В.Н. Инерцоид // Пермь. – 1977. – С 100.

## SUMMARY

*Considered constructive and technological issues of improving traction characteristics of mobile machines. The experimental study is consistent with theoretical considerations. The proposed method of increasing the impact of the efforts of the working body on the machines, based on the perturbing forces asymmetric.*

**E-mail:** [mparts@bntu.by](mailto:mparts@bntu.by)

Поступила в редакцию 1.11.2014

## КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

д.т.н. Локтионов А. В.

*УО «Витебский государственный технологический университет», Витебск*

В работах [1, 2] получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня. Для решения использовано уравнение Лагранжа. При этом принято, что на маятник не действует сила тяжести и потенциальная энергия системы равна нулю. Установлено, что при исследовании следует рассматривать сложное движение эллиптического маятника. В работе [3] предложено установить максимальное давление ползуна на горизонтальную плоскость в зависимости от угла отклонения маятника и рассмотреть кинестатический метод расчета уравнения движения малых колебаний маятника.

Рассмотрим эллиптический маятник, который состоит из ползуна А, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и шарика В, подвешенного к ползуну А нерастяжимым стержнем (рисунок 1). Масса ползуна равна  $m_A$ , масса шарика –  $m_B$ , длина стержня –  $l$ .

По расчетной схеме (рисунок 1) принимаем, что в начальный момент  $\varphi = \varphi_0 = 0$ , а угловая скорость  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$ . Найдем с помощью принципа Даламбера [2] закон движения ползуна и шарика в зависимости от заданных начальных условий, при которых  $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 \neq 0$ .

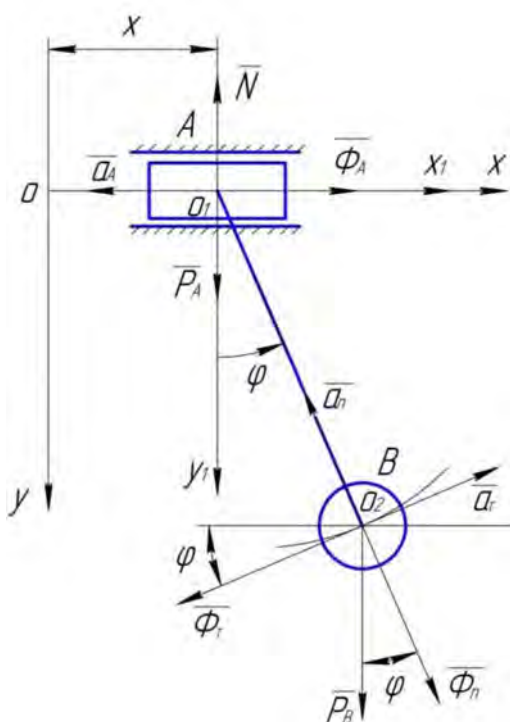


Рисунок 1 – Расчетная схема движения эллиптического маятника

На систему по рисунку 1 действуют силы тяжести  $P_A$ ,  $P_B$  и динамическая реакция  $N$ . Присоединяем к этим силам касательную и нормальную силы инерции  $\Phi_r$  и  $\Phi_n$  и при поступательном движении ползуна – силу инерции  $\Phi_A$ . Полученная система

сил, согласно принципу Даламбера, будет находиться в равновесии. При этом  $\Phi_\tau = m_B a_\tau = m_B \varepsilon l$ ,  $\Phi_n = m_B a_n = m_B \omega^2 l$ ,  $\Phi_A = m_A a_A = m_A \ddot{x}$ .

Уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\sum F_{kx} = \Phi_A - \Phi_\tau \cos \varphi + \Phi_n \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = P_A + P_B - N + \Phi_\tau \sin \varphi + \Phi_n \cos \varphi = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_{o_2}(\vec{F}_k) = P_A l \sin \varphi - N l \sin \varphi - \Phi_A l \cos \varphi = 0. \quad (3)$$

Для расчета реакции  $N$  воспользуемся теоремой о движении центра масс системы в проекции на вертикальную ось  $y$ :

$$M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_y^e = P_1 + P_2 - N, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = m_A g + m_B g - N.$$

Откуда  $N = m_A g + m_B g - M \frac{d^2 y_c}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 y_c}{dt^2}$  найдем из выражения

$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M} = \frac{m_A * 0 + m_B l \cos \varphi}{m_A + m_B} = \frac{m_B l \cos \varphi}{m_A + m_B};$$

$$M \dot{y}_c = m_B l \cos \varphi = m_B l \cos \omega t; \quad M \ddot{y}_c = -m_B l \omega \sin \omega t; \quad M \ddot{y}_c = -m_B l \omega^2 \cos \omega t.$$

Следовательно,  $N = m_A g + m_B g + m_B l \omega^2 \cos \omega t = (m_A + m_B)g + m_B l \omega^2 \cos \omega t$ .

Тогда равенства (1) – (3) принимают вид:

$$m_A \ddot{x}_A - m_B \varepsilon l \cos \varphi + m_B \omega^2 l \sin \varphi = 0, \quad (4)$$

$$m_A g + m_B g - m_A g - m_B g - m_B l \omega^2 \cos \omega t + m_B \varepsilon l \sin \varphi + m_B \omega^2 l \cos \varphi = 0; \quad (5)$$

$$m_A g l \sin \varphi - m_A g l \sin \varphi - m_B g l \sin \varphi - m_B l^2 \omega^2 \cos \omega t * \sin \varphi - m_A \ddot{x} l \cos \varphi = 0. \quad (6)$$

или

$$m_A \ddot{x}_A - m_B \varepsilon l \cos \varphi + m_B \omega^2 l \sin \varphi = 0, \quad (7)$$

$$m_B \varepsilon l \sin \varphi = 0, \quad (8)$$

$$-m_B g l \sin \varphi - m_B l^2 \omega^2 \cos \omega t * \sin \varphi - m_A \ddot{x} l \cos \varphi = 0 \quad (9)$$

Так как при малых колебаниях  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ , равенства (7) – (9) принимают вид:

$$m_A \ddot{x}_A - m_B \varepsilon l + m_B \omega^2 l \varphi = 0, \quad (10)$$

$$m_B l \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0; \quad (11)$$

$$-m_B g l \varphi - (m_B l \omega^2 \varphi) - m_A \ddot{x} l = 0. \quad (12)$$

Из равенства (10)

$$m_B \omega^2 l \varphi = -m_A \ddot{x}_A + m_B \varepsilon l. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим

$$-m_B g l \varphi + (m_A \ddot{x}) l - m_B \varepsilon l^2 - m_A \ddot{x} l = 0. \quad (14)$$

Из равенства (14) следует  $-m_B g l \varphi - m_B \ddot{\varphi} l^2 = 0$ . Тогда  $\ddot{\varphi} l = -g \varphi$ ,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi. \quad (15)$$

Следовательно, дифференциальное уравнение малых колебаний эллиптического маятника с учетом динамической реакции системы имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний маятника имеет вид  $\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования.

С учетом принятых начальных условий: при  $t = t_0 = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = \omega = \omega_0$  получим:  $C_1 = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$ ,  $C_2 = \frac{\omega_0}{k}$ .

Уравнение малых колебаний эллиптического маятника будет иметь вид:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\omega_0}{k} \sin kt.$$

При принятых начальных условиях при  $\varphi = \varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \omega = \omega_0$  получим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\omega_0}{k}.$$

Уравнение свободных колебаний маятника при  $\varphi_0 = 0$  принимает вид:  $\varphi = \frac{\omega_0}{k} \sin kt$ ,

где частота колебаний  $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , а

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \cos kt. \quad (16)$$

Для расчета уравнения движения ползуна маятника подставим (15) в (7)

$$m_A \ddot{x}_A = m_B \left( -\frac{g}{l} \right) \varphi l - m_B \omega^2 l \varphi = 0, \quad (17)$$

а (16) в (17), получим

$$m_A \ddot{x}_A = -m_B g \varphi - m_B (\omega^2 \cos^2 kt) \varphi = 0. \quad (18)$$

Следовательно, дифференциальное уравнение перемещения ползуна эллиптического маятника при  $\omega = \omega_0$  будет иметь вид:

$$\ddot{x}_A = -\frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \varphi, \quad (19)$$

$$\ddot{x}_A = \frac{dV_x}{dt} = -\frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \varphi.$$

Подставляя значения  $\varphi$ , получим:

$$dV_x = -\frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \frac{\omega_0}{k} \sin kt dt.$$

Интегрируя, получим:

$$V_x = \frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \frac{\omega_0}{k^2} \cos kt + C_3.$$

Для ползуна принято, что при  $t = t_0 = 0$ ,  $x = x_0 = 0$ ,  $V_x = V_0 = 0$ , получим:

$$C_3 = -\frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \frac{\omega_0}{k^2}, \quad V_x = \frac{dx}{dt} = \left[ \frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \frac{\omega_0}{k^2} \right] (\cos kt - 1),$$

$$dx = \left[ \frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \frac{\omega_0}{k^2} \right] (\cos kt - 1) dt.$$

Обозначим

$$\left[ \frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \frac{\omega_0}{k^2} \right] = A.$$

Тогда  $dx = A \cos ktdt - A dt$ .

Интегрируя, получим

$$x = \frac{A}{k} \sin kt - At + C_4.$$

Так как при  $t = t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $C_4 = 0$ , получим закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника:

$$x = \frac{A}{k} \sin kt - At = \frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \frac{\omega_0}{k^2} \left( \frac{\sin kt}{k} - t \right) = \frac{m_B}{m_A} (g + \omega_0^2 l) \frac{\omega_0 l}{g} \left( \sqrt{\frac{l}{g}} \sin kt - t \right). \quad (20)$$

### РЕЗЮМЕ

Изложен кинетостатический метод расчета уравнения движения малых колебаний маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения. При этом использована основная форма условий равновесия рассматриваемой механической системы, состоящей из ползуна, шарика и стержня, и принято, что на маятник действуют силы тяжести ползуна и шарика. Для расчета реакции направляющих ползуна использована теорема о движении центра масс системы. Получены уравнение свободных колебаний маятника и закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Локтионов А.В. Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения / А.В. Локтионов, С.А. Сеньков // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-тех. журнал. – Минск, 2011. – №26. – С. 138-143.
2. Локтионов А.В. Расчет уравнения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника / А.В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-тех. сборник. – Минск, 2014. – №29. – С. 290-293.
3. Москалёв С.А. Методы расчета малых колебаний эллиптического маятника/ С.А. Москалёв, А.В. Локтионов// Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности: материалы междунар. науч.-техн. конф. молод. ученых / М-во образования Респ. Беларусь, М-во образования и науки Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2013. – С. 40.

### SUMMARY

*Kinetostatic proposed method for calculating the equations of motion for small oscillations of a pendulum with elliptic given initial angular velocity of its motion, taking account of the severity of the slide and the ball. To calculate the response of the slider guide the mechanical system used theorem about the center of mass motion. We obtain the equation of free oscillations of the pendulum and the elliptic law of motion of the slider, depending on time and given initial angular speed of rotation of the pendulum.*

**E-mail:** [vstu@vitebsk.by](mailto:vstu@vitebsk.by)

Поступила в редакцию 4.05.2014

## РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ КОЛЕСНО-ШАГАЮЩЕГО ДВИЖИТЕЛЯ, ПЕРЕМЕЩАЮЩЕГОСЯ ПО СТУПЕНЯМ

д.т.н. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Проблема реабилитации лиц с ограниченными возможностями включает в себя много факторов. Среди них большую роль играет фактор транспортной мобильности. Как известно, людям с ограниченными возможностями, перемещающимся на инвалидных колясках, постоянно приходится сталкиваться с проблемами преодоления различных препятствий городской среды – прежде всего, лестничных маршей и высоких бордюров. Ранее [1] рассматривались вопросы кинематики колесно-шагающего движителя при движении по лестничным маршам. Тем не менее, остались нерешенными вопросы выбора рациональных конструктивных параметров данного движителя при его использовании как части инвалидной коляски.

Согласно схеме подъема на ступень колесно-шагающего движителя (рисунок 1), обобщенной координатой является угол  $\varphi$  поворота ступицы движителя. Значения координаты  $\varphi$  задаются для того опорного башмака, который вступает в контакт с поверхностью вышестоящей ступени. Для опорного башмака, который должен оторваться от поверхности нижестоящей ступени, угол поворота ступицы принимает значение  $\varphi + 90^\circ$ . При подъеме на ступень, башмак вступает в контакт с опорой при некотором угле  $\varphi = \alpha$ , а отрывается от этой ступени, после окончания своего цикла, при угле  $\varphi = \alpha + 90^\circ$  [1].

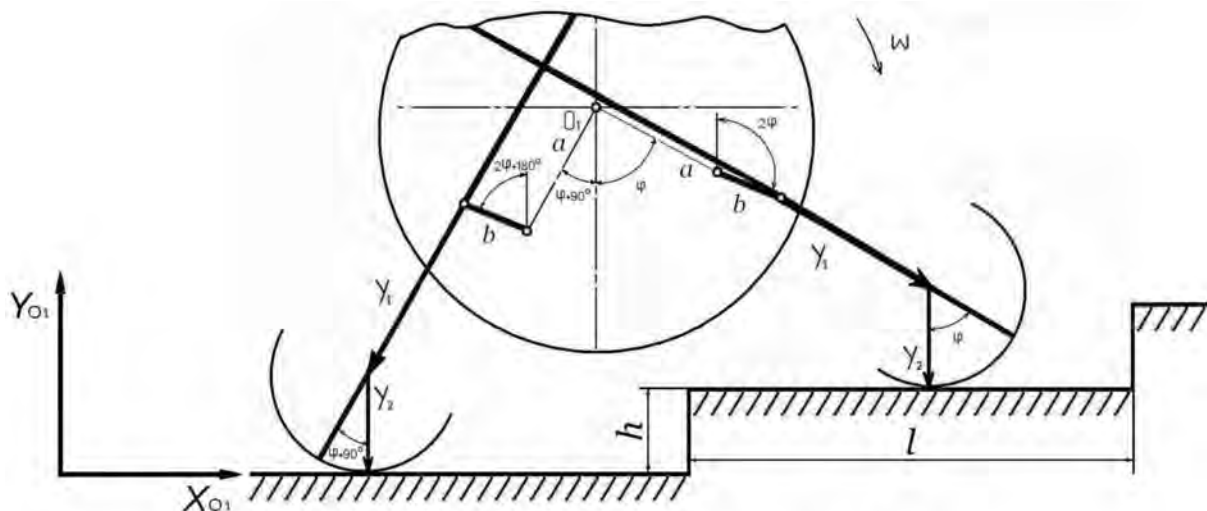


Рисунок 1. – Схема подъема на ступень колесно-шагающего движителя

При спуске со ступени колесно-шагающего движителя (рисунок 2), значения координаты  $\varphi$  задаются для того опорного башмака, который вступает в контакт с поверхностью нижестоящей ступени. Для опорного башмака, который в данный момент должен оторваться от поверхности вышестоящей ступени, угол поворота ступицы равен  $\varphi + 90^\circ$ . Таким образом, при спуске движителя, башмак вступает в контакт с нижестоящей ступенью при некотором угле  $\varphi = \beta$ , а отрывается от ступени при угле  $\varphi = \beta + 90^\circ$ . При этом  $\beta = -90^\circ - \alpha$  [1].

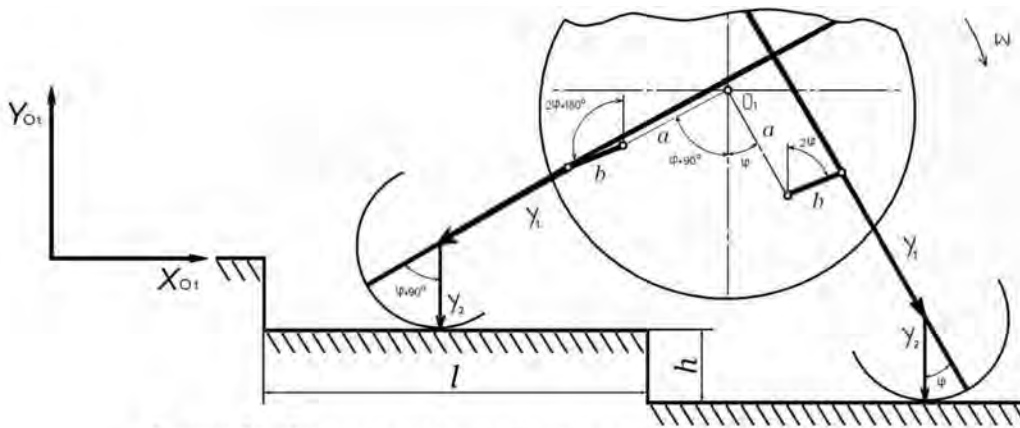


Рисунок 2. – Схема спуска со ступени колесно-шагающего движителя

Используя результаты работы [1], проведем анализ полученных там выражений и выполненных расчетов. При выборе рациональных параметров движителя целесообразно задаться углом вступления башмака на ступень при подъеме  $\alpha = -90^\circ$ , а при спуске  $\beta = 0^\circ$ .

Согласно результатам работы [1], основные размеры движителя  $a$ ,  $b$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ , а также длина ступени  $l$ , высота ступени  $h$  связаны между собой зависимостями:

$$a = 2 \cdot b, \quad (1)$$

$$b = \frac{(Y_2 \cdot \pi/2 - l) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) - h \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)}{2 \cdot (\sin 2\alpha \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) - \cos 2\alpha \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha))}, \quad (2)$$

$$Y_1 = \frac{((Y_2 \cdot \pi/2 - l) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) - h \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)) \cdot (\cos 2\alpha - \cos \alpha - \sin \alpha)}{(\sin 2\alpha \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) - \cos 2\alpha \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)} - \frac{h}{(\cos \alpha + \sin \alpha)}. \quad (3)$$

Поскольку приняли  $\alpha = -90^\circ$ , получаем:

$$b = \frac{l - Y_2 \cdot \pi/2 - h}{2}, \quad (4)$$

$$Y_1 = h. \quad (5)$$

Далее, запишем выражение аналога скорости по горизонтали [1]:

$$\frac{dX_{01}}{d\varphi} = (a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2. \quad (6)$$

Зададимся для угла  $\varphi = -90^\circ$  следующим условием:

$$\frac{dX_{01}}{d\varphi} = (a + Y_1) \cdot \cos(-90^\circ) + 2 \cdot b \cdot \cos(-180^\circ) + Y_2 = 0. \quad (7)$$

Отсюда получим:

$$Y_2 = 2 \cdot b. \quad (8)$$

Используя формулы (1, 4, 8), после преобразований получим:

$$Y_2 = \frac{l - h}{1 + \pi/2}, \quad (9)$$

$$a = \frac{l - h}{1 + \pi/2}, \quad (10)$$

$$b = \frac{l - h}{2 + \pi}. \quad (11)$$

Для длины ступени  $l = 0,3$  м, высоты ступени  $h = 0,15$  м, характерных для подъездов жилых домов, проведем расчеты по формулам (5, 9-11):



$$Y_1 = h = 0,15 \text{ м}, Y_2 = \frac{l-h}{1+\pi/2} = \frac{0,3 \text{ м} - 0,15 \text{ м}}{1+3,14/2} = 0,05834 \text{ м},$$

$$a = \frac{l-h}{1+\pi/2} = \frac{0,3 \text{ м} - 0,15 \text{ м}}{1+3,14/2} = 0,05834 \text{ м},$$

$$b = \frac{l-h}{2+\pi} = \frac{0,3 \text{ м} - 0,15 \text{ м}}{2+3,14} = 0,02917 \text{ м}.$$

С округлениями примем  $Y_1 = 0,15 \text{ м}$ ,  $Y_2 = 0,058 \text{ м}$ ,  $a = 0,058 \text{ м}$ ,  $b = 0,029 \text{ м}$ . Выполним расчет кинематики движителя для полученных значений  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $a$ ,  $b$ , для значений углов  $\alpha = -90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ , используя приведенные ниже формулы [1].

Горизонтальное перемещение оси ступицы при подъеме:

$$X_{01} = ((a + Y_1) \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin 2\varphi + Y_2 \cdot \varphi) - ((a + Y_1) \cdot \sin \alpha + b \cdot \sin 2\alpha + Y_2 \cdot \alpha). \quad (12)$$

Горизонтальное перемещение оси ступицы при спуске:

$$X_{01} = ((a + Y_1) \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin 2\varphi + Y_2 \cdot \varphi) - ((a + Y_1) \cdot \sin \beta + b \cdot \sin 2\beta + Y_2 \cdot \beta). \quad (13)$$

Аналог скорости по горизонтали:

$$\frac{dX_{01}}{d\varphi} = (a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2. \quad (14)$$

Аналог ускорения по горизонтали:

$$\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2} = -(a + Y_1) \cdot \sin \varphi - 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (15)$$

Вертикальное положение оси ступицы:

$$Y_{01} = (a + Y_1) \cdot \cos \varphi - b \cdot \cos 2\varphi + Y_2. \quad (16)$$

Аналог скорости по вертикали:

$$\frac{dY_{01}}{d\varphi} = -(a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 2 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (17)$$

Аналог ускорения по вертикали:

$$\frac{d^2 Y_{01}}{d\varphi^2} = -(a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 4 \cdot b \cdot \cos 2\varphi. \quad (18)$$

Используя формулы (12–18) выполним расчет кинематики движителя при подъеме и спуске со ступени. В формулы (12, 13) значения углов  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  следует подставлять в радианах. Результаты расчетов заносим в таблицы 1, 2.

Таблица 1. Кинематика колесно-шагающего движителя при подъеме по ступени

$\varphi$ , градусы	$X_{01}$ , м	$\frac{dX_{01}}{d\varphi}$ , м	$\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2}$ , м	$Y_{01}$ , м	$\frac{dY_{01}}{d\varphi}$ , м	$\frac{d^2 Y_{01}}{d\varphi^2}$ , м
-90	0,0000	0,0000	0,2080	0,0870	0,2080	-0,1160
-80	0,0034	0,0396	0,2445	0,1214	0,1850	-0,1451
-70	0,0141	0,0847	0,2700	0,1514	0,1582	-0,1600
-60	0,0331	0,1330	0,2806	0,1765	0,1299	-0,1620
-50	0,0606	0,1816	0,2736	0,1967	0,1022	-0,1538
-40	0,0964	0,2274	0,2479	0,2123	0,0766	-0,1392
-30	0,1396	0,2671	0,2045	0,2236	0,0538	-0,1221
-20	0,1891	0,2979	0,1457	0,2312	0,0339	-0,1066
-10	0,2429	0,3173	0,0758	0,2356	0,0163	-0,0958
0	0,2991	0,3240	0,0000	0,2370	0,0000	-0,0920

Таблица 2. Кинематика колесно-шагающего движителя при спуске со ступени

$\varphi$ , градусы	$X_{01}$ , м	$\frac{dX_{01}}{d\varphi}$ , м	$\frac{d^2X_{01}}{d\varphi^2}$ , м	$Y_{01}$ , м	$\frac{dY_{01}}{d\varphi}$ , м	$\frac{d^2Y_{01}}{d\varphi^2}$ , м
0	0,0000	0,3240	0,0000	0,2370	0,0000	-0,0920
10	0,0562	0,3173	-0,0758	0,2356	-0,0163	-0,0958
20	0,1100	0,2979	-0,1457	0,2312	-0,0339	-0,1066
30	0,1595	0,2671	-0,2045	0,2236	-0,0538	-0,1221
40	0,2028	0,2274	-0,2479	0,2123	-0,0766	-0,1392
50	0,2385	0,1816	-0,2736	0,1967	-0,1022	-0,1538
60	0,2660	0,1330	-0,2806	0,1765	-0,1299	-0,1620
70	0,2850	0,0847	-0,2700	0,1514	-0,1582	-0,1600
80	0,2957	0,0396	-0,2445	0,1214	-0,1850	-0,1451
90	0,2991	0,0000	-0,2080	0,0870	-0,2080	-0,1160

Исходя из приведенных в таблицах 1, 2 результатов расчетов можно сделать вывод, что перемещение движителя по лестничным ступеням сопровождается значительными колебаниями скорости и ускорения, которые носят характер скачков при смене опорных башмаков. Кроме того, вычисленные параметры движителя подходят для подъема и спуска по ступеням, но совершенно не подходят для движения по плоской поверхности.

Для решения этого противоречия следует использовать поворачивающиеся на  $90^\circ$  на стойках ног башмаки. Соответственно, и профиль башмаков должен быть различным в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Перед началом движения по ступеням производится поворот башмаков на  $90^\circ$  вокруг оси ног в одну сторону, а затем, перед движением по плоской поверхности, производится поворот башмаков на  $90^\circ$  в обратную сторону. Для более быстрого осуществления поворота, целесообразно установить внутри ноги штоки (по одному на каждый башмак), на наружных концах которых будут крепиться башмаки, а на внутренних концах штоков установить конические шестерни. С помощью зацепления за эти шестерни следует осуществлять поворот башмаков.

При значениях функций  $Y_1$ ,  $Y_2$  согласно [2], получаем для предназначенного для движения по плоской поверхности профиля башмаков:

$$Y_1 = 4 \cdot b \cdot \cos \varphi - a, \quad (19)$$

$$Y_2 = a - 2 \cdot b \cdot (1 + \cos^2 \varphi) + c, \quad (20)$$

$$X_{01} = (a - b + c) \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \cdot b + (a - b + c) \cdot \varphi + \frac{3}{2} \cdot b \cdot \sin 2\varphi, \quad (21)$$

$$\frac{dX_{01}}{d\varphi} = a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi, \quad (22)$$

$$\frac{d^2X_{01}}{d\varphi^2} = -6 \cdot b \cdot \sin 2\varphi, \quad (23)$$

$$Y_{01} = a - b + c = \text{const}, \quad (24)$$

$$\frac{dY_{01}}{d\varphi} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{d^2Y_{01}}{d\varphi^2} = 0. \quad (26)$$

Вычислим значения кинематических характеристик движителя для величин угла поворота ступицы  $-45^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$ . Воспользуемся формулами (19-26) при следующих

значениях конструктивных параметров движителя: расстояние между осями вращения ступицы и кривошипов  $a = 0,058$  м, длина кривошипа  $b = 0,029$  м, длина стойки башмака  $c = 0,208$  м. Значения угла поворота ступицы  $\theta$  в формулу (21) подставляются в радианах, во все остальные формулы – в градусах. Результаты вычислений заносятся в таблицу 3.

Таблица 3. Кинематические характеристики движителя при движении по плоской поверхности

$\theta$ , градусы	$Y_1$ , м	$Y_2$ , м	$X_{01}$ , м	$\frac{dX_{01}}{d\varphi}$ , м	$\frac{d^2X_{01}}{d\varphi^2}$ , м	$Y_{01}$ , м	$\frac{dY_{01}}{d\varphi}$ , м	$\frac{d^2Y_{01}}{d\varphi^2}$ , м
-45	0,0240	0,1790	0,0000	0,2370	0,1740	0,2370	0,0000	0,0000
-40	0,0309	0,1740	0,0213	0,2521	0,1714	0,2370	0,0000	0,0000
-35	0,0370	0,1691	0,0440	0,2668	0,1635	0,2370	0,0000	0,0000
-30	0,0425	0,1645	0,0679	0,2805	0,1507	0,2370	0,0000	0,0000
-25	0,0471	0,1604	0,0929	0,2929	0,1333	0,2370	0,0000	0,0000
-20	0,0510	0,1568	0,1189	0,3036	0,1118	0,2370	0,0000	0,0000
-15	0,0540	0,1539	0,1458	0,3123	0,0870	0,2370	0,0000	0,0000
-10	0,0562	0,1517	0,1734	0,3188	0,0595	0,2370	0,0000	0,0000
-5	0,0576	0,1504	0,2014	0,3227	0,0302	0,2370	0,0000	0,0000
0	0,0580	0,1500	0,2296	0,3240	0,0000	0,2370	0,0000	0,0000
5	0,0576	0,1504	0,2579	0,3227	-0,0302	0,2370	0,0000	0,0000
10	0,0562	0,1517	0,2859	0,3188	-0,0595	0,2370	0,0000	0,0000
15	0,0540	0,1539	0,3134	0,3123	-0,0870	0,2370	0,0000	0,0000
20	0,0510	0,1568	0,3403	0,3036	-0,1118	0,2370	0,0000	0,0000
25	0,0471	0,1604	0,3664	0,2929	-0,1333	0,2370	0,0000	0,0000
30	0,0425	0,1645	0,3914	0,2805	-0,1507	0,2370	0,0000	0,0000
35	0,0370	0,1691	0,4153	0,2668	-0,1635	0,2370	0,0000	0,0000
40	0,0309	0,1740	0,4379	0,2521	-0,1714	0,2370	0,0000	0,0000
45	0,0240	0,1790	0,4593	0,2370	-0,1740	0,2370	0,0000	0,0000

Профиль башмака, предназначенный для движения по плоской поверхности, обеспечивает постоянство вертикальной координаты оси ступицы [2]. Далее, на основании зависимостей (27) следует вычислить координаты  $X$  и  $Y$  точек профиля башмака.

$$\begin{cases} X = Y_2 \cdot \sin \varphi, \\ Y = Y_1 + Y_2 \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (27)$$

Также важно, чтобы координаты профиля были выражены через радиус-вектор  $\rho$  и угол его поворота  $\alpha$ , который отсчитывается от оси симметрии башмака. Эти величины можно вычислить по следующим формулам:

$$\alpha = \arctg(X/Y), \quad (28)$$

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (29)$$

Исходя из работы [3], радиус кривизны профиля башмака находится как:

$$R(\varphi) = Y_2 - \frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi. \quad (30)$$

Используя выражения (19, 20), представим формулу (30) в следующем виде:

$$R(\varphi) = a + c - b \cdot (6 \cdot \cos^2 \varphi - 2). \quad (31)$$

Результаты вычислений профиля башмака по формулам (19, 20, 27-29, 31) занесем в таблицу 4.

Таблица 4. Геометрические параметры рационального профиля башмака

$\theta$ , градусы	$Y_1$ , м	$Y_2$ , м	$X$ , м	$Y$ , м	Угол поворота $\alpha$ , градусы	Радиус-вектор $\rho$ , м	Радиус кривизны $R(\varphi)$ , м
-45	0,0240	0,1790	-0,1266	0,1506	-40,05	0,1967	0,2370
-40	0,0309	0,1740	-0,1118	0,1641	-34,27	0,1986	0,2219
-35	0,0370	0,1691	-0,0970	0,1755	-28,92	0,2005	0,2072
-30	0,0425	0,1645	-0,0823	0,1849	-23,98	0,2024	0,1935
-25	0,0471	0,1604	-0,0678	0,1925	-19,40	0,2040	0,1811
-20	0,0510	0,1568	-0,0536	0,1983	-15,13	0,2055	0,1704
-15	0,0540	0,1539	-0,0398	0,2027	-11,12	0,2066	0,1617
-10	0,0562	0,1517	-0,0264	0,2057	-7,30	0,2074	0,1552
-5	0,0576	0,1504	-0,0131	0,2074	-3,62	0,2078	0,1513
0	0,0580	0,1500	0,0000	0,2080	0,00	0,2080	0,1500
5	0,0576	0,1504	0,0131	0,2074	3,62	0,2078	0,1513
10	0,0562	0,1517	0,0264	0,2057	7,30	0,2074	0,1552
15	0,0540	0,1539	0,0398	0,2027	11,12	0,2066	0,1617
20	0,0510	0,1568	0,0536	0,1983	15,13	0,2055	0,1704
25	0,0471	0,1604	0,0678	0,1925	19,40	0,2040	0,1811
30	0,0425	0,1645	0,0823	0,1849	23,98	0,2024	0,1935
35	0,0370	0,1691	0,0970	0,1755	28,92	0,2005	0,2072
40	0,0309	0,1740	0,1118	0,1641	34,27	0,1986	0,2219
45	0,0240	0,1790	0,1266	0,1506	40,05	0,1967	0,2370

Таким образом, предложенная конструкция опорного башмака в сочетании с вычисленными рациональными параметрами колесно-шагающего движителя обеспечивает перемещение инвалидной коляски по лестничным маршам и по плоской поверхности.

### РЕЗЮМЕ

Описана методика расчета рациональных параметров колесно-шагающего движителя при его движении по ступеням лестницы и по плоской поверхности. Данная методика применима при проектировании средств передвижения для лиц с ограниченными возможностями.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Кинематика колесно-шагающего движителя, перемещающегося по ступеням // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Выпуск 29. 2014. – С. 100–104.
2. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя // Наука и техника. Международный научно-технический журнал. 2013. № 6. – С. 38–42.
3. Жуковец В.Н. Профиль плоского кулачка в виде замкнутой кривой, описанной системой уравнений в параметрическом виде. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2006. № 1. С. 76–86.

### SUMMARY

*The paper describes method of calculating rational parameters of wheel-step mover in its motion along the stair steps and on the flat surface. The given method is applicable in design of vehicles for persons with disabilities.*

**E-mail:** [zhukavets@mail.ru](mailto:zhukavets@mail.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЕВИАТОРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

к.т.н. Холодарь Б.Г.

УО «Брестский государственный технический университет», Брест

При рассмотрении напряжено-деформированного состояния материала в точке нагруженного тела выделяют шаровую и девиаторную компоненты соответствующих тензоров. Шаровая деформация определяется как средняя  $\varepsilon_o = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$  и характеризует однородное расширение-сжатие материала. Компоненты тензора-девиатора деформаций характеризуют сдвиговое деформирование элементарного объема, сопровождающееся изменением его формы.

Ниже обсуждаются некоторые особенности связи между шаровой и девиаторной компонентами деформаций.

I. Формоизменение материала складывается из двух составляющих – формоизменения, проходящего при сохранении первоначально прямых углов элементарного параллелепипеда и характеризуемого диагональными компонентами тензора-девиатора (ортогональное формоизменение), и формоизменения, связанного с искажением этих углов и соответствующего внедиагональным компонентам тензора (угловое формоизменение).

Вырежем в некоторой точке тела элементарный объем в виде кубика со стороной  $da$ , боковые грани которого ориентированы перпендикулярно осям координат. Центр этого кубика обозначим точкой  $O$ . Ось  $\bar{\Omega}$ , равнонаклоненная к осям  $XYZ$ , пройдет через эту точку по ребру пентаэдра, построенного на одной из граней кубика. Для определенности выберем в качестве этой грани элементарную площадку, принадлежащую плоскости  $XY$ .

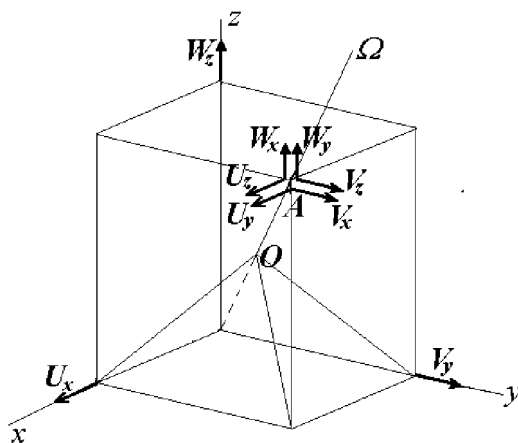


Рисунок 1. – Элементарный кубик и пентаэдр

Перемещения точек будем понимать как деформационные, не содержащие переносных смещений (рисунок 1). Перемещения точки  $A$  за счет осевых деформаций обозначены как  $U_x, V_y, W_z$ , где  $U_x = \partial U / \partial x \cdot da = \varepsilon_x \cdot da$ ,  $V_y = \varepsilon_y \cdot da$ ,  $W_z = \varepsilon_z \cdot da$  (показаны на осях координат). Девиаторная часть перемещений, соответствующая нормальным деформациям, составляет  $\delta x_\varepsilon = (2\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z)/3 \cdot da$ ,  $\delta y_\varepsilon = (2\varepsilon_y - \varepsilon_x - \varepsilon_z)/3 \cdot da$ ,  $\delta z_\varepsilon = (2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y)/3 \cdot da$ , а соответствующая сдвиговым деформациям –  $\delta x_\gamma = U_y + U_z$ ,  $\delta y_\gamma = V_x + V_z$ ,  $\delta z_\gamma = W_x + W_y$ , где  $U_y = \partial U / \partial y \cdot da$  и т.д. Полные девиаторные перемещения точки  $A$  по осям составляют  $\delta x = \delta x_\varepsilon + \delta x_\gamma$ ,  $\delta y = \delta y_\varepsilon + \delta y_\gamma$ ,  $\delta z = \delta z_\varepsilon + \delta z_\gamma$ . Перемещения центральной точки  $O$  кубика (вершины пентаэдра) равны половине от перемещений точки  $A$ .

Смещение точки  $O$ , соответствующее нормальным компонентам девиатора, происходит в равнонаклоненной плоскости, перпендикулярной оси  $\bar{\Omega}$ . Это следует из определения скалярного произведения вектора  $\bar{\Delta} = \delta\bar{x}_e + \delta\bar{y}_e + \delta\bar{z}_e$  на орт  $\bar{l} = (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})/\sqrt{3}$  оси  $\bar{\Omega}$ , поскольку  $\delta x_e + \delta y_e + \delta z_e = 0$  ( $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – орты осей координат элемента). Объем пентаэдра при этом не изменяется.

Если оси  $XYZ$  совпадают с осями главных деформаций, то сдвиговое смещение вершины пентаэдра полностью принадлежит октаэдрической плоскости (вектор  $\bar{T}_{10} = \overline{OM}_0$  на рисунок2а,  $OM_0 = \sqrt{(U_x - V_y)^2 + (V_y - W_z)^2 + (W_z - U_x)^2} / \sqrt{12}$ ). Квадрат этого смещения равен половине величины второго инварианта девиатора деформаций. Полное смещение вершины пирамидки  $\overline{OC} = \overline{OM}_0 + \overline{M}_0C$ , где  $M_0C = T_{n0} = \varepsilon_0 \cdot da \sqrt{3}/2$  – радиальное смещение точки  $O$  вдоль оси  $\bar{\Omega}_0$ .

Если элементарный объем вырезан в осях  $XYZ$  общего положения, причем так, что точка  $O$  остается зафиксированной на прежнем месте, то вектор девиаторного смещения точки  $O$  представится суммой двух компонент – вектора  $\overline{OM}$ , соответствующего ортогональному формоизменению и лежащего в равнонаклоненной плоскости, и вектора, соответствующего угловому формоизменению. Последний разложим на две компоненты – вектор  $\overline{MK}$ , также принадлежащий равнонаклоненной плоскости, и вектор  $\bar{T}_n = \overline{KL}$ , ей перпендикулярный. Вектор  $\bar{T}_t = \overline{OK} =$

$= \overline{OM} + \overline{MK}$  дает для выбранного элемента смещение точки  $O$  в равнонаклоненной плоскости, а вектор  $\bar{T}_n$  вместе с шаровым, совпадающим по направлению с выбранной осью  $\bar{\Omega}$ , дает смещение  $\overline{KC}$ , перпендикулярное этой плоскости. Так как вектор смещения точки  $C$  является инвариантом, то всегда  $\overline{OM} + \overline{MK} + \overline{KL} + \overline{LC} = \overline{OC}$ .

Равнонаклоненные плоскости для выбираемых кубиков можно представить как плоскости, повернутые вокруг вершины  $O$  пентаэдра, построенного на осях главных деформаций, что отражается углом  $\varphi$  между осями  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_0$ . Исходя из того, что треугольник  $OKC$  является прямоугольным, можно построить диаграммы возможных векторов девиаторных деформаций (перемещений) при изменении угла  $\varphi$ .

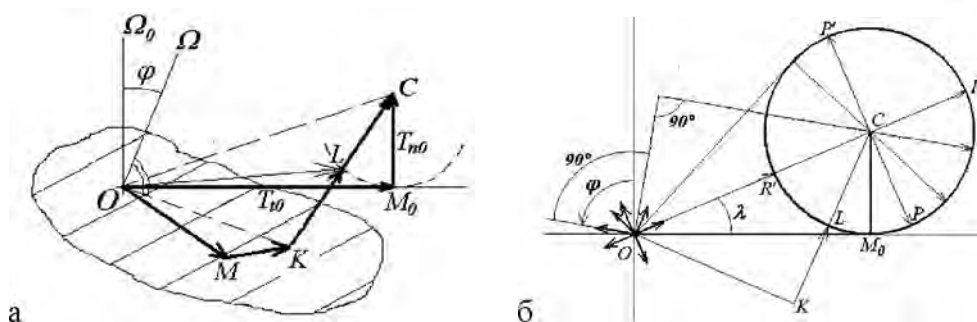


Рисунок 2. а - Равнонаклоненная плоскость и компоненты смещений; б - Диаграммы девиаторных деформаций

Несколько таких диаграмм построены на рисунок2б. Стрелками возле точки  $O$  показано направление нормалей к площадкам, отклоненных от оси  $\bar{\Omega}_0$  на выбранные углы  $\varphi$ . Перпендикулярно им отложены отрезки  $OK = T_t$ , а вдоль нормалей – отрезки  $KL = T_n$  до пересечения с окружностью радиуса  $T_{n0}$  в точке, откуда вектор шарового перемещения точки  $O$  направлен к центру  $C$  вдоль положительного направления выбранной нормали.

Используя рисунок2б, находим выражения для  $T_t, T_n, T$ :

$$\begin{aligned}
T_t &= T_{t0} \cos \varphi + T_{n0} \sin \varphi \\
T_n &= T_{t0} \sin \varphi + T_{n0} (1 - \cos \varphi) \\
T^2 &= T_{t0}^2 + 2T_{n0}^2 + 2T_{n0} (T_{t0} \sin \varphi - T_{n0} \cos \varphi)
\end{aligned}$$

Годографом вектора  $\overline{T} = \overline{OL}$  служит окружность радиуса  $T_{n0}$  с центром в точке  $C$ , годографом вектора  $\overline{T}_i$  – окружность, построенная на  $OC$  как на диаметре, годографом  $\overline{T}_n$  – кривая типа кордоиды. При  $\varphi < \pi$  изображающая точка  $L$  движется по правой от  $M_0$  полусфере, при  $\varphi > \pi$  – по левой. Длина вектора  $\overline{T}$  меняется от минимального значения  $T^{min} = \sqrt{T_{t0}^2 + T_{n0}^2} - T_{n0}$  при  $\varphi = 3\pi/2 + \lambda$  до максимального  $T^{max} = OR = \sqrt{T_{t0}^2 + T_{n0}^2} + T_{n0}$  при  $\varphi = \pi/2 + \lambda$ . Векторы  $\overline{T}_n$  и  $\overline{T}_i$  изменяются от нуля до своих максимальных значений, которые составляют соответственно  $T_i^{max} = \sqrt{T_{t0}^2 + T_{n0}^2}$  (при  $\varphi = \lambda$  и  $\varphi = \pi + \lambda$ ) и  $T_n^{max} = T^{max}$ .

Построенные векторные диаграммы являются обобщенными, позволяя охарактеризовать деформированное состояние материала в рассматриваемой точке вдоль любого заданного направления непосредственно в виде девиаторной и шаровой составляющих. Из диаграмм следует, что вектор девиаторного формоизменения  $\overline{T}$  зависит от шаровой деформации и может значительно превосходить вектор ортогонального формоизменения. Для углов  $\varphi = \pi/2 + \lambda$  и  $\varphi = 3\pi/2 + \lambda$  девиаторное перемещение равно соответственно максимальному и минимальному равномерному угловому перемещению, а полное деформационное перемещение равно сумме двух равномерных смещений (углового и объемного). Равномерное угловое формоизменение превращает кубик в трехмерный ромб, вытянутый вдоль оси  $\overline{\Omega}$ . Как видим, максимальное формоизменение не связано с площадками главных касательных напряжений или октаэдрическими площадками, а определяется углом  $\lambda$ .

Лежащие на оси  $\overline{OC}$  векторы максимальной угловой и шаровой деформаций можно рассматривать как деформационный винт по аналогии с кинематическим винтом в теоретической механике. Такая структура полностью характеризует деформированное состояние в точке тела.

Поскольку течение материала связано именно с формоизменением, то из представленного выше следует, что наиболее интенсивно оно идет по поверхности конуса с осью  $\overline{\Omega}_0$  и углом полураствора  $\pi/2 - \lambda$ . Основываясь на этом, можно сформулировать следующий критерий перехода материала в состояние текучести (критерий максимального формоизменения): началу течения соответствует достижение максимальным девиаторным перемещением  $OR$  своего предельного уровня  $T_p$ .

Этот уровень может быть установлен из опыта на одномерное растяжение образца до деформации, соответствующей пределу текучести (пропорциональности) материала.

Поскольку для одноосного растяжения  $T_{n0} = \frac{1-2\mu}{3} \varepsilon_1$ ,  $T_{t0} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (1+\mu) \varepsilon_1$ , то

$$T_p^2 = \frac{1}{18} \left[ (1+\mu)^2 + 4(1-2\mu)^2 + 2\sqrt{2}(1+\mu)(1-2\mu) \right] \frac{\sigma_T^2}{E^2}, \quad (1)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\sigma_T$  – предел текучести,  $E$  – модуль упругости материала.

Для случая плоского напряженного состояния ( $\sigma_3 = 0$ ) изотропного тела

$$T_{n0} = \frac{(1-\mu)^2}{3} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E}; \quad T_{i0}^2 = \frac{I}{18} \left\{ \left[ (1+m+m^2)(1-m)^2 + 3m \right] (s_1 + s_2)^2 - 3(1+m)^2 s_1 s_2 \right\} \frac{I}{E^2},$$

и критерий в безразмерной форме ( $S = \sigma/\sigma_T$ ) принимает вид:

$$k_2(S_1^2 + S_2^2) + (2k_2 - 3(1+\mu)^2)S_1S_2 + 2\sqrt{2}(1-\mu)^2 \sqrt{k_1(S_1^2 + S_2^2) + (2k_1 - 3(1+\mu)^2)S_1S_2} (S_1 + S_2) = B^2, \quad (2)$$

где  $k_1 = (1+\mu+\mu^2)(1-\mu)^2 + 3\mu$ ,  $k_2 = k_1 + 4(1-\mu)^4$ ,  $B$  – скобка в выражении (1).

Уравнение (2) приводится к квадратному при замене переменных  $U = (S_2 + S_1)^2/2$ ,  $V = (S_2 - S_1)^2/2$ . Критерий существенно зависит от  $\mu$ , и для  $0 \leq \mu \leq 0.5$  представлен в виде кривых на рисунок 3а. Видно, что для  $\mu$ , характерных для типичных металлов, при  $S_1 \cdot S_2 > 0$  кривые располагаются внутри области, ограниченной критерием Мизеса. При  $\mu = 0.5$  критериальная кривая имеет общую точку  $S_1 = -S_2 = 1/\sqrt{3}$  с эллипсом Мизеса. Эти значения  $\mu$  и  $S$  соответствуют состоянию течения материала при чистом сдвиге.

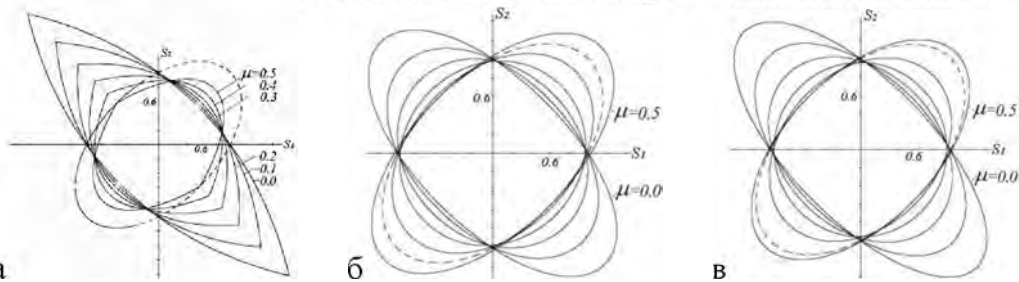


Рисунок 3. Критерий зарождения текучести (а) и критерии развитой текучести (б - линейное осреднение, в - квадратичное осреднение); пунктирная линия - критерий Мизеса

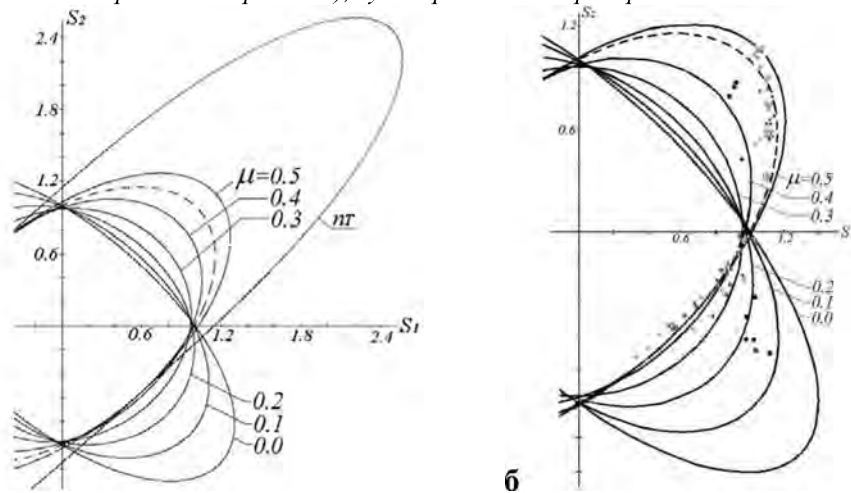


Рисунок 4. а - Кривая полной текучести (индекс "нт"), б - Сравнение с данными экспериментов для чугуна, стали, меди, никеля, алюминия (показаны точками по [1])

Критерий (2) отражает момент зарождения текучести материала в данной точке, и для описания развитого течения склерономного тела его простейшим образом можно модифицировать, используя осреднение по всем равнонаклоненным площадкам, что в нашем случае выразится в виде интегралов  $\oint OLd\varphi$  или  $\oint OL^2d\varphi$  при  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . При этом среднеквадратическое осреднение сводится к выражению  $T = \sqrt{T_{i0}^2 + 2T_{n0}^2}$  и представляется на диаграмме отрезками  $OP$  и  $OP'$ , а уравнение (2) преобразуется к виду:

$$S_1^2 + S_2^2 + 2\frac{k_3}{k_2}S_1S_2 = \frac{D^2}{k_2}, \quad (3)$$



где  $k_3 = k_2 - \frac{3}{2}(1 + \mu)^2$ ,  $D^2 = (1 + \mu)^2 + 4(1 - 2\mu)^2$ .

Результаты применения осреднений и их соответствие известным экспериментальным данным иллюстрируются рисунок3 и рисунок4. Как видим, форма критерия с квадратическим осреднением при  $\mu=0.5$  достаточно хорошо согласуется с опытными данными [1,2], которые фиксируют именно развитую текучесть в конечном объеме упруго-пластического материала при заданном уровне остаточных деформаций. Группировку экспериментальных точек для разнородных материалов между кривыми  $\mu=0.4$  и  $\mu=0.5$  можно связать с тем, что при переходе материала за предел пропорциональности коэффициент Пуассона быстро увеличивается, стремясь к своему предельному значению  $\mu=0.5$  [2], соответствующему жидкотекучему состоянию материала. Близостью критерия Мизеса к предельной кривой  $\mu=0.5$  объясняется, на наш взгляд, его универсальность, выражающаяся в использовании его в качестве критерия текучести при  $S=\sigma/\sigma_T$  и в качестве критерия прочности при  $S=\sigma/\sigma_B$ . Особенностью хода кривых в зоне  $S_1 \cdot S_2 < 0$  является удаление их от кривой Мизеса (увеличение выпуклости) с уменьшением коэффициента Пуассона, что отвечает результатам испытаний материалов разной хрупкости [1].

Диаграмма дает возможность более полного представления о деформированном состоянии материала в точке тела, позволяя оценивать относительную долю  $\omega$  объема материала вокруг нее, перешедшего в состояние текучести (незаштрихованная часть объема сферы  $C$  на рисунок5а), и более обосновано подойти к определению величин допускаемых нагрузок.

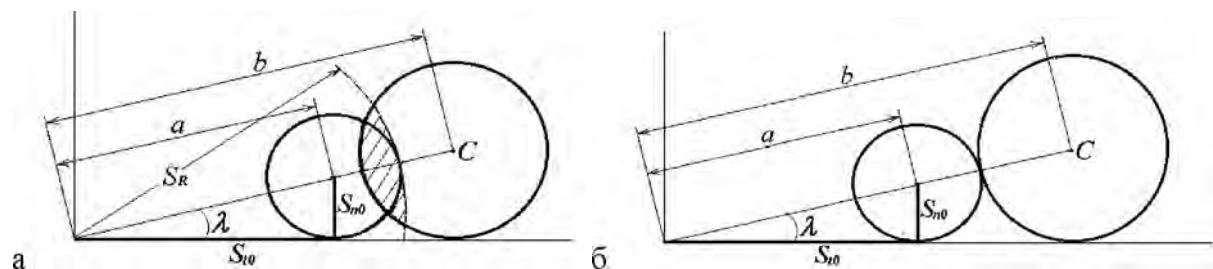


Рисунок 5. а - Частичная текучесть в точке ( $1 < n < n_k$ ), - упругая  $S < S_R$  и неупругая  $S > S_R$  зоны работы материала; б - Полная текучесть ( $n = n_k$ )

Например, если при заданном  $\lambda = \text{arctg}(T_{n0}/T_{10})$  достигнут уровень зарождения текучести при нагрузке  $P_n$ , то при сохранении режима пропорционального нагружения весь объем материала перейдет в пластическое состояние при нагрузке полной текучести, равной  $P_k = P_n \frac{b}{a} = P_n \frac{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \lambda + 1}}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \lambda - 1}}$ . Обозначив  $n_k = P_k/P_n$ , найдем для него

несколько значений, учитывая также, что при этом  $\mu=0.5$ :  $\lambda=0^\circ - n_k=1.0$ ,  $\lambda=15^\circ - n_k \approx 1.7$ ,  $\lambda=30^\circ - n_k \approx 3.0$ ,  $\lambda=45^\circ - n_k \approx 5.8$ ,  $\lambda=60^\circ - n_k \approx 13.9$ . Судя по этим числам, полная текучесть для многих материалов и напряженных состояний при нормальных температурах является недостижимой. Для случая плоского напряженного состояния это видно по кривой с индексом "н" на рисунок4 – при двухосном растяжении имеем  $S_1=S_2 \approx 2.5$ , что не реализуется экспериментально. Кривые  $n_k(\lambda)$  и  $\omega(n, \lambda)$  показаны на рисунокб.

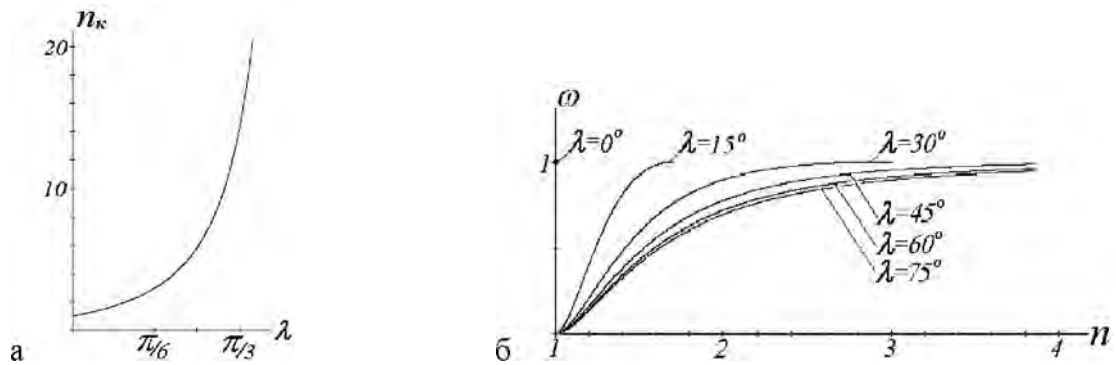


Рисунок 6. а - Коэффициент полной пластичности  $n_k(\lambda)$ ; б - Коэффициент относительного неупругого объема  $\omega(n, \lambda)$  в точке тела

Естественно, приведенные оценки ограничены, поскольку связь между напряжениями и деформациями была выражена соотношениями обобщенного закона Гука, но сами исходные представления не противоречат возможности использования нелинейных зависимостей между интенсивностями деформаций и напряжений, принятыми в теории пластичности. Допустимо предположить, что коэффициент  $\omega(n, \lambda)$  может быть положен в основу построения критерия разрушения склерономных упруго-пластических материалов.

Следствием данного рассмотрения является возможность обоснования более сложных критериев, используемых для описания процессов деформирования и накопления поврежденности реономных материалов, поскольку скорости этих процессов контролируются достигнутым уровнем снижения их энергий активации, зависящим, в свою очередь, от инвариантов напряженно-деформированного состояния. При описании течения материалов используется энергия активации девиаторных компонент деформаций, при описании развития поврежденности – энергии активации шаровой и девиаторной компонент поврежденности [3,4]. С аналогичных позиций можно подойти и построению критерия прочности склерономного анизотропного материала [5].

II. Изменение углов поворота в механике связывают с действием моментов, но в случае углового формоизменения следует, очевидно, говорить о действии силовых факторов в виде некоторых бимоментов сдвига. В механике сплошной среды такие бимоменты обеспечиваются действием касательных напряжений, подчиненных закону парности ( $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{xz}$ ). Бимомент, соответствующий максимальному равномерному угловому формоизменению, и среднее объемное напряжение образуют деформационную динаму – силовой аналог деформационного винта. При этом бимомент связан с изменением телесного угла в точке А.

При равномерном угловом формоизменении сдвиговые смещения по осям координат одинаковы:  $\delta x_\gamma = \delta y_\gamma = \delta z_\gamma$ . Обозначив их величину через  $\delta$ , находим смещение вершины А вдоль оси  $\overline{O}A$  кубика –  $\Delta = \delta \sqrt{3}$  и изменение прямого угла при вершине –  $\delta \gamma = 3\delta / da$ .

Если сдвиговые смещения неодинаковы, то равномерное угловое формоизменение определяется величиной среднего смещения  $\delta = (\delta x_\gamma + \delta y_\gamma + \delta z_\gamma) / 3$ . Тогда величины

$\delta x_\gamma - \delta = (2\delta x_\gamma - \delta y_\gamma - \delta z_\gamma) / 3$ ,  $\delta y_\gamma - \delta = (2\delta y_\gamma - \delta z_\gamma - \delta x_\gamma) / 3$ ,  $\delta z_\gamma - \delta = (2\delta z_\gamma - \delta x_\gamma - \delta y_\gamma) / 3$  будут характеризовать неравномерное формоизменение, выраженное через перемещения вдоль осей координат. Для его числовой характеристики можно использовать длину этого вектора или величину среднеквадратического отклонения от равномерного формоизменения  $\Delta_\gamma = \sqrt{(\delta x_\gamma - \delta)^2 + (\delta y_\gamma - \delta)^2 + (\delta z_\gamma - \delta)^2} / \sqrt{3}$ . Это выражение по

форме записи соответствует корню квадратному из величины второго инварианта тензора-девиатора деформаций, отражающего отклонение величин линейных деформаций материала от среднего уровня при ортогональном формоизменении. В развернутом виде  $\Delta_\gamma$  можно выразить через компоненты угловых деформаций и компоненты вращений.

Выделение равномерной и неравномерной составляющих как линейных, так и угловых деформаций позволяет более наглядно представить характер деформированного состояния в точке тела.

III. Выводы. Построена диаграмма, связывающая величины девиаторных и шаровых деформаций в точке, на основе которой предложен критерий перехода материала в пластическое состояние. Определены величины равномерного и неравномерного сдвиговых формоизменений. Полученные результаты способствуют углублению представлений о процессе течения материалов.

### РЕЗЮМЕ

Построена диаграмма, связывающая величины шаровой и девиаторной компонент деформаций. Предложен критерий перехода материала в пластическое состояние (критерий максимального формоизменения). Полученные результаты способствуют углублению представлений о деформировании материала за пределом текучести.

### ЛИТЕРАТУРА

1. С.Д. Пономарев и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Том I. ГНТИ машиностроительной литературы. М., 1956, –884с.
2. Н.Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. Из-во «Машиностроение», М., 1968, –400с.
3. Б.Г. Холодарь. Поведение реономного упруго-пластического материала в режимах нагружения с постоянной скоростью // Деформация и разрушение материалов. – М: Интерконтакт «Наука». – 2009. – №8. – С.14-22.
4. Б.Г. Холодарь. Долговечность материала при сложном напряженном состоянии // Деформация и разрушение материалов. – М: Интерконтакт «Наука». – 2013. – №3. – С.8-13.
5. Б.Г. Холодарь. Построение критерия прочности анизотропного тела. // Строительная механика и расчет сооружений. – М: НИЦ «Строительство». – 2013. – № 2 – С.21-26.

### SUMMARY

*The diagram linking the values of the spherical and deviatoric strain components is created. A criterion for the transition of the material to the plastic state (criterion of maximum form change) is proposed. The results obtained contribute to the deepening of the understanding about the deformation of the material beyond the yield point.*

**E-mail:** [hbg@list.ru](mailto:hbg@list.ru)

Поступила в редакцию 14.10.2014

## ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕСТКОСТИ И ДЕМПФИРОВАНИЯ НА КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

асп. Петровский А.Л., д.ф.-м.н. Чигарев А.В.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

В настоящее время при производстве центробежного оборудования наблюдается устойчивая тенденция расширения возможностей и повышения функциональных характеристик, разрабатываемых изделий, в том числе за счёт повышения рабочих частот вращения. Понятно, что чем выше скорость вращения рабочего органа, тем большие нагрузки и вибрации передаются на элементы и узлы машины. Основной причиной возникновения вибраций в центробежном оборудовании, в частности в дробилках, мельницах, центрифугах, центробежных литейных машинах, является наличие дисбалансов в роторной системе. Причем, наличие несбалансированных масс может быть вызвано рабочим телом, участвующим в технологическом процессе, так и особенностями конструкции роторной системы (величинами допусков, зазоров, контактов поверхностей).

Существенными элементами, препятствующими распространению вибраций в центробежном оборудовании, являются виброизоляторы или другие упругодемпфирующие элементы. Определение и точный подбор характеристики виброизоляторов является очень важной и ответственной задачей для производителя, поскольку от этого зависит не только качество производимого изделия, но и долговечность самого оборудования и его узлов.

Для наглядного представления центробежных машин с вертикальным расположением вала и явлений, происходящих при их работе, рассмотрим принцип работы центробежной литейной машины (рисунок 1).

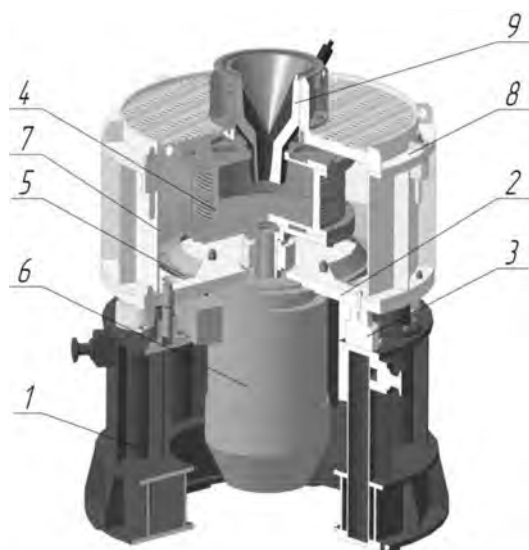


Рисунок 2 - Центробежная литейная машина

Литейные машины с вертикальной осью вращения представляют собой сборную конструкцию, состоящую из основания 1, плиты 2, установленной на упругих элементах 3, кристаллизатора 4. На плите 2 крепятся электродвигатель 6, поддон 5 и кожух 7, который закрыт крышкой 8. На крышке 8 установлена воронка 9.

Литейные машины работают следующим образом: кристаллизатор 4 приводится во вращение электродвигателем 6, расплавленный металл через воронку подается в центр вращающегося кристаллизатора и под действием центробежных сил отбрасывается к стенкам кристаллизатора. После затвердевания расплава и охлаждения кристаллизатор останавливают и извлекают отливку.

Следует отметить, что в процессе подачи расплава в кристаллизатор возникает дисбаланс, вызванный технологическим процессом, величины которого может быть различной и возбудить колебания системы (рабочего органа РО) кристаллизатор-плита-двигатель на упругих элементах. В зависимости от характеристик упругих элементов в литейной машине могут происходить следующие явления:

- кратковременное гашение колебаний системы РО;
- долговременное гашение колебаний системы РО.

В случае очень быстрого кратковременного гашения колебаний, которое возникает при чрезмерно высокой жесткости и демпфировании упругих элементов, усилия от дисбаланса кристаллизатора (ротора) могут передаваться на подшипники вала двигателя, что в свою очередь значительно сократит ресурс машины. Долговременное гашение колебаний, которое возникает при недостаточной жесткости и демпфировании упругих элементов, может привести к браку изготавливаемой продукции.

Для анализа влияния коэффициентов жесткости и демпфирования на колебательные процессы, протекающие в центробежном оборудовании, рассмотрим систему с двумя степенями свободы [1, 2, 3]. Упрощение кинематической схемы реальных центробежных машин до двухмассовой вытекает из следующих предположений:

- рассматриваются только вертикальные колебания
- система РО (ротор-платформа-двигатель) принята за единую массу, на которую оказывается взаимодействия периодического характера;
- другую массу представляет собой корпус центробежной машины;
- корпус центробежной машины также установлен на упругодемпферные опоры или вязкоупругий материал.

Отличием от описанной в литературе двухмассовой системы является введение в кинематическую схему дополнительного вязкого сопротивления, поскольку взаимосвязь как между рабочим органом и корпусом, так и корпусом и полом осуществляется с помощью упругодемпферных опор или вязкоупругих материалов. Кинематическая схема системы с двумя степенями свободы приведена на рисунке 2.

Введём следующие обозначения:

- **m1** - масса рабочего органа (двигатель, ротор, опорная платформа);
- **m2** - масса корпуса;
- **k1** – коэффициент жёсткости опор между рабочим органом и корпусом;
- **d1** – коэффициент демпфирования опор между рабочим органом и корпусом;
- **k2** – коэффициент жёсткости опор между корпусом и полом;
- **d2** – коэффициент демпфирования опор между корпусом и полом;
- **z1** – вертикальные перемещения массы **m1**;
- **z2** – вертикальные перемещения массы **m2**.

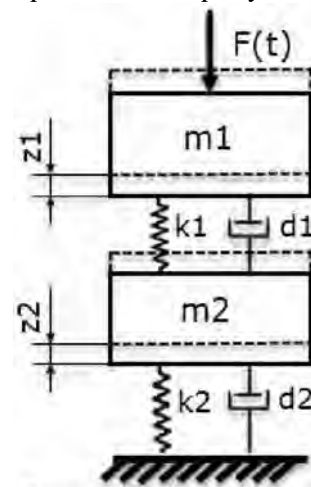


Рисунок 3 - Кинематическая схема системы с двумя степенями свободы

Колебание системы осуществляется под действием силы  $F(t)$  периодического характера с изменяемой частотой в соответствии с уравнениями (1), что приближённо соответствует разгону ротора с дисбалансом.

$$\begin{cases} F(t) = P \cos(\omega(t)t) \\ \omega(t) = 4t \end{cases} \quad (1)$$

На рисунке 3 приведен график изменения возмущающей силы  $F(t)$  по времен.

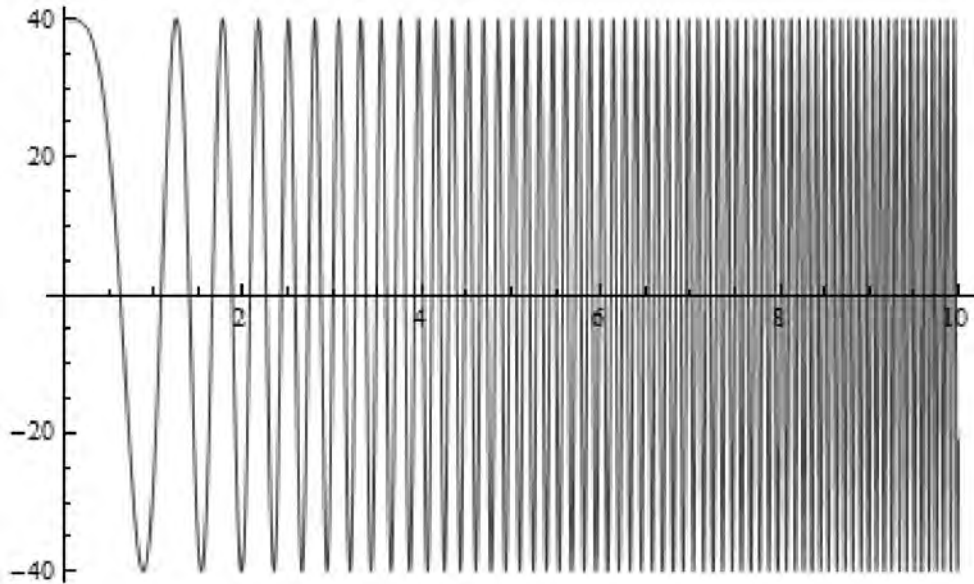


Рисунок 4 - График возмущающего воздействия  $F(t)$  на систему

На основании второго закона Ньютона, запишем проекции сил на ось  $OZ$ :

$$\begin{cases} F(t) - k_1(z_1 - z_2) - d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = m_1\ddot{z}_1 \\ k_1(z_1 - z_2) + d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_2z_2 - d_2\dot{z}_2 = m_2\ddot{z}_2 \end{cases} \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения (ДУ), описывающие колебание системы с двумя степенями свободы, запишем в виде:

$$\begin{cases} m_1\ddot{z}_1 + k_1(z_1 - z_2) + d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = P\cos(4t^2) \\ m_2\ddot{z}_2 + k_2z_2 - k_1(z_1 - z_2) + d_2\dot{z}_2 - d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Для удобства решения системы ДУ (3) введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a = \frac{k_1}{m_1}; \quad d = \frac{d_1}{m_1}; \quad b = \frac{k_1+k_2}{m_2}; \quad c = \frac{k_1}{m_2}; \\ g = \frac{d_1}{m_2}; \quad e = \frac{d_1+d_2}{m_2}; \quad p = \frac{P}{m_1} \end{aligned} \quad (4)$$

С учётом обозначений (4) система уравнений (3) примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + d(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + a(z_1 - z_2) = p\cos(4t^2) \\ \ddot{z}_2 + e\dot{z}_2 - g\dot{z}_1 + bz_2 - cz_1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы ДУ (5) состоит из частного и общего решений. Частное решение, соответствующее вынужденным колебаниям с вязким трением, находим в виде:

$$\begin{cases} z_1 = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t) \\ z_2 = C_3\sin(\omega t) + C_4\cos(\omega t) \end{cases} \quad (6)$$

Подставляя уравнения (6) в (5) и приравнявая к 0 коэффициенты при  $\sin(\omega t)$  и  $\cos(\omega t)$  получим систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{cases} -C_1\omega^2 + d\omega(C_4 - C_2) + a(C_1 - C_3) = 0 \\ -C_2\omega^2 + d\omega(C_1 - C_3) + a(C_2 - C_4) = p \\ -C_3\omega^2 - eC_4\omega + gC_2\omega + bC_3 - cC_1 = 0 \\ -C_4\omega^2 + eC_3\omega - gC_1\omega + bC_4 - cC_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Для нахождения общего решения, соответствующего свободным затухающим колебаниям, опустим правую часть первого уравнения системы (5) и рассмотрим соответствующую систему однородных ДУ

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + d(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + a(z_1 - z_2) = 0 \\ \ddot{z}_2 + e\dot{z}_2 - g\dot{z}_1 + bz_2 - cz_1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Решение системы ДУ (8) ищем в виде:

$$\begin{cases} z_1 = D_1 e^{st} \\ z_1 = D_2 e^{st} \end{cases} \quad (9)$$

Подставив (9) в (8) получим соотношения для определения коэффициентов  $D_1$  и  $D_2$ :

$$\begin{cases} D_1(s^2 + ds + a) - D_2(ds + a) = 0 \\ D_2(s^2 + es + b) - D_1(gs + c) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения (10) могут дать отличные от 0 значения  $D_1$  и  $D_2$  только в том случае, если равен 0 определитель системы:

$$(s^2 + es + b)(s^2 + ds + a) - (ds + a)(gs + c) = 0 \quad (11)$$

Решение уравнений высших порядков приведено в [4].

Уравнение (11) имеет 4 корня, дающие четыре частных решения (9) уравнений (8). Общее решение уравнений (8) получается комбинированием этих четырех решений. Если вязкое сопротивление настолько мало, что могут происходить колебания, то все четыре корня уравнения (11) должны быть комплексными с отрицательными действительными частями, доказано [5].

$$\begin{cases} s_1 = -n_1 + ir_1 \\ s_2 = -n_1 - ir_1 \\ s_3 = -n_2 + ir_2 \\ s_4 = -n_2 - ir_2 \end{cases} \quad (12)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид:

$$\begin{cases} z_1 = e^{-n_1 t}(D'_{11} \cos(r_1 t) + D'_{12} \sin(r_1 t)) + e^{-n_2 t}(D'_{21} \cos(r_2 t) + D'_{22} \sin(r_2 t)) \\ z_2 = e^{-n_1 t}(D''_{11} \cos(r_1 t) + D''_{12} \sin(r_1 t)) + e^{-n_2 t}(D''_{21} \cos(r_2 t) + D''_{22} \sin(r_2 t)) \end{cases} \quad (13)$$

Общее решение уравнения (5) получено суммированием уравнений (6) и (13):

$$\begin{cases} z_1 = e^{-n_1 t}(D'_{11} \cos(r_1 t) + D'_{12} \sin(r_1 t)) + e^{-n_2 t}(D'_{21} \cos(r_2 t) + D'_{22} \sin(r_2 t)) + C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \\ z_2 = e^{-n_1 t}(D''_{11} \cos(r_1 t) + D''_{12} \sin(r_1 t)) + e^{-n_2 t}(D''_{21} \cos(r_2 t) + D''_{22} \sin(r_2 t)) + C_3 \sin(\omega t) + C_4 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (14)$$

Численное решение системы уравнений (14) было получено в пакетах Mathematica и MSC.ADAMS. В качестве примера для численного анализа были использованы характеристики прототипа центробежного оборудования, описанного в [6]: масса рабочего органа  $m_1=6,3$  кг; масса корпуса  $m_2=1,4$  кг. Коэффициенты жесткости подбирались из условия статического сжатия каждой опоры на 10-30% от начальной длины под действием максимального (статического) нагружения, т.е.:

$$\begin{cases} \frac{m_1 9.81 + p}{0.3 l_{10}} < k_1 < \frac{m_1 9.81 + p}{0.1 l_{10}} \\ \frac{(m_1 + m_2) 9.81 + p}{0.3 l_{20}} < k_2 < \frac{(m_1 + m_2) 9.81 + p}{0.1 l_{20}} \end{cases} \quad (15)$$

где  $l_{10}$ ,  $l_{20}$  – длины опор в свободном состоянии. Данные соотношения рекомендованы компанией GERB (производитель виброопор), которые в свою очередь основаны на DIN EN 13906-1.

Характеристики уругодемпферных опор для каждого варианта исследования приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Значения коэффициентов жесткости и демпфирования

	Var_1	Var_2	Var_3	Var_4	Var_5	Var_6	Var_7	Var_8
k1, Н/мм	4,12	2.26	6.78	2.23	6.78	4,12	4,12	4,12
k2, Н/мм	7,55	3.85	11.55	11.55	3.85	7,55	7,55	7,55
d1, (Нс)/мм	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,5	1	2,28
d2, (Нс)/мм	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1	0.5	0,299

Поскольку численное решение системы уравнений в пакете Mathematica полностью соответствует решению, полученному с помощью моделирования колебательного процесса системы с двумя степенями свободы в пакете MSC.ADAMS View (сравнение проводилось для Варианта 1), то последующий анализ проводится на базе виртуальных моделей.

В таблице 2 приведены основные параметры, характеризующие колебательный процесс системы с двумя степенями свободы для первого варианта упругих и демпфирующих характеристик опор (таблица 1): перемещения, скорости и ускорения тел **m1** и **m2**; усилия в пружинах **k1** и **k2**; критическая частота и временной интервал её наступления.

Таблица 2 - Параметры, характеризующие колебательный процесс системы с двумя степенями свободы для варианта 1

Var_1	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	$\omega_{KD}$	t <sub>KD</sub>
Ед.	мм	мм	м/с	м/с	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	Н	Н	Гц	с
Знач.	63.4	23.2	1.063	0.394	22.93	8.57	219.7	195.3	2(3.3)	3.03(5)

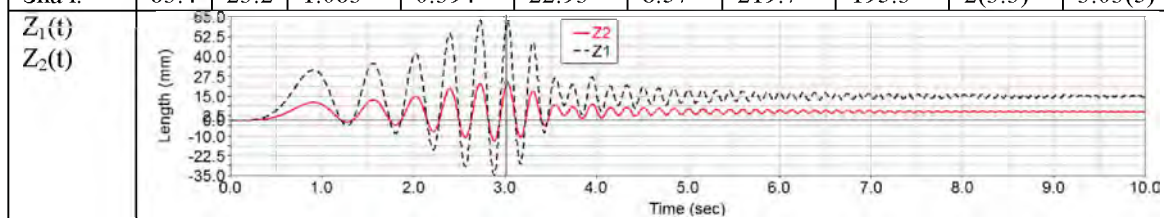


Рисунок 5 - График изменения перемещений тел m1 и m2

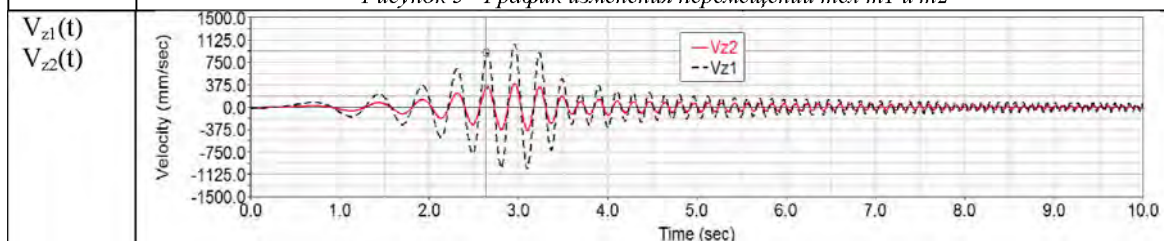


Рисунок 6 - График изменения скоростей тел m1 и m2

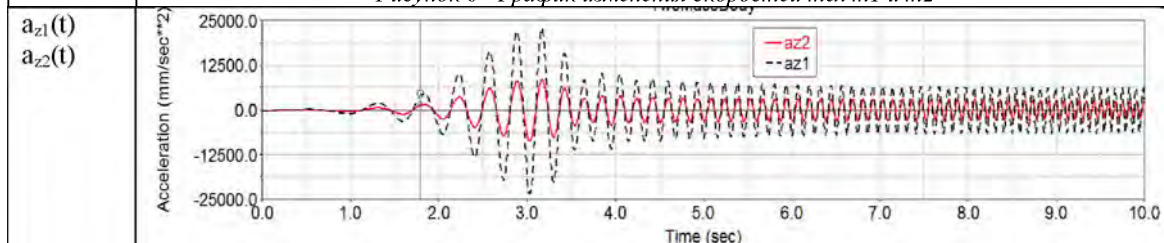


Рисунок 7 - График изменения ускорений тел m1 и m2

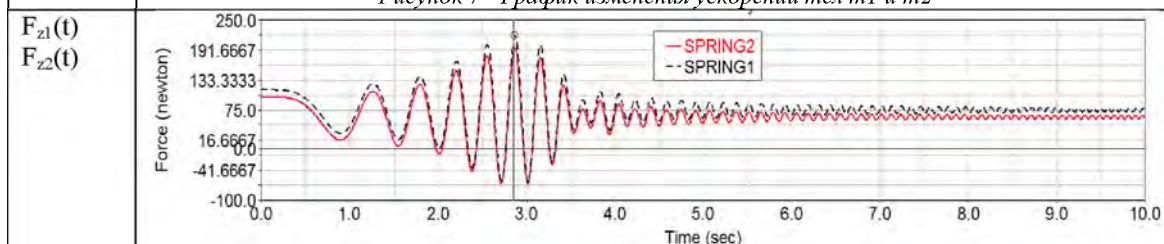


Рисунок 8 - График изменения усилий в пружинах k1 и k2



В таблице 3 в соответствии с вариантом набора характеристик опор (таблица 1) приведены максимальные значения перемещений, скоростей, ускорений колебаний, максимальные усилия в пружинах, критические частоты и период разгона, при котором они наступают.

Таблица 3 - Параметры, характеризующие колебательный процесс системы с двумя степенями свободы для всех вариантов

	$Z_1$	$Z_2$	$V_1$	$V_2$	$a_1$	$a_2$	$F_1$	$F_2$	$\omega_{кр}$	$t_{кр}$
Ед.	мм	мм	м/с	м/с	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	Н	Н	Гц	с
Вар_1	63.4	23.2	1.063	0.394	22.93	8.57	219.7	195.3	2	3.03
Вар_2	94.27	35.68	1.71	0.413	17.25	6.65	183.5	161.5	1.4	2.08
Вар_3	47.5	18.27	1.015	0.397	27.89	10.868	251.4	222.8	2.33	3.5
Вар_4	75	13	0.985	0.178	18.79	3.385	187.5	169	1.62	2.43
Вар_5	54.87	35.62	0.765	0.5	16.45	10.77	184	159	1.8	2.74
Вар_6	27	9.5	0.112	0.038	4.48	1.46	118.8	104.8	0.66	1
Вар_7	24.6	10.3	0.111	0.073	5.146	3.4	119.4	104.96	0.66	1
Вар_8	20.6	10.6	0.143	0.126	4.75	5.39	127	110	1.16	2.04

Анализируя максимальные значения, характеризующие колебательный процесс системы с двумя степенями свободы, приведенные в таблице 3, необходимо отметить следующие тенденции (последующие выводы приведены относительно варианта 1 набора характеристик опор):

- одновременное снижение жесткостей пружин обоих опор при одинаково малых коэффициентах демпфирования приводит к увеличению амплитуды и скорости колебаний; снижению ускорений колебаний, усилий в пружинах и критической частоты (Вариант 2);
- одновременное увеличение жесткостей пружин обоих опор при одинаково малых коэффициентах демпфирования приводит к снижению амплитуды и скорости колебаний; увеличению ускорений колебаний, усилий в пружинах и критической частоты (Вариант 3);
- увеличение жесткости пружин верхней опоры (опора ротора) и снижение жесткости нижней опоры (опоры корпуса) при одинаково малых коэффициентах демпфирования приводит к увеличению амплитуды колебаний ротора и снижению амплитуды корпуса, скоростей, ускорений колебаний обоих опор, усилий в пружинах и критической частоты (Вариант 4);
- увеличение жесткости пружин нижней опоры и снижение жесткости верхней опоры при одинаково малых коэффициентах демпфирования приводит к увеличению амплитуды колебаний корпуса и снижению амплитуды ротора, скоростей, ускорений колебаний обоих опор, усилий в пружинах и критической частоты (Вариант 5);
- одновременное увеличение коэффициентов демпфирования до значений близких скоростям колебаний в варианте 1 и неизменных коэффициентах жесткости обоих опор приводит к значительному снижению всех параметров, характеризующих колебательный процесс системы с двумя степенями свободы (Варианты 6,7);
- чрезмерное увеличение коэффициента демпфирования верхней опоры приводит к снижению амплитуды колебаний ротора, но увеличению скоростей колебаний обоих опор, усилий в обоих пружинах и критической частоты (Вариант 8) по сравнению с вариантами 6, 7.

В результате сопоставления всех восьми вариантов расчета видно, что наилучшие параметры, характеризующие колебательный процесс системы, получены в вар. 6 и 7.

В заключении следует отметить, что при подборе виброизоляторов следует учитывать весь вышеприведенный комплекс параметров. Коэффициенты жесткости опор ротора и опор корпуса центробежного оборудования должны удовлетворять соотношениям (15). Коэффициенты демпфирования должны соответствовать максимальным скоростям, соответствующим критическим частотам.

### РЕЗЮМЕ

В работе описан упрощенный метод анализа осевых колебаний центробежной техники с вертикальным расположением вала. Получены дифференциальные уравнения вынужденных колебаний с вязким сопротивлением для системы с двумя степенями свободы. Проведен анализ влияния коэффициентов жесткости и демпфирования на колебания системы с двумя степенями свободы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев, Б.Г. Динамические гасители колебаний/ Б.Г. Корнев, Л.М. Резников. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Илт., 1988. – 304с.
2. Mehta J.S., Kailey A.S., Mechanical Vibrations – S.Chand, 2012 - 362.
3. William T. Tomson, Marie Dillon Dahleh, Theory of Vibration with Application, University of California at Santa Barbara 1998. – 546с.
4. Фрид, Э. Малая математическая энциклопедия / Э. Фрид, И. Пастор, И Рейман, П. Ревес, И.Ружа, Будапешт, 1976. – 694с.
5. Hurwitz A. Math. Ann. T46, - 1895. – 273с.
6. Петровский А.Л. Диагностика роторных систем для выявления резонансных частот на изменяемых рабочих режимах/ А.Л. Петровский, С.Р. Шепель. – Материалы 4-й Междунар. научно-технической конф. «Переработка мин. сырья. Инновационные технологии и оборудование», Минск 2012

### SUMMARY

*The article describes a simplified method of analysis of axial vibration of the centrifugal machines with vertical shaft. The differential equations of forced vibration with viscous resistance for a system with two degrees of freedom are obtained. Analysis of influence coefficients of stiffness and damping on the oscillation of a system with two degrees of freedom are carried.*

**E-mail:** [hetfieldlion@mail.ru](mailto:hetfieldlion@mail.ru)  
[chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)

Поступила в редакцию 31.10.2014

## **АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ПОДБОР ГЛЕНОИДНОГО АДАПТЕРА ДЛЯ РЕЗЕКЦИИ ПОВРЕЖДЕННОЙ ЧАСТИ СУСТАВНОЙ ВПАДИНЫ ЛОПАТКИ**

к.т.н. **Громыко О.В.**, маг. **Мирейко Е.В.**

*Белорусский государственный университет, Минск*

Самостоятельное развитие систем автоматизированного проектирования (САПР) влечет за собой тенденции развития и тех областей, в которых они активно используются, как, к примеру, хирургии. Создание чертежей в программах САПР, на основе которых базируется технология производства эндопротезов с помощью компьютерного моделирования и фрезерования на станках с числовым программным управлением (ЧПУ), уже стало реальностью и служит неотъемлемой частью успешного хирургического лечения. Следующим этапом, на который переходит развитие САПР, является использование результатов построения и расчетов при работе с 3-D принтерами, которые обеспечивают быстрое производство сложных, прочных и недорогих эндопротезов. Также этот процесс позволяет более просто реализовать концепцию индивидуального подхода к каждому пациенту в процессе хирургического лечения.

На данный момент тотальное эндопротезирование плечевого сустава является довольно сложной и длительной операцией, включающей в себя полную замену головки плечевой кости и суставной впадины лопатки. При проведении данной операции большая часть времени уделяется процессу работы с суставной впадиной, который можно разбить на следующие подзадачи:

- 1) правильное расположение гленоидного адаптера;
- 2) снятие слепка с суставной впадины для изготовления индивидуального адаптера.

Как правило, позиционирование гленоидного адаптера осуществляется хирургом во время операции. До операции на основе полученных результатов исследования с помощью рентгеновских лучей и КТ сканирования хирург определяет примерный размер суставной впадины и заказывает в операционную набор гленоидных адаптеров различных размеров. На правильный подбор гленоидного адаптера во время операции обычно уходит до пяти минут (не учитывая времени, потраченного на поиск подходящего адаптера, если ни один из заранее подготовленных не подходит по тем или иным причинам). Как известно, каждая минута, проведенная под общим наркозом, губительно влияет на здоровье пациента. Также нельзя исключать некоторый процент ошибок, которые могут привести к развитию инфекционных процессов, а в следствии к еще большим травмам и даже инвалидности. Как показывает статистика, каждый год происходит более четырех тысяч хирургических ошибок в ортопедии. Последствия этих хирургических ошибок варьировались от временных травм в 59% случаев к смерти в 6,6% случаев и увечьям в 33% случаев. Для сведения к минимуму появления подобных ошибок была поставлена задача разработки проекта, который автоматизирует этот проблематичный процесс и упростит работу хирургов-ортопедов.

Рассмотрим в общих чертах, как на данный момент в хирургии происходит позиционирование гленоидного адаптера. Для начала гленоид освобождается от остатков здоровой и поврежденной гленоидной губы. Затем хирург определяет оптимальное положение гленоидного адаптера. Этот процесс осуществляется на глаз и его правильность зависит только от опытности и знаний хирурга. Нужно использовать гленоидный адаптер такого размера, чтобы он наилучшим образом покрывал поверхность суставной впадины. На рисунке 1 показан правильный подбор и позиционирование гленоидного адаптера во время операции.



*Рисунок 1. – Правильное расположение гленоидного адаптера в суставной впадине, осуществляемое хирургом во время операции.*

После подбора подходящего гленоидного адаптера в отверстие, находящееся в центре адаптера, вставляется тонкое сверло. При этом гленоидный адаптер плотно удерживается ассистентом хирурга в максимально неподвижном состоянии: каждый миллиметр сдвига может повлиять на здоровье пациента. Хирург производит сверление гленоида сначала тонким сверлом (для задания оси сверления), а затем уже другим сверлом, специально подобранным в соответствии с характером повреждения. Далее происходит установка гленоидного основания. На данный момент подобная инструкция является общей в случае необходимости замены гленоидного компонента. Но этот способ не является совершенным т.к. во время сверления гленоида направляющий адаптер может быть случайно сдвинут ассистентом из-за того, что между адаптером и гленоидом нет полного соприкосновения, каким бы точно подобранным по размеру и форме он ни был. Именно изготовление индивидуального гленоидного адаптера с помощью созданного проекта может с легкостью решить эту проблему.

Для начала необходимо было создать 3-D модель лопатки пациента. Для этого полученные в ходе компьютерной томографии снимки обрабатывались и конвертировались в форматы, используемые в пакетах САПР. Подготовленную модель открыли в программе Unigraphics NX, которая обладает всеми необходимыми средствами проектирования и имеет возможность запрограммировать любой процесс на нескольких языках программирования (C++, Java, VB.net). Для этого в комплект поставки продукта Unigraphics NX была включена библиотека классов и методов, разработанных специально для этого продукта и имеющая свою структуру в соответствии со спецификацией выбранного языка программирования. Для достижения поставленной задачи был выбран язык программирования VB.net.

При получении компьютерной модели лопатки начало системы координат находилось в плоскости суставной впадины в произвольной точке. Проект был написан с активным использованием функций аналитической геометрии для автоматизированного определения положения любого геометрического объекта на поверхности лопатки.

Далее в коде была определена декартова система координат следующим образом:  $\{ Dim \ orientation \ As \ Matrix3x3; \ orientation1.Xx = 1.0; \ orientation1.Xy = 0.0; \ orientation1.Xz = 0.0; \ orientation1.Yx = 0.0; \ orientation1.Yy = 1.0; \ orientation1.Yz = 0.0; \ orientation1.Zx = 0.0; \ orientation1.Zy = 0.0; \ orientation1.Zz = 1.0; \}$ . Затем надо было просканировать всю лопатку для того, чтобы программа понимала, где в пространстве есть точка, а где нет. Поверхности, кривые, листы и твердые тела уже были заданы зависимостями от расположения точек, участвующих в их определении. Поэтому была

поставлена задача создания текстового файла, содержащего все точки на поверхности. Для этого была написана функция на основе значений Boolean, которая считывала только два возможных значения (True или False): { *Public Class PointAdder; Private pointList As New List (Of Point); Private PointTrue As Boolean (Of Point); If Point=Point.PointTrue Then pointList.Add (New Point(e.X, e.Y, e.Z)=Dim Point\_i) End If; }*. Если на входе в функцию точка имела значение True, то она являлась точкой на поверхности лопатки, если False, тогда нет. Все точки со значениями True записывались в виде таблицы 1 с присвоенными им уникальными именами.

Таблица 1. Координаты точек, находящихся на поверхности лопатки

Имя точки	X	Y	Z
Point_1	0.1060	0.102	0.0
Point_2	0.107	0.102	0.0
Point_3	0.108	0.11	0.1
Point_4	0.1145	0.202	0.1
Point_5	0.1158	0.250	0.105
Point_6	0.1273	0.257	0.12

Полученная после сканирования модель лопатки являлась неоднородным и не целым объектом. Поверхности лопатки состояли из точек, различных кривых и поверхностей. Все эти элементы необходимо было описать в программе для того, чтобы иметь математическую модель лопатки и производить расчеты для корректного позиционирования гленоидного адаптера. Для создания программного описания кривых и поверхностей воспользовались их математическими уравнениями. В нашей модели помимо простейших кривых присутствовали следующие кривые: кубические эрмитовы сплайны, кривые Безье, В-сплайны. А помимо простейших поверхностей присутствовали параметрические кубические поверхности и поверхности Безье. Далее приводятся основные уравнения кривых и поверхностей, использовавшиеся при создании математической модели.

Для описания кубического эрмитова сплайна воспользовались уравнением:

$$P(t) = \sum a_i t^i \quad (1)$$

Кривая Безье описывается уравнением:

$$P(t) = \sum V_i B_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Уравнение В-сплайна имеет вид:

$$P(t) = \sum N_{i,k}(t) V_i \quad (3)$$

Уравнение параметрической кубической поверхности можно записать в виде:

$$P(s, t) = [s] [M]_H [G]_H [M_H]^T [t]^T \quad (4)$$

Общее уравнение поверхности Безье задается как:

$$Q(s, t) = \sum \sum V_{i,j} B_{i,n}(s) B_{j,m}(t) \quad (5)$$

После того как были созданы математические модели основных кривых и поверхностей, необходимо было по принципу смешивания участков поверхностей Безье сшить все поверхности лопатки для того, чтобы не было зазоров, насколько малыми они бы не были. Далее приведена часть кода по проведению этого процесса:

```
Dim sewBuilder1 As Features.SewBuilder
sewBuilder1 = workPart.Features.CreateSewBuilder(nullFeatures_Feature)
sewBuilder1.Tolerance = 0.0154
sewBuilder1.Abstract = Add New Instances
sewBuilder1.SewAllInstances = True
```

```

theSession.SetUndoMarkName(markId1, "Sew Dialog")
Dim body1 As Body = CType(workPart.Bodies.FindObject("EXTRACT_FACE(All)"), Body)
Dim added1 As Boolean
added1 = sewBuilder1.TargetBodies.Add(body1)
Dim body2 As Body = CType(workPart.Bodies.FindObject("EXTRACT_FACE(All)"), Body)
Dim added2 As Boolean
added2 = sewBuilder1.ToolBodies.Add(body2)
Dim markId2 As Session.UndoMarkId
markId2 = theSession.SetUndoMark(Session.MarkVisibility.Invisible, "Sew")
Dim nXObject1 As NXObject
nXObject1 = sewBuilder1.Commit()
theSession.DeleteUndoMark(markId2, Nothing)
theSession.SetUndoMarkName(markId1, "Sew")
sewBuilder1.Destroy()

```

После того как все поверхности были сшиты, приступили к программированию автоматизированного способа определения границ суставной впадины и нахождения всех ключевых точек и осей. С помощью них осуществлялось корректное позиционирование гленоидного адаптера. В результате работы программы необходимо было получить текстовый файл с расположением и координатами ключевых точек, представленном в виде таблицы 2:

Таблица 2. Координаты и расположение ключевых точек

Ключевая точка	Расположение	X	Y	Z
inferior_pt	гленоид	115.42206	-115.6925	-742.776
superior_pt	гленоид	104.65915	-128.8585	-716.687
posterior_pt	гленоид	113.6497	-109.506	-730.658
anterior_pt	гленоид	107.823	-127.7298	-742.428
inferior_angle_pt	гленоид	51.721895	-50.31783	-825.877
medial_border_pt	гленоид	18.250932	-83.80246	-718.766

Также по найденным ключевым точкам были построены ключевые оси и локальная система координат, центр которой находится в точке Glenoid Center, которая является центром суставной впадины. Основные ключевые оси и некоторые ключевые точки представлены на рисунке 2.

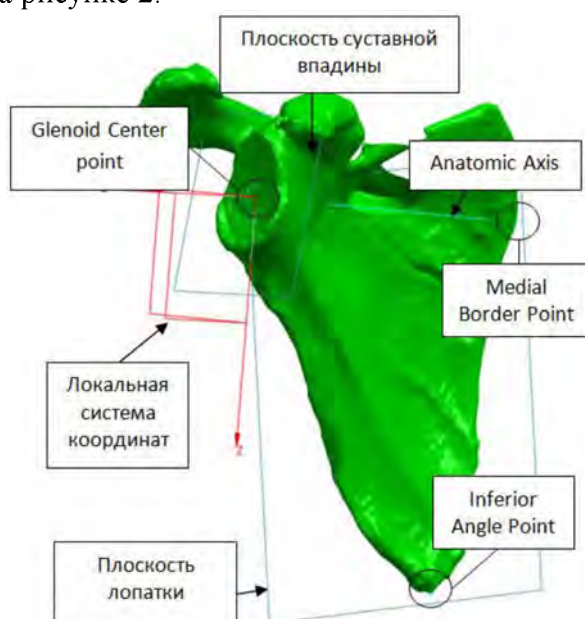
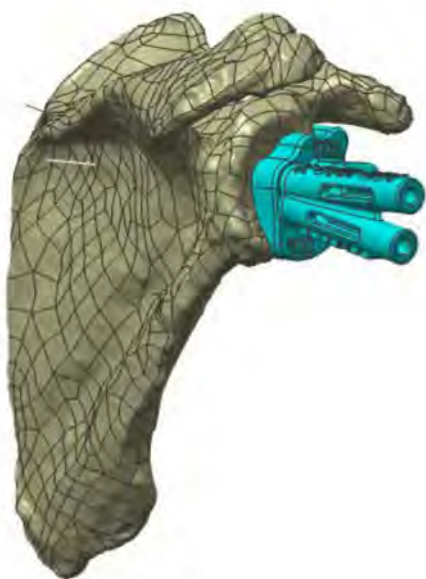


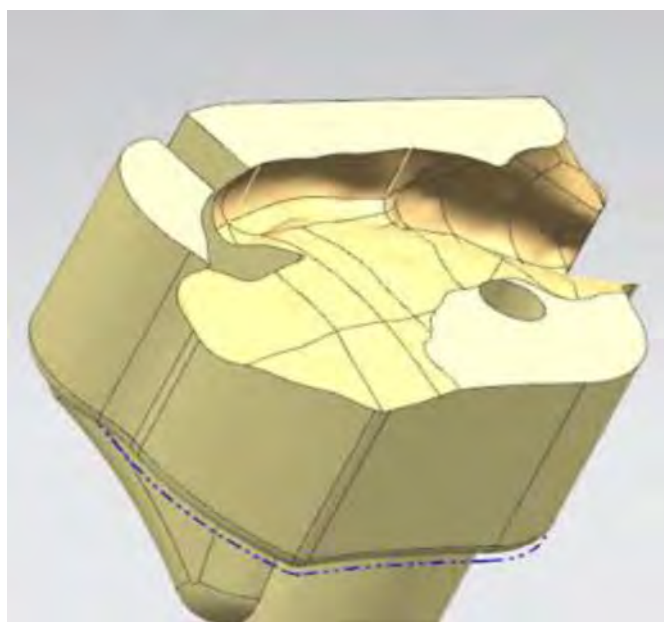
Рисунок 2. – Расположение основных ключевых точек и осей, где Glenoid Center Point - центр суставной впадины, Medial Border Point – самая выпуклая точка медиального края лопатки, Inferior Angle Point – самая крайняя точка нижнего угла лопатки, Anatomic axis - ось, вдоль которой происходит сверление лопатки для установки эндопротеза.

После построения всех необходимых точек и осей приступили к процессу позиционирования гленоидного адаптера и снятия слепка с поврежденной поверхности гленоида. Вместе с загружаемой компьютерной моделью лопатки пациента программа ищет в базе данных все имеющиеся в наличии гленоидные адаптеры для того, чтобы размеры суставной впадины и адаптер максимально совпадали. После нахождения подходящего адаптера необходимо было произвести его позиционирование. Именно этот этап является ключевым при проведении имплантации суставной впадины. Правильное расположение гленоидного адаптера позволяет произвести точное сверление лопатки без образования трещин и разрушения. Позиционирование в общем случае происходит следующим образом: гленоидный адаптер должен соединяться с гленоидной поверхностью таким образом, чтобы анатомическая ось в лопатке под названием *Anatomic Axis* совпадала с центральной осью *Center Axis*, проходящей вдоль основной направляющей адаптера. Далее гленоидный адаптер движется вдоль оси *Anatomic Axis* пока не произойдет полное соприкосновение двух локальных центральных точек: центральной точки на поверхности суставной впадины (*Glenoid Center Point*) и центральной точки на поверхности адаптера (*Point Local Center*). Т.е. точке *Point Local Center* присваивается значение координат точки *Glenoid Center Point*. Результат правильного позиционирования адаптера с помощью созданного проекта можно увидеть на рисунке 3.

После выполнения позиционирования программа производит снятие слепка с поврежденной поверхности для создания индивидуального адаптера, который можно увидеть на рисунке 4.



*Рисунок 3. – Правильное расположение гленоидного адаптера в суставной впадине в САПР системе Unigraphics NX.*



*Рисунок 4. – Модель индивидуального адаптера на основе слепка суставной впадины.*

Полученный слепок распечатывают на 3D принтере и при больших повреждениях используют как шаблон для восстановления анатомической формы суставной впадины. Если же повреждения незначительны, то этот же распечатанный адаптер используют для того, чтобы максимально точно произвести сверление лопатки вдоль оси *Anatomic Axis*. Правильное расположение гленоидного адаптера позволяет произвести точное сверление лопатки без образования трещин и разрушения, а также позволяет избежать случайного смещения во время операции.

## **РЕЗЮМЕ**

В данной работе представлен проект, являющийся автоматизацией процесса подбора гленоидного адаптера для резекции поврежденной части суставной впадины лопатки.

Проект включает в себя создание 3-D модели лопатки в САПР системах на основе снимков, полученных в ходе компьютерной томографии. 3-D модель гленоидного адаптера, который был автоматически подобран с учетом характера повреждения из базы данных стандартных гленоидных адаптеров, используется для снятия слепка с поврежденной поверхности суставной впадины. Компьютерная модель слепка применяется для печати на 3-D принтере индивидуального гленоидного адаптера, используемого хирургами-ортопедами во время операции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бегун, П. И. Биомеханические системы человека: Учеб. пособие / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын, Ю. А. Шукейло, СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2000. –188 с.
2. Каплан, А. В. Повреждения костей и суставов. 3-е издание / А. В. Каплан. -М.: Медицина, 1979. – 568 с.
3. Zimmer, Эндопротез плечевого сустава Anatomical Shoulder реверсивный. Хирургическая техника.  
URL:[http://www.zimmer.com/content/pdf/ruRU/TARG\\_06.01276.029\\_2009-11c\\_ST\\_Anatomical\\_Shoulder\\_Inverse.pdf](http://www.zimmer.com/content/pdf/ruRU/TARG_06.01276.029_2009-11c_ST_Anatomical_Shoulder_Inverse.pdf) - Дата доступа 14.06.2014.
4. Графский О.А. Моделирование сплайнов: Учебное пособие/Графский О.А. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2010. – 75 с.
5. Компьютерная геометрия: учеб. пособие для студ. вузов /Н.Н. Голованов, Д.П. Ильютко, Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 512 с.
6. Буланже, Г. В., Инженерная графика. Проецирование геометрических тел / Г. В. Буланже, И. А. Гущин, В. А. Гончарова. М.: Высшая школа, 2003. -184 стр.
7. Бегун П.И., Афонин П.Н. Моделирование в биомеханике. М.: Высшая школа, 2004. – 390 с.
8. Ли, К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) / К. Ли. СПб.: Питер, 2004. – 560.
9. Григорьева, О. А. Современные САПР: Учеб. пособие / О.А. Григорьева. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2003. – 73 с.

#### SUMMARY

*The paper presents an automated glenoid adapter selection for resection of the damaged part of glenoid cavity. It includes creating 3-D CAD model of glenoid based on patient's computer-aided tomographic images. The 3-D model of glenoid adapter cast that was chosen from the adapter database and automatically fitted the nature of the injury is used for printing an individual adapter on 3-D printer which will be used by orthopedic surgeons during the surgery.*

**E-mail:** [gromykoov@mail.ru](mailto:gromykoov@mail.ru)  
[ellen-mirre@yandex.ru](mailto:ellen-mirre@yandex.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014



## МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕУПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОЙ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

д.ф.-м.н. **Яровая А. В.**, асп. **Поддубный А. А.**

*УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель*

Слоистые, в том числе трехслойные элементы конструкций широко используются в промышленном и гражданском строительстве, транспортном машиностроении, при строительстве и восстановлении искусственных сооружений на железных и автомобильных дорогах. Достаточно часто встречаются балки и плиты, контактирующие с упругим основанием. В процессе их эксплуатации по ряду причин возможно появления зазора между конструкцией и основанием, из-за чего изменяется расчетная схема балки или плиты. При этом в слоях могут появиться неупругие деформации, а параметры напряженно-деформированного состояния резко измениться, что может привести к преждевременному разрушению конструкции.

**Расчетная схема.** Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная балка длиной  $l$  и размерами поперечного сечения  $h \times b_0$  (рисунок 1). Система координат  $x, y, z$  связана со срединной плоскостью заполнителя. Ось  $x$  направлена вдоль балки, ось  $z$  – вниз. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси  $z$ , считается первым слоем, следующий несущий слой – вторым, а заполнитель – третьим. Номер слоя обозначен индексом  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

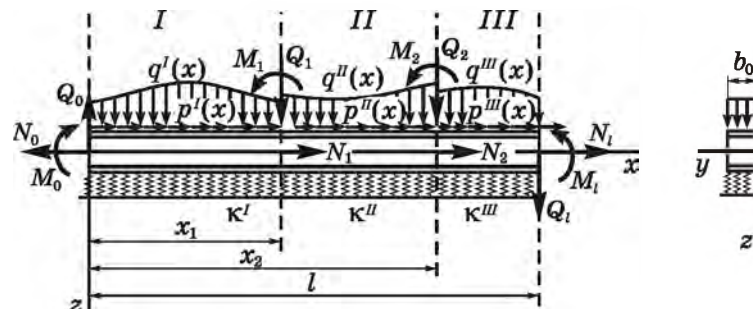


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойной балки, частично опирающейся на упругое основание

На верхний внешний слой балки действуют распределенные поверхностные нагрузки, не изменяющиеся вдоль оси  $y$ . На торцах балки (при  $x = 0$  и  $x = l$ ) действуют сосредоточенные силы и моменты  $N_0, Q_0, M_0$  и  $N_l, Q_l, M_l$ . К сечениям 1 ( $x = x_1$ ) и 2 ( $x = x_2$ ) приложены усилия  $N_1, Q_1, M_1$  и  $N_2, Q_2, M_2$ .

По длине балки выделяются три участка  $I$  ( $0 \leq x \leq x_1$ ),  $II$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ),  $III$  ( $x_2 \leq x \leq l$ ). Обозначим:  $p^n(x), q^n(x)$  – продольная и поперечная распределенные нагрузки на  $n$ -м участке ( $n = I, II, III$ );  $h_1^n, h_2^n, c^n$  – толщины 1-го и 2-го несущих слоев и половина толщины заполнителя на  $n$ -м участке. Таким образом, нагрузки на каждом из участков могут иметь различные величины и закон изменения, а могут и отсутствовать. Балка опирается на участки упругого основания различной жесткости, через  $k^n$  обозначен коэффициент жесткости упругого основания на  $n$ -м участке. Если на одном или двух участках основание отсутствует, то необходимо принять нулевым соответствующий коэффициент жесткости.

Для описания кинематики трехслойного пакета используется гипотеза «ломаной» линии [1]: прямолинейная до деформирования нормаль при изгибе становится ломаной;

в несущих слоях она остается перпендикулярной к деформированной оси балки; в заполнителе за счет сдвига поворачивается на дополнительный угол. Между слоями предусмотрена склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Слои несжимаемы по толщине. Деформации малые. Наружные несущие слои упругопластические, а несжимаемый по толщине заполнитель – нелинейно упругий.

Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искомым величин приняты функции  $w^n(x)$ ,  $u^n(x)$  – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, а также  $\psi^n(x)$  – угол поворота нормали в заполнителе за счет сдвига (угол сдвига) на  $n$ -м участке. В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений. Для описания действия упругого основания на  $n$ -ом участке используется модель Винклера, согласно которой реакция основания  $q_R^n(x) = \kappa^n w^n(x)$ .

Заметим, что принятая расчетная схема может быть использована для трехслойной пластины, испытывающий цилиндрический изгиб.

**Уравнения равновесия в усилиях.** В работе [2] с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа были получены дифференциальные уравнения равновесия в усилиях

$$N^n{}_{,x} + b_0 p^n = 0; \quad H^n{}_{,x} - Q^n = 0; \quad M^n{}_{,xx} - b_0 q_R^n + b_0 q^n = 0, \quad (1)$$

силовые граничные условия

$$\begin{aligned} N^I(0) = N_0; \quad M^I(0) = M_0; \quad M^I{}_{,x}(0) = Q_0; \quad N^{III}(l) = N_l; \\ M^{III}(l) = M_l; \quad M^{III}{}_{,x}(l) = Q_l; \quad H^I(0) = 0; \quad H^{III}(l) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и условия для внутренних усилий в точках сопряжения участков  $x = x_1$  и  $x = x_2$ :

$$\begin{aligned} N^I(x_1) - N^{II}(x_1) = N_1; \quad M^I(x_1) - M^{II}(x_1) = M_1; \quad M^I{}_{,x}(x_1) - M^{II}{}_{,x}(x_1) = Q_1; \\ H^I(x_1) - H^{II}(x_1) = 0; \quad N^{II}(x_2) - N^{III}(x_2) = N_2; \quad M^{II}(x_2) - M^{III}(x_2) = M_2; \\ M^{II}{}_{,x}(x_2) - M^{III}{}_{,x}(x_2) = Q_2; \quad H^{II}(x_2) - H^{III}(x_2) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $N^n, M^n, Q^n$  – полные продольная сила, изгибающий момент и поперечная сила,  $H^n$  – дополнительный момент из-за сдвига в заполнителе, которые выражаются через усилия в слоях:

$$\begin{aligned} N^n = \sum_{k=1}^3 N^{(k)n}; \quad M^n = \sum_{k=1}^3 M^{(k)n}; \quad Q^n = Q^{(3)n}; \quad H^n = c^n(N^{(1)n} - N^{(2)n}) + M^{(3)n}, \\ N^{(1)n}(x) = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} dz; \quad M^{(1)n}(x) = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} z dz; \\ N^{(2)n}(x) = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} dz; \quad M^{(2)n}(x) = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} z dz; \\ N^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} dz; \quad M^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} z dz; \quad Q^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)n} dz, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $N^{(k)n}, M^{(k)n}$  – продольная сила и изгибающий момент в сечении с координатой  $x$  для  $k$ -го слоя;  $Q^{(3)n}$  – поперечная сила для 3-го слоя (заполнителя),  $b_0$  – ширина балки;  $\sigma_x^{(k)n}, \sigma_{xz}^{(3)n}$  – компоненты тензора напряжений для  $k$ -го слоя.

**Физические уравнения.** В слоях балки используются физические уравнения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина ( $i, j = x, y, z$ ):

$$s_{ij}^{(k)n} = 2G_k f^{(k)n} \vartheta_{ij}^{(k)n}; \quad \sigma^{(k)n} = 3K_k 3\varepsilon^{(k)n}, \quad (5)$$

где  $s_{ij}^{(k)n}, \vartheta_{ij}^{(k)n}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформаций на  $n$ -м участке,  $\sigma^{(k)n}, \varepsilon^{(k)n}$  – их шаровые части;  $G_k, K_k$  – модуль сдвига и объемный модуль материала  $k$ -го слоя;  $f^{(1)n}, f^{(2)n}$  – функции пластичности в несущих слоях;  $f^{(3)n}$  – функция нелинейности в заполнителе.

Функции пластичности и физической нелинейности в (5) удобно представить в виде

$$f^{(k)n} = 1 - \omega^{(k)n}; \quad \omega^{(k)n} < 1. \quad (6)$$

Аналитический вид функций  $\omega^{(k)n}$  в (6) для несущих слоев и заполнителя может быть принят согласно [3]. При этом если интенсивность деформаций  $\varepsilon_u^{(k)n}$  не превышает определенной величины (деформационного предел текучести  $\varepsilon_y^{(k)}$  в несущих слоях, предела физической нелинейности  $\varepsilon_{u0}^{(3)}$  в заполнителе), то  $\omega^{(k)n} = 0$ , а  $f^{(k)n} = 1$ .

**Уравнения равновесия для неупругой балки.** Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (5), представим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)n} &= s_x^{(k)n} + \sigma^{(k)n} = 2G_k \vartheta_x^{(k)n} + 3K_k \varepsilon^{(k)n} - 2G_k \vartheta_x^{(k)n} \omega^{(k)n}; \\ \sigma_{xz}^{(3)n} &= s_{xz}^{(3)n} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)n} - 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)n} \omega^{(3)n}. \end{aligned}$$

Выделим в тензоре напряжений упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_x^{(k)n} = \sigma_x^{(k)ne} - \sigma_x^{(k)n\omega}; \quad \sigma_{xz}^{(3)n} = \sigma_{xz}^{(3)ne} - \sigma_{xz}^{(3)n\omega};$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)ne} &= 2G_k \vartheta_x^{(k)n} + 3K_k \varepsilon^{(k)n}; \quad \sigma_x^{(k)n\omega} = 2G_k \vartheta_x^{(k)n} \omega^{(k)n}; \\ \sigma_{xz}^{(3)e} &= 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)}; \quad \sigma_{xz}^{(k)n\omega} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)n} \omega^{(3)n}. \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (4), получим:

$$N^{(k)n} = N^{(k)ne} - N^{(k)n\omega}; \quad M^{(k)n} = M^{(k)ne} - M^{(k)n\omega}; \quad Q^{(3)n} = Q^{(3)ne} - Q^{(3)n\omega}. \quad (7)$$

Упругие составляющие в (7) вычисляются по формулам:

$$N^{(1)ne} = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)ne} dz; \quad M^{(1)ne} = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)ne} z dz; \quad N^{(2)ne} = b_0 \int_{-c^n}^{-c^n-h_2^n} \sigma_x^{(2)ne} dz; \quad M^{(2)ne} = b_0 \int_{-c^n}^{-c^n-h_2^n} \sigma_x^{(2)ne} z dz;$$

$$N^{(3)ne} = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)ne} dz;$$

$$M^{(3)ne} = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)ne} z dz; \quad Q^{(3)ne} = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)ne} dz. \quad (8)$$

Неупругие составляющие в (7) определяются по формулам, аналогичным (8), в которых вместо индекса «e» указан индекс «ω».

Подставим внутренние усилия (7) в уравнения равновесия (1), граничные условия (2) и условия сопряжения участков (3). Получим следующие уравнения

$$N_{,x}^{ne} + b_0 p^n = N_{,x}^{n\omega}; \quad H_{,x}^n - Q^n = H_{,x}^{n\omega} - Q^{n\omega}; \quad M_{,xx}^{ne} - b_0 q_R^n + b_0 q^n = M_{,xx}^{n\omega}, \quad (9)$$

силовые граничные условия

$$\begin{aligned}
N^{Ie}(0) &= N_0 + N^{I\omega}(0); \quad M^{Ie}(0) = M_0 + M^{I\omega}(0); \quad M^{Ie}_{,x}(0) = Q_0 + M^{I\omega}_{,x}(0); \\
N^{IIIe}(I) &= N_I + N^{III\omega}(I); \quad M^{IIIe}(I) = M_I + M^{III\omega}(I); \quad M^{IIIe}_{,x}(I) = Q_I + M^{III\omega}_{,x}(I); \\
H^{Ie}(0) &= H^{I\omega}(0); \quad H^{IIIe}(I) = H^{III\omega}(I)
\end{aligned}$$

условия для внутренних усилий в точке сопряжения участков, при  $x = x_1$

$$\begin{aligned}
N^{Ie}(x_1) - N^{IIIe}(x_1) &= N_1 + N^{I\omega}(x_1) - N^{III\omega}(x_1); \\
M^{Ie}(x_1) - M^{IIIe}(x_1) &= M_1 + M^{I\omega}(x_1) - M^{III\omega}(x_1); \\
M^{Ie}_{,x}(x_1) - M^{IIIe}_{,x}(x_1) &= Q_1 + M^{I\omega}_{,x}(x_1) - M^{III\omega}_{,x}(x_1); \\
H^{Ie}(x_1) - H^{IIIe}(x_1) &= H^{I\omega}(x_1) - H^{III\omega}(x_1);
\end{aligned}$$

и аналогично при  $x = x_2$ .

Здесь упругие и неупругие составляющие определяются выражениями

$$\begin{aligned}
N^{ne} &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)ne}; \quad M^{ne} = \sum_{k=1}^3 M^{(k)ne}; \quad Q^{ne} = Q^{(3)ne}; \\
H^{ne} &= c^n (N^{(1)ne} - N^{(2)ne}) + M^{(3)ne}, \quad N^{n\omega} = \sum_{k=1}^3 N^{(k)n\omega}; \quad M^{n\omega} = \sum_{k=1}^3 M^{(k)n\omega}; \\
Q^{n\omega} &= Q^{(3)n\omega}; \quad H^{n\omega} = c^n (N^{(1)n\omega} - N^{(2)n\omega}) + M^{(3)n\omega}.
\end{aligned}$$

**Уравнения равновесия в перемещениях.** Выразим компоненты тензора напряжений в слоях через перемещения, и далее упругие составляющие внутренних усилий через функции  $w^n(x)$ ,  $u^n(x)$ ,  $\psi^n(x)$ :

$$\begin{aligned}
N^{ne} &= b_0 (a_1^n u^n_{,x} + a_6^n \psi^n_{,x} - a_7^n w^n_{,xx}); \\
H^{ne} &= b_0 (a_6^n u^n_{,x} + a_2^n \psi^n_{,x} - a_3^n w^n_{,xx}); \\
Q^{ne} &= b_0 a_5^n \psi^n; \quad M^{ne} = b_0 (a_7^n u^n_{,x} + a_3^n \psi^n_{,x} - a_4^n w^n_{,xx}), \quad (10)
\end{aligned}$$

где  $a_1^n, \dots, a_7^n$  – параметры, характеризующие свойства слоев на  $n$ -м участке.

Подставим выражения (10) в уравнения (9). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия трехслойной балки в перемещениях. Для  $n$ -го участка, связанного с упругим основанием, эта система имеет вид:

$$\begin{aligned}
a_1^n u^n_{,xx} + a_6^n \psi^n_{,xx} - a_7^n w^n_{,xxx} &= -p^n + p_\omega^n, \\
a_6^n u^n_{,xx} + a_2^n \psi^n_{,xx} - a_3^n w^n_{,xxx} - a_5^n \psi^n &= h_\omega^n, \\
a_7^n u^n_{,xxx} + a_3^n \psi^n_{,xxx} - a_4^n w^n_{,xxxx} - \kappa^n w^n &= -q^n + q_\omega^n, \quad (11)
\end{aligned}$$

где  $p_\omega^n = \frac{1}{b_0} N_{,x}^{n\omega}$ ;  $h_\omega^n = \frac{1}{b_0} (H_{,x}^{n\omega} - Q^{n\omega})$ ;  $q_\omega^n = \frac{1}{b_0} M_{,xx}^{n\omega}$ .

Если  $n$ -й участок не связан с упругим основанием, то третье уравнение системы (11) будет следующим:

$$a_7^n u^n_{,xxx} + a_3^n \psi^n_{,xxx} - a_4^n w^n_{,xxxx} = -q^n + q_\omega^n.$$

Точное решение систем уравнений для участков, связанных и не связанных с упругим основанием, получить нельзя. Поэтому воспользуемся методом «упругих» решений Ильюшина, который распространим на слоистую балку.

Предположим, что в (11) содержится малый параметр, например, все  $\omega^{(k)n} < 1$ . Тогда возможен метод итераций, при котором для любого  $m$ -го приближения получаем системы уравнений:

для участка балки на упругом основании

$$\begin{aligned} a_1^n u_{,xx}^{n(m)} + a_6^n \Psi_{,xx}^{n(m)} - a_7^n w_{,xxx}^{n(m)} &= -p^n + p_\omega^{n(m-1)}, \\ a_6^n u_{,xx}^{n(m)} + a_2^n \Psi_{,xx}^{n(m)} - a_3^n w_{,xxx}^{n(m)} - a_5^n \Psi^{n(m)} &= h_\omega^{n(m-1)}, \\ a_7^n u_{,xxx}^{n(m)} + a_3^n \Psi_{,xxx}^{n(m)} - a_4^n w_{,xxxx}^{n(m)} - \kappa^n w^{n(m)} &= -q^n + q_\omega^{n(m-1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

для участка балки без упругого основания

$$\begin{aligned} a_1^n u_{,xx}^{n(m)} + a_6^n \Psi_{,xx}^{n(m)} - a_7^n w_{,xxx}^{n(m)} &= -p^n + p_\omega^{n(m-1)}, \\ a_6^n u_{,xx}^{n(m)} + a_2^n \Psi_{,xx}^{n(m)} - a_3^n w_{,xxx}^{n(m)} - a_5^n \Psi^{n(m)} &= h_\omega^{n(m-1)}, \\ a_7^n u_{,xxx}^{n(m)} + a_3^n \Psi_{,xxx}^{n(m)} - a_4^n w_{,xxxx}^{n(m)} &= -q^n + q_\omega^{n(m-1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $p_\omega^{n(m-1)} = \frac{1}{b_0} N_{,x}^{n\omega(m-1)}$ ;  $h_\omega^{n(m-1)} = \frac{1}{b_0} (H_{,x}^{n\omega(m-1)} - Q^{n\omega(m-1)})$ ;  $q_\omega^{n(m-1)} = \frac{1}{b_0} M_{,xx}^{n\omega(m-1)}$ .

Величины  $p_\omega^{n(m-1)}$ ,  $h_\omega^{n(m-1)}$ ,  $q_\omega^{n(m-1)}$ , соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ( $m = 1$ ) принимаются равными нулю, в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название *дополнительных «внешних нагрузок»*. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев.

Применение метода последовательных приближений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче теории упругости с дополнительными «нагрузками».

Процедура получения решения систем уравнений (11), (12) не отличается от примененной в [2] для упругой балки. В результате получаем искомые функции перемещений в рекуррентном виде.

Для  $n$ -го участка, связанного с *упругим основанием малой или большой жесткости*

$$\begin{aligned} w^{n(m)} &= C_1^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + w_p^{n(m)}; \\ \Psi^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^{n(m)} b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_3^{n(m)} b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^{n(m)} b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^{n(m)} b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^{n(m)} + f_1^{n(m)}; \\ u^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^{n(m)} b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_3^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^{n(m)} b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^{n(m)} b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^{n(m)} \alpha_{12}^n + C_8^{n(m)} x + C_9^{n(m)} + f_2^{n(m)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для  $n$ -го участка, на *упругом основании средней жесткости*

$$\begin{aligned}
w^{n(m)} &= C_1^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^{n(m)}; \\
\psi^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} b_7^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} b_7^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^{n(m)} b_8^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} b_8^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^{n(m)} + f_1^{n(m)}; \\
u^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} b_9^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} b_9^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^{n(m)} b_{10}^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} b_{10}^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^{n(m)} \alpha_{12}^n + C_8^{n(m)} x + C_9^{n(m)} + f_2^{n(m)}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Если  $n$ -й участок не связан с упругим основанием, то

$$\begin{aligned}
\psi^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_{11}^n + C_2^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + g_1^{n(m)}; \\
w^{n(m)} &= C_1^{n(m)} (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^{n(m)} b_{14}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + \\
&\quad + C_3^{n(m)} b_{14}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_4^{n(m)} x^2 / 2 + C_5^{n(m)} x + C_6^{n(m)} + g_2^{n(m)}; \\
u^{n(m)} &= C_1^{n(m)} (b_{15}^n + b_{16}^n x^2) + C_2^{n(m)} b_{17}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} b_{17}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + \\
&\quad + C_4^{n(m)} \alpha_{13}^n x + C_5^{n(m)} \alpha_{13}^n + C_7^{n(m)} x + C_8^{n(m)} + g_3^{n(m)}. \tag{15}
\end{aligned}$$

В выражениях (13)–(15)  $C_1^{n(m)}, \dots, C_9^{n(m)}$  – константы интегрирования,  $w_p^{n(m)}$  – частное решение, зависящее от вида нагрузки, коэффициенты  $b_i^n, \alpha_i^n, \beta_i^n$  выражаются через параметры  $a_i^n$ , а функции определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
f_1^{n(m)} &= \alpha_8^n w_p^{n(m)},_{xxx} + \alpha_9^n \int w_p^{n(m)} dx + \alpha_{10}^n \int (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx + \alpha_{11}^n (p^n - p_\omega^{n(m-1)}); \\
f_2^{n(m)}(x) &= \alpha_8^n \alpha_{12}^n w_p^{n(m)},_{xxx} + \alpha_9^n \alpha_{12}^n \int w_p^{n(m)} dx + \alpha_{13}^n w_p^{n(m)},_{,x} + \\
&\quad + \alpha_{10}^n \alpha_{12}^n \int (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx + \alpha_{11}^n \alpha_{12}^n (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) + \alpha_{14}^n \iint (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx dx; \\
g_1^{n(m)}(x) &= b_{12}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \left( \int (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx \right) dx - \\
&\quad - b_{12}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \left( \int (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx \right) dx + \\
&\quad + b_{13}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx - b_{13}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx; \\
g_2^{n(m)}(x) &= \alpha_{17}^n \int g_1^{n(m)} dx + \alpha_{18}^n \iiint (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx dx dx + \alpha_{19}^n \iiint (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx dx dx; \\
g_3^{n(m)}(x) &= b_{18}^n g_1^{n(m)}(x) + b_{19}^n g_2^{n(m)}(x) + \\
&\quad + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx dx dx + b_{20}^n \iiint (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx dx dx.
\end{aligned}$$

Для определения констант интегрирования учитываются граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом, которые также используются в итерационном виде.

**Результаты и выводы.** При численной реализации полученного решения величина нагрузки и относительные толщины слоев подбирались таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени. Аналитический вид функций пластичности и нелинейности, механические

характеристики материалов несущих слоев и для заполнителя принимались в соответствии с [3].

Метод последовательных приближений показал достаточно хорошую практическую сходимость. За искомое решение принято 12-е приближение, которое отличается от предыдущих двух менее чем на 1 % – как для прогибов  $w$ , так и для сдвигов  $\psi$ . Также была проведена численная проверка удовлетворения третьего из уравнений равновесия систем (11), (12). Полученные результаты свидетельствуют об удовлетворительном выполнении основного из уравнений равновесия, чем подтверждают достаточную точность и достоверность представленных числовых результатов.

Анализируя величины прогибов и нормальных напряжений для упругой и неупругой балок, можно сказать, что учет нелинейных свойств материалов слоев приводит к увеличению максимальных перемещений на 50 %, а напряжений – до 20 %. Это необходимо учитывать при проектировании слоистых элементов конструкций, так как во многих случаях они являются элементами сложных и ответственных сооружений.

### РЕЗЮМЕ

Рассмотрен изгиб трехслойной балки под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок при неполном контакте с упругим основанием. Наружные несущие слои упругопластические, заполнитель – нелинейно упругий. Выведена система дифференциальных уравнений равновесия, получено ее аналитическое решение в итерациях, выписаны граничные условия и условия сопряжения на границах участков. Проведено сравнение числовых значений перемещений и напряжений для упругой и неупругой балок.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
2. Яровая, А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов трехслойной балки, частично опертой на упругое основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2014. – №29. – С. 141-147.
3. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.

### SUMMARY

*Bending sandwich beam under distributed and concentrated loads at partial contact with the elastic base. Outer bearing layers of elastic plastic, filler - nonlinear elasticity. A system of differential equations of equilibrium, its analytical solution is obtained in the iteration, the boundary conditions are written and conjugation conditions on the boundary. The comparison of the numerical values of displacements and stresses for the elastic and inelastic beams.*

**E-mail:** [a-xalio@yandex.ru](mailto:a-xalio@yandex.ru)  
[aleksey-podd@yandex.ru](mailto:aleksey-podd@yandex.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

асп. Шемет Л.А., к.ф.-м.н. Щербаков С.С.

*Белорусский государственный университет, Минск*

**Введение.** Большинство методов оценки характеристик трещиностойкости основаны на оценке  $J$ -интеграла или коэффициента интенсивности напряжений. Данные параметры позволяют оценить состояние в наиболее опасной точке – вершине трещины. Однако, для того чтобы определить, например, приращение трещины за цикл нагружения, необходимо иметь кинетическую диаграмму усталостного разрушения. Также эти методы сложно применить для учета не только приращения длины трещины, но и повреждения ее берегов.

Нами рассматривалась модель развития трещиноподобного повреждения с использованием модели деформированного твердого тела с опасным объемом. Суть предлагаемого подхода заключается в том, что на каждом шаге нагружения приращение повреждения происходит за счет удаления опасного объема, что позволяет определять величину приращения и строить кинетическую диаграмму усталостного разрушения.

**Опасный объем.** В рамках данной модели опасные объемы представляют собой трехмерные области, где напряжения достигают повреждающего уровня, например, нижней границы рассеивания предела выносливости.

Сложное напряженное состояние в окрестности трещиноподобного дефекта может быть описано эквивалентными напряжениями в соответствии с четырьмя основными теориями прочности:

$$\sigma_I = \sigma_1 \leq \sigma_I^{\text{lim}}; \quad (1)$$

$$\sigma_{II} = \varepsilon_1 E \leq \sigma_{II}^{\text{lim}}; \quad (2)$$

$$\sigma_{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{III}^{\text{lim}}; \quad (3)$$

$$\sigma_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_{IV}^{\text{lim}}; \quad (4)$$

Для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных был введен показатель повреждаемости следующего вида [1,2]:

$$\psi_q = \left| \sigma_q / \sigma_q^{\text{lim}} \right|, \quad q = I, II, III, IV. \quad (5)$$

Тогда условия для ограничения опасных объемов с учетом формул (1) – (5) будут иметь вид [1,2]:

$$V_q = \{dV / \Psi_q, dV \subset V_k\}, \quad (6)$$

где  $V_k$  – рабочий объем нагруженного тела.

Предельное значение эквивалентных напряжений для материала исследуемой модели было выбрано равным  $\sigma_q^{\text{lim}} = 600$  МПа. Для расчета были приняты следующие размеры плоского образца, представленного на рисунке 1:  $B=0,05$  м,  $H_1=0,06$  м,  $L=0,04$  м,  $R_1=0,00625$  м,  $Q = 20000$  Н, где  $h_0$ ,  $B$  – размеры образца,  $L$  – длина трещины, отсчитываемая от линии действия нагрузки  $Q$  (см. рисунок 1), модуль упругости  $E=2 \cdot 10^{11}$  Па и коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .



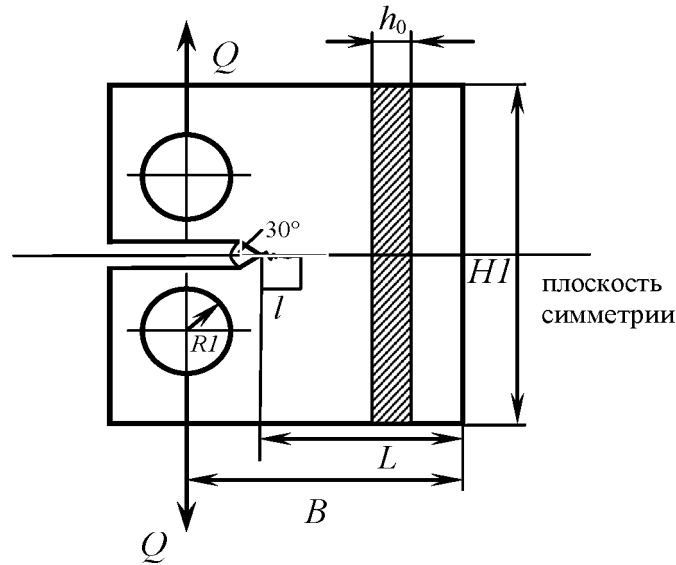


Рисунок 1 – Расчетная схема для образца с трещиной

Для рассматриваемого образца коэффициент интенсивности напряжений вычисляется с учетом поправочной функции  $Y_I$ , которая учитывает схему нагружения и геометрию трещины [3]:

$$K_I = \frac{Q}{h_0 \sqrt{B}} Y_I(l/B), \quad (7)$$

где

$$Y_I(l/B) = \sqrt{\frac{l/B}{(l-B)^3}} (9.172 - 13.829(l/B) + 11.822(l/B)^2 - 3.056(l/B)^3). \quad (8)$$

Для реализации расчета опасных объемов была создана программа с помощью встроенного в ANSYS языка APDL. Принцип работы программы заключается в том, что после проведения расчета для  $i$ -го конечного элемента имеются значения средних напряжений и деформаций. Эти значения переносятся в массив, который используется в дальнейших вычислениях значений повреждаемости, как отношений действующих и предельных напряжений в соответствии с (5):

$$\Psi_q^i = \sigma_q^i / \sigma_q^{\text{lim}}. \quad (9)$$

Величины объемов элементов, для которых выполняется условие

$$\Psi_q^i \geq 1, \quad (10)$$

суммируются для получения значения опасного объема  $V$  для всей расчетной модели. Результатом работы программы является массив конечных элементов, составляющих опасный объем и его значение.

Развитие трещиноподобного повреждения моделируется удалением данного массива из конечно-элементной модели на текущем шаге по времени. На следующем шаге последовательный расчет напряженно-деформированного состояния, состояния повреждаемости и опасных объемов производится для модифицированной конечно-элементной модели (с увеличенной длиной повреждения).

В двумерной постановке, опасный объем  $V$  принимает вид опасной площади  $S$ .

Зависимости опасных площадей  $S$  и их приращений  $\Delta S$  от длины трещиноподобного повреждения для различных нагрузок представлены в работе [4]. Из рисунка 2, *а* видно, что при увеличении приращения длины повреждения (скорости его удлинения) приращение опасной площади (скорости ее увеличения) также растет. С ростом длины трещиноподобного повреждения увеличиваются как величина опасной площади, так и ее приращение на каждом шаге нагружения (см. рисунки 2, *б* и *в*). Графики имеют одинаковую форму для всех рассматриваемых эквивалентных напряжений  $\sigma_q$ . Рост  $S$ ,  $\Delta S$  в зависимости от  $l$ ,  $\Delta l$  наибольший для  $\sigma_{II}$ , а для  $\sigma_{III}$  наименьший. Наиболее близко друг к другу находятся зависимости для  $\sigma_I$  и  $\sigma_{IV}$ .

Из рисунка 3, *а* видно, что для всех  $\sigma_q$  величина коэффициента интенсивности напряжений увеличивается с ростом длины повреждения. Из рисунков 3, *б* и *в* видно, что при увеличении приращения длины повреждения увеличиваются как коэффициент интенсивности напряжений, так и его приращение на каждом шаге нагружения. При этом соответствующие графики накладываются друг на друга, т.е. величины  $K_I$ ,  $\Delta K_I$  зависят от  $l$ ,  $\Delta l$  и практически не зависят от типа эквивалентных напряжений.

Следует отметить, что представленная на рисунке 3, *в* зависимость коэффициента интенсивности напряжений от приращения длины трещины для рассматриваемых нагрузок в качественном отношении хорошо согласуется с кинетической диаграммой усталостного разрушения [3].

Из рисунков 4, *а* и *б*, видно, что для всех рассматриваемых  $\sigma_q$  значения коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  увеличиваются с ростом как опасной площади повреждения  $S$ , так и ее приращения  $\Delta S$ . Такой же с ростом  $\Delta S$  эффект наблюдается при увеличении  $\Delta K_I$  (см. рисунок 4, *в*). Графики имеют одинаковую форму для всех рассматриваемых эквивалентных напряжений  $\sigma_q$ . Рост  $K_I$ ,  $\Delta K_I$  в зависимости от  $S$ ,  $\Delta S$  наибольший для  $\sigma_{III}$ , а для  $\sigma_{II}$  наименьший. Ближе всего друг к другу находятся зависимости для  $\sigma_I$  и  $\sigma_{IV}$ .

**Заключение.** В работе представлены результаты компьютерного моделирования распространения трещиноподобного повреждения во времени для различных эквивалентных напряжений. Необходимые для этого расчеты повреждаемости осуществлялись с использованием модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [1, 2].

На каждом шаге нагружения была вычислена длина повреждения, площадь повреждения и соответствующие коэффициенты интенсивности напряжений. Из полученных результатов видно, что как  $K_I$ ,  $\Delta K_I$  так и опасная поверхность  $S$  и ее приращение  $\Delta S$  растут с ростом трещиноподобного повреждения. При этом  $K_I$  и  $\Delta K_I$  слабо зависят от способа расчета эквивалентных напряжений в отличие от  $S$  и  $\Delta S$ . Рост  $S$  и  $\Delta S$  в зависимости от  $l$ ,  $\Delta l$  для  $\sigma_{II}$  наибольший и для  $\sigma_{III}$  наименьший, а ближе всего друг к другу находятся графики для  $\sigma_I$  и  $\sigma_{IV}$ .

Полученная зависимость коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  от приращения длины трещины  $\Delta l$  для рассматриваемой нагрузки в качественном отношении хорошо согласуется с кинетической диаграммой усталостного разрушения [3].

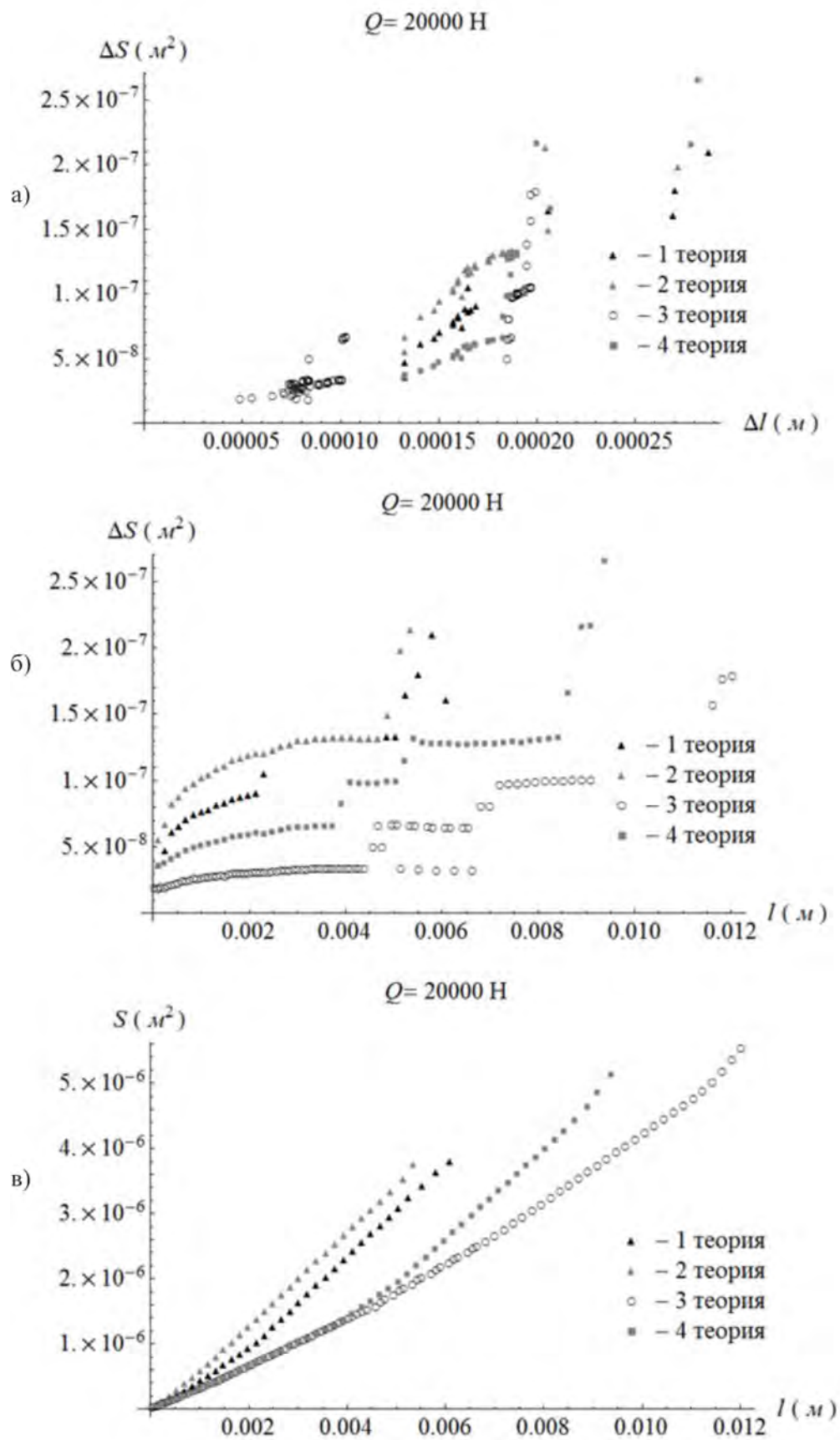


Рисунок 2—Зависимости: а) приращения опасной площади от приращения длины трещиноподобного повреждения, б) приращения опасной площади от длины трещиноподобного повреждения, в) опасной площади от длины трещиноподобного повреждения

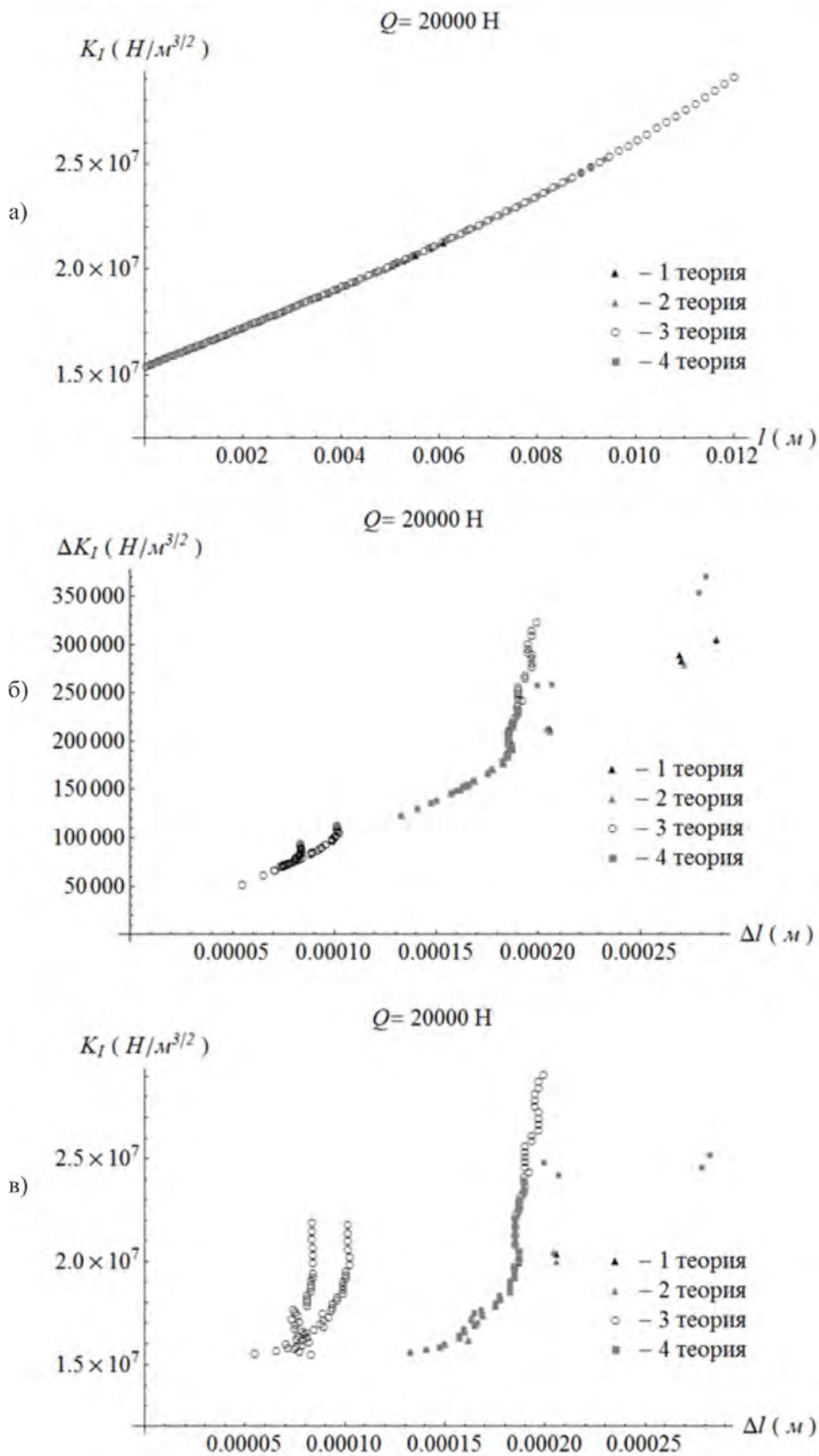


Рисунок 3 – Зависимости: а) коэффициента интенсивности напряжений от длины трещиноподобного повреждения, б) приращения коэффициента интенсивности напряжений от приращения длины трещиноподобного повреждения, в) коэффициента интенсивности напряжений от приращения длины трещиноподобного повреждения

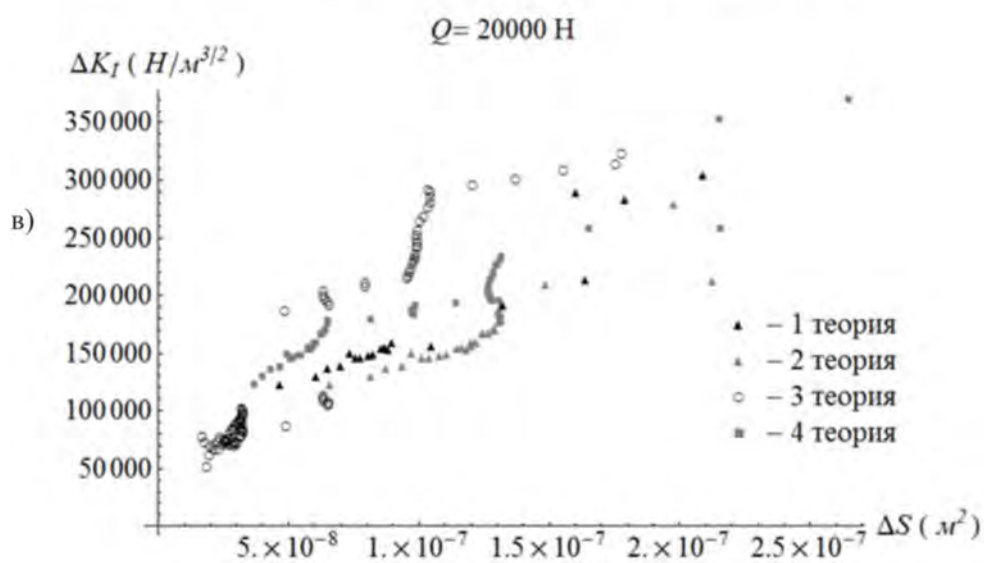
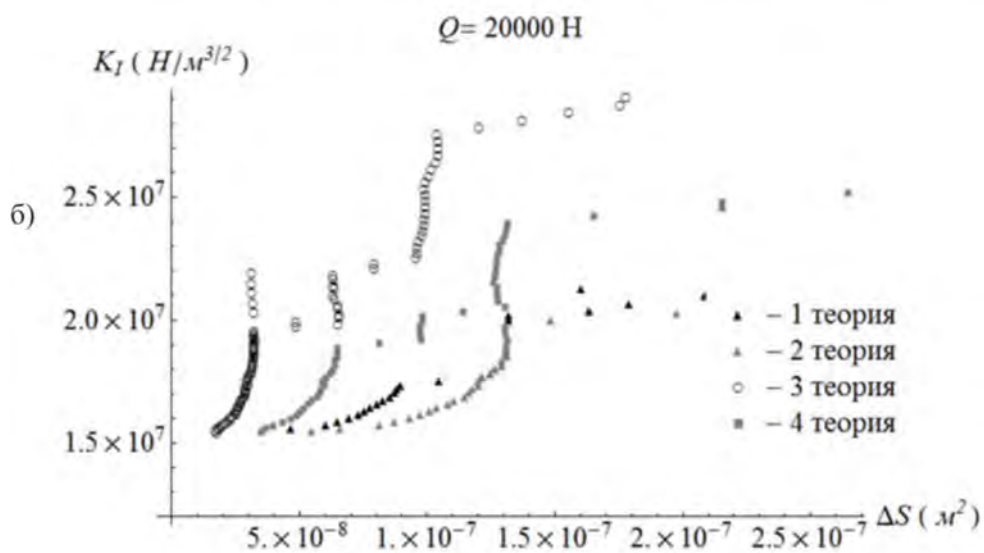
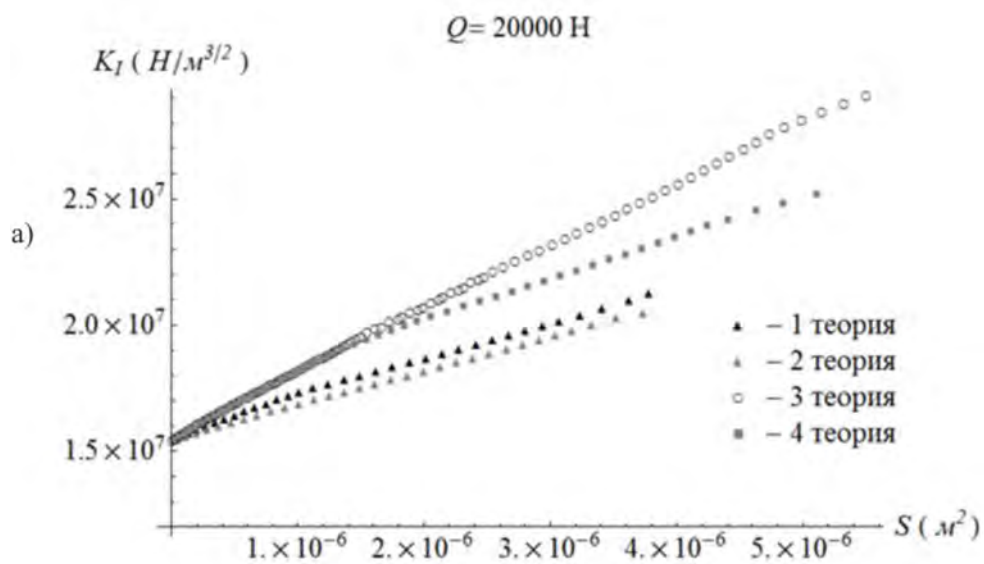


Рисунок 4 – Зависимости: а) коэффициента интенсивности напряжений от величины опасной площади, б) коэффициента интенсивности напряжений от приращения опасной площади, в) приращения коэффициента интенсивности напряжений от приращения опасной площади

## РЕЗЮМЕ

В работе представлены результаты компьютерного моделирования распространения трещиноподобного повреждения во времени для различных эквивалентных напряжений. Моделирование проводилось на основе модели деформированного твердого тела с опасным объемом путем удаления опасных площадей на каждом шаге нагружения. Представлены зависимости коэффициента интенсивности напряжений от длины трещиноподобного повреждения, величины опасной площади и их приращений для различных эквивалентных напряжений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
2. Щербаков, С.С. Моделирование повреждаемости методом конечных элементов при одновременном действии контактных и неконтактных нагрузок // С.С. Щербаков / Инженерно-физический журнал. –2012. Т. 85, –№ 4. –С 437–441.
3. Сосновский, Л.А. Трещиностойкость/ Л.А. Сосновский, А.В. Богданович. – Гомель: БелГУТ, 2011. – 366 с.
4. Щербаков, С.С. Развитие трещиноподобного повреждения и его характеристики / С.С. Щербаков, Л.А. Шемет// Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический сборник. – Вып.29. –Минск: БНТУ, –2014. – С.179-183.

## SUMMARY

*Results of two-dimensional computer simulation of crack-like damage propagation in time for different equivalent stress is considered in the paper. The simulation was made basing on the model of deformable solid with a dangerous volume by deleting the dangerous surfaces at each step of loading. The dependencies of stress intensity factor on the length of crack-like damage, the value of dangerous surface and their increments are presented for different equivalent stress.*

**E-mail:** [shemetla@vandex.ru](mailto:shemetla@vandex.ru)  
[sherbakovss@mail.ru](mailto:sherbakovss@mail.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## СООТНОШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК В ПЛОСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

к. ф.-м. н. <sup>1</sup>Мартыненко Т.М., <sup>2</sup>Пранкевич С.А., к. ф.-м. н. <sup>2</sup>Скляр О.Н.

<sup>1</sup>ГУО «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь, Минск

<sup>2</sup>УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Мягкими называют оболочки, которые вследствие весьма малой толщины стенки всегда испытывают только безмоментное напряженно-деформированное состояние и не могут воспринимать сжимающих напряжений.

Несмотря на наличие упрощающего основные уравнения свойства безмоментности, построение теории мягких оболочек проблема очень сложная. Все осложняется тем обстоятельством, что мягкая оболочка под нагрузкой существенно изменяет геометрию. Это, в свою очередь, оказывает влияние на распределение нагрузки. Основы теории для случая осевой симметрии (в предположении о малости деформации) предложены С.А. Алексеевым [1]. Одним из основных свойств мягких оболочек является их неспособность воспринимать сжимающие напряжения. Поэтому мягкая оболочка может находиться либо в двухосном напряженном состоянии, когда оба главных напряжения положительны, либо в одноосном, когда одно из главных напряжений пренебрежимо мало и его полагают равным нулю. В одноосной зоне оболочка не имеет определенной формы, поэтому нельзя произвольно задавать форму оболочки и действующие на неё нагрузки.

Рассмотрим деформацию круглой диафрагмы из линейно-упругого материала, нагруженной давлением. Величины перемещений и деформацией не будем ограничивать. Предположим, что в центральной части диафрагмы имеется жесткий центр, нагруженный силой  $P$ . Под действием нагрузки диафрагма превращается в оболочку вращения в следствии этого, справедливы следующие геометрические соотношения:

$$\frac{dr}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dz}{ds} = \sin\theta, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = \sin\theta.$$

$$T_1 = \frac{Pr}{2\pi r \sin\theta} \left( 1 + \frac{1}{\pi r^2} \right)$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = P$$

Для вывода разрешающего уравнения задачи воспользуемся условием совместности деформаций, которое в рассматриваемом случае линейных деформаций и изотропных тел имеет вид:

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) = \varepsilon_\varphi$$

Закон Гука запишем в следующем виде:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh}(T_\theta - \mu T_\varphi), \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh}(T_\varphi - \mu T_\theta)$$

Рассмотрим оболочки вращения постоянной толщины, следующие гипотезам Кирхгофа–Лява, и деформируемые постоянным давлением  $\rho = const$ . Показана

необходимость учета уравнений совместности деформаций при определении безизгибной формы меридиана.

Задача расчета безмоментного НДС оболочки по теории Кирхгофа–Лява является статически определимой [Новожилов, Бидерман с 133]. Интегрируя уравнения равновесия [2,3], получим:

$$T_1 = \frac{F(s)}{2\pi r \sin \theta}, \quad T_2 = q_n R_2 - T_1 \frac{R_2}{R_1} \quad (1)$$

где

$$F(s) = P_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) 2\pi r ds. \quad (2)$$

$F(s)$  – суммарная осевая нагрузка, действующая на элементарный элемент срединной поверхности и состоящая из:  $P$  – осевой нагрузки, действующей на торец оболочки при проекцию на эту ось,  $q_n, q_1$  – нормальных и касательных составляющие поверхностной нагрузки,  $\theta$  – угол, составленный нормалью к меридиану с осью вращения,  $r$  – полярный радиус,  $T_1, T_2$  – внутренние усилия, действующие по касательной к меридиану и к параллели,  $R_1, R_2$  – радиусы кривизны меридиана и срединной поверхности.

Для поверхности вращения второго порядка радиусы кривизны  $R_1, R_2$  связаны с углом  $\theta$  формулами [1,2]:

$$R_1 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}, \quad R_2 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3)$$

$R_0, \gamma$  – постоянные.

Выведем теперь уравнения меридиана, для чего воспользуемся формулами [2,3]:

$$\frac{dr}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{ds}{d\theta} = R_1. \quad (4)$$

Имеем:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\theta} = R_1 \cos \theta = \frac{R_0 \cos \theta}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Откуда:

$$r = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R_0 \cos \theta d\theta}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{\gamma}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d(\sqrt{\gamma} \sin \theta)}{(1 + (\sqrt{\gamma} \sin \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_0 \sqrt{\gamma} \sin \theta}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}} + r_0.$$

Совершенно аналогично:



$$z = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dz}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dz}{ds} \frac{ds}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \frac{R_0 d\theta}{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = -R_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d(\cos \theta)}{(1 + \gamma - \gamma \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{R_0}{1 + \gamma} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}} + z_0$$

Поэтому при  $r_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ :

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

где

$$a = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \gamma}}, \quad b = \frac{R_0}{1 + \gamma}. \quad (6)$$

Предположим что  $q_n = p = const$ ,  $\theta_0 = 0$ , тогда:

$$T_1 = \frac{1}{2} p R_2 = \frac{p R_0}{2 \sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}}, \quad T_2 = p R_2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1} \right) = \frac{1}{2} p R_0 \frac{1 - \gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}}. \quad (7)$$

Уравнение совместности деформаций для оболочек вращения в осесимметричном случае имеет при  $h = const$ ,  $E, \nu = const$  вид [4]:

$$\varepsilon_1 = \frac{d}{dr} (r \varepsilon_2)$$

или в силу закона Гука для изотропных оболочек:

$$T_1 - \nu T_2 = \frac{d}{dr} (r (T_2 - \nu T_1)). \quad (8)$$

После дифференцирования из (8) получим:

$$(1 + \nu)(T_1 - T_2) = r \frac{d}{dr} (T_2 - \nu T_1). \quad (9)$$

Здесь  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Преобразуем (9) с помощью (7):

$$T_1 - T_2 = p R_2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1} \right) = \frac{1}{2} p R_0 \frac{\gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}}. \quad (10)$$

или

$$T_2 - \nu T_1 = \frac{p R_0 (1 - \nu - \gamma \sin^2 \theta)}{2 \sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}}. \quad (11)$$

Поэтому (9) принимает такой вид:

$$(1 + \nu) \frac{1}{2} p R_0 \frac{\gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}} = r \left( \frac{d}{dr} \frac{1}{2} p R_0 \frac{1 - \nu - \gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}} \right),$$

или

$$\frac{(1+\nu)\gamma \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}} = r \left( \frac{-\gamma \frac{d}{dr} \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}} - \frac{1-\nu-\gamma \sin^2 \theta}{(1+\gamma \sin^2 \theta)^2} \frac{d}{dr} \gamma \sin^2 \theta \right) = \frac{r}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}}$$

$$\left( \frac{-\gamma \frac{d}{dr} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{2}(1-\nu-\gamma \sin^2 \theta)\right)}{1+\gamma \sin^2 \theta} \right) = -\frac{r\gamma \frac{d}{dr} \sin^2 \theta}{\sqrt{1+\gamma \sin^2 \theta}} \left(1 + \frac{1-\nu-\gamma \sin^2 \theta}{2(1+\gamma \sin^2 \theta)}\right)$$

или

$$(1+\nu)\gamma \sin^2 \theta = -r^2 + 2\gamma + 2\gamma \sin^2 \theta + 1 - \nu - \gamma \sin^2 \theta =$$

$$\gamma r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dr} (3 - \nu + \gamma \sin^2 \theta) \Rightarrow$$

$$= -\frac{\gamma r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dr}}{2(1+\gamma \sin^2 \theta)} (3 - \nu + \gamma \sin^2 \theta) \Rightarrow$$
(12)

т.к.  $\gamma = const$   $1 + \gamma \sin^2 \theta \neq 0$  сократим на  $\gamma \neq 0$  (исключим сферу) т.к. для сферы  $\gamma = 0$  что приведет последнее равенство к  $0 = 0$ .

Но

$$r \frac{d}{dr} \sin^2 \theta = r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dr} = r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{r^2 \sin \theta}{R_1} \Big|_{r=R_2 \sin \theta} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1} 2 \sin^2 \theta = 2 \sin^2 \theta (1 + \gamma \sin^2 \theta),$$

Поэтому из (12) имеем:

$$\Rightarrow (1+\nu) \sin^2 \theta = -\frac{1}{2} 2 \sin^2 \theta (1 + \gamma \sin^2 \theta) \frac{3 - \nu + \gamma \sin^2 \theta}{1 + \gamma \sin^2 \theta} \Rightarrow$$

$$1 + \nu = -3 + \nu - \gamma \sin^2 \theta \Rightarrow 4 + \gamma \sin^2 \theta = 0. \quad (12)$$

сократим на  $\sin^2 \theta \geq 0$

Уравнение (12) в общем случае не разрешимо. Это означает что (7) не удовлетворяет условиям совместности деформации.

Если  $\gamma = 0$ , то  $R_1 = R_2 = R_0$ ,  $T_1 = T_2 = \frac{1}{2} p R_0$ ,  $T_1 - T_2 = 0$ ,

$$T_2 - \nu T_1 = \frac{(1-\nu)p R_0}{2} = const.$$

Уравнение совместности деформаций:

$$(1+\nu)(T_1 - T_2) = r \frac{d}{dr} (T_2 - \nu T_1) \Rightarrow 0 = 0 \text{ удовлетворяется.}$$

Уравнения совместности деформаций, имеющие чисто геометрический характер, могут быть составлены с любой степенью точности, в тоже время уравнения равновесия, опирающиеся на общие для всех тел и хорошо известные давно установленные экспериментальные факты, не нуждаются в опытной проверке. Эта

система определяющих уравнений - может быть составлена лишь на основании эксперимента, выясняющего характер сопротивления каждого тела внешним воздействиям. Поэтому мера достоверности теории полностью зависит от идейной полноценности и точности эксперимента, положенного в ее основу, и от адекватного отображения результатов этого эксперимента в математическом аппарате теории через определяющие уравнения. Отмеченным фактом обусловлено фундаментальное значение для всей механики твердого деформируемого тела.

### РЕЗЮМЕ

В работе приведена математическая теория, которая отличается наиболее строгим подходом. Ее цель – определить напряженно-деформированное состояние оболочки с учетом нелинейных связей как между усилиями и деформациями (физическая нелинейность), так и между деформациями и перемещениями (геометрическая нелинейность).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев С. А. К теории мягких оболочек вращения. В Кн.: Расчет пространственных конструкций. М.: Госстройиздат, 1955, вып. 8., с. 309-322.
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 456 с.
3. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
4. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.

### SUMMARY

*The mathematical theory is provided in work differs in the most strict approach. Its purpose – to define the intense deformed condition of a cover taking into account nonlinear communications as between efforts and deformations (physical nonlinearity), and between deformations and movements (geometrical nonlinearity).*

**E-mail:** [Ps\\_minsk@yandex.ru](mailto:Ps_minsk@yandex.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

к.ф.-м.н. Докукова Н.А., Кафтайкина Е.Н., студ. Конон Н.П.

*УО «Белорусский государственный университет», Минск*

**Введение.** Целью настоящей работы является определение закономерностей построения эмпирических амплитудно-частотных характеристик звеньев многоэлементной динамической системы по известным экспериментальным графикам, расшифровка взаимовлияния осциллирующих звеньев на общий динамический процесс, моделирование передаточных функций для решения многокритериальной задачи оптимизации физических параметров структурных элементов.

Динамика вынужденных колебаний сложного механизма на рисунке 1 состоит из множества движений простейших компонентов, входящих в общую систему. Теоретическое исследование агрегата, полученного в процессе конструирования, – затруднительно. Для этих целей используют методы диагностики экспериментального и лабораторного анализа. Определяют кинематические и динамические параметры путем измерения и записи информации с помощью оборудования неразрушающего контроля. Результатом этих мероприятий являются, как кинематические величины: перемещения, скорости и ускорения элементов, так и обобщенная амплитудно-частотная характеристика (АЧХ). Последняя дает общее представление о наличии и величинах собственных частот, присутствующих в общей колебательной системе. Подобный анализ устанавливает факт неблагоприятных воздействий, диагностирует, но не позволяет в полной мере проанализировать, как на него повлиять. Эта задача так же сложна, как и исследование общей задачи динамики всей механической конструкции машины, поэтому разработка методик, алгоритмов и комплекса прикладных программ для диагностики и анализа устройств виброизоляции машиностроительных конструкций являются актуальными.

**Постановка задачи.** Для исследования АЧХ многоэлементных динамических систем с произвольным числом степеней свободы используем развитую авторами методику [1-2]. Рассмотрим систему с  $N$ -степенями свободы рисунок 1.

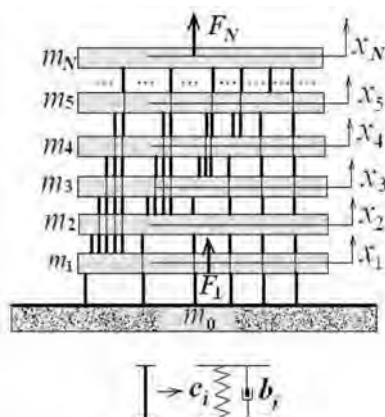


Рисунок 1 – Общая динамическая схема вынужденных колебаний механической системы с  $N$ -степенями свободы

Колебания механической системы с числом степеней свободы равным  $N$  представима в матричном – каноническом виде  $N$  - линейных дифференциальных уравнений второго порядка [1-2]:

$$\begin{pmatrix} L_1 & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & L_2 & \dots & d_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & L_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \dots \\ F_N(t) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь введены обозначения, аналогичные представленным в работах [1-2]  $d_{ij} = -b_{ij}d_t - c_{ij}$ ,  $L_i = d_{ii} + b_{ii}d_t + c_{ii} = d_{ii} - d_{ii}$  – дифференциальные операторы по параметру времени  $t$ ;  $c_{ij}$  – коэффициенты упругих элементов  $c_j$ , отнесенных к соответствующим массам  $m_i$   $\forall i, j = \overline{1, N}$ ,  $c_{ii} = \frac{c_i}{m_i} = \omega_i^2$   $\forall i = \overline{1, N}$ ;  $b_{ii} = \frac{b_i}{m_i}$   $\forall i = \overline{1, N}$ ,  $b_i$  – коэффициент вязкого сопротивления колебаниям тел;  $\vec{X} = (x(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$  – вектор искомых перемещений масс;  $\vec{F} = (F_1(t), F_2(t), F_3(t), \dots, F_n(t))$  – вектор внешних гармонических сил.

Систему (1) с помощью определенных невырожденных линейных преобразований можно привести к системе независимых линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка  $2N$  несвязных между собой [1-2]:

$$x_i^{(2N)} + \Delta_{2N-1}x_i^{(2N-1)} + \dots + \Delta_1x_i^{(1)} + \Delta_0x_i = \tilde{F}_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Коэффициенты  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  вычисляются по разработанным программам [3], правая часть (2) состоит из комбинации функций  $F_i(t)$  и их производных. В левой части каждого нового дифференциального уравнения – линейный дифференциальный оператор вида:  $P(D) = D^{2N} + \Delta_{2N-1}D^{2N-1} + \dots + \Delta_1D + \Delta_0$ , который вместе с правыми частями  $F_i(t)$  уравнений (2) находятся из определителей матриц

$$P(D) = \begin{vmatrix} L_1 & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & L_2 & \dots & d_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & L_N \end{vmatrix}, \quad \tilde{F}_i(t) = \begin{vmatrix} L_1 & d_{12} & \dots & d_{1i-1} & F_1(t) & d_{1i+1} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & L_2 & \dots & d_{2i-1} & F_2(t) & d_{2i+1} & \dots & d_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & d_{Ni-1} & F_N(t) & d_{Ni+1} & \dots & L_N \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Для неизвестных переменных  $x_j$  получаются неоднородные линейные дифференциальные уравнения порядка  $2N$ , независящие от других искомых переменных  $x_i$  ( $i \neq j$ ),

$$P(D(x_j)) = \tilde{F}_j(t) \quad \forall j = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Поскольку частотные характеристики описывают реакцию динамического звена на изменение входной величины по закону гармонических незатухающих колебаний, то в качестве таковой выберем  $F_1(t) = F_0 \sin(\omega t)$ , все остальные  $F_i(t) = 0$ ,  $\forall i = \overline{2, N}$ . Будем изучать, например, влияние вибраций двигателя на АЧХ многомассовой системы. Выходная величина динамических звеньев определятся по закону синуса, с той же частотой, но с другой амплитудой и фазой.

Применим интегральное преобразование Лапласа к системе уравнений (4) учитывая, для простоты, что в начальный момент времени вся исследуемая механическая система находилась в состоянии покоя:  $\vec{X}(0) = 0$ ,  $\dot{\vec{X}}(0) = 0$ ,

( $x_i(t)=0, \dot{x}_i(t)=0, \forall i=\overline{1,N}$ ). Тогда операторы  $dij, Li$  перейдут к новым  $d_{ij} \rightarrow Q_{ij}, L_i \rightarrow R_i$ , где  $Q_{ij} = -b_{ij}p - c_{ij}, R_i = p^2 + b_{ii}p + c_{ii} = p^2 - Q_{ii}$ , вектор искомым перемещений будет заменен  $X(t) \rightarrow X(p)$ , входная функция  $F_1(t)$  преобразуется к  $\Phi(p, \omega)$ . Задача об определении АЧХ всех звеньев сложной механической системы сведена к задаче об определении модуля вектора решений  $\bar{X}(p) = (X_1(p), X_2(p), X_3(p), \dots, X_N(p))$  системы алгебраических уравнений

$$\begin{vmatrix} R_1 & Q_{12} & \dots & Q_{1N} \\ Q_{21} & R_2 & \dots & Q_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{N1} & Q_{N2} & \dots & R_N \end{vmatrix} X_i(p) = \begin{vmatrix} R_1 & Q_{12} & \dots & \Phi(p, \omega) & \dots & Q_{1N} \\ Q_{21} & R_2 & \dots & 0 & \dots & Q_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{N1} & Q_{N2} & \dots & 0 & \dots & R_N \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Определитель матрицы, являющийся сомножителем решения  $X_i(p)$ , – полиномом порядка  $2N$

$$S_{2N}(p) = p^{2N} + a_{2N-1}p^{2N-1} + a_{2N-2}p^{2N-2} + \dots + a_1p + a_0 = \Delta. \quad (6)$$

Найдем алгебраические дополнения  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_N$  для элементов вектора-образа перемещений  $X_i(p)$  ( $i = \overline{1, N}$ ) в операторном виде

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} R_2 & Q_{23} & \dots & Q_{2N} \\ Q_{32} & R_3 & \dots & Q_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{N2} & Q_{N3} & \dots & R_N \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} Q_{21} & Q_{23} & \dots & Q_{2N} \\ Q_{31} & R_3 & \dots & Q_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{N1} & Q_{N3} & \dots & R_N \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_N = \begin{vmatrix} Q_{21} & R_2 & \dots & Q_{2(N-1)} \\ Q_{31} & Q_{32} & \dots & Q_{3(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{(N-1)1} & Q_{(N-1)2} & \dots & R_{(N-1)} \\ Q_{N1} & Q_{N2} & \dots & Q_{N(N-1)} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Искомые решения системы алгебраических уравнений (5) по методу Крамера являются следующие соотношения для передаточных функций каждого из динамических звеньев:  $X_1(p) = \Phi \frac{\Delta_1}{\Delta}, X_2(p) = -\Phi \frac{\Delta_2}{\Delta}, X_3(p) = -\Phi \frac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, X_N(p) = -\Phi \frac{\Delta_N}{\Delta}$ . Заменяем параметр  $p$  на  $i\omega$  в равенствах (6), (7) Выделим из них полиномы с четными и нечетными степенями параметра  $\omega$ .

$$S_{2N}(\omega) = (-1)^N a_{2N} S_{2N}^{\text{Re}}(\omega) + (-1)^{N-1} i\omega a_{2N-1} S_{2(N-1)}^{\text{Im}}(\omega), \quad a_{2N} \equiv 1, \quad (8)$$

$$S_{2N}^{\text{Re}}(\omega) = \omega^{2N} - \frac{a_{2(N-1)}}{a_{2N}} \omega^{2(N-1)} + \frac{a_{2(N-2)}}{a_{2N}} \omega^{2(N-2)} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{a_2}{a_{2N}} \omega^2 + (-1)^N \frac{a_0}{a_{2N}}, \quad (9)$$

$$S_{2(N-1)}^{\text{Im}}(\omega) = \omega^{2(N-1)} - \frac{a_{2N-3}}{a_{2N-1}} \omega^{2(N-2)} + \frac{a_{2(N-5)}}{a_{2N-1}} \omega^{2(N-3)} + \dots + (-1)^{N-2} \frac{a_3}{a_{2N-1}} \omega^2 + (-1)^{N-1} \frac{a_1}{a_{2N-1}}. \quad (10)$$

Здесь первые коэффициенты  $a_{2N} = 1, a_{2N-1} = b_{11}$  для полинома (6). Положим, что полиномы  $S_{2N}^{\text{Re}}(\omega), S_{2(N-1)}^{\text{Im}}(\omega)$  допускают определение корней в области действительных и комплексных чисел. Тогда могут появляться сомножители вида

$$S_{2N}^{\text{Re}}(\omega) = (\omega^2 + \alpha_i^2) \dots (\omega^2 - \beta_j^2) \dots (\omega^4 + 2a_k \omega^2 + a_k^2 + b_k^2), \quad (11)$$

$$S_{2(N-1)}^{\text{Im}}(\omega) = (\omega^2 + \chi_m^2) \dots (\omega^2 - \gamma_l^2) \dots (\omega^4 + 2c_r \omega^2 + c_r^2 + q_r^2), \quad (12)$$

где все  $\alpha_i, \beta_j, a_k, b_k, \chi_m, \gamma_l, c_r, q_r$  – действительные числа, причем  $\max_i(i) + \max_j(j) + 2 \max_k(k) = N$  и  $\max_m(m) + \max_l(l) + 2 \max_r(r) = N - 1$ .

По виду алгебраических дополнений (7) можно судить о максимальных степенях полиномов относительно переменных  $p$  или  $\omega$ . Максимальную степень будет иметь алгебраическое дополнение  $\Delta_1$  у перемещения  $X_1(p)$  элемента, к которому прикладывается физическая нагрузка или у первого ведомого звена конструкции. Поэтому полином первого алгебраического дополнения имеет степень  $2(N-1)$ . Аналогично предыдущему обозначим его  $G_{2(N-1)}(\omega)$

$$G_{2(N-1)}(\omega) = (-1)^{N-1} g_{2(N-1)} G_{2(N-1)}^{\text{Re}}(\omega) + (-1)^{N-2} i \omega g_{2N-3} G_{2(N-2)}^{\text{Im}}(\omega), \quad g_{2(N-1)} \equiv 1, \quad (13)$$

$$G_{2(N-1)}^{\text{Re}}(\omega) = \omega^{2(N-1)} - \frac{g_{2(N-1)}}{g_{2(N-1)}} \omega^{2(N-2)} + \frac{g_{2(N-2)}}{g_{2(N-1)}} \omega^{2(N-3)} + \dots + (-1)^{N-2} \frac{g_2}{g_{2(N-1)}} \omega^2 + (-1)^{N-1} \frac{g_0}{g_{2(N-1)}}, \quad (14)$$

$$G_{2(N-2)}^{\text{Im}}(\omega) = \omega^{2(N-2)} - \frac{g_{2N-5}}{g_{2N-3}} \omega^{2(N-3)} + \frac{g_{2N-7}}{g_{2N-3}} \omega^{2(N-4)} + \dots + (-1)^{N-3} \frac{g_3}{g_{2N-3}} \omega^2 + (-1)^{N-2} \frac{g_1}{g_{2N-3}}. \quad (15)$$

Первые коэффициенты  $g_{2(N-2)} = 1$ ,  $g_{2N-3} = b_{22}$  для алгебраического дополнения  $\Delta_1$ . Аналогично представим полиномы  $G_{2(N-1)}^{\text{Re}}(\omega)$ ,  $G_{2(N-2)}^{\text{Im}}(\omega)$  в виде ряда сомножителей:

$$G_{2(N-1)}^{\text{Re}}(\omega) = (\omega^2 + \eta_i^2) \dots (\omega^2 - \mu_j^2) \dots (\omega^4 + 2u_k \omega^2 + u_k^2 + s_k^2), \quad (16)$$

$$G_{2(N-2)}^{\text{Im}}(\omega) = (\omega^2 + \kappa_m^2) \dots (\omega^2 - \phi_l^2) \dots (\omega^4 + 2h_r \omega^2 + h_r^2 + z_r^2), \quad (17)$$

где все  $\eta_i$ ,  $\mu_j$ ,  $u_k$ ,  $s_k$ ,  $\kappa_m$ ,  $\phi_l$ ,  $h_r$ ,  $z_r$  – действительные числа, причем  $\max_i(i) + \max_j(j) + 2 \max_k(k) = N-1$  и  $\max_m(m) + \max_l(l) + 2 \max_r(r) = N-2$ .

Алгебраические дополнения  $\Delta_i$ ,  $i = \overline{2, N}$ , для перемещений  $X_i(p) \forall i > 2$  обладают рядом общих сходств, приводятся к полиномам  $W_{i[2N-3]}(\omega)$  одинаковой степени  $2N-3$ :

$$W_{i[2N-3]}(\omega) = (-1)^{N-2} (w_{i[2(N-2)]} W_{i[2(N-2)]}^{\text{Re}}(\omega) + i \omega w_{i[2N-3]} W_{i[2(N-2)]}^{\text{Im}}(\omega)), \quad w_{i[2(N-3)]} \equiv b_{i1}, \quad \forall i = \overline{2, N}, \quad (18)$$

$$W_{i[2(N-2)]}^{\text{Re}}(\omega) = \omega^{2(N-2)} - \frac{w_{i[2(N-3)]}}{w_{i[2(N-2)]}} \omega^{2(N-3)} + \frac{w_{i[2(N-4)]}}{w_{i[2(N-2)]}} \omega^{2(N-4)} + \dots + (-1)^{N-3} \frac{w_{i[2]}}{w_{i[2(N-2)]}} \omega^2 + (-1)^{N-2} \frac{w_{i[0]}}{w_{i[2(N-2)]}}, \quad (19)$$

$$W_{i[2(N-2)]}^{\text{Im}}(\omega) = \omega^{2(N-2)} - \frac{w_{i[2N-5]}}{w_{i[2N-3]}} \omega^{2(N-3)} + \frac{w_{i[2N-7]}}{w_{i[2N-3]}} \omega^{2(N-4)} + \dots + (-1)^{N-3} \frac{w_{i[3]}}{w_{i[2N-3]}} \omega^2 + (-1)^{N-2} \frac{w_{i[1]}}{w_{i[2N-3]}}. \quad (20)$$

Первыми коэффициентами являются  $w_{i[2(N-2)]} = c_{21}$ ,  $w_{i[2N-3]} = b_{21}$ , и  $W_{2(N-2)}^{\text{Re}}(\omega)$ ,  $W_{2(N-2)}^{\text{Im}}(\omega)$  представимы:

$$W_{2(N-2)}^{\text{Re}}(\omega) = (\omega^2 + \theta_i^2) \dots (\omega^2 - \sigma_j^2) \dots (\omega^4 + 2v_k \omega^2 + v_k^2 + \tau_k^2), \quad (21)$$

$$W_{2(N-2)}^{\text{Im}}(\omega) = (\omega^2 + \rho_m^2) \dots (\omega^2 - \psi_l^2) \dots (\omega^4 + 2e_r \omega^2 + e_r^2 + v_r^2), \quad (22)$$

где все  $\theta_i$ ,  $\sigma_j$ ,  $v_k$ ,  $\tau_k$ ,  $\rho_m$ ,  $\psi_l$ ,  $e_r$ ,  $v_r$  – действительные числа, причем  $\max_i(i) + \max_j(j) + 2 \max_k(k) = N-2$  и  $\max_m(m) + \max_l(l) + 2 \max_r(r) = N-2$ .

Учитывая зависимости передаточных функций каждого из динамических звеньев, и выбрав в качестве  $\Phi = 1 \text{ м/с}^2$ , получим:  $\bar{X}_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)}$ ,  $\bar{X}_2(p) = -\frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)}$ ,  $\bar{X}_3(p) = -\frac{\Delta_3(p)}{\Delta(p)}$ , ...,

$$\bar{X}_N(p) = -\frac{\Delta_N(p)}{\Delta(p)}.$$

Амплитудно-частотные характеристики  $A_i(\omega) = |\bar{X}_i(i\omega)|$ , ( $\forall i = \overline{1, N}$ ) каждого из входящих в механическую систему элементов

$$A_1(\omega) = |\bar{X}_1(i\omega)| = \left| \frac{\Delta_1(i\omega)}{\Delta(i\omega)} \right| = \left| \frac{G_{2(N-1)}(\omega)}{S_{2N}(\omega)} \right| = \left| \frac{-g_{2(N-1)} G_{2(N-1)}^{\text{Re}}(\omega) + i\omega g_{2N-3} G_{2(N-2)}^{\text{Im}}(\omega)}{a_{2N} S_{2N}^{\text{Re}}(\omega) - i\omega a_{2N-1} S_{2(N-1)}^{\text{Im}}(\omega)} \right|, \quad (23)$$

$$A_i(\omega) = |\bar{X}_i(i\omega)| = \left| \frac{\Delta_i(i\omega)}{\Delta(i\omega)} \right| = \left| \frac{W_{i[2N-3]}(\omega)}{S_{2N}(\omega)} \right| = \left| \frac{w_{i[2(N-2)]} W_{i[2(N-2)]}^{\text{Re}}(\omega) + i\omega w_{i[2N-3]} W_{i[2(N-2)]}^{\text{Im}}(\omega)}{a_{2N} S_{2N}^{\text{Re}}(\omega) - i\omega a_{2N-1} S_{2(N-1)}^{\text{Im}}(\omega)} \right|, \forall i = \overline{2, N}. \quad (24)$$

Подставим значения коэффициентов  $a_{2N} = 1$ ,  $g_{2(N-1)} = 1$ ,  $w_{i[2N-3]} = b_{21}$  в формулы (23) и (24)

$$|A_1(\omega)| = \sqrt{\frac{[G_{2(N-1)}^{\text{Re}}(\omega)]^2 + g_{2N-3}^2 \omega^2 [G_{2(N-2)}^{\text{Im}}(\omega)]^2}{[S_{2N}^{\text{Re}}(\omega)]^2 + a_{2N-1}^2 \omega^2 [S_{2(N-1)}^{\text{Im}}(\omega)]^2}}, |A_i(\omega)| = \sqrt{\frac{w_{i[2(N-2)]}^2 [W_{i[2(N-2)]}^{\text{Re}}(\omega)]^2 + b_{21}^2 \omega^2 [W_{i[2(N-2)]}^{\text{Im}}(\omega)]^2}{[S_{2N}^{\text{Re}}(\omega)]^2 + a_{2N-1}^2 \omega^2 [S_{2(N-1)}^{\text{Im}}(\omega)]^2}}, \quad \forall i = \overline{2, N} \quad (25)$$

Математические зависимости (25) являются амплитудно-частотными характеристиками в общем виде для динамического процесса, происходящего в многоэлементной механической конструкции.

**Использование общих закономерностей аналитических АЧХ для исследования экспериментальных.** Прокомментируем данные, полученные путем записи спектрограммы ускорений кабины трактора «Беларус – 925 М» на рисунке 2.



Рисунок 2 – Амплитудно-частотные характеристики ускорений остова под кабиной с пружинной подвеской

Методика для расчета общей зависимости АЧХ (25) состоит в следующем:

1) На графике рисунка 2 находятся резонирующие частоты, на которых кривая имеет выпуклости и частоты, обеспечивающие стремление АЧХ к нулю – впадины.

2) Полученные две числовые последовательности частот упорядочиваются по возрастанию. Формируется таблица 1, в которой каждая из последовательностей разбивается на две подпоследовательности путем чередования записи значений.

3) Используем формулу (25) для канонического представления общей аналитической зависимости амплитудно-частотной характеристики ускорений на остова с пружинной подвеской, в которой частота  $\omega$  будет задаваться в Гц. Например,

$$|A_1^*(\omega)| = \frac{1}{4(2\pi)^2} \sqrt{\frac{[A]_{2(N-1)}^2 + (b_{22}/2\pi)^2 \omega^2 [B]_{2(N-2)}^2}{[C]_{2N}^2 + (b_{11}/2\pi)^2 \omega^2 [G]_{2(N-1)}^2}}, \quad (26)$$

здесь



$$A = (0.2^2 + \omega^2)(0.5^2 + \omega^2)(0.8^2 - \omega^2)(1.1^2 + \omega^2)(1.4^2 - \omega^2)(1.7^2 + \omega^2)(2.0^2 + \omega^2)(2.3^2 - \omega^2)(2.6^2 + \omega^2)(2.9^2 - \omega^2)(3.2^2 + \omega^2),$$

$$B = \omega(0.35^2 + \omega^2)(0.65^2 + \omega^2)(0.95^2 - \omega^2)(1.25^2 + \omega^2)(1.55^2 + \omega^2)(1.8^2 - \omega^2)(2.15^2 + \omega^2)(2.45^2 - \omega^2)(2.75^2 + \omega^2)(3.05^2 + \omega^2),$$

$$C = (0.15^2 - \omega^2)(0.45^2 + \omega^2)(0.75^2 - \omega^2)(1.05^2 - \omega^2)(1.35^2 - \omega^2)(1.65^2 - \omega^2)(1.9^2 - \omega^2)(2.25^2 - \omega^2)(2.55^2 - \omega^2)(2.85^2 + \omega^2) \cdot$$

$$\cdot (3.15^2 - \omega^2)(3.45^2 + \omega^2),$$

$$G = \omega(0.3^2 - \omega^2)(0.6^2 - \omega^2)(0.9^2 - \omega^2)(1.2^2 + \omega^2)(1.5^2 - \omega^2)(1.8^2 + \omega^2)(2.1^2 - \omega^2)(2.4^2 - \omega^2)(2.7^2 + \omega^2)(3.0^2 - \omega^2)(3.3^2 + \omega^2).$$

Таблица 1. – Числовые подпоследовательности частот для 12-элементной динамической модели, упорядоченные по возрастанию

Число звеньев в динамической модели, N	Частоты ограниченного резонанса на АЧХ, Гц		Ограниченные нулевые частоты на АЧХ, Гц	
	C	G	A	B
N=12				
1	0,15	0,3	0,2	0,35
2	0,45	0,6	0,5	0,65
3	0,75	0,9	0,8	0,95
4	1,05	1,2	1,1	1,25
5	1,35	1,5	1,4	1,55
6	1,65	1,8	1,7	1,85
7	1,95	2,1	2	2,15
8	2,25	2,4	2,3	2,45
9	2,55	2,7	2,6	2,75
10	2,85	3	2,9	3,05
11	3,15	3,3	3,2	
12	3,45			

Поскольку на «резонансной» частоте  $\omega = 1,9$  Гц максимальная амплитуда, то в таблице 1 изменены значения – ноль и резонирующая частоты АЧХ сдвинуты влево, первая с 1,85 Гц до 1,8 Гц, вторая с 1,95 Гц до 1,9 Гц, в соответствии исследованными свойствами формулы (25). Приближенная зависимость на остовете с пружинной подвеской, полученная аналитически на основании теоретических результатов, представлена на рисунках 3 а и б. На рисунке 3 б дополнительно наложен высокочастотный шум с малой амплитудой  $0.025(1 - \cos(20.2\pi\omega))$  от движения по грунтовой дороге со скоростью 8,5 км/ч.

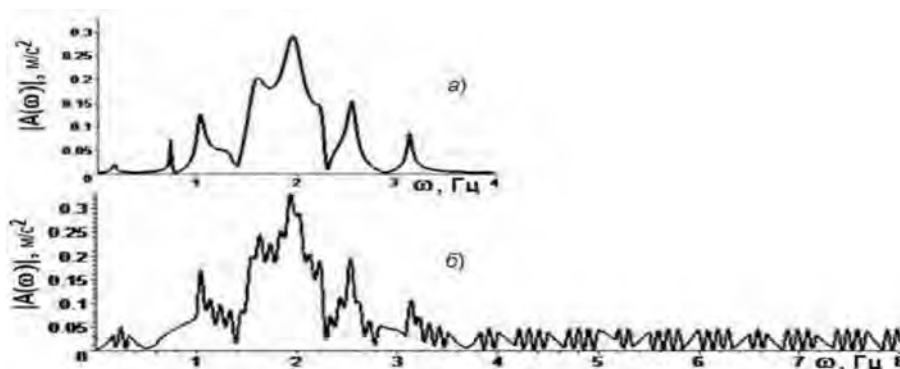


Рисунок 3 – Приближенные АЧХ ускорений на остовете под кабиной с пружинной подвеской, найденные по аналитическим формулам

Представленный расчет является условным, более детальное соответствие графиков на рисунках 2 и 3 следует разрабатывать нанесением координатной сетки на экспериментальные кривые и заполнением таблицы 1, содержащей значительно больший объем данных.

**Выводы.** В результате выполненной работы развита методика теоретического анализа диагностики технических устройств, улучшающих качество виброзащиты. По известному портрету амплитудно-частотных характеристик многоэлементных динамических систем разработана методика расшифровки взаимовлияния осциллирующих звеньев на общий динамический процесс. Разработан комплекс прикладных программ для диагностики устройств виброизоляции машиностроительных конструкций. Установлена закономерность влияния большого числа линейных осцилляторов и конфигураций их связей на вид амплитудно-частотной характеристики.

## РЕЗЮМЕ

Получены аналитические зависимости общих амплитудно-частотных характеристик многоэлементной динамической системы с произвольным числом степеней свободы. По известным экспериментальным графикам амплитудно-частотных характеристик многоэлементных динамических систем представлена методика расшифровки взаимовлияния осциллирующих звеньев на общий динамический процесс. Установлена закономерность влияния большого числа линейных осцилляторов и конфигураций их связей на вид амплитудно-частотной характеристики. Развита методика теоретического анализа диагностики технических устройств, улучшающих качество виброзащиты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dokukova N.A. and P.N. Konon. General laws governing in mechanical vibratory systems// Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2006, Volume 79, Number 4, Pages 824-831, Publisher Springer New York, ISSN: 1062-0125.
2. Dokukova N.A., P.N. Konon and E.N. Kaftaikina. Nonnatural vibrations of hydraulic shock-absorbers// Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2008, Volume 81, Number 6, Pages 1191-1196, Publisher Springer New York, ISSN: 1062-0125.
3. Кафтайкина Е.Н., Докукова Н.А., Окрут Д.И. Программа расчета коэффициентов характеристического уравнения системы уравнений динамики механических объектов. Реестр зарегистрированных компьютерных программ в Национальном центре интеллектуальной собственности Республики Беларусь. – 16.04.2012.

## SUMMARY

*Analytical dependences of the general amplitude-frequency characteristics of multibody dynamic systems with an arbitrary number of degrees of freedom. According to the known experimental plots of amplitude-frequency characteristics of multibody dynamic systems presents a method of decoding the mutual oscillating units on the overall dynamic process. The regularities of the influence of a large number of configurations of linear oscillators and their connections to the kind of amplitude-frequency characteristics. The technique of theoretical analysis diagnostics of technical devices that improve the quality of the vibration protection.*

**E-mail:** [dokukova@mail.ru](mailto:dokukova@mail.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## INVESTIGATION OF FRICTIONAL CONDITIONS OF STEEL SHEETS USING PIN-ON-DISK TRIBOMETER

<sup>1</sup>Trzepieciński T., <sup>1</sup>Stachowicz F., <sup>2</sup>Bosiakov S., <sup>2</sup>Rogosin S.

<sup>1</sup> Rzeszow University of Technology, Poland

<sup>2</sup> Belarusian State University, Minsk

**Introduction.** Friction regimes encountered during deep drawing of thin metal sheets are very complex and depend on several parameters such as the contact pressure, sliding velocity, sheet metal and tool surface roughness, kinematics of tool motion, tool and blank material, lubrication and temperature [1-3]. One of the main factors influencing frictional resistance is surface topography of deformed sheet. As friction between the sheet and tools is one of the important factors affecting the quality of drawpiece, clarifying the frictional condition for modeling and analysis of sheet metal forming processes is very essential. The workpiece surface topography and asperity contact are also important factors that control the mechanisms of lubrication in metal forming process.

This paper presents a method of determining the anisotropic friction model in metal forming based on experimental data obtained from the pin-on-disk tribometer. The experimental research of friction was carried out for deep-drawing car body steel sheet metal. The experimental results of friction tests show that the friction coefficient depends on the measured angle from the rolling direction and corresponds to the surface topography. To confirm that steel sheets are characterized by the anisotropy of tribological properties, frictional anisotropy on a given surface has to be clearly distinguished from frictional anisotropy for different perpendicular orientations between the pin and the surface. In this study, the friction coefficient as a function of angular position with respect to the rolling direction of the sheet metal was measure.

**Experimental procedure.** The frictional experiments presented in this work were conducted for deep drawing quality (DDQ) cold-rolled steel sheet with a sheet thickness of 1 mm. The mechanical properties of the sheet metal (Tab. 1) have been determined through uniaxial tensile tests along three directions with respect to the rolling direction. The parameters  $C$  and  $n$  in Hollomon equation have been fitted on stress-strain curve of the tensile test. The anisotropy of plastic behavior of sheet metals is characterized by the Lankford's coefficient  $r$  [5]. A measured  $r$ -value that differs from unity shows that there is a difference between mechanical properties measured in plane and through-thickness, which is usually characterized by the normal plastic anisotropy ratio, defined as:

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \quad (1)$$

where  $r_0$  is the strain ratio in the longitudinal direction,  $r_{45}$  is the strain ratio measured 45° to the rolling direction and  $r_{90}$  the strain ratio in the transverse direction.

**Table 1.** Mechanical properties of DDQ steel sheet metal

Orientation	Yield stress $\zeta_y$ [MPa]	Ultimate tensile strength $\zeta_u$ [MPa]	Hardening coefficient $C$ [MPa]	Strain hardening exponent $n$	Lankford's coefficient $r$
0°	162	310	554	0.21	1.55
45	163	322	542	0.20	1.27
90°	168	312	530	0.21	1.67

The sheet metal exhibits in-plane anisotropy in the yield stress and the  $r$  value, while the hardening exponent value is not significantly affected by the sample orientation. The  $r$  value in the rolling direction is smaller than measured value in the transverse direction because it is inversely proportional to the thickness strain. The accommodation of strain in the width of the specimen is easier if the basal planes are more tilted to the width direction of the specimen. As the study by Yi *et al.* [6] asserts, the variation of the  $r$  value in different loading directions has a strong relationship with the texture. Moreover, the yield stress in the transverse direction is higher than the one measured at  $45^\circ$  and in the rolling direction, while the maximum ultimate tensile strength is measured at  $45^\circ$  from the rolling direction. The variation in the yield stress can be explained by its directional texture. Further, the values in the table show that the yield stress measured in the rolling direction is lower than in transverse direction, and the higher calculated material constant  $C$  value occurs for rolling direction and tends to decrease from the rolling to the transverse direction.

The friction properties of the deep drawing quality steel sheets used in the experiments were determined by using the pin-on-disc tribometer T01-M [7]. The values of friction coefficient were determined in dry friction conditions. Prior to each test, the pins and disks were degreased using acetone to remove metal fragments and oil from the surface. The tests were conducted under the following conditions:

- speed of sample rotation  $\omega$ : 36 rpm,
- ball pressure: 450 and 640 MPa,
- track: circle of radius  $R$ : 5 mm.

Cyclical nature of the friction contact of pin-on-disk surfaces during tribometer test is the reason for the accumulation of wear products [8] and, consequently, may lead to a seizure of mating surfaces so the friction coefficients were determined for first sample rotation using the formulae:

$$\mu = \frac{F_T}{F_N} \quad (2)$$

where  $F_T$  - friction force,  $F_N$  - pin loading force.

To confirm that steel sheets are characterized by the anisotropy of tribological properties, friction anisotropy on a given surface has to be clearly distinguished from friction anisotropy for different perpendicular orientations between the pin and the surface. As shown in Fig. 1, changes of friction coefficient value exhibit two maxima for a rotation through  $360^\circ$ . They correspond to the measurement of friction coefficient value transverse to the rolling direction.

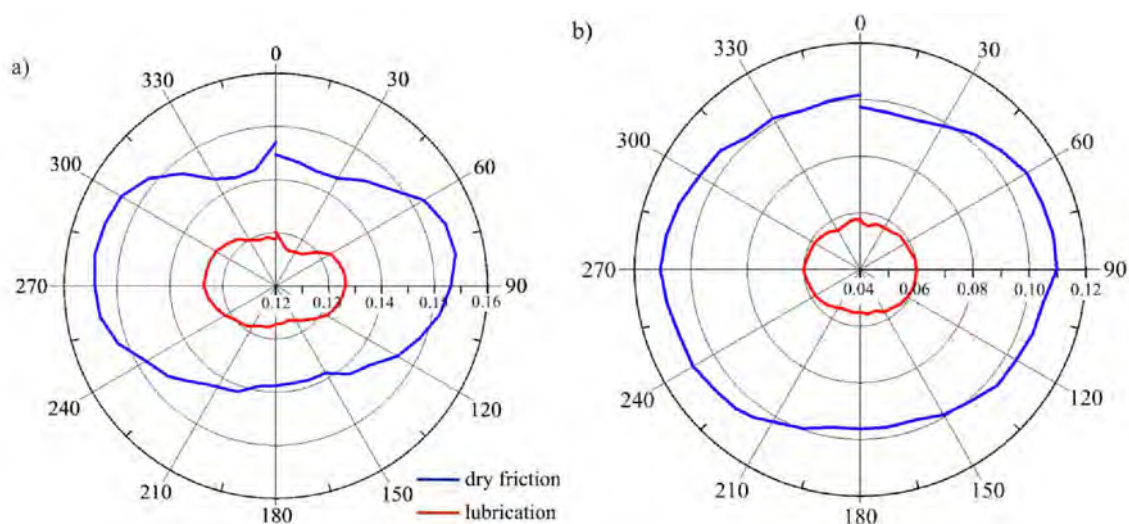


Figure 1. The variation of friction coefficient value as a function of measurement orientation ( $^\circ$ ) according to the rolling direction of sheet, dry friction conditions, ball pressure: 640 MPa (a) and 450 MPa (b)

**Contact conditions.** The tribometer's friction conditions involve both indentation and rotating sliding behaviour. Most of the researches of normal contact and sliding contact are focused on the analysis of elastic and elasto-plastic solids. The analytical analysis of the stresses at the contact of two elastic solids relating to spherical contacts was first studied by Hertz [9] and is based on four assumptions specified by Johnson [10]: the surfaces are continuous and non-conforming, the strains are small (within the elastic limit), bodies in contact are considered as elastic half-spaces and the contact is frictionless. The pressure distribution over the contact area is given as:

$$P = \frac{3W}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad (3)$$

where  $W$  is the normal load,  $r$  - wear scare radius,  $a$  - radius of point contact circle given as:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3WR}{4} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \quad (4)$$

where  $\nu_1$  and  $\nu_2$  are the Poisson's ratios for bodies 1 and 2 respectively, and  $E_1$  and  $E_2$  are their Young's moduli,  $R$  is the relative curvature defined as:

$$R = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad (5)$$

where  $R_1$  and  $R_2$  are the radius of the curvature of bodies 1 and 2 respectively.

When response of the solid material is elastic-plastic Hertzian theory is limited. The influence of strain hardening on contact pressure and contact stress was done by Kral et al. [11]. The analysis is based on a rigid sphere on an elastic-plastic half-space model considered Huber-Mises-Hencky material model. However, Kral's model was frictionless. Taljat and Pharr [12] considered friction in your indentation model and concluded that the contact friction affects the pile-up geometry. They found that friction affects pile-up in a manner that depends on strain hardening exponent  $n$ . Most numerical studies of sliding contact are focused on the two-dimensional linear tangential loading and sliding of the fixed slider (Fig.2). The indenter, carrying the normal load  $F_N$ , moves from right to left over the fixed flat surface in a direction parallel to the x-axis.

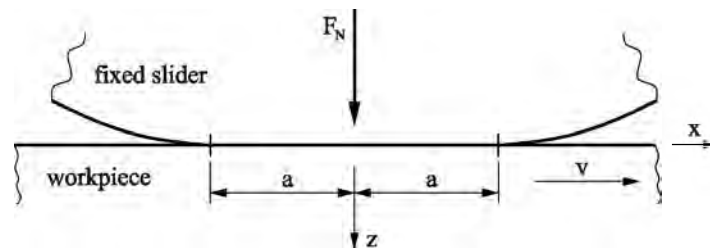


Figure 2. Schematic of two parts in a sliding contact

**Numerical modeling.** The limit surface is usually assumed to be isotropic predicting a frictional behavior independent of the sliding direction. For many industrial applications, this assumption seems to be unrealistic and many experimental studies show that the frictional behavior can change drastically with the sliding direction, requiring an anisotropic model [4]. The origin of this anisotropy can be attributed to two different sources. The first one is the material itself where the anisotropies of the materials constituting the bodies manifest themselves on the contact surface. The second one is technological. The industrial process used to fabricate the bodies can create striations along preferential directions. Currently, there are not so many publications focusing on frictional anisotropy and its implementation in numerical simulations of sheet metal forming processes.

The anisotropic friction model corresponded to experimental results was implemented into a finite element (FE) model built using the commercial FE-package ABAQUS. An elastic-plastic material model approach was implemented. The elastic behavior is specified in numerical simulations by the value of Young's modulus,  $E = 210000$  MPa, and of Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ . In the numerical model, the anisotropy of the material has been established using Hill (1948) yield criterion (AM) [14] which is the most frequently used yield function for steel sheet metals [5]. Furthermore, the isotropic Huber-Mises-Hencky material model (IM) is considered. The isotropic hardening behaviour in the FEM model uses the Hollomon power-type law.

For the blank meshing the 3-dimensional 8-node brick elements were used. The hardness of the indenter is considerably higher than the blank hardness so the pin is considered to be rigid, no deformation is assumed in this part during the simulation [15]. The blank model is composed of 22880 of C3D8R type elements (Fig. 4). In order to increase the accuracy of the solution the local densification of the mesh along the contact track is applied.

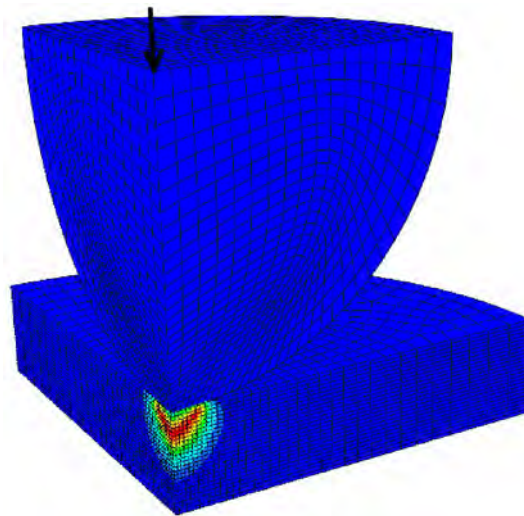


Figure 4. Finite element model of the ball indentation process

As it was found in previous investigations [15] the anisotropic elliptic friction model (AF) approximate well the experimental variations of friction coefficient value. The minimal and maximal values of friction coefficient in implemented elliptic model were 0.128 and 0.157, respectively. For the isotropic frictional conditions (IF) an average value of friction coefficient 0.1425 was used.

**Numerical results and discussion.** The small errors could be attributed to the averaging of the stress data from integration points to boundary nodes and the discretization of the continuous surface. As the pin load increases, the plastic zone continues to grow until the edge of the plastic zone reaches the surface near the edge of the contact radius. The maximum value of total equivalent plastic strain is found at the subsurface, some distance below the centre of the contact region (Fig. 5). The anisotropy of both material and friction conditions was influenced on non-uniformity of the stress distribution around the pin axis, which is clearly visible for higher values of pin indentations. As the load increases, for both material models, the plastic zone continues to grow until the edge of the plastic zone reaches the surface near the edge of the contact radius. Furthermore, the zone of maximum equivalent plastic strain moves radially from the centre towards the surface inside the maximum contact radius which is in agreement with the analytical results of the research made by Kral et al. [13].

As shown in Fig. 5 the change of isotropic friction to anisotropic conditions for both material models slightly influenced on the change of equivalent plastic strain distribution. Similar dependence is observed for equivalent plastic strain value measured along the rolling

the rolling direction of the sheet (Fig. 6). The maximal difference in equivalent plastic strain between AM+AF and IM+IF is equal of about 0.002 and is observed at the subsurface, some distance below the centre of the contact region. The maximal difference in equivalent plastic strain between AM+AF and IM+IF is equal of about 29 MPa.

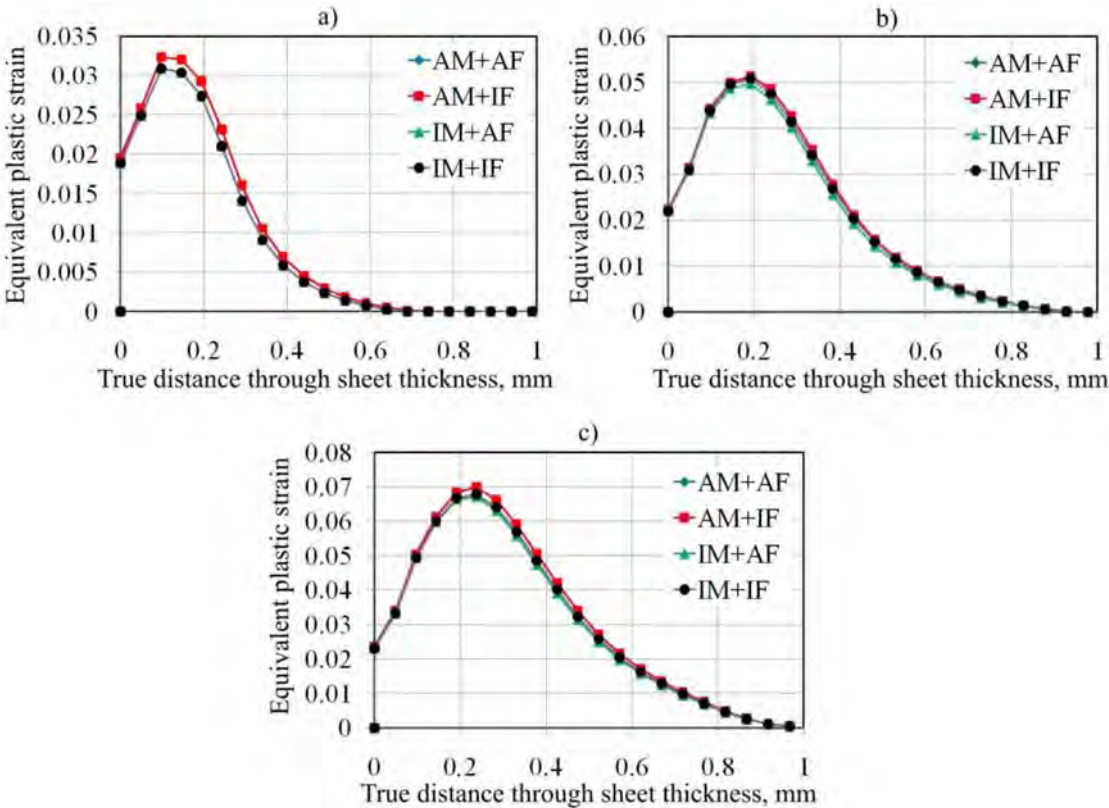


Figure 5. Distribution of total equivalent plastic strain for indentation depths: a) 0.012 mm , b) 0.024 mm and c) 0.036 mm

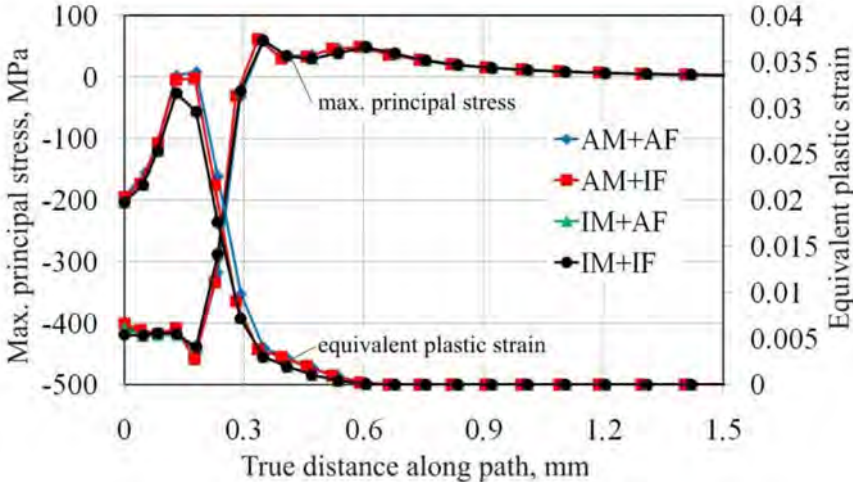


Figure 6. The value of maximal principal stress and equivalent plastic strain measured along the rolling direction

**Acknowledgement.** This paper is the result of project implementation: „Trans-Atlantic Micromechanics Evolving Research: Materials containing inhomogeneities of diverse physical properties, shapes and orientations” supported by FP7-PEOPLE-2013-IRSES Marie Curie Action "International Research Staff Exchange Scheme"

## SUMMARY

This paper presents a method of determining the anisotropic friction model for sheet metal forming processes based on experimental data obtained from the pin-on-disk tribometer test. Friction coefficient value was measured as a function of angular position with respect to the rolling direction of the sheet metal. The frictional investigations presented in this work were conducted for deep drawing quality cold-rolled steel sheet with a sheet thickness of 1 mm. The anisotropic friction model corresponded to experimental results was implemented into a finite element (FE) model built using the ABAQUS software. In the numerical investigations the hemispherical contact against an elastic-plastic flat was analysed. In the numerical model to describe the material behaviour the isotropic Huber-Mises-Hencky and anisotropic Hill (1948) yield criteria have been assumed. The anisotropy of both material and friction was influenced on non-uniformity of the stress distribution around the hemisphere axis, which is clearly visible for higher values of hemispherical solid indentations. It was found that the change of isotropic friction to anisotropic conditions for both material models slightly influences on the value and the change of equivalent plastic strain distribution in contact zone.

## REFERENCES

1. Trzepieciński T.: Analysis of the friction influence on change of surface topography in strip drawing test, *Tribologia*, 44, 2012, p. 125–134.
2. Trzepieciński T.: Badanie właściwości tarcowych blach stalowych dla przemysłu motoryzacyjnego, *Hutnik Wiadomości Hutnicze*, 81, 2014, p. 446–449.
3. Hirpa G. Lemu, Trzepieciński T.: Numerical and experimental study of the frictional behaviour in bending under tension test, *Stroj. Vest. - J. Mech. Eng.*, 59 2013, p. 41–49.
4. Hjjaj M., Feng Z.-Q., de Saxe G., Mróz Z.: On the modelling of complex anisotropic frictional contact laws, *Int. J. Eng. Sci.*, 42, 2004, p. 1013–1034.
5. Banabic D., Bunge H.-J., Pohlandt K., Tekkaya A. E.: *Formability of metallic materials*, Springer-Verlag, Berlin 2000.
6. Yi S., Bohlen J., Heinemann F., Letzig D.: Mechanical anisotropy and deep drawing behaviour of AZ31 and ZE10 magnesium alloy sheets, *Acta Materialia*, 58, 2010, p. 592–605.
7. Stachowicz F., Trzepieciński T.: Opory tarcia podczas kształtowania blach karoseryjnych, *Mat. Konf. SAKON*, Przeclaw, 2003, p. 297-302.
8. Godfrey D.: Friction oscillations with a pin-on-disc tribometer, *Tribol. Int.*, 28, 1995, p. 119-126.
9. Hertz H.R.: *On contact between elastic bodies*, *Collected Works*, 1, 1882.
10. Johnson K.L.: *Contact mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.
11. Kral E.R., Komvopoulos K., Bogy D.B.: Elastic-plastic finite element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere, *J. Appl. Mech.*, 60, 1993, p. 829–841.
12. Taljat B., Pharr G.M.: Development of pile-up during spherical indentation of elastic plastic solids, *Int. J. Solids Struct.*, 41, 2004, p. 3891–3904.
13. Kral E.R., Komvopoulos K., Bogy D.B.: Elastic-plastic finite element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere, *J. Appl. Mech.*, 60, 1993, p. 829–841.
14. Hill R.: A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proceedings of the Royal Society of London*, 193, 1948, p. 281–297.
15. Trzepieciński T., Gelgele H.L.: Investigation of anisotropy problems in sheet metal forming using finite element method, *Int. J. Mater. Form.*, 4, 2011, p. 357–369.

**E-mail:** [bosiakov@bsu.by](mailto:bosiakov@bsu.by)

Поступила в редакцию 03.11.2014



## ОБ ОДНОЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА КОНСОЛИДАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУНТОВ

к.ф.-м.н. **Алтынбеков Ш.А.**

*Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент*

**Введение.** Теория фильтрационной консолидации грунтов, начиная с 25-го года уходящего столетия, интенсивно развивается, охватывая все новые области исследований. Причем развитие идет фактически по всем направлениям, начиная с анализа физико-химических и механических свойств грунтов, кончая созданием универсальных различных физико-математических моделей, позволяющих с помощью мощных, современных, персональных компьютеров смоделировать прошлое, настоящее и будущее НДС изучаемого объекта.

При изучении осадки реальных грунтовых оснований различных военно-гражданских, промышленных и гидротехнических сооружений каждый раз пористая среда как объект математического моделирования вносит свой «исправления» в существующие математические модели. Эти модели отличающиеся друг от друга «исправлениями» соответствующие признаками определенного физико-химического и механического свойства грунта, а также природного и техногенного условия района строительства создают базу моделей.

Исследователь, изучая новые строительные объекты, обращается к базе моделей в надежде, что найдется какая-либо подходящая математическая модель, описывающая изучаемую проблему. Если таковой, то приходится либо корректировать или сконструировать новую математическую модель, наиболее близко описывающую процесс консолидации земляных масс. Поэтому разработка (конструирование) математических моделей, содержащих в себе ранее существующие, является актуальной задачей.

**Постановка задачи.** Найти непрерывное в области  $(x, t) \in \Omega_T = G \times (\tau_1, T)$  решение  $H(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_{vn}(x, t, H)L(H) - C_{ln}(x, t, H) \times \left\{ \int_{\tau_1}^1 f(\tau, H)K_1(t, \tau, H)d\tau + f(t, H)K_2(t, t, H) \right\} + C_{2n}(x, t, H), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$H(x, \tau_1)(\theta_0^* | n\gamma + H_0^*) | \omega_0, \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} h_1^{(1)} \frac{\partial H}{\partial x_1} - h_1^{(2)} H |_{x_1 = -l_1} &= \Psi_1(x_2, x_3, t) \\ h_1^{(3)} \frac{\partial H}{\partial x_1} + h_1^{(4)} H |_{x_1 = +l_1} &= \Psi_2(x_2, x_3, t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} h_3^{(1)} \frac{\partial H}{\partial x_3} - h_3^{(2)} H |_{x_3 = -l_3} &= \Psi_5(x_1, x_3, t) \\ h_3^{(3)} \frac{\partial H}{\partial x_3} - h_3^{(4)} H |_{x_3 = l_3} &= \Psi_6(x_1, x_3, t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$L = \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} \left( K_{\Phi s} \frac{\partial}{\partial x_s} \right),$$

$$K_1(t, \tau, H) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial C(t, \tau, H)}{\partial \tau} \right),$$

$$K_2(t, t, H) = \left( \frac{\partial C(t, \tau, H)}{\partial \tau} \right)_{\tau=1},$$

$$\omega_0 = 1 - (1 + \varepsilon_0) \beta_1(x, \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \Big|_{t = \tau_1},$$

$$\beta_1(x, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{1 - \eta^* + \mu_* \eta^*}{\gamma(H - x_n + \bar{H}_0)} \quad (6)$$

Здесь уравнение состояния скелета неоднородных наследственно стареющих грунтов представлено в следующем виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 - \frac{1}{1 - (n-1)\xi(x)} \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2 \eta_1(x)) a_0(t, \theta(t)) \times \theta(t) - \int_{\tau_1}^t \theta(\tau) K(t, \tau, x, \theta(\tau)) d\tau \right\}, \quad (7)$$

$$K(t, \tau, x, \theta(\tau)) = (\alpha_1 + \alpha_2 \eta_1(x)) \frac{\partial a_0(\tau, \theta(\tau))}{\partial \tau} + (\alpha_3 + \alpha_4 \eta_2(x)) \frac{f(\tau, \theta(\tau))}{\theta(\tau)} + \frac{\partial C(t, \tau, \theta(\tau))}{\partial \tau} \quad (8)$$

$$a_0(t, \theta(t)) = E_1/E_0(1 - \beta_E e^{-\alpha_E t}) + A_a / (B_a + C_a \theta(t)), E_0 > 0, E_1 \geq 0, B_a > 0, A_a \geq 0, C_a \geq 0,$$

$$C(t, \tau, \theta(\tau)) = \frac{t^{\alpha_5 - \alpha_6} C_0(t, \tau, \theta(\tau))}{(t - \tau + \alpha_7)^{1 - \alpha_6}}. \quad (9)$$

Причем функция  $C_0(t, \tau, \theta(\tau))$ , входящая в (8) определяется одним из следующих соотношений:

$$C_0(t, \tau, \theta(\tau)) = \varphi(\tau, \theta(\tau)) \sum_{k=1}^{\infty} a_k (1 - e^{-\gamma_k(1-\tau)}), \quad (10)$$

$$C_0(t, \tau, \theta(\tau)) = \Psi(\tau, \theta(\tau))(1 - e^{-\gamma_1(1-\tau)}) + \varphi(\tau, \theta(\tau)) - \Psi(\tau, \theta(\tau))(1 - e^{-\gamma_2(1-\tau)}). \quad (11)$$

Старение среды математически описывается одним из следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\tau, \theta(\tau)) &= C_0 + \frac{A_0}{\tau^k + D_0 \theta(\tau) + B_0}, \\ \Psi(\tau, \theta(\tau)) &= C_1 + \frac{A_0}{\tau^k + D_1 \theta(\tau) + B_1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\tau, \theta(\tau)) &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\tau^k + B_k \theta(\tau)}, \\ \varphi(\tau, \theta(\tau)) &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{D^k + B_k \theta(\tau)} e^{-\gamma_k(1-\tau)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Функция  $f(\tau, H)$ , входящая в (1) представлена так:

$$f(\tau, H) = \beta_1(\tau) H(\tau) + \beta_2(\tau) H^m(\tau), m > 0 \quad (14)$$

$$\beta_1(\tau) = \beta_{10} + \frac{\beta_{11}}{\tau^k + \beta_{12}},$$

$$\beta_2(\tau) = \beta_{20} + \frac{\beta_{21}}{\tau^k + \beta_{22}}, k > 0$$

Смысл функций  $H(x, t)$ ,  $K_1(t, \tau, H)$ ,  $K_2(t, t, H)$ ,  $\theta_0^*(x)$ ,  $H_0^*(x)$ ,  $\omega_0(x)$ ,  $\beta_v(x, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon(t)$ ,  $K(t, \tau, x, \theta(\tau))$ ,  $a_0(t, \theta(t))$ ,  $C(t, \tau, \theta(\tau))$ ,  $\varphi(\tau, \theta(\tau))$ ,  $\Psi(\tau, \theta(\tau))$ ,  $f(t, H)$ , а также параметров пористой среды общепринятый.

Вид функций  $C_{vm}(x, t, H)$ ,  $C_{vn}(x, t, H)$ ,  $C_{2n}(x, t, H)$  в (1) обусловлен зависимостями (6), (7), ... (14), приведенным в данной работе. При этом коэффициент фильтрации, характеризующий сопротивление пористой среды движущейся жидкости аппроксимирован одним из выражений (Флорин 1959, 1961, Абелев 1983, Гольдин и др. 1987, Цитович и др. 1967):

$$K_{\Phi S}(\varepsilon(t)) = K_{\Phi S}^{(1)} - \frac{K_{\Phi S}^{(1)} - K_{\Phi S}^{(2)}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon(t)),$$

$$K_{\Phi S}(\varepsilon(t)) = 4 \cdot 10^{-11} \exp\left(\frac{\varepsilon(t)}{0,17\varepsilon_\tau - 0,048}\right),$$

$$K_{\Phi S}(\varepsilon(t)) = K_{\Phi S_0} \left(\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon_k}{\varepsilon_0 - \varepsilon_k}\right)^{n_s}, \quad n_s \geq 1.$$

Функция  $\Psi(x, t)$  представлена в виде

$$\Psi(x, t) = \alpha_1^{(1)}(l_1 - x_1)^{n_1} \Psi_1(x_2, x_3, t) +$$

$$+ \alpha_2^{(1)}(l_1 + x_1)^{n_2} \Psi_2(x_2, x_3, t) + \alpha_1^{(1)}(l_2 - x_2)^{n_3} \Psi_3(x_1, x_3, t) +$$

$$+ \alpha_2^{(2)}(l_2 + x_2)^{n_4} \Psi_4(x_1, x_3, t) + \alpha_1^{(3)}(h - x_3)^{n_5} \Psi_5(x_1, x_2, t) +$$

$$+ \alpha_2^{(3)} x_3^{n_6} \Psi_6(x_1, x_2, t), \quad n_i \geq 2, i = 1, 2, 3 \dots, 6.$$

где

$$\alpha_1^{(1)} = -1/(h_1^{(1)} n_1 (2l_1)^{n_1-1} + h_1^{(2)} (2l_1)^{n_1}),$$

$$\alpha_2^{(1)} = 1/(h_1^{(3)} n_2 (2l_1)^{n_2-1} + h_1^{(4)} (2l_1)^{n_2}),$$

$$\alpha_1^{(2)} = -1/(h_2^{(1)} n_3 (2l_2)^{n_3-1} + h_2^{(2)} (2l_2)^{n_3}),$$

$$\alpha_2^{(2)} = 1/(h_2^{(3)} n_4 (2l_2)^{n_4-1} + h_2^{(4)} (2l_2)^{n_4}),$$

$$\alpha_1^{(3)} = -1/(h_3^{(1)} n_5 (2l_1)^{n_5-1} + h_3^{(2)} h^{n_5}),$$

$$\alpha_2^{(3)} = 1/(h_3^{(3)} n_6 (2l_3)^{n_6-1} + h_3^{(4)} h^{n_6}),$$

Уравнение (7) с интегральным ядром типа (8) имеет общий характер. Из них, как частные случаи, можно получить различные виды уравнений состояния среды и ядра, часто применяемые в практике.

**Методы решения задачи.** Решение уравнение (1) при соответствующих краевых условиях связано с большими трудностями. Поэтому точное аналитическое решение удалось получить в настоящее время для весьма ограниченного круга задач. В этой связи, первостепенной задачей, стоящей перед нелинейной теорией консолидации является разработка оптимальных полуаналитических и численных методов решения уравнения типа (1). Задача типа (1)-(5) может быть решена методом суммарной аппроксимации, методом малого параметра, методом итерации, а также другими методами численного анализа. Здесь предпочтение дается методу итерации (Алтынбеков и др., 1996), методу аппроксимации (Алтынбеков, 1995) и методу суммарной аппроксимации (Самарский, 1983). На основе этих методов получены решения задачи (1) – (5). Из этих решений, как частные случаи приведены решения одномерных, плоских и пространственных краевых задач.

**Выводы.** Процесс консолидации неоднородных грунтов сильно зависит от типа краевых условий, в зависимости от них может происходить обратной процесс уплотнения-набухания грунта. Например, в случае граничных условий, когда грунтовая вода свободно удаляется с боковых поверхностей массива земляной среды, а нижних и верхних границах его происходит свободной водообмен с окружающей средой т.к. давление в верхних слоях неоднородной грунтовой массы ниже атмосферного, а в

нижних слоях достаточно больше, в начальные моменты времени происходит обратной процесс уплотнения-набухания грунта, а со временем оно затухает и может возникнуть осадок незначительного характера. При граничных условиях с водоупорным на глубине и водонепроницаемыми стенками, т.к. давление в нижних слоях неоднородной грунтовой массы ниже атмосферного, то за счет растекания давления, осадок основания в начальные моменты времени больше осадка, соответствующего пределу времени, что вызывает после некоторого времени явления набухания.

### РЕЗЮМЕ

Осадки во времени рассматриваемого уплотняемого неоднородного грунта гораздо меньше, чем у однородного, в зависимости от их физико-механических свойств. Влияние коэффициента фильтрации, упруго мгновенной деформации ползучести, зависящим от НДС среды, а также параметров ползучести к процессу уплотнения грунтов надо учесть только в начальных моменты времени, т.е. в период строительства сооружений и начальное время их эксплуатации. При больших значениях времени  $t$  их влияние на процесс уплотнения грунтов становится незначительным.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Флорин В.А. (1959, 1961). Основные механики грунтов – т.1. Стройиздат, Москва, 1959,357, т.2. Стройиздат, Москва, 1961,543.
2. Абелев М.Ю. (1982). Строительства промышленных и гражданских сооружений на слабых водонасыщенных грунтах, - Стройиздат, Москва, 1983, 247.
3. Гольдин А.Л. Рассказов Л.Н. (1987). Проектирование грунтовых плотин. - Энергоатомиздат, Москва, 1987, 303.
4. Цитович Н.А. и др. (1967). Прогноз скорости осадок оснований сооружений. – Стройиздат, Москва, 1967,238.
5. Алтынбеков Ш.А., Ширинкулов Т.Ш. (1996). Об одном итерационном методе нелинейных краевых задач консолидации грунтов. – ДАНРУз., №1-2, 1966,25-27.
6. Алтынбеков Ш.А. (1995). Об одной методе аппроксимации. – Узбекский журнал Проблемы механики, №3-4, 1995, 5-7.
7. Самарский А.А. (1983) Теория разностных схем. – Наука, Москва, 1983, 616.

### SUMMARY

*On the basis of existing models, the multiparametrical mathematical model of process of consolidation of ground is designed and by that the effective step to algorithm of a task of the theory filter of consolidation of earthen weights ensuring is made to receive the decisions of one-dimensional, flat and spatial regional tasks first, second, third and mixed of sorts, when it is possible to count a skeleton of a ground: elastic homogeneous and non-uniform; linearly and not linearly is crawling homogeneous and non-uniform; is non-uniform inheritancy-growing old. The numerical analyses are given and major factors deformations, influencing character, of earthen weights are revealed.*

**E-mail:** [sh.altynbekov@mail.ru](mailto:sh.altynbekov@mail.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

асп. **Маевская С.С.**

*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск*

Слоистые тонкостенные конструкции имеют широкий спектр применения в качестве элементов многих инженерных сооружений, таких как воздушные и космические транспортные средства, подводные объекты, автомобили и т.п. ([1],[2]). Во всех перечисленных отраслях промышленности тонкостенным конструкциям приходится испытывать внешние колебательные нагрузки, поэтому виброзащита подобных конструкций является предметом практического интереса для механиков. С появлением группы новых композитных материалов, имеющих активные и адаптивные свойства, становится возможным решение многих проблем.

Среди класса «интеллектуальных» материалов особое внимание можно обратить на магнитоэластичный эластомер (МРЭ). Он состоит из магнитных частиц в деформированной полимерной матрице и его упругие свойства изменяются в зависимости от величины приложенного магнитного поля ([3],[4]). Наличие возможности управлять в широком диапазоне вязкоупругими и вязкопластическими свойствами МРЭ позволяет использовать его в устройствах, предназначенных для виброзащиты.

Идея использовать электроэластичные и магнитоэластичные среды в качестве промежуточного материала в тонкостенных конструкциях, как один из методов виброзащиты, не является новым. Однако работ по расчету подобных многослойных структур мало, поскольку данная задача является сложной для механиков, занимающихся разработкой новых методов активного и полуактивного гашения строительных вибраций. Большинство работ по подавлению вибраций многослойных тонкостенных конструкций были сделаны для случая, когда в качестве прослойки был выбран «интеллектуальный» материал в виде жидкости ([5],[6],[7],[8]). Эластомеры же, по сравнению с жидкостями, обладают преимуществом, поскольку при низком уровне магнитного поля сохраняют необходимую геометрическую форму.

**Целью данной работы** является исследование возможности эффективного воздействия постоянного магнитного поля на формы свободных осесимметричных поперечных колебаний круглой трехслойной пластины, содержащей МРЭ.

Рассмотрим круглую трехслойную пластину, у которой внешние слои не восприимчивы к магнитному полю, а внутренний слой представляет собой МРЭ. Используется цилиндрическая система координат  $r, \theta, z$ , связанная с серединной плоскостью заполнителя. Для исследования свободных поперечных колебаний круглой пластины будем использовать систему дифференциальных уравнений в частных производных, приведенную в работе [9]:

$$\begin{cases} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3 \frac{\partial w}{\partial r}) = 0; \\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5 \frac{\partial w}{\partial r}) = 0; \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6 \frac{\partial w}{\partial r}) - M_0\ddot{w} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $L_2, L_3$  – дифференциальные операторы;  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) \cdot r^2$ ;  $a_i$  – коэффициенты,

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k; K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k;$$

$$a_3 = h_1(c + \frac{1}{2} h_1) K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2} h_2) K_2^+; a_4 = c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+);$$

$$a_5 = c \left[ h_1(c + \frac{1}{2} h_1) K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2} h_2) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right];$$

$$a_6 = h_1(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2) K_1^+ + h_2(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+;$$

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

$$G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}, K_k = \frac{E_k}{3(1-2\nu_k)} - \text{модули сдвига и объемной деформации материала}$$

$k$ -го слоя,  $h_1, h_2$  – толщины несущих упругих слоев,  $h_3 = 2c$  – толщина внутреннего вязкоупругого слоя, изготовленного из МРЭ,  $w(r,t)$  – прогиб пластины,  $u(r,t)$  – радиальное перемещение координатной поверхности,  $\psi(r,t)$  – относительный сдвиг в заполнителе,  $t$  – время.

В качестве граничных условий использовались условия шарнирного опирания. После некоторых преобразований приводим систему (1) к виду:

$$\begin{cases} u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}; \\ \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}; \\ L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}; M^4 = M_0 D;$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}. \quad (3)$$

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин положим  $C_2 = C_4 = 0$ .

Прогиб примем в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (4)$$

где  $A$  и  $B$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий,  $\omega$  – частота собственных колебаний пластины,  $v(r)$  – неизвестная координатная функция.

Подставим выражение (4) в последнее уравнение из системы (2). В результате получим бибесселево уравнение, определяющее координаты функции  $v(r)$ :

$$L_3(v, r) - \beta^4 v = 0, \quad (5)$$

где

$$\beta^4 = M^4 \omega^2. \quad (6)$$

Решение уравнения (4) представим в виде [10]

$$v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) + C_7 Y_0(\beta r) + C_8 K_0(\beta r), \quad (7)$$

где  $J_0, Y_0$  – функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода, соответственно;  $I_0, K_0$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка и функция Макдональда нулевого порядка;  $C_5, C_6, C_7, C_8$  – константы интегрирования.

Поскольку  $Y_0(\beta r), K_0(\beta r)$  имеют особенность типа логарифма в начале координат (в центре пластины) [11], то  $C_7 = C_8 = 0$ .

При шарнирном опирании контура пластины и наличием на нем жесткой диафрагмы должны выполняться условия  $u = \psi = \omega = M_r = 0$  [12],

где в случае осесимметричных колебаний  $M_r = -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$ .

Тогда определить собственные числа можно из уравнения [9]:

$$\frac{J_0(\beta)}{a_7(\beta J_0(\beta) - J_1(\beta)) + a_8 J_1(\beta)} = - \frac{I_0(\beta)}{a_7(\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)) + a_8 I_1(\beta)}, \quad (8)$$

где

$$a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2, \quad a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2,$$

$$a_{60} = a_6 \{K_k^- \rightarrow K_k^+\}.$$

Из уравнения (8) можно определить собственные числа  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). После их вычисления частоты собственных колебаний можно найти из соотношения (6) с учетом (3):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}. \quad (9)$$

**Пример.** В качестве примера рассмотрим круглую трехслойную пластину с параметрами  $h_1 = h_3 = 0,0005 \text{ м}$ ;  $h_2 = 0,01 \text{ м}$ ;  $r = 0,5 \text{ м}$ ;  $\nu_1 = \nu_3 = 0,4$ ;  $\nu_2 = 0,42$ ;  $E_1 = E_3 = 1,5 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ;  $\rho_1 = \rho_3 = 1,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  в случае, когда внутренний слой изготовлен из МРЭ плотностью  $\rho_2 = 2,65 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Для определения  $E_2$  и  $G_2$  были использованы результаты экспериментально установленных зависимостей этих параметров от индукции магнитного поля [13].

На рис. 1 и 2 показаны зависимости собственной частоты и декремента колебаний, соответствующие различным модам от интенсивности магнитного поля.

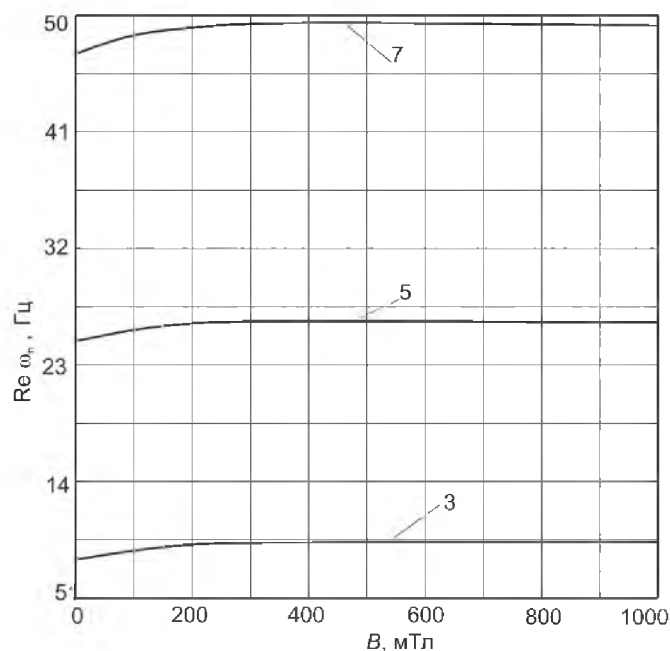


Рисунок 1. – Собственные частоты  $Re\omega_n$  для 3,5 и 7 мод

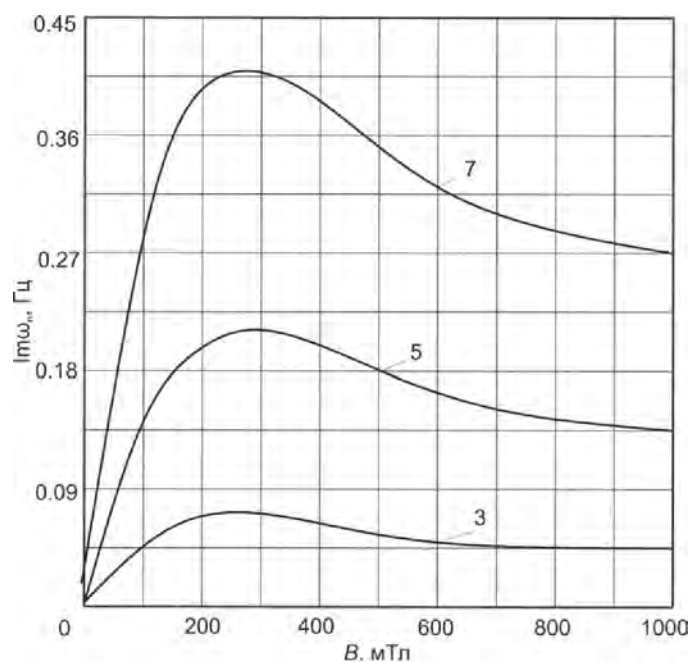


Рисунок 2. – Декремент  $Im\omega_n$  для 3,5 и 7 мод

Из рис. 1 видно, что увеличение индукции магнитного поля приводит к незначительному росту собственных частот колебаний, что объясняется слабой зависимостью действительной части приведенного модуля упругости слоистой пластины от индукции магнитного поля. Из рис. 2 видно, что для всех рассмотренных мод декремент колебаний  $Im\omega_n$  возрастает с увеличением индукции магнитного поля до уровня  $B \approx 300 \text{ мТл}$ , дальнейшее увеличение интенсивности магнитного поля приводит к некоторому уменьшению параметра  $Im\omega_n$ , что является результатом «насыщения» МРЭ [13].

### РЕЗЮМЕ

Рассматриваются свободные осесимметричные поперечные колебания круглой трехслойной пластины, содержащей магнитореологический эластомер. Анализируется



влияние внешнего постоянного магнитного поля на собственные частоты и декремент колебаний, соответствующие различным модам пластины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Analysis of free damped vibrations of laminated composite conical shells. / A. Korjakin [et al.] // Composite Structures. – 1998. – №41. – P. 39–47.
2. Qatu, M.S. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells / M.S. Qatu // Composite Structures. – 2010. – № 93(1). - P. 14–31.
3. Jolly, M.R. Properties and applications of comercaiaal magnetorheological fluids / M.R. Jolly, J.W. Bender, D.J. Carlson // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1999. – №10. – P 5–13.
4. Ginder, G.M. Rheology controlled by magnetic fields / G.M Ginder // Encyclopedia of Applied Physics. – 1996. – Vol.16. – P. 487–503.
5. Park, D.W. Shape control of an electrorheological fluid based smart plate / D.W. Park, S.B. Choi, S.B. Jung // Proc. SPIE. 3329. – 1998. – P. 824–835.
6. Shaw, J. Hybrid control of cantilevered ER sandwich beam for vibration suppression. / J. Shaw //J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2000. – № 11. – P. 26–31.
7. Yalcintas, M. Magnetoreological and electroreological materials in adaptive structures and their perfomance comparision / M. Yalcintas, H. Dai // J. Smart Mater. Struct. – 1999. - № 8. – P. 560–573.
8. Yeh, J.-Y. Vibration and damping analysis of orthotropic cylindrical shells with electrorheological core layer / J.-Y. Yeh // Aerospace Science and Technology. – 2008 doi:10.1016/j.jsv.2008.02.012.
9. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576с.
10. Горшков, А.Г. Динамические контактные задачи с подвижными торцами / А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.
11. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш – М.: Наука, 1979. – 342 с.
12. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности: Учеб.: Для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416с.
13. Korobko, E.V. On Damping Vibrations of Three Layered Beam Containing Magnetorheological Elastomer / E.V. Korobko, Z.A. Novikova, M.A. Zhurauski, G.I. Mikhasev // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2012. – Vol. 23, №. 9. – P. 1019 – 1023.

## SUMMARY

*Free axisymmetric transverse vibrations of a circular sandwich plate containing magnetorheological elastomer are considered. Influence of the external stationary magnetic field on the natural frequencies and damping rate fluctuations corresponding to different modes of the plate is analyzed.*

**E-mail:** [svetlanamaevsckaya@yandex.ru](mailto:svetlanamaevsckaya@yandex.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## ОБЪЕМНАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИ НАГРУЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО КОМБАЙНА

д.ф.-м.н. **Журавков М.А.**, к.ф.-м.н. **Щербаков С.С.**, асп. **Насань О.А.**  
*Белорусский государственный университет, Минск*

Система противорежущий брус / нож / прижим / основание / болты режущего барабана, является одной из наиболее нагруженных и ответственных систем комбайна. Она представляет собой многокомпонентную трибофатическую систему, динамически нагруженную режущей силой, а также контактными усилиями, обусловленными сжимающими болтовыми соединениями.

В рамках работ по усовершенствованию данной системы, проводимых на ПО «Гомсельмаш», производится замещение импортных стальных ножей и противорежущего бруса, на изготовленные из чугуна марки ВЧТГ. Данный высокопрочный чугун отечественной разработки имеет высокие прочностные (до 1500 МПа) и пластические (относительное удлинение до 4 %) характеристики. Применение нового материала для изготовления ножей делает необходимым решение задачи оценки динамического напряженно-деформированного состояния и состояния повреждаемости системы противорежущий брус / нож / прижим / основание / болты, представленной на рисунке 9 а, с учетом ударной силы резания зеленой массы и контактного взаимодействия между ее элементами.

В связи со сложной геометрией и, как следствие, невозможностью получения аналитического решения, было проведено конечно-элементное моделирование в пакете ANSYS Workbench.

Целью расчетов было изучить влияние силы резания зеленой массы на напряженное состояние кромок резания ножа и бруса, а также на контактное взаимодействие между элементами системы.

Для моделирования зеленой массы, которая обычно состоит из слабозаимодействующих стеблей, целесообразно рассматривать ее в качестве многоэлементной («многостеблевой») системы в виде ряда одинаковых по ширине пластин.

Основание, нож, прижим и болты движутся со скоростью 125,664 рад/с, вращаясь вокруг центра режущего барабана в соответствии с рисунками 9 а и 9 б. Зеленая масса и противорежущий брус находятся в условиях жесткой сцепки. Усилие затяжки болтовых соединений равно 60 кН для каждого болта. Расчет делится на два этапа: моделирование статического преднапряженного состояния для учета влияния затяжки болтовых соединений на напряженно-деформированное состояние системы [1] и динамическое резание зеленой массы [2]. Ускорение при расчете преднапряженного состояния не учитывается, поскольку в динамической постановке задачи оно учитывается естественным образом. Нижняя поверхность основания жестко закреплена (моделируется жесткая сцепка с внешней поверхностью барабана). Задняя стенка противорежущего бруса также жестко закреплена.

Анализ напряженно-деформированного состояния проводился для шести моментов времени:  $t_0 = 0,00003$  с,  $t_1 = 0,00033$  с,  $t_2 = 0,00063$  с,  $t_3 = 0,00093$  с,  $t_4 = 0,00123$  с,  $t_5 = 0,00153$  с, где  $t_0$  и  $t_5$  являются начальным и конечным временем процесса резания соответственно.

В начальный момент времени динамического расчета в модели учтено лишь преднапряженное статическое состояние от затяжки болтов.

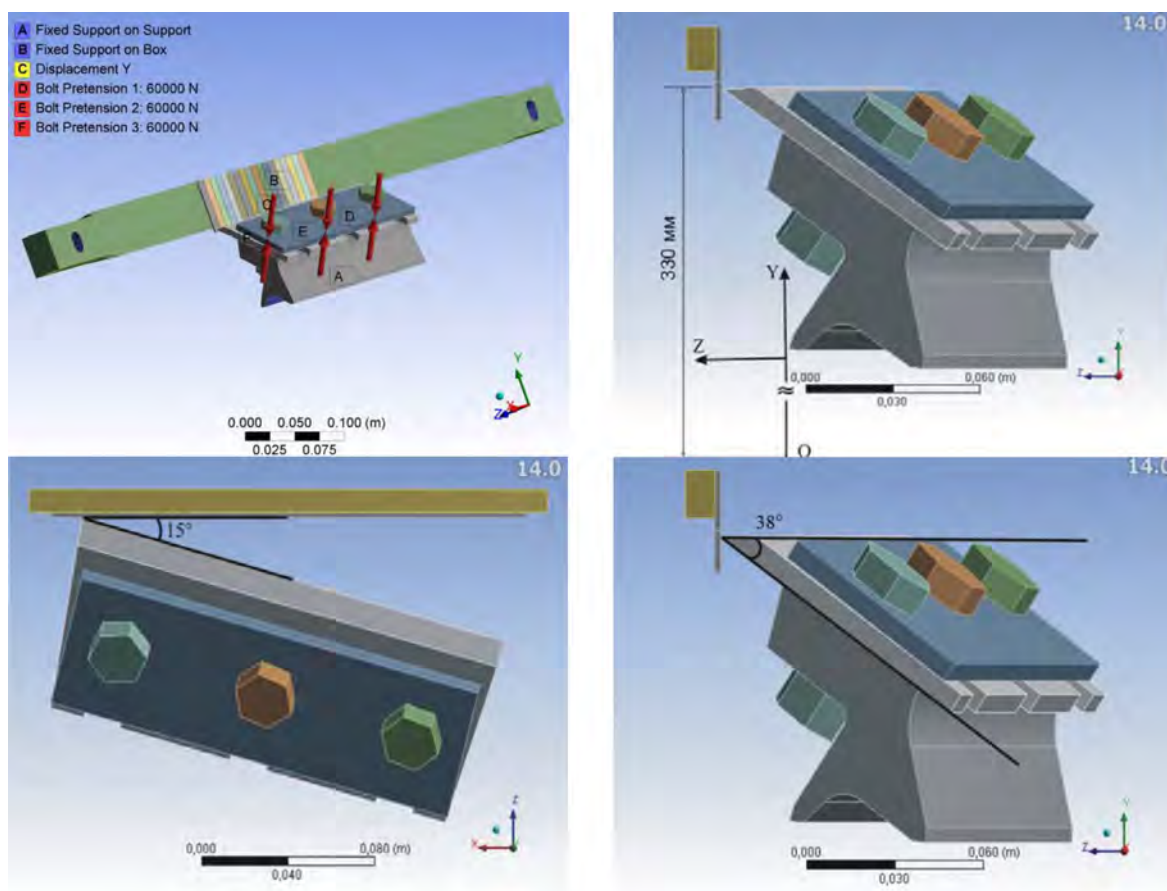


Рисунок 9. – а) геометрическая модель системы с многоэлементной зеленой массой, схема нагружения;  
 б) указание расположения осей и центра вращения;  
 в) угол резания зеленой массы  $\alpha$   
 г) угол резания зеленой массы  $\beta$

Механические свойства и их комбинации для элементов системы, принятые для расчетов, приведены в таблицах 1-3.

Таблица 1 – Свойства материалов системы

Свойства	Материалы		
	Зеленая масса	Чугун	Сталь
$E$ , Па	$2,7451 \cdot 10^8$	$1,65 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{11}$
$\nu$	0,12	0,28	0,3
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	800	7200	7850

Таблица 2 – Коэффициенты трения (динамика/статика) между различными материалами

	Зеленая масса	Чугун	Сталь
Зеленая масса	0,39/0,58	0,39/0,58	0,39/0,58
Чугун	0,39/0,58	–	0,3/0,3
Сталь	0,39/0,58	0,3/0,3	0,2/0,2

Зазор между режущими кромками ножа и бруса принимался равным 0,4 мм (неизношенный нож), 0,8 мм и 1,2 мм (нож с различной степенью износа).

Углы установки ножа  $\eta = 15^\circ$ ,  $\beta = 38^\circ$ , расположение осей и центра вращения в соответствии с рисунками 9 б – 9 г остались неизменными по отношению к предыдущим расчетам.

Для проверки сеточной сходимости расчета для модели проводилось перестроение сетки в местах позиционирования наибольших по интенсивности статических напряжений в автоматическом режиме.

Таблица 3 – Нумерация расчетов

Зазор между брусом и ножом	Комбинации материалов			
	Чугунный брус - чугунный нож	Чугунный брус - стальной нож	Стальной брус - чугунный нож	Стальной брус - стальной нож
0,4 мм	П4	IS4	SI4	SS4
0,8мм	П8	IS8	SI8	SS8
1,2мм	П12	IS12	SI12	SS12

Оптимизация сетки по всему телу привела к изменению максимальных по интенсивности напряжений на 10 %, при этом улучшение вызвало изменение сетки лишь в области болтовых соединений. Число же конечных элементов существенно возросло, что значительно увеличило время расчетов. Поскольку изменение сетки не затронуло главную исследуемую область – контактные поверхности ножа и бруса, расчеты проводились для модели с первоначальной сеткой.

Из-за поворота исследуемых контактных поверхностей вследствие движения системы относительно неподвижной системы координат, для получения контактных усилий брались распределения третьего главного напряжения и интенсивности напряжений, которые на поверхности тел с некоторой погрешностью описывают контактное давление и силу трения соответственно.

Режущая кромка бруса имеет длину 740 мм. На контурных графиках распределений напряжений контакт бруса с ножом происходит в области от 173 до 368 мм.

Распределения эквивалентных по Мизесу напряжений на режущей кромке ножа определяются как максимумами (примерно 10 – 800 МПа) в окрестности резания в некоторый момент времени, так и интерференцией волн напряжений, обуславливающей неравномерный характер распределений вне зоны резания (см. рисунок 2 а).

Наибольшие напряжения в ноже появляются на кромке лезвия и в окрестности болтовых соединений.

Наибольшие эквивалентные напряжения на кромке лезвия ножа увеличиваются в 1,5-8 раз при ударном резании по сравнению со статическим преднапряженным состоянием.

Наибольшие эквивалентные по Мизесу напряжения  $\sigma_{eqv}^{max}$  и третье главное напряжение  $\sigma_3^{max}$ , составляющие примерно 800 МПа и 570 МПа соответственно в расчетах при зазоре 0,4 мм, на кромке ножа наблюдаются в начальный момент резания. Для данного зазора во время основного режима резания  $\sigma_{eqv}^{max}$  и  $\sigma_3^{max}$  уменьшаются примерно в 10 и 3 раза соответственно, что видно из рисунка 2 в.

Увеличение зазора в сравнении с начальным 0,4 мм приводит к уменьшению разницы в максимальных значениях напряжений на режущей кромке ножа, что может быть обусловлено увеличением поверхности контакта ножа с мягкой зеленой массой. В

начальный момент времени при зазорах 0,8 мм и 1,2 мм  $\sigma_{eqv}^{max}$  уменьшаются примерно на 78 и 85 % соответственно, а  $\sigma_3^{max}$  уменьшаются примерно на 78 и 88 %. Во время основного режима резания при зазорах 0,8 мм и 1,2 мм  $\sigma_{ieqv}^{max}$  уменьшаются примерно на 20-65 и 50-90 % соответственно, а  $\sigma_3^{max}$  уменьшаются примерно на 5-10 и 30 - 70 %.

Максимальные напряжения в ноже при различных комбинациях материалов ножа и бруса отличаются незначительно: примерно на 10-20 %, что в первую очередь обуславливается интерференцией волн напряжений. В большинстве рассматриваемых моментов времени наименьшие  $\sigma_{eqv}^{max}$  и  $\sigma_3^{max}$  наблюдаются в расчетах для чугунного ножа / стального бруса и стального ножа / чугунного бруса.

Распределение интенсивности напряжений в бруске в меньшей степени искажается интерференцией волн напряжений из-за менее сложной формы поверхности бруска. На рисунке 2б видно, что наибольшие напряжения появляются на кромке бруска в окрестности резания зеленой массы. В бруске в отличие от ножа в момент начального удара нет значимого всплеска интенсивности напряжений и третьего главного напряжения, что может объясняться демпфирующим эффектом зеленой массы. Наибольшие в окрестности контакта бруска и зеленой массы напряжения сосредоточены в центре бруска, значительно уменьшаясь на его концах и составляют 1 - 90 МПа для  $\sigma_{eqv}^{max}$  и 1 - 30 МПа для  $\sigma_3^{max}$  (см. рисунок 2г).

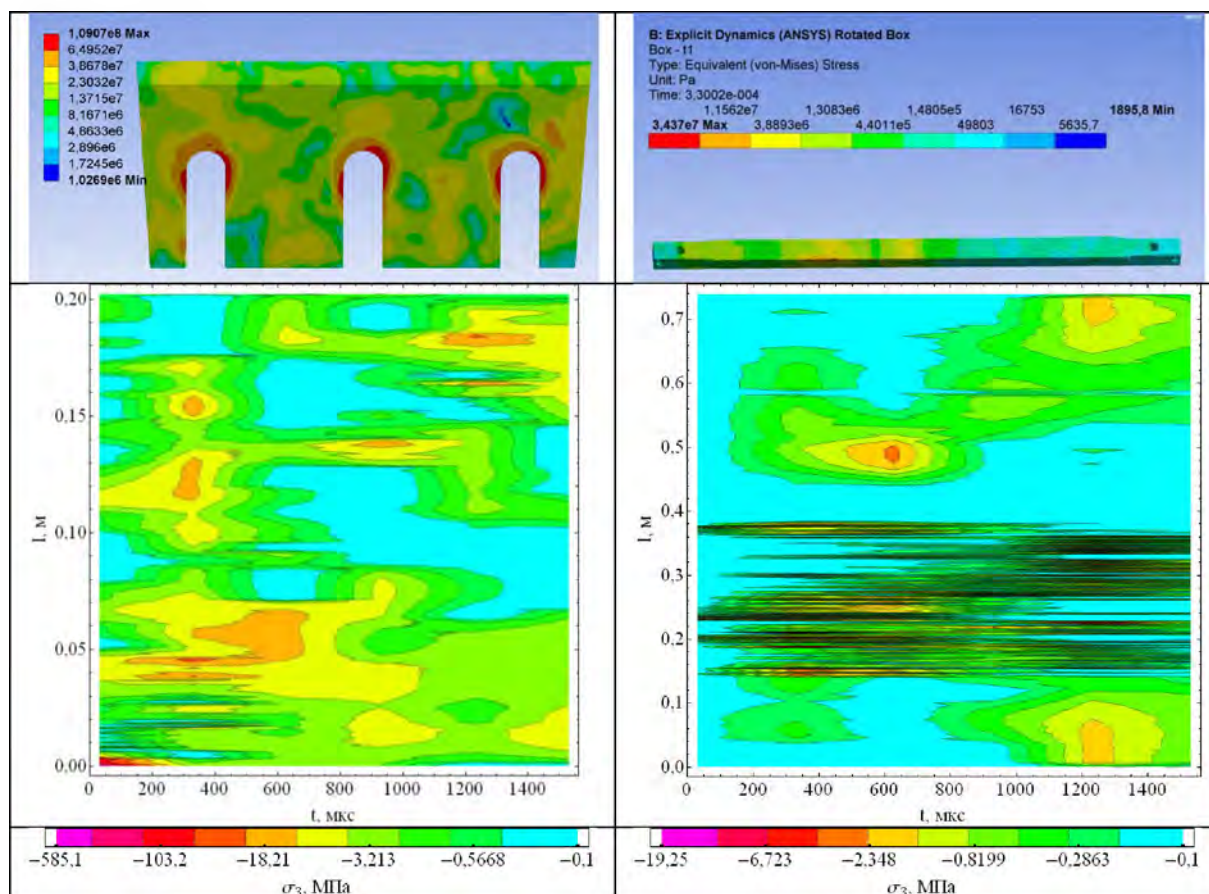


Рисунок 2. – Контурные логарифмические распределения третьего главного напряжения во все моменты времени в системе IS4 на режущих кромках:

а) ножа;

б) противорезающего бруса.

Распределения эквивалентных по Мизесу напряжений в момент времени 0,00033 с в системе IS4:

в) на ноже;

г) на противорезающем бруске

Увеличение зазора в сравнении с начальным 0,4 мм приводит к уменьшению разницы в максимальных значениях напряжений на режущей кромке противорежущего бруса, что, как и для ножа, может быть обусловлено увеличением поверхности контакта ножа с мягкой зеленой массой. При зазорах 0,8 мм и 1,2 мм  $\sigma_{eqv}^{max}$  уменьшаются примерно на 70 - 90 %, а  $\sigma_3^{max}$  уменьшаются примерно на 80 - 90 %.

Максимальные напряжения в бруске при различных комбинациях материалов ножа и бруса отличаются примерно на 50 - 70 %. В большинстве рассматриваемых моментов времени наименьшие  $\sigma_{eqv}^{max}$  и  $\sigma_3^{max}$  наблюдаются в расчетах для чугунного ножа/стального бруса и стального ножа/чугунного бруса.

Сравнительный анализ максимальных значений напряжений в ноже и противорежущем бруске в некоторый момент времени в зоне резания показывает, что значение  $\sigma_{eqv}^{max}$  интенсивности напряжений на режущей кромке ножа примерно в 9 и 2-4 раза больше чем на режущей кромке бруса в начальные моменты времени и в основном режиме резания соответственно.

Из рисунков 2в, 2г видно, что наибольшее по модулю значение третьего главного напряжения (контактного давления)  $\sigma_3^{max}$  на режущей кромке ножа больше в 20-200 раз в начальные моменты времени и в 1,5 - 10 раз в основном режиме резания, чем на режущей кромке бруса.

В целом, анализ результатов расчетов показывает, что чугун демонстрирует схожую со сталью нагруженность. Учитывая большую вязкость чугуна, обуславливающую лучшее рассеяние волн напряжений, его применение представляется предпочтительным.

Большой разброс максимальных значений эквивалентных по Мизесу напряжений  $\sigma_{eqv}^{max}$  и третьего главного напряжения  $\sigma_3^{max}$  при динамическом нагружении свидетельствует о необходимости применения не локальных ( $\sigma_{eqv}^{max}$ ,  $\sigma_3^{max}$ ) характеристик повреждаемости, а интегральных (опасные объемы).

Оценка поврежденности элементов конструкций при циклическом нагружении в общем случае основывается на статистической модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [3]. В рамках данной модели опасные объемы представляют собой трехмерные области, где напряжения превышают критический уровень – нижнюю границу рассеяния пределов выносливости.

Применительно к трибофатическим системам процедура расчета опасных объемов предполагает, во-первых, знание трехмерного напряженного состояния элементов, вызванного как контактным нагружением, так и объемным деформированием, и, во-вторых, определения критических (предельных) напряжений, которые служат критерием для ограничения соответствующих опасных областей.

В связи с тем, что в области резания зеленой массы напряженно-деформируемые состояния ножа и противорежущего бруса являются существенно трехмерными и формируются в основном за счет контактного взаимодействия, будем их оценивать с помощью четвертой, энергетической, теории прочности в напряжениях:

$$\sigma_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}. \quad (1)$$

В этом случае функции локальной повреждаемости единицы объема имеют вид:

$$\Psi_{IV} = \sigma_{IV} / \sigma_{IV}^{(lim)}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{IV}^{(lim)}$  – нижняя граница рассеяния пределов выносливости материала.

Тогда формулы для расчета опасных объемов и интегральной повреждаемости будут следующими:

$$V_{IV} = \int_{\psi_{IV}(V) \geq 1} dV, \quad \Psi_{IV} = \int_{\psi_{IV}(V) \geq 1} \psi_{IV}(V) dV. \quad (3)$$

Поскольку в настоящее время нет данных о предельных состояниях (напряжениях) при фрикционной усталости элементов системы в процессе резания зеленой массы, то в расчетах рассматривался широкий диапазон предельных напряжений от 8,5 МПа, соответствующих пределу фрикционной усталости в системе сталь/полимер [4], до 125 МПа, примерно соответствующих нижней границе рассеяния предела механической усталости стали [4], с интервалом 5,825 МПа.

Временной интервал резания  $[3 \times 10^{-5}; 1,53 \times 10^{-3}]$  с, для получения гладких зависимостей, разбивался на 20 равных частей, и результаты, соответственно, рассматривались в 21-й равноотстоящей с шагом  $7,5 \times 10^{-5}$  с точке. Общий вид опасных объемов представлен на рисунках 3а, 3б.

Из-за интерференции волновых пакетов, величины опасных объемов  $V_{IV}$  и интегральной повреждаемости  $\Psi_{IV}$  в ноже и брусе испытывают колебания в меньшей степени, чем показатели напряженно-деформированного состояния системы, что позволяет более точно определять зависимости повреждаемости режущих элементов от изменения основных параметров модели.

В ноже  $V_{IV}$  и  $\Psi_{IV}$  принимают наибольшие значения в начале и в конце процесса резания. Это может объясняться тем, что в данные моменты времени напряжения в ноже распределяются в меньшем объеме материала (в углах ножа) по сравнению с основным процессом резания, когда работает средняя часть ножа.

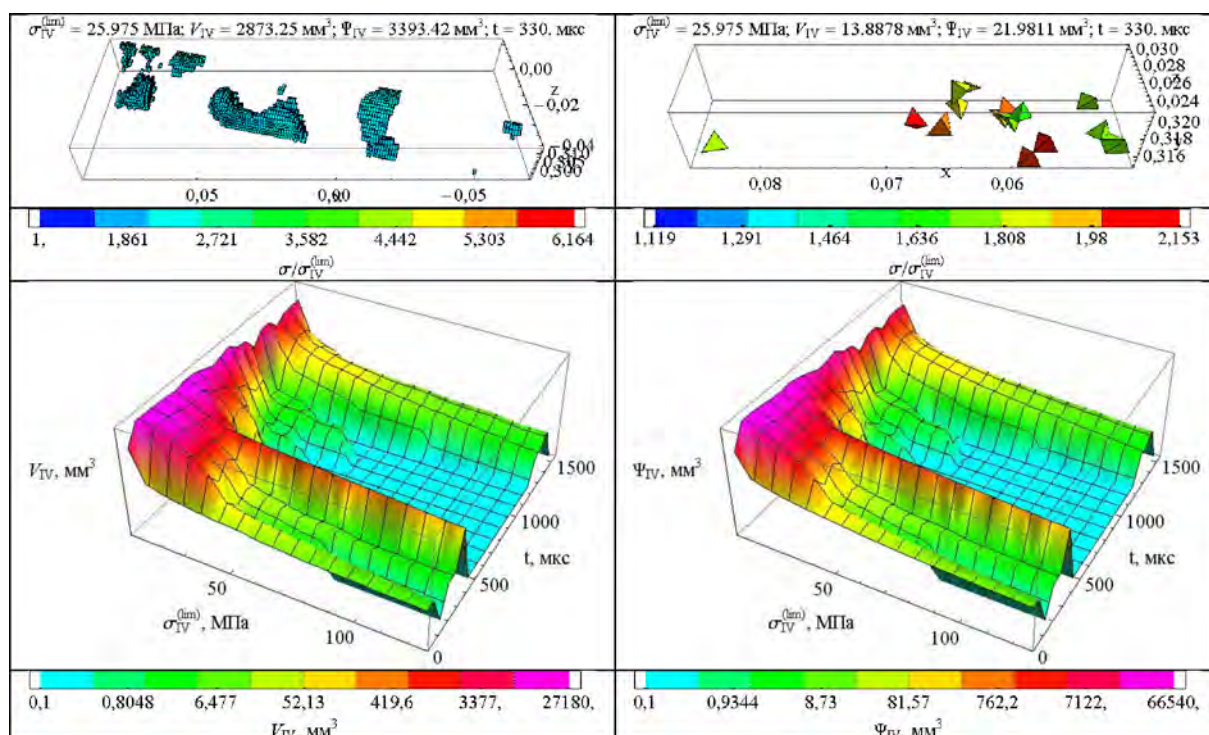


Рисунок 3. – Изменения:  
 а) опасных объемов в ноже в момент времени  $t = 330$  мкс при  $\zeta_{lim} = 25,975$  МПа; б) опасных объемов в противорежущем брусе в момент времени  $t = 330$  мкс при  $\zeta_{lim} = 25,975$  МПа; в) опасного объема; г) объемной повреждаемости для эквивалентных напряжений рассчитанных по четвертой теории прочности в системе П4

Например, при предельном напряжении  $\zeta_{\text{lim}} = 25,975$  МПа и зазоре 0,4 мм  $V_{IV}$  и  $\Psi_{IV}$  в ноже принимают следующие примерные значения:

а) в начале резания  $10^4$  мм<sup>3</sup>, б) в середине  $1-10^2$  мм<sup>3</sup>, в) в конце  $10^3-1,5 \times 10^3$  мм<sup>3</sup> (см. рисунки 3в, 3г).

Для дальнейшего анализа динамического нагружения ножа будем пользоваться показателем накопления во времени опасного объема  $V_{IV}^{(t)}$  и интегральной повреждаемости  $\Psi_{IV}^{(t)}$ :

$$V_{IV}^{(t)} = \int_{t_{\Psi_{IV}(V) \geq 1}} \int dV dt, \Psi_{IV}^{(t)} = \int_{t_{\Psi_{IV}(V) \geq 1}} \int \Psi_{IV}(V, t) dV dt. \quad (4)$$

Анализ показывает, что для комбинаций материалов стальной брус / чугунный нож либо чугунный брус / стальной нож  $V_{IV}^{(t)}$ ,  $\Psi_{IV}^{(t)}$  принимают минимальные значения. Например, при  $\zeta_{\text{lim}} = 25,975$  МПа, зазоре 0,4 мм и комбинации материалов стальной брус/чугунный нож  $V_{IV}^{(t)}$ ,  $\Psi_{IV}^{(t)}$  составляют  $3,261 \times 10^6$  и  $4,106 \times 10^6$  мм<sup>3</sup> × мкс соответственно (см. рисунки 4 а, 4 б). Для комбинации материалов чугунный брус / чугунный нож  $V_{IV}^{(t)}$ ,  $\Psi_{IV}^{(t)}$  больше примерно на 34 и 44 %, чугунный брус / стальной нож  $V_{IV}^{(t)}$ ,  $\Psi_{IV}^{(t)}$  больше примерно на 41 и 46 %, стальной брус/стальной нож  $V_{IV}^{(t)}$ ,  $\Psi_{IV}^{(t)}$  больше примерно на 45 и 50 % соответственно.

При увеличении предельных напряжений  $\zeta_{\text{lim}}$  с 25,975 МПа до 119,175 МПа  $V_{IV}^{(t)}$  и  $\Psi_{IV}^{(t)}$  для различных комбинаций материалов уменьшаются примерно на 4 порядка.

При увеличении зазора между ножом и брусом  $\zeta_{\text{lim}}$  с 0,4 мм до 0,8 и 1,2 мм  $V_{IV}^{(t)}$ ,  $\Psi_{IV}^{(t)}$  увеличиваются примерно на 32, 34 % и 17, 19 % соответственно.

Рассмотрим теперь повреждаемость противорежущего бруса.

Из анализа результатов следует, что в противорежущем брусом как и ноже  $V_{IV}^{(t)}$  и  $\Psi_{IV}^{(t)}$  принимают наибольшие значения в начале и в конце процесса резания (см. рисунки 4 в, 4 г). Это может объясняться ударным характером (резким изменением) взаимодействия ножа и бруса в эти моменты времени.

Например, при предельном напряжении  $\zeta_{\text{lim}} = 25,975$  МПа и зазоре 0,4 мм  $V_{IV}$  и  $\Psi_{IV}$  в брусом принимают следующие примерные значения: а) в начале резания  $10-10^4$  мм<sup>3</sup>, б) в середине  $0-80$  мм<sup>3</sup>, в) в конце  $10-10^2$  мм<sup>3</sup>.

Для комбинаций материалов стальной брус / чугунный нож либо чугунный брус / стальной нож  $V_{IV}^{(t)}$ ,  $\Psi_{IV}^{(t)}$  принимают минимальные значения. Например, при  $\zeta_{\text{lim}} = 25,975$  МПа, зазоре 4 мм и комбинации материалов чугунный брус / стальной нож  $V_{IV}^{(t)}$ ,  $\Psi_{IV}^{(t)}$  составляют  $3,049 \times 10^4$  и  $6,155 \times 10^4$  мм<sup>3</sup> × мкс соответственно. Показатели  $V_{IV}^{(t)}$  и  $\Psi_{IV}^{(t)}$  больше для комбинации материалов чугунный брус / чугунный нож примерно в 54 и 51 раз, стальной брус / чугунный нож примерно на 16 и 18 %, стальной брус / стальной нож примерно в 6,6 и 5,7 раз соответственно.

При увеличении предельных напряжений  $\zeta_{\text{lim}}$  с 25,975 МПа до 119,175 МПа  $V_{IV}^{(t)}$  и  $\Psi_{IV}^{(t)}$  для различных комбинаций материалов уменьшаются примерно в 20-100 раз.

При увеличении зазора между ножом и брусом  $\zeta_{\text{lim}}$  с 0,4 мм до 0,8 и 1,2 мм МПа  $V_{IV}^{(t)}$ ,  $\Psi_{IV}^{(t)}$  увеличиваются примерно на 46, 62 % и 87, 86 % соответственно.



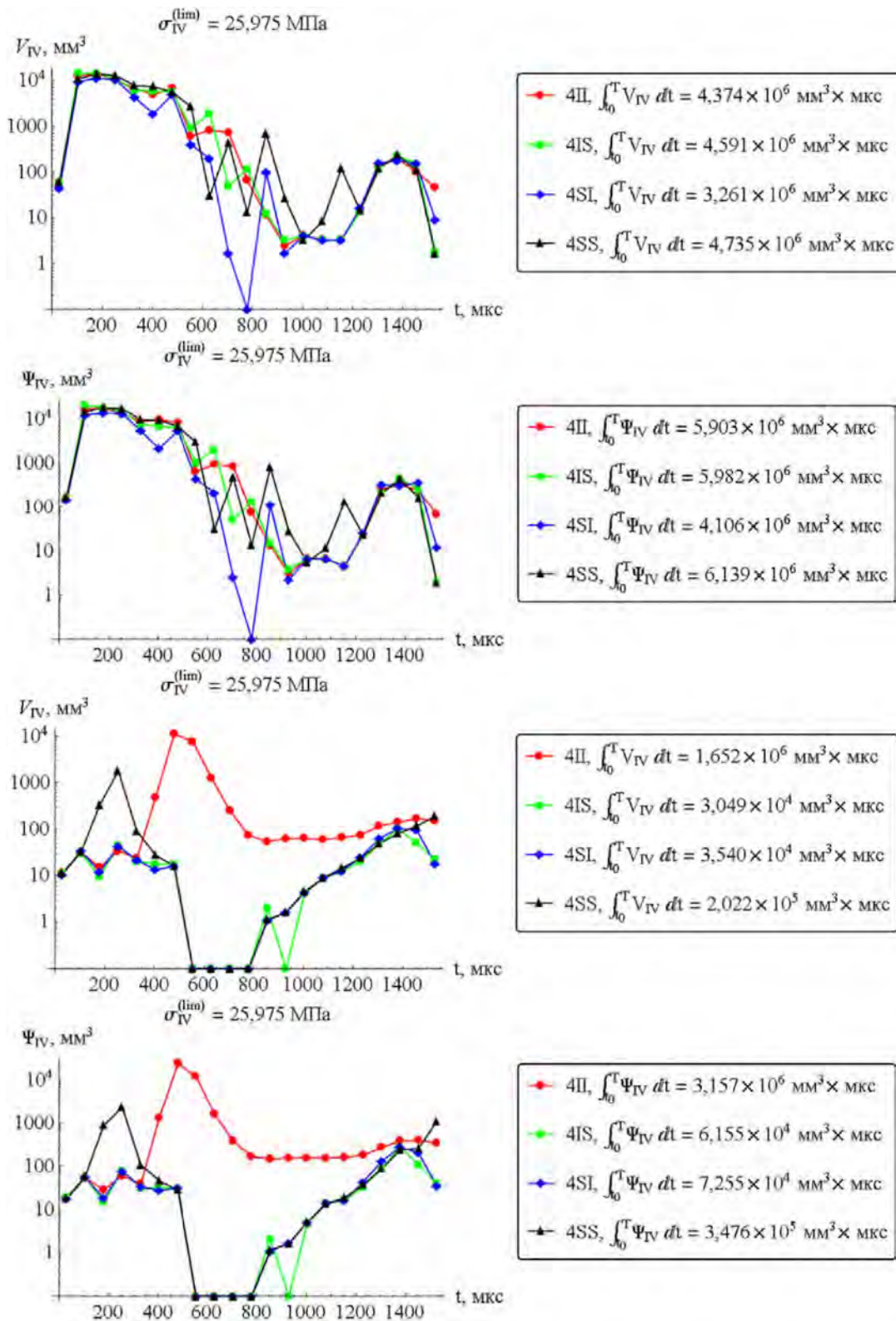


Рисунок 4. – Распределения для различных свойств материалов при  $\zeta_{lim} = 25.975 \text{ МПа}$  и зазоре 0,4 мм:  
 а) опасных объемов в ноже; б) интегральной повреждаемости в ноже; в) опасных объемов в противорежущем  
 брусе; г) интегральной повреждаемости в противорежущем брусе

**Заключение.** Различные комбинации материалов бруса и ножа приводят к значительно большей разнице повреждаемости бруса, чем ножа. Однако при  $\zeta_{lim} = 25,975 \text{ МПа}$ , зазоре 4 мм в системе чугунный брус / чугунный нож показатели  $V_{IV}^{(t)}$

и  $\Psi_{IV}^{(t)}$  в брус (случай наибольшей повреждаемости) в 2,5 и 60 раз меньше чем в ноже. В остальных случаях повреждаемость бруса в  $10^2-10^3$  меньше повреждаемости ножа.

Подобная весьма малая повреждаемость бруса по сравнению с ножом может быть обусловлена как большим объемом бруса, так и тем, что значительная часть усилия создаваемого ножом усилия расходуется на резание зеленой массы и лишь некоторая его часть передается брус. Данный эффект свидетельствует о том, что применение чугуна марки ВЧТГ со служебными характеристиками близкими к стальным для изготовления противорежущего бруса является целесообразным.

## РЕЗЮМЕ

Проведено конечно-элементное моделирование динамического напряженно-деформированного состояния режущего инструмента сельскохозяйственного комбайна. Для режущих областей ножа и противорежущего бруса получены распределения контактного давления, эквивалентных по Мизесу напряжений, а также разработана методика оценки объемной повреждаемости. Проведен сравнительный анализ влияния комбинаций материалов (стали и высокопрочного чугуна ВЧТГ) ножа и противорежущего бруса на величины опасных объемов и интегральной повреждаемости данных элементов системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков С.С., Псырков Н.В., Насань О.А. Компьютерное моделирование поврежденности системы прижим-нож-опора в трехмерной постановке // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций / Редкол.: А.П. Дзюба [и др.] – Дніпропетровськ (Украина): Ліра, 2012. – Выпуск 19. – С. 329 – 337.
2. Щербаков С.С., Насань О.А., Мармыш Д.Е., Шемет Л.А. Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния системы болты/прижим/нож/опора/противорежущий брус в трехмерной динамической постановке // Тр. XXI международной научно-технической конференции «Прикладные задачи математики и механики», 16 – 20 сентября 2013г., Севастополь (Украина) / Редкол.: А.П. Фалалеев (пред.) [и др]. – Севастополь: СевНТУ, 2013. – С. 78-81.
3. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
4. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.

## SUMMARY

*Dynamic stress-strain state of the cutting tool of agricultural harvester using finite element simulation is investigated. Distributions of the contact pressure and equivalent von Mises stress on the cutting surfaces were obtained. The technique of damageability assessment was developed. A comparative analysis of the influence of knife's and shearbar's materials combinations (steel and high-strength cast iron VChTG) on the values of dangerous volumes and integral damage of system elements was made.*

**E-mail:** [Zhuravkov@bsu.by](mailto:Zhuravkov@bsu.by)  
[sheerbakovss@mail.ru](mailto:sheerbakovss@mail.ru)  
[nasan\\_o@mail.ru](mailto:nasan_o@mail.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНО-СИЛОВОЙ МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ НАНООБЪЕКТАМИ

к.ф.-м.н. <sup>1</sup>Щербаков С.С., д.т.н. <sup>2</sup>Сосновский Л.А.

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск

<sup>2</sup>ООО «НПО ТРИБОФАТИКА», Гомель

Одной из наиболее сложных и актуальных задач применительно к наноразмерным объектам является управление их положением (движением). В настоящее время данная задача решается с помощью атомно-силовых микроскопов, сканирующих туннельных микроскопов и другими нанопозиционерами. В частности, разрабатываются микропинцеты, предназначенные для трехмерного позиционирования нанообъектов. Одним из недостатком указанных нанопозиционеров является ограниченность перемещения объектов размерами рабочей области прибора, что осложняет их применение в технических приложениях.

При создании органических нановолокон существует проблема отделения их от субстрата. Применение субстрата из многослойных нанотрубок позволяет облегчить отделение нановолокон при их малом деформировании. Ведутся работы по применению подобного подхода при создании наноманипуляторов, состоящих из нанотрубок и производящих захват объекта за счет сил Ван-дер-Ваальса.

Одним из альтернативных (не механических) способов управления нанообъектами может быть применение силы Лоренца, вызванной совокупностью электромагнитных полей при действии на заряженную частицу

$$\mathbf{F}^{(l)} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad (1)$$

где  $q$  – заряд частицы (тела),  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  – векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции.

Применение формулы (1) ограничено тем, что большинство нанообъектов не несут электрического заряда и не являются электропроводящими, а также не обладают высокими магнитными свойствами.

С другой стороны взаимодействие (притяжение) нанообъектов осуществляется за счет сил Ван-дер-Ваальса, которые при взаимодействии двух сферических тел с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , если расстояние между ними  $r \ll R_1$  или  $R_2$ , имеет вид

$$F^{(vw)}(r) = \frac{AR_1R_2}{(R_1 + R_2)^6 r}; \quad (2)$$

где  $A$  – постоянная Хамакера.

На основе (1) и (2) может быть сформулирован метод управления объектами наноразмеров посредством токопроводящих посредников.

В качестве последних можно использовать как известные инденторы атомно-силовых микроскопов, так и токопроводящие или заряженные частицы размеров, сравнимых с размерами управляемых объектов. Взаимодействие – крепление объектов к посреднику осуществляется за счет сил Ван-дер-Ваальса, а перемещение посредника с объектом – за счет результирующей силы Лоренца от совокупности электромагнитных полей:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1^{(l)}(t) + \mathbf{F}_{12}^{(vw)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{F}_1^{(g)} \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_{12}^{(vw)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{F}_2^{(g)} \end{cases} \Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{12}^{(l)}(t) + \mathbf{F}_{12}^{(g)}. \quad (3)$$

где  $\mathbf{F}^{(g)}$  – сила тяжести.

В качестве примера реализации метода рассмотрим решение следующей модельной задачи (при отсутствии магнитной индукции  $\mathbf{B}$ ):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = q\mathbf{E}_1^{(l)}(t) + \mathbf{F}_{12}^{(vw)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{F}_1^{(g)} \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_{12}^{(vw)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{F}_2^{(g)} \end{cases} \Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E}_{12}^{(l)}(t) + \mathbf{F}_{12}^{(g)}. \quad (4)$$

где  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t$ ;  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  – искомые векторы.

Во время движения заряженный металлический посредник «захватывает» объект и переносит его другую область пространства. Отделение объекта от посредника производится «стряхиванием» при торможении посредника, т.е. когда

$$m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{F}_{12}^{(vw)} = 0. \quad (5)$$

В силу малых массы и размеров второго тела размеров тел, основное значение имеет движение крупного заряженного тела под действие электрического поля:

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = q\mathbf{E}_1^{(l)}(t) + \mathbf{F}_1^{(g)}. \quad (6)$$

Решение системы уравнений (6) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x^0 + v_x^0 t + \frac{cb_x^0}{2} t^2 + \frac{cb_x^1}{6} t^3, & y &= y^0 + v_y^0 t + \frac{cb_y^0}{2} t^2 + \frac{cb_y^1}{6} t^3, \\ z &= z^0 + v_z^0 t + \frac{1}{2} (cb_z^0 - g) t^2 + \frac{cb_z^1}{6} t^3, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $x^0, y^0, z^0$  – координаты начального положение тела,  $v_x^0, v_y^0, v_z^0$  – компоненты вектора начальной скорости тела.

Тогда для того, чтобы тело перешло за время  $t^*$  в точку  $x^*, y^*, z^*$  с конечной скоростью  $(v_x^*, v_y^*, v_z^*)$ , векторы  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  должны быть следующими

$$\begin{aligned} b_x^0 &= \frac{2}{ct^*} \left( \frac{3x^0}{t^*} - \frac{3x^*}{t^*} + 2v_x^0 + v_x^* \right), & b_x^1 &= \frac{6}{ct^{*2}} \left( \frac{2x^0}{t^*} - \frac{2x^*}{t^*} + v_x^0 + v_x^* \right), \\ b_y^0 &= \frac{2}{ct^*} \left( \frac{3y^0}{t^*} - \frac{3y^*}{t^*} + 2v_y^0 + v_y^* \right), & b_y^1 &= \frac{6}{ct^{*2}} \left( \frac{2y^0}{t^*} - \frac{2y^*}{t^*} + v_y^0 + v_y^* \right), \\ b_z^0 &= \frac{2}{ct^*} \left( \frac{3y^0}{t^*} - \frac{3y^*}{t^*} + 2v_z^0 + v_z^* - gt^* \right), & b_z^1 &= \frac{6}{ct^{*2}} \left( \frac{2z^0}{t^*} - \frac{2z^*}{t^*} + v_z^0 + v_z^* \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Если для реализации «стряхивания» в соответствии с (5) необходимо, чтобы тело в некоторый момент времени  $t^*$  имело скорость  $v_x^*, v_y^*, v_z^*$  и ускорение  $a_x^*, a_y^*, a_z^*$ , то векторы  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  будут

$$\begin{aligned} b_x^0 &= \frac{1}{ct^*} (2v_x^* - 2v_x^0 - a_x^* t^*), & b_x^1 &= \frac{2}{ct^{*2}} (v_x^0 - v_x^* + a_x^* t^*), \\ b_y^0 &= \frac{1}{ct^*} (2v_y^* - 2v_y^0 - a_y^* t^*), & b_y^1 &= \frac{2}{ct^{*2}} (v_y^0 - v_y^* + a_y^* t^*), \\ b_z^0 &= \frac{1}{ct^*} (2v_z^* - 2v_z^0 - a_z^* t^* + gt^*), & b_z^1 &= \frac{2}{ct^{*2}} (v_z^0 - v_z^* + a_z^* t^*), \end{aligned} \quad (9)$$

Для расчета примем следующие численные значения исходных данных:  $m_1 = 2,5 \cdot 10^{-6}$  Кг,  $m_2 = 2,33 \cdot 10^{-21}$  Кг,  $q = 10$  Кл,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>,  $R_1 = 4,23 \cdot 10^{-4}$  м,  $R_2 = 2,10 \cdot 10^{-9}$  м, ускорение отрыва захваченной посредником частицы – 8 м/с<sup>2</sup>.

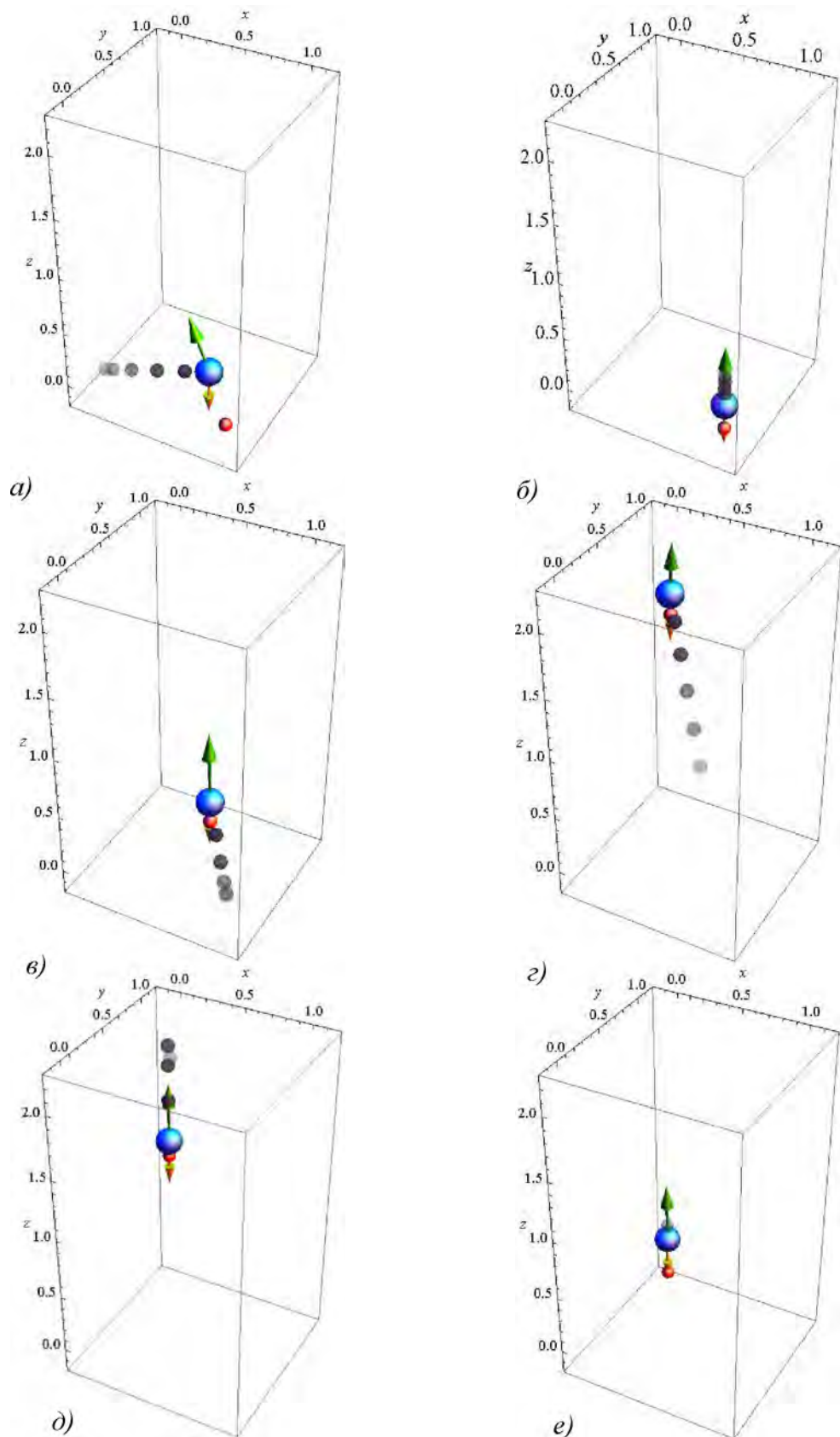


Рисунок 1. – Положения двух тел в различные моменты времени  
 а) до захвата второго тела при  $t=0,77$  с;  
 б) до захвата второго тела при  $t=1,71$  с;  
 в) после захвата второго тела при  $t=2,71$  с;  
 г) после захвата второго тела при  $t=3,61$  с;  
 д) после захвата второго тела при  $t=4,52$  с;  
 е) после «стряхивания» второго тела при  $t=5,53$  с.

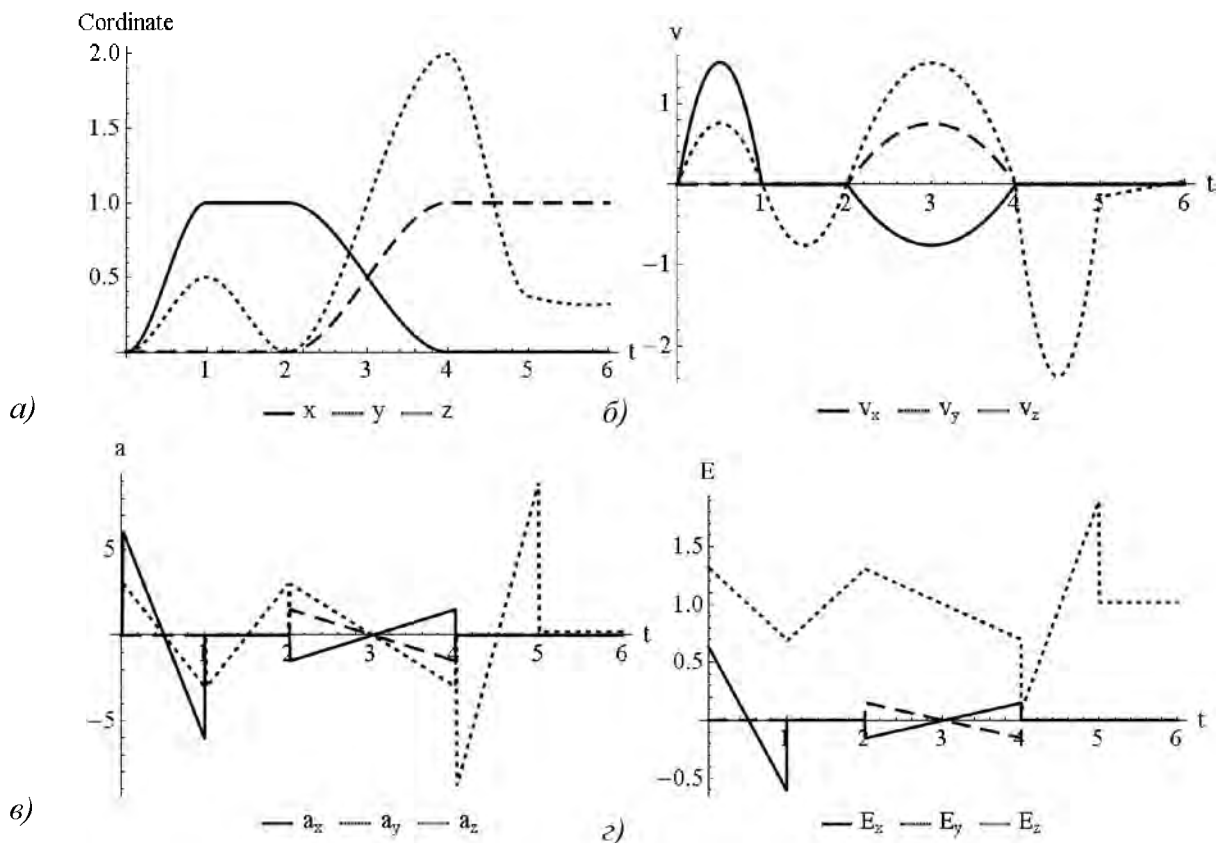


Рисунок 2. – Изменения во времени для первого тела:

а) положения в пространстве;

б) скорости;

в) ускорения;

г) напряженности электрического поля.

Из рисунков 1 и 2 видно что первое заряженное тело проходит через точки  $M_1(0, 0, R_1)$ ,  $M_2(1, 0, 0,5)$ ,  $M_3(1,0, R_1+R_2)$ ,  $M_4(0, 1, 2)$ ,  $M_5(0, 1, 0,24)$  вдоль прямых соединяющих эти точки. Для каждого этапа движения по формулам (8) и (9) определяются  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  характеризующие напряженность  $\mathbf{E}$ .

В точках  $M_1 - M_4$  скорость первого тела равна нулю. В точке  $M_3$  за счет действия сил межмолекулярного взаимодействия происходит крепление второго тела к первому, а в точке  $M_5$  при ускорении тела равном  $a_z = 8 \text{ м/с}^2$  и скорости  $v_z = -0,5 \text{ м/с}$  происходит отрыв переносимого (второго) тела.

**Заключение.** В работе рассмотрен метод «посредников», в соответствии с которым движение посредника – микро- или мезомасштабного тела, несущего электрический заряд, реализуется за счет суперпозиции электромагнитных полей, а крепление нанообъекта к посреднику производится за счет действия сил *межмолекулярного взаимодействия*. Прикрепленный к посреднику нанообъект в свою очередь может выступать как субпосредник для более точного позиционирования третьего наноразмерного тела.

Применение предложенного метода «посредников» позволяет

- перемещать объекты микро- и наноразмеров в большей (метры) по сравнению с известными методами области пространства ;

- за счет использования сил Ван-дер-Ваальса манипулировать объектами, не обладающими высокой электромагнитной проводимостью;

- исключить механические передачи при манипулировании малоразмерными объектами;
- реализовать новые способы формирования структур из нанобъектов путем их сборки из отдельных объектов или «расчесывания» (например, нанотрубок) движущимся множеством заряженных тел.

В перспективе метод можно использовать для разработки новых способов доставки медикаментов в необходимую область тела или экспрессных методов оценки механических свойств объектов (при индентировании, изгибе и др.)

### РЕЗЮМЕ

Предложен метод управления наноразмерными объектами посредством токопроводящих посредников. В качестве последних могут быть использованы как имеющиеся инденторы атомно-силовых микроскопов, так и токопроводящие или заряженные частицы размеров, сравнимых с размерами управляемых объектов. Взаимодействие (крепление) объектов к посреднику осуществляется за счет силы Ван-дер-Ваальса, а перемещение посредника с объектом – за счет результирующей силы Лоренца от совокупности электромагнитных полей. Представлено решение трехмерной модельной задачи о захвате несущим электрический заряд посредником нанобъекта, переносе их в точку доставки под действием электрического поля и сбросе нанобъекта в данной точке.

### SUMMARY

*Method of control of nanoscale objects by current-conducting mediators is proposed. The latter can be represented by both available indenters for atomic force microscopy and conductive or charged particles of a size comparable with the size of the controlled object. Interaction (mounting) of objects to the mediator is performed by van der Waals force while motion of the mediator with the object is performed by Lorentz force depending on the combination of electromagnetic fields. The solution of three-dimensional model problem is given for the seizure of the nanoobject by the electrically charged mediator, transporting them to the point of delivery under the action of the electric field and dumping the nanoobject at this point.*

**E-mail:** [sherbakovss@mail.ru](mailto:sherbakovss@mail.ru)  
[tribo-fatigue@mail.ru](mailto:tribo-fatigue@mail.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ВИБРОЗАЩИТЫ МАШИН

к.т.н. **Кудин В.В.**, к.т.н. **Авсиевич А.М.**, к.т.н. **Кудин М.В.**, маг. **Иванов А.Ю.**  
*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Виброзащита машин – это совокупность методов и средств уменьшения вибраций машины от внешних или внутренних источников вибровозмущения. Одним из распространенных методов виброзащиты является виброизоляция, заключающаяся в том, что между защищенным объектом 1 и источником вибровозмущения 2 устанавливается упругий элемент – виброизолятор 3 (рис.1).

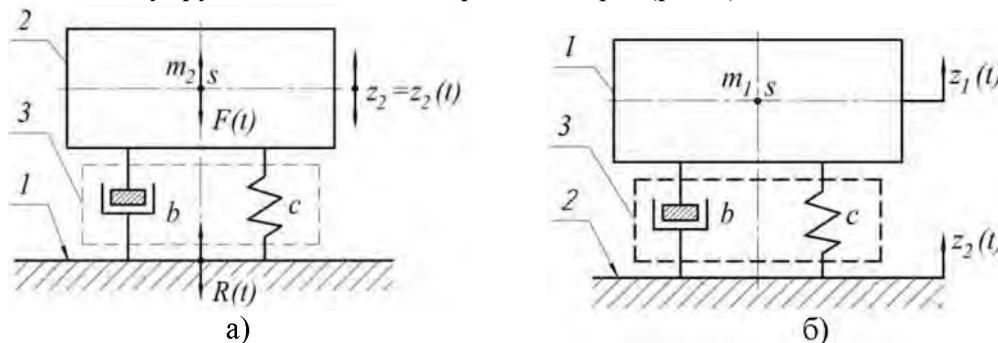


Рисунок 1. – Схемы виброзащиты  
а) с силовым возмущением; б) с кинематическим возмущением

Различают две схемы виброизоляции: с динамическим или силовым вибровозмущением (рис. 1, а), когда источник вибровозмущения 2 создает переменную силу  $F(t)$ , передаваемую через виброизолятор 3 на защищаемый объект 1; с кинематическим вибровозмущением (рис. 1, б), когда вибровозмущение  $z_2(t)$  источника 2 через виброизолятор 3 передается на защищаемый объект 1.

Виброизолирующее устройство 3 представляет важнейшую часть виброзащитной системы, назначение которой состоит в создании такого режима движения, инициируемое заданными возмущениями, при которых реализуется цель виброзащиты объекта.

Параметры виброизолятора, как и любого упругого звена, определяются по его динамической характеристике  $R_z(z, \dot{z})$ , представляющей зависимость силы реакции  $R_z$  виброизолятора от его деформации  $z$  и скорости  $\dot{z}$  деформирования. В общем случае динамическая характеристика  $R(z, \dot{z})$  является нелинейной функцией. Однако при анализе малых колебаний объекта вблизи положения равновесия можно производить линеаризацию и ограничиться линейной зависимостью реакции  $R_z$  от перемещения  $z$  и скорости  $\dot{z}$ .

$$R_z = c_z \cdot z + b_z \cdot \dot{z} \quad (1)$$

Виброизолятор с линейной характеристикой (1) называется линейным, параметры которого ( $c_z$  – коэффициент жесткости,  $b_z$  – коэффициент сопротивления) являются постоянными. В случае  $b_z = 0$  зависимость (1) описывает характеристику линейного идеального упругого элемента (пружины), а при  $c_z = 0$  – характеристику линейного вязкого демпфера. Таким образом, модель виброизолятора 3 с характеристикой (1) можно представить в виде параллельного соединения пружины с  $c_z$  и демпфера с  $b_z$ .

Рассмотрим виброизоляцию с динамическим (силовым) вибровозмущением. Объект, как твердое тело (корпус станка, прибор и т.п.) установленный на упругих



амортизаторах, опирающихся на неподвижное основание (рис. 2), представляет собой колебательную систему, обладающую шестью степенями свободы и шестью частотами собственных колебаний, которые во избежание резонанса с частотами возмущения сил  $F(t)$  должны быть заранее определены расчетным путем.

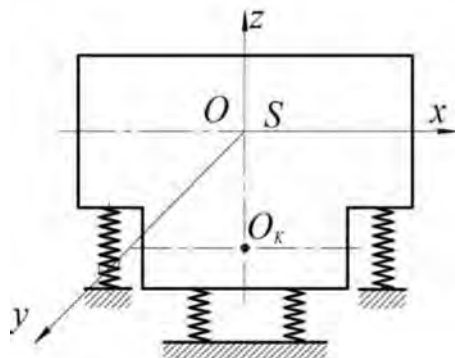


Рисунок 2. – Схема объекта виброзащиты

Малые колебания рассматриваемой системы характеризуются: а) тремя линейными смещениями центра масс объекта  $x_s, y_s, z_s$ ; б)  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – тремя углами поворота относительно осей  $x, y, z$  неподвижной системы координат с началом в центре масс  $S$ . При этом упругие свойства виброизолятора характеризуются соответственно коэффициентами жесткости  $c_x, c_y, c_z$  в направлении осей  $x, y, z$ .

Если пренебречь массой виброизоляторов, их демпфированием и гироскопическими эффектами, возникающими при колебаниях, то дифференциальные уравнения собственных колебаний такой системы можно записать при помощи уравнения Лагранжа 2-го рода [1].

Потенциальную энергию системы как функцию координат смещения центров жесткости виброизоляторов представится в виде

$$U = \frac{1}{2} (\sum c_x \delta_1^2 + \sum c_y \delta_1^2 + \sum c_z \delta_1^2), \quad (2)$$

где  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  – составляющие смещения центра  $O_k$  жесткости виброизолятора, имеющего координаты  $x, y, z$ .

Кинетическая энергия системы  $T = T_{II} + T_B$ , где  $T_{II} = \frac{m(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + \dot{z}_s^2)}{2}$  – кинетическая энергия при поступательном движении центра масс,  $m$  – масса объекта,  $T_B = \frac{1}{2} (I_x \dot{\varphi}_1^2 + I_y \dot{\varphi}_2^2 + I_z \dot{\varphi}_3^2) - I_{xy} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - I_{xz} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 - I_{yz} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3$  – кинетическая энергия при вращательном движении системы относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс объекта;  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$  – моменты инерции и центробежные моменты инерции объекта относительно осей  $x, y, z$ .

Обозначим  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$  – углы образованные осью вращения с осями  $x, y, z$ .

Проекция угловой скорости  $\omega$  на оси координат

$$\dot{\varphi}_1 = \omega \cdot \cos \gamma_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega \cdot \cos \gamma_2, \quad \dot{\varphi}_3 = \omega \cdot \cos \gamma_3.$$

Момент инерции относительно мгновенной оси вращения

$$I = I_x \cos^2 \gamma_1 + I_y \cos^2 \gamma_2 + I_z \cos^2 \gamma_3 - 2I_{xy} \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - 2I_{yz} \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 - 2I_{xz} \cos \gamma_3 \cos \gamma_1. \quad (3)$$

С помощью уравнения Лагранжа 2-го рода получим шесть взаимосвязанных дифференциальных уравнений собственных колебаний объекта виброзащиты

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11}\ddot{x}_s + \alpha_{11}x_s + \alpha_{15}\varphi_2 + \alpha_{16}\varphi_3 &= 0 \\ \beta_{11}\ddot{y}_s + \alpha_{22}y_s + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3 &= 0 \\ \beta_{11}\ddot{z}_s + \alpha_{33}z_s + \alpha_{34}\varphi_1 + \alpha_{35}\varphi_2 &= 0 \\ \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{45}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{46}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{24}y_s + \alpha_{34}z_s + \alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{45}\varphi_2 + \alpha_{46}\varphi_3 &= 0 \\ \beta_{45}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{15}x_s + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{55}\varphi_2 + \alpha_{56}\varphi_3 &= 0 \\ \beta_{46}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{16}x_s + \alpha_{26}y_s + \alpha_{46}\varphi_1 + \alpha_{56}\varphi_2 + \alpha_{66}\varphi_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\beta_{11}, \dots, \alpha_{66}$  – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами объекта и упругой системы виброизоляции.

Решение системы (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} x_s &= A_1 \cos(\omega t + \psi), \quad y_s = A_2 \cos(\omega t + \psi), \quad z_s = A_3 \cos(\omega t + \psi), \\ \varphi_1 &= A_4 \cos(\omega t + \psi), \quad \varphi_2 = A_5 \cos(\omega t + \psi), \quad \varphi_3 = A_6 \cos(\omega t + \psi), \end{aligned}$$

где  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  – значение амплитуд соответствующего параметра;

$\omega = k$  – круговая частота собственных колебаний;  $\psi$  – начальная фаза колебаний.

Подставляя эти решения в систему (4) и предполагая, что система допускает решения отличное от нуля, то определитель системы (4) равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & \alpha_{22} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{26} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} - \beta_{33}\omega^2 & \alpha_{34} & \alpha_{35} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} - \beta_{44}\omega^2 & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 \\ \alpha_{15} & 0 & \alpha_{35} & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{55} - \beta_{55}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & 0 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 & \alpha_{66} - \beta_{66}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Развернув определитель (5), получим уравнение шестой степени относительно  $\omega^2$ , решение которого возможно численным методом с помощью ЭВМ, что позволяет осуществить моделирование колебательного процесса при виброзащите, в частности моделирование собственных колебаний объекта виброзащиты. Рассмотрим некоторые частные случаи [3].

1-й случай: объект устанавливается без перекоса виброизоляторов, имеющих одинаковые жесткости  $c_z$ , т.е. осадка всех виброизоляторов будет одинаковой, при этом центр масс (т.  $S$ ) и центр жесткости (т.  $O_K$ ) лежат на одной вертикальной линии. Моделирование этого колебательного процесса позволит определить собственную частоту в направлении оси  $Z$ .

2-й случай: объект установлен без перекосов на равножесткостных виброизоляторах и расположенных в одной плоскости. В этом случае система упрощается до пяти уравнений, что позволит смоделировать колебательный процесс и определить пять собственных частот.

3-й случай: соблюдаются условия двух предыдущих случаев и центробежные моменты инерции равны 0. В этом случае оси  $x, y, z$  являются главными центральными осями инерции объекта и система дифференциальных уравнений моделирующих колебательный процесс объекта виброзащиты распадается на три независимых группы, одна из которых позволяет рассмотреть колебания вокруг оси  $OZ$  с частотой  $\omega_2$ . Два других уравнения описывают сложные колебания объекта в плоскости  $XZ$ . Третья группа уравнений описывает сложные колебания объекта в плоскости  $YZ$ .

Моделирование вынужденных колебаний объекта виброзащиты производится на системе дифференциальных уравнений вида (4), частное решение которых представляется как

$$x_{s_i} = A_{x_i} \cos(p_{jt} + \varphi_i), \quad y_{s_i} = A_{y_i} \cos(p_{jt} + \varphi_i).$$

При этом периодические функции  $F(t)$  и  $M(t)$  раскладывается в ряд Фурье и представляются в виде суммы гармоник [2].

Оценка эффективности виброзащиты объекта осуществляется [1]: а) коэффициентом виброизоляции  $K_R$  б) коэффициентом динамичности  $K_X$ . Условие эффективности виброзащиты задается неравенствами  $K_R < 1, K_X < 1$ .

Анализ эффективности в этом случае зависит от демпфирующих диссипативных свойств системы. Так эффективность виброзащиты по критерию  $K_R < 1$  обеспечивается при любом уровне в частотном диапазоне  $Z = P/\omega_z \geq \sqrt{2}$ . При этом наилучший эффект достигается если демпфирование отсутствует (Рис. 3). Эффективность виброзащиты по критерию  $K_X < 1$  обеспечивается в том же диапазоне при любых значениях  $\nu = n/\omega_z$ . В случае, если  $\nu = \sqrt{2}/2$  виброзащита эффективна в частотном диапазоне (рис. 4).

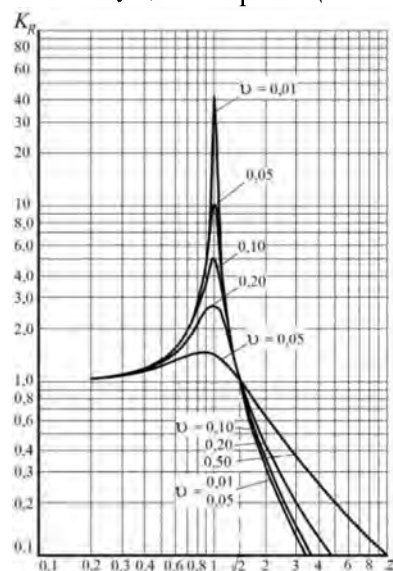


Рисунок 3. Зависимость  $K_R(z)$

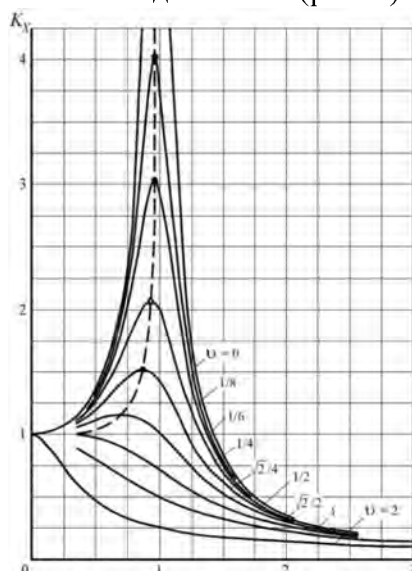


Рис. 4 Зависимость  $K_X(z)$

### РЕЗЮМЕ

Представлено математическое и компьютерное моделирование колебательного процесса объекта виброзащиты при внешнем силовом воздействии. Рассмотрены частные случаи компоновки элементов виброзащиты. Приведены критерии эффективности виброзащиты в зависимости от частотных диапазонов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации в технике : справочник : в 6 т./ под ред. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. Т. 6: Защита от вибраций и ударов. – 456 с.
2. Астахов, Э. И. Колебания в машинах и методы их устранения : учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / Э.И. Астахов, В.В. Кудин. – Минск: БГПА, 1997. – 130 с.
3. Ильинский, В.С. Защита РЭА и прецизионного оборудования от динамических воздействий/ В.С. Ильинский. – М. : Радио и связь, 1982. – 296 с.

### SUMMARY

The mathematical and computer modeling of oscillatory process of object vibration protection under external forces impact is presented. Particular cases of vibration protection elements assembling are considered. Criteria of vibration protection efficiency on different frequency bands are given.

E-mail: [ausi@tut.by](mailto:ausi@tut.by)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКИМ КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

Славашевич И. Л., Михасев Г. И.

*«Белорусский государственный университет», Минск*

### Введение.

В данной работе представлена математическая модель колебания пластины, моделирующей мертвые колебания барабанной перепонки при тимпанопластике и стапедотомии [1], которые не стимулируют движение протеза. В работе [2], были исследованы собственные частоты колебательной системы РСУ при тимпанопластике и стапедотомии, которые сильно зависят от параметров трансплантации хряща, массы протеза и точки его размещения на реконструированной барабанной перепонке. Большой интерес представляет исследование собственных частот, соответствующих колебаниям барабанной перепонки, анатомическая форма которой близка к эллипсу, в случае неподвижности протеза, и в зависимости от расположения протеза на реконструированной тимпанальной мембране.

Основной целью данной работы является исследование малых свободных колебаний кольцевой пластины с неконцентрическим круговым вырезом, характеризуемых локализацией собственных форм вблизи некоторого радиуса. Формальное асимптотическое решение строится с использованием метода Товстика [3]. Собственные частоты, соответствующие локализованным формам колебаний, находятся при отсутствии узловых диаметров. В работе показана зависимость частот от параметра, характеризующего эксцентриситет выреза. Подобное асимптотическое исследование колебаний пластинки проведено в работе [4], в которой исследованы возможные локальные формы колебаний круговой кольцевой пластинки с эксцентрическим круговым вырезом.

### Постановка задачи. Разрешающие уравнения.

Рассмотрим тонкую кольцевую пластину с внешними радиуса  $a_1$  и  $a_2$  и неконцентрическим круговым вырезом радиуса  $b_p$  (рисунок 1). Центр кругового выреза  $O_1$  находится на расстоянии  $\delta$  от центра  $O_2$  и характеризуется углом наклона  $\theta_c$  к оси  $Ox$ .

Колебания упругой изотропной пластинки будем описывать, используя классическое уравнение [3], записанное в полярной системе координат с центром в точке  $O_1$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 W(r, \varphi) - \frac{\sigma h \omega^2}{D} W(r, \varphi) = 0 \quad (1)$$

Здесь  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $\omega$  – собственная частота колебаний,  $E$ ,  $\nu$ ,  $\zeta$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона пластинки (хряща) и плотность хряща, соответственно,  $h$  – толщина пластины.

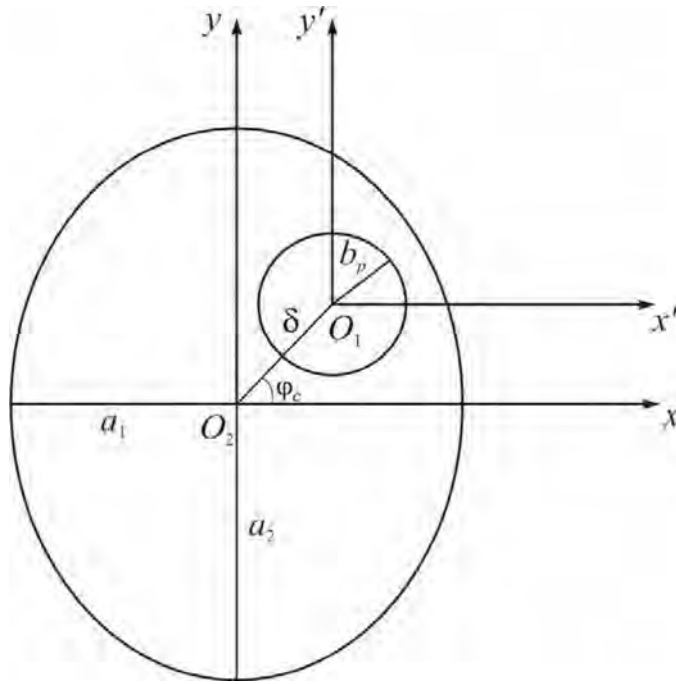


Рисунок 1 – Кольцевая пластина с эксцентрическим круговым вырезом

Пусть пластина занимает область, ограниченную двумя замкнутыми кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . В выбранной полярной системе координат эти линии задаются уравнениями  $r=r_1(\theta)$  и  $r=r_2(\theta)$ , соответственно. Будем считать, что  $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ .

На внешнем и внутреннем контурах рассмотрим условия жесткого защемления:

$$W(r, \varphi) = \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} = 0 \text{ при } r=r_1(\theta), \quad (2)$$

$$W(r, \varphi) = \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} = 0 \text{ при } r=r_2(\theta). \quad (3)$$

### Решение краевой задачи.

В выбранной системе координат будем иметь

$$r_1(\varphi) = b, \quad (4)$$

$$r_2(\varphi) = F(a_1, a_2, \delta, \varphi_c, \varphi). \quad (5)$$

Разложим функцию  $r_2(\theta)$  в ряд по степеням  $\theta$ , в окрестности точки  $\theta_0$ , в которой первая производная от  $r_2(\theta)$ , обращается в ноль:

$$r_2(\varphi) = R \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{a_2} \right)^2 A \varphi^2 + \dots \right), \quad (6)$$

где  $R$  – размерная величина, зависящая от внешних радиусов  $a_1, a_2$ , и параметра  $\delta$ , а  $A$  – константа, которая в силу громоздкости не приводятся.

Перейдем к безразмерным величинам

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad w(\rho, \theta) = W(r, \theta) / R \quad (7)$$

Тогда уравнение (1) и граничные условия (2), (3) примут вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w(\rho, \varphi) - \lambda w(\rho, \varphi) = 0, \quad (8)$$

$$w(\rho, \varphi) = \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b_p}{R} \quad (9)$$

$$w(\rho, \varphi) = \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{a_2} \right)^2 A \varphi^2 + O(\varphi^4), \quad (10)$$

где  $\lambda = \zeta h \omega^2 R^4 / D$  – безразмерный частотный параметр.

Пусть

$$\varepsilon = \frac{\delta}{a_2} \ll 1. \quad (11)$$

- малый параметр. Сделаем замену переменной

$$\varphi = \varepsilon \frac{1}{2} \xi. \quad (12)$$

Тогда в новых переменных задача (8) – (10) примет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\varepsilon}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w(\rho, \xi) - \lambda w(\rho, \xi) = 0 \quad (13)$$

$$w(\rho, \xi) = \frac{\partial w(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b_p}{R} \quad (14)$$

$$w(\rho, \xi) = \frac{\partial w(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1 - \frac{A}{2} \varepsilon \xi^2 + O(\xi^4), \quad (15)$$

Решение краевой задачи (13)-(15) будем искать в виде [3]:

$$w(\rho, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\rho, \xi), \quad (16)$$

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k, \quad (17)$$

где  $w_k(\rho, \xi) \rightarrow 0$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Подставляя (16), (17), (18), в (13)–(15), приходим к последовательности краевых задач.

В нулевом приближении (при  $k=0$ ) будем иметь однородную краевую задачу:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) w_0(\rho, \xi) - \lambda_0 w_0(\rho, \xi) = 0 \quad (18)$$

$$w_0(\rho, \xi) = \frac{\partial w_0(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b_p}{R} = b \quad (19)$$

$$w_0(\rho, \xi) = \frac{\partial w_0(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1 \quad (20)$$

Общее решение этой задачи ищем в виде [3]:

$$w_0(\rho, \xi) = P_0(\xi) w_0(\rho), \quad (21)$$

$$w_0(\rho) = C_1 J_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_2 Y_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_3 I_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_4 K_0(\lambda_0^{1/4} \rho), \quad (22)$$

где  $P_0(\xi)$  – неизвестная функция, удовлетворяющая на бесконечности условию затухания ( $P_0(\xi) \rightarrow 0$ ),  $J_0(x)$ ,  $Y_0(x)$  – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, а  $I_0(x)$ ,  $K_0(x)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Подставляя (21) в граничные условия (19) и (20), приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1 J_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_2 Y_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_3 I_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_4 K_0(\lambda_0^{1/4} b) = 0 \\ C_1 J'_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_2 Y'_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_3 I'_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_4 K'_0(\lambda_0^{1/4} b) = 0 \\ C_1 J_0(\lambda_0^{1/4}) + C_2 Y_0(\lambda_0^{1/4}) + C_3 I_0(\lambda_0^{1/4}) + C_4 K_0(\lambda_0^{1/4}) = 0 \\ C_1 J'_0(\lambda_0^{1/4}) + C_2 Y'_0(\lambda_0^{1/4}) + C_3 I'_0(\lambda_0^{1/4}) + C_4 K'_0(\lambda_0^{1/4}) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

относительно неизвестных  $C_i$ . Здесь и ниже штрих обозначает дифференцирование по  $\rho$ . Приравнявая определитель данной системы к нулю, получаем уравнение для определения параметра  $\lambda_0$ .

$$G(\lambda_0) = 0. \quad (24)$$

Пусть  $\lambda_0 = \lambda_0^{(l)}$  – корни уравнения (24), которые образуют счетное множество ( $l=1,2,3,\dots$ ).

В первом приближении имеем неоднородное уравнение:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 w_1(\rho, \xi) - \lambda_0 w_1(\rho, \xi) = \lambda_1 P_0(\xi) w_0(\rho) + \\ + \left[ -\frac{2}{\rho^2} w_0''(\rho) - \frac{2}{\rho^3} w_0'(\rho) \right] \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (25)$$

С неоднородными граничными условиями

$$w_1(\rho, \xi) = \frac{\partial w_1(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при } \rho = \frac{b}{R} = b \quad (26)$$

$$w_1(\rho, \xi) = \frac{\partial w_1(\rho, \xi)}{\partial \rho} = \frac{A}{2} \xi^2 P_0(\xi) w_0''(1) \quad \text{при } \rho = 1 \quad (27)$$

Задача (25)-(27) является неоднородной задачей на спектре. Для того, чтобы задача имела решение, необходимо потребовать выполнение условия разрешимости [5]. После некоторых преобразований данное условие может быть сведено к дифференциальному уравнению относительно функции  $P_0$ :

$$\delta_1 \frac{\partial^2 P_0(\xi)}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 \delta_0 - \xi^2 \delta_2) P_0(\xi) = 0 \quad (28)$$

где

$$\delta_0 = \int_b^1 \rho (w_0(\rho))^2 d\rho, \quad (29)$$

$$\delta_1 = 2 \int_b^1 \frac{w_0(\rho)}{\rho^2} [-\rho w_0''(\rho) - w_0'(\rho)] d\rho, \quad (30)$$

$$\delta_2 = \frac{A}{2} (w_0''(1))^2. \quad (31)$$

Уравнение (28) имеет решение, которое удовлетворяет условию затухания ( $P_0(\xi) \rightarrow 0$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ ), если

$$\delta_1 \delta_2 > 0, \quad \delta_0 > 0. \quad (32)$$

В этом случае будет существовать серия решений

$$P_0(\xi) = P_0^{(n)}(\xi) = H_n(\eta) e^{-\frac{\eta^2}{2}}, \quad \eta = 4 \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} \xi, \quad (33)$$

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(n)} = \frac{1}{\delta_0} \sqrt{\delta_1 \delta_2} (1 + 2n), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

Удовлетворяющая условию затухания. Здесь  $H_n^{(n)}$  – полиномы Эрмита, где  $H_0=1$ ,  $H_1=\eta$ ,  $H_2=\eta^2-1/2, \dots$

Произведенные расчеты показывают, что условие (32) выполняется. Следовательно, функция

$$w_0(\rho, \xi) = H_n \left( \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} \xi \right) e^{-\frac{\sqrt{\delta_2} \xi^2}{2}} \left\{ C_1 J_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_2 Y_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_3 I_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_4 K_0(\lambda_0^{1/4} \rho) \right\}. \quad (35)$$

есть нулевое приближение разложения (16) собственной формы колебаний пластины в окрестности «лабого» радиуса  $\theta=\theta_0$ , а

$$\lambda = \lambda_0^{(l)} \left( 1 + \varepsilon \chi^{(l,n)} + O(\varepsilon^2) \right), \quad (36)$$

где  $\chi^{(l,n)} = \lambda_0^{(l,n)} / \lambda_0^{(l)}$  – соответствующее собственное значение задачи (13)-(15), пропорциональное квадрату собственной частоты колебаний.

### Численные результаты.

Расчеты были выполнены для модели с параметрами  $a_1=4.8$  мм,  $a_2=5$  мм,  $b_p=1.5$  мм,  $E=3.4$  Н мм<sup>-2</sup>,  $\nu=0.4$ ,  $\zeta=1.2 \cdot 10^{-6}$  кг/мм<sup>3</sup>,  $h=0.3$  мм,  $\theta_c = \pi/8.05$  при различных значениях  $\varepsilon$ . Данные параметры соответствуют реконструированной барабанной перепонке среднего уха, изготовленной из хряща, и жестко скрепленной с Т-образным протезом по внутреннему контуру [2].

Таблица 1. Зависимость параметров  $\chi^{(l,n)}$  и частоты  $\omega^{(l)}$  (Гц) от эксцентриситета выреза  $\varepsilon$ .

$\varepsilon$	$\lambda_0^{(1)}$	$\chi^{(1,0)}$	$\omega^{(1)}$	$\lambda_0^{(2)}$	$\chi^{(2,0)}$	$\omega^{(2)}$	$\lambda_0^{(3)}$	$\chi^{(3,0)}$	$\omega^{(3)}$
0,1	1832.11	0.6246	258	14007.2	0.31	684	54022.4	0.3516	1352
0.2	1613.38	0.5952	203	12339.3	0.419	571	47607.2	0.2645	1056
0.3	1448.66	0.5753	162	11082.6	0.491	447	42772.7	0.2258	846
0.5	1225.66	0.435	105	9379.31	0.5376	309	36219.6	0.3317	590

Из таблицы 1, в которой приведены результаты расчетов параметров  $\lambda_0^{(l)}$ ,  $\chi^{(l,n)}$ , видно, что с увеличением номера частоты  $l$  поправка, учитывающая наличие эксцентриситета выреза, уменьшается. Также результаты показывают, что при увеличении параметра  $\varepsilon$ , частоты уменьшаются. Данные частоты близки к частотам, полученным в работе [2], и соответствующим мертвым формам колебаний барабанной перепонки, при которых протез неподвижен.

### РЕЗЮМЕ

Основной целью данной работы является исследование малых свободных колебаний кольцевой пластины с неконцентрическим круговым вырезом,



характеризуемых локализацией собственных форм вблизи некоторого радиуса. Формальное асимптотическое решение строится с использованием метода Товстика. Собственные частоты, соответствующие локализованным формам колебаний, находятся при отсутствии узловых диаметров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hüttenbrink, K.-B. Mechanical aspects of middle ear reconstruction / K.-B. Hüttenbrink // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. Mikhasev, G.I. Prediction of Eigenfrequencies of the Middle Ear Oscillating System after Tympanoplasty and Stapedotomy / G.I. Mikhasev, I. Slavashevich, K. Yurkevich // In book: Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology from macro- to nanoscale structures (eds. by H. Altenbach, G. I. Mikhasev). Advanced structured Materials. Vol. 45. Springer, 2015. DOI 10.1007/978-3-319-02535-3\_14. –P. 243–265.
3. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 290 с.
4. Фирсов, М.А. О возможных локальных формах колебаний круговой кольцевой пластинки с эксцентрическим круговым вырезом / М.А. Фирсов, Г.И. Михасев, // Асимптотические методы в механике деформируемого твердого тела: сборник трудов, посвященный 70-летию профессора П. Е. Товстика / Санкт-Петербургский государственный университет, под редакцией С. Б. Филиппова. – Санкт-Петербург, 2006. –С. 104–112.
5. Найфэ, А. Х. Введение в методы теории возмущений. М., 1978. – 535с

#### SUMMARY

*The main purpose of this work is to study the small free oscillations of an annular plate with non-concentric circular cutout, characterized by localization of natural forms near a certain radius. Formal asymptotic solution is constructed using the method Tovstik. The natural frequencies corresponding to the localized vibration modes without nodal diameters.*

**E-mail:** [Slavashevichi@yandex.ru](mailto:Slavashevichi@yandex.ru)  
[Mikhasev@bsu.by](mailto:Mikhasev@bsu.by)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ДАВЛЕНИЙ ПО МЕТОДУ ШТАЕРМАНА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ МЕХАНИЗМОВ

к.т.н. **Авсиевич А.М.**, **Пронкевич С.А.**, студ. **Шашко А.Е.**

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Распределение контактных давлений по рабочим поверхностям подвижных сопряжений за цикл работы механизма является основой для оптимизации его конструктивных параметров. Для расчета распределения контактных давлений по цилиндрическим поверхностям вращательных кинематических пар решена задача И.Я. Штаермана о внутреннем контакте тел с согласованными цилиндрическими поверхностями [1].

Звено нагружено сосредоточенной силой  $F$ , которая в механизме является силой реакции в кинематической паре. При этом на дуге 1-ого звена для произвольной угловой координаты  $\varphi' (-\varphi_0 \leq \varphi' \leq \varphi_0)$ , возникает контактное давление  $p_i \varphi_i'$ , которое необходимо определить для неизвестного полуугла контакта  $\varphi_0$ .

При расчете полуугла контакта и эпюры контактного давления принимается допущение, что сопряженные звенья находятся в равновесии. Такое допущение является корректным, так как действие сил инерции учитывается при расчете сил реакций, реализованном методом кинетостатики, а пластические деформации и течение металла в зоне контакта в исследуемом диапазоне режимов отсутствуют.

Расчет производим методом конечных разностей. Метод заключается в том, что искомая функция предполагается изменяемой не непрерывно, а скачками. Разбив интервал изменения искомой функции на  $n$  частей и предполагая, что в каждом из полученных подинтервалов функция эта сохраняет постоянное значение, мы сводим решение интегрального уравнения к отысканию этих  $n$  значений искомой функции. Надлежащим выбором этих значений мы можем добиться того, чтобы интегральное уравнение удовлетворялось в  $n$  точках того интервала, в котором это уравнение должно удовлетворяться. Мы приходим, таким образом, к решению системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Решив эти уравнения, мы получим приближенное выражение для искомой функции в виде кусочно-постоянной функции, меняющейся скачками. Построив её график и сгладив скачки, мы получим в итоге плавную кривую, изображающую приближенное решение интегрального уравнения.

Как представлено выше, в случае сжатия двух круговых цилиндров, радиусы которых почти равны, давление  $P(\theta)$  в области контакта определяем интегральным уравнением

$$\begin{aligned}
 & 2(\mathcal{G}_1 r_1 + \mathcal{G}_2 r_2) \int_0^{\varphi_0} p(\varphi') [\cos(\varphi - \varphi') \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) + \\
 & + \cos(\varphi + \varphi') \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi + \varphi'}{2} \right) - 2 \cos \varphi \cos \varphi' \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi' - \\
 & - (\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2) \int_0^{\varphi_0} p(\varphi') [\sin(\varphi - \varphi') + \sin(\varphi + \varphi') - \\
 & - 2 \cos(\varphi) \sin \varphi'] d\varphi' + 4\mathcal{G}_1 r_1 (1 - \cos \varphi) \int_0^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi)
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{где } \vartheta_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}, \vartheta_2 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}, \chi_1 = \frac{1}{4(\lambda_1 + \mu_1)}, \chi_2 = \frac{1}{4(\lambda_2 + \mu_2)}$$

$\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты Ламе для материала тел 1 и 2 соответственно, выражаемые через модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона.

Разобьем интервал  $(0, \varphi_0)$  на  $n$  равных частей и будем считать, что в каждом из полученных подинтервалов функция  $P(\theta)$  сохраняет постоянное значение

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= P_k \text{ при } (k-1)\vartheta < \varphi < k\vartheta, \\ k &= 1, 2, \dots, n, \vartheta = \frac{\varphi_0}{n} \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя  $P(\theta)$  из (2) в (1), получим:

$$\begin{aligned} &2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \sum_{k=1}^n P_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} [\cos(\varphi - \varphi') \ln \left( \text{tg} \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right) + \\ &+ \cos(\varphi + \varphi') \ln \left( \text{tg} \frac{\varphi + \varphi'}{2} \right) - 2 \cos \varphi \cos \varphi' \ln \left( \text{tg} \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi' - \\ &-(\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2) \sum_{k=1}^n P_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} [\sin(\varphi - \varphi') + \sin(\varphi + \varphi') - \\ &- 2 \cos(\varphi) \sin \varphi'] d\varphi' + 4\vartheta_1 r_1 (1 - \cos \varphi) \sum_{k=1}^n P_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} d\varphi' = (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi), \\ &-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \Delta_k &= 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[ \sin(k+1)\vartheta \ln \left( \text{tg} \left( \frac{(k+1)\vartheta}{2} \right) \right) - \sin k\vartheta \ln \left( \text{tg} \left( \frac{k\vartheta}{2} \right) \right) - \vartheta \right] + \\ &+ (\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2) \delta(k) [\cos(k+1)\vartheta - \cos k\vartheta] + 2\vartheta_1 r_1 \vartheta \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда уравнению можно будет придать вид

$$\begin{aligned} \sum_{k+1}^m P_k (\Delta_{l-k} + \Delta_{l+k-1} - 2 \cos(l\vartheta) \Delta_{k-1}) &= (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi) \\ l &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

Так как

$$\delta(l+k-1) = \delta(k-1) = 1 \text{ при } k \geq 1, l \geq 1$$

При  $k \geq 0$  имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_k &= 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[ \sin(k+1)\vartheta \ln \left( \text{tg} \left( \frac{(k+1)\vartheta}{2} \right) \right) - \sin k\vartheta \ln \left( \text{tg} \left( \frac{k\vartheta}{2} \right) \right) - \vartheta \right] + \\ &+ (\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2) [\cos(k+1)\vartheta - \cos k\vartheta] + 2\vartheta_1 r_1 \vartheta \end{aligned} \quad (6)$$

При  $k \geq 1$  имеем также

$$\Delta_{-k} = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[ -\sin(k-1)\vartheta \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{(k-1)\vartheta}{2} \right) \right) - \sin k\vartheta \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{k\vartheta}{2} \right) \right) - \vartheta \right] +$$

$$+(\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2) [-\cos(k-1)\vartheta + \cos k\vartheta] + 2\vartheta_1 r_1 \vartheta \quad (7)$$

т.е.  $\Delta_{-k} = \Delta_{k+1}, k \geq 1$

Вводя, далее, обозначения:

$$F(k) = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[ \sin(k\vartheta) \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{k\vartheta}{2} \right) \right) - k\vartheta \right] +$$

$$+(\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2) \cos(k\vartheta) + 2\vartheta_1 r_1 k\vartheta, k \geq 0, \quad (8)$$

сможем придать формуле вид:

$$\Delta = F(k+1) - F(k), k \geq 1 \quad (9)$$

Объединив формулы (5), (7), (8), (9), приходим к следующей системе уравнений для определения неизвестных  $p_1, p_2, \dots, p_k$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m p_k (\Delta_{l-k} + \Delta_{l+k-1} - 2 \cos(l\vartheta) \Delta_{k-1}) = (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi) \\ l = 1, 2, \dots, n, \\ \text{где} \\ \Delta = F(k+1) - F(k), k \geq 0, \Delta_{-k} = \Delta_{k+1}, k \geq 1 \\ F(k) = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[ \sin(k\vartheta) \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{k\vartheta}{2} \right) \right) - k\vartheta \right] + \\ + (\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2) \cos k\vartheta + 2\vartheta_1 r_1 k\vartheta, k \geq 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

В программной реализации данного алгоритма создаются два главных массива – коэффициентов перед  $p_i$  и свободных членов.

Разбиваем шатунную шейку на 360 равных частей. Это делается для того, чтобы в дальнейшем посчитать напряжение на каждом участке шатунной шейки. Создаем главную таблицу, в которой будут храниться значения напряжения на каждом участке, и заполняем ее. Далее суммируем столбцы для получения значений суммарного напряжения на участках поверхности.

В качестве критерия оценки износостойкости и энергоэффективности механизма можно выбрать элементарную работу трения, совершаемую на малом элементарном участке поверхности или соответствующую элементарную мощность трения в данный момент цикла работы машины [2]. Наиболее удобным для расчетов и последующей визуализации показателем будет являться параметр износа  $Z$  или «аналог мощности трения» – произведение контактного давления на элементарном участке поверхности на аналог относительной угловой скорости скольжения. Для поверхностей пары трения «шатунная шейка-вкладыш» вычисляется как

$$Z_{ji} = \sigma_{ji} \cdot \frac{\omega_{2i} - \omega_{1i}}{\omega_{1i}}, \quad (11)$$

где  $Z_{ji}$  и  $\sigma_{ji}$  соответственно – параметр износа и контактное давление (напряжение) для  $j$ -го элемента поверхности в  $i$ -й момент цикла,

$\omega_{2i}$  и  $\omega_{1i}$  – угловые скорости звеньев 2 и 1 в  $i$ -й момент цикла.

Значения угловых скоростей в каждый момент цикла работы машины рассчитаны ранее в программе для определения сил реакций в механизме. В программе для расчета контактных давлений создаем еще одну таблицу для параметра износа и заполняем ее. Аналогично создаём таблицу для параметра износа на отдельных частях шатунной шейки и заполняем ее путем суммирования столбцов.

Описанный алгоритм и его программная реализация в совокупности с программой расчета сил реакций в кинематических парах образуют комплекс, позволяющий производить оптимизацию конструктивных параметров механизмов по критериям минимизации нагруженности и изнашивания при различных режимах работы.

## РЕЗЮМЕ

В работе описан алгоритм расчета распределения контактных давлений по поверхностям вращательных кинематических пар. Предложен критерий оценки относительной интенсивности изнашивания механизма с определенными конструктивными параметрами. Описанный алгоритм вместе с программой расчета сил реакций в кинематических парах позволяют производить оптимизацию конструктивных параметров механизмов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении / В.М. Александров, Б.Л. Ромалис – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
2. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.

## SUMMARY

*The paper describes the algorithm for calculating the distribution of the contact pressure on the surface of rotation kinematic pairs. Evaluation criterion for relative intensity of wear of the mechanism with certain design parameters is proposed. The described algorithm together with the program of the calculation of the forces of reaction in kinematic pairs allows optimizing the design parameters of the mechanism.*

**E-mail:** [ausi@tut.by](mailto:ausi@tut.by)

Поступила в редакцию 03.11.2014

## И СНОВА О МАТЕМАТИКЕ

д.ф.-м.н. **А.В. Чигарев**, д.ф.-м.н. **Ю.В. Чигарев**

*«Математика – это язык»*

*Дж. Гиббс.*

Слова гениального американского математика и физика Дж. Гиббса, приведенные в эпиграфе и сказанные им более ста лет назад, фактически дают ответ на поставленный вопрос. Язык нужен всем, кто ведет социальный образ жизни. Именно потребность в уровне языка позволяет идентифицировать различные социальные слои. Как язык науки и техники математика была осознана к концу девятнадцатого начала двадцатого века, когда на языке математических моделей были созданы электродинамика, механика жидкости, газа и твердого тела и т.д. Математика воспринималась общественностью как ключ от ящика Пандоры, с помощью которого человечество будет черпать из этого ящика всё новые чудеса. И действительно, первая половина двадцатого века, была богата на открытия, в том числе на кончике пера, когда слово теоретическая физика, механика представлялись фундаментом наук, а их представители специалистами, могущими всё объяснить. Создание теории относительности, квантовой механики, ядерной физики и т.д. подтверждали это. Две мировые войны, потребовавшие новых видов вооружений, стимулировали развитие математики в различных областях. Однако настоящий математический, физический бум начался после второй мировой войны и связан он был с появлением атомной и водородной бомб и ракет для их доставки. В это же время произошло и наметившееся еще до войны разделение математики на чистую и прикладную.

Чистые математики пошли по пути создания всё более абстрактных математических структур, которые получили применение в теоретической физике.

Прикладные математики развивали теорию вычислений, алгоритмику, заложив теоретический фундамент для создания вычислительных машин (машина Тьюринга, автоматы фон Неймана и т.д.).

В 60-х–70-х годах это привело к тому, что в университетах математико-механические факультеты разделились на факультеты с прикладной направленностью, т.е. использованием вычислительной техникой и факультеты с теоретической направленностью.

Математическое образование в то время казалось гарантом востребованности в будущем на долгие годы. Математика, как и всякий язык, усваивается тем лучше, чем раньше его начинаешь учить. Проблемой того времени был разрыв в уровне школьной (элементарной) и вузовской (высшей). Поскольку сердцевинной вузовской математики были математический анализ, дифференциальные и интегральные уравнения, описывающие динамические модели, а для школьной математики основой были статические разделы: геометрия, алгебра, тригонометрия, то проблему повышения математической культуры студентов видели в создании физико-математических школ, учеников которых знакомили с высшей математикой так, что приходя в университеты их выпускники легче адаптировались к высшей математике. Более того часть разделов высшей математики перенесли в курсы школьной математики. Поступление в вуз на специальности естественного и технического профиля требовали серьезной подготовки и курсы дополнительных подготовительных знаний, репетиторы были всегда загружены работой. Прорешать все задачи из Сканави - это было в порядке вещей. В 80-х годах наметились тенденции по уменьшению возможности применения ядерного оружия, снизилась интенсивность работ в этой области, в том числе потребность в теоретиках, с другой стороны физика не оправдала надежды на скорое мирное овладение термоядерным синтезом, в ракетной технике также не наступили ожидаемые прорывы.

Бум в производстве компьютеров и других информационных средств, произошедший в те годы за счет достижений электроники изменил директорию общественных интересов и в первую очередь среди молодёжи. Физика и связанная с ней математика стали выходить из моды. Информатика и программирование стали наиболее модными профессиями, что было обусловлено достаточной оплатой и общественным статусом. Казалось бы с точки зрения математики вообще ничего страшного не произошло, т.к. информатика и программирование базируются на математике. Однако, если физика, механика, а также техника и технологии, на них основанные создавались на базе континуальной математики, то информатика и программирование базировались на дискретной математике, развивавшейся параллельно с континуальной.

Отметим, что появление вычислительной техники и возможности вместо поиска решений дифференциальных, интегральных, алгебраических уравнений, запрограммировать решение с помощью каких-нибудь численных методов вызвало воодушевление в рядах прежде всего тех, кто не владел профессионально аналитическим инструментарием. Это относится в первую очередь к инженерам, закончившим технические вузы и для которых важен был результат, а не процесс решения задачи. Появление языков программирования высокого уровня сводило, как тогда многим казалось, решение проблем к простым алгоритмам, освоить которые под силу специалисту среднего уровня. Все писали программы, и даже был создан фонд республиканских программ. Впрочем, эта кустарная деятельность закончилась, когда американцы, как всегда, поставили дело на промышленную основу. Появление пакетов профессионально решавших инженерные задачи, как казалось, свидетельствовало о том, что учить континуальную математику, а значит и использующие её аналитический аппарат механику, физику также не стоит. Результатом таких мнений явилось резкое падение конкурсов на факультеты физико-математического и технического профиля. Исключение составляют ИТ-специальности.

Появление массовых персональных компьютеров по своему влиянию на сознание и образ жизни людей сопоставимо с внедрением в обиход людей личных автомобилей, изменивших представление человека о возможностях перемещения по земле. Персональный компьютер с соответствующим программным обеспечением дал возможность человеку средних интеллектуальных способностей решать задачи, которые ранее были под силу только высококлассным профессионалам. Освоение пользования компьютером за счет создания дружественных интерфейсов становится все проще, аналогично и в автомобилевождении основная тенденция – автоматизация процесса. Возникает вопрос, а может математики, механики, физики, инженеры уже не нужны, а нужны лишь пользователи компьютерных программ и программисты. Работа программиста сродни работе математика в том смысле, что тот и другой должен владеть формальными языками, причем, как правило, на уровне синтаксиса, не особо интересуясь семантикой задачи. Следовательно, должны быть специалисты, которые понимают механику, физику, инжиниринг задачи для ее правильной формулировки в виде формул, алгоритмов и т.д., а также осмысления результатов решения с точки зрения физического, механического, инженерного смысла.

Парадигма математического образования, сложившаяся в прошлом столетии – это математическое моделирование, основанное на законах механики, физики, техники и решении дифференциальных, интегральных, алгебраических уравнений, описывающих эти модели. Фактически процесс математического образования начинался в первом классе и продолжался всю жизнь для тех специалистов, которые в своей профессиональной деятельности использовали математику. Современный этап развития парадигмы математического моделирования характеризуется автоматизацией различных стадий процесса моделирования. Так с помощью пакета Mathematica

записав выражение для лагранжиан, гамильтониана на основе вариационных принципов получаем уравнения динамики твердого тела, жидкости, газа, которые можем численно проинтегрировать или решить с помощью аналитических вычислений. Таким образом, роль исследователя, инженера сводится к умению правильно записать лагранжиан, гамильтониан в начале решения задачи и проанализировать результаты в конце. В случае использования пакетов систем CAD/CAE/CAM/FEM роль человека сводится к выбору конечно-элементной модели метода конечных элементов, правильной постановки граничных условий и анализу полученных результатов.

Возникает вопрос, для чего изучать инструментарий континуальной математики, если он практически в профессиональной деятельности инженера не требуется. Вопрос сродни использованию различных умных машин, автоматов. Создание все более дружественных интерфейсов ведет к тому, что все более широкие массы людей безбоязненно садятся за руль, а в дальнейшем и штурвал. В нашем случае к монитору. Переход к тестовой системе проверки по схеме правильного выбора, а не получения решения свидетельствует о том, что за триста лет развития физики, механики, техники на основе создания математических моделей большая часть задач окружающего нас мира сформулирована и той или в иной мере получила свое решение. Во всяком случае эти проблемы не вызывают широкого интереса, обсуждения в обществе, а соответственно и язык континуальной математики утратил свою актуальность и в соответствии с законами развития языков может перейти в разряд мертвых. История знает множество примеров исчезновения языков, например, латинского, когда исчезла римская культура под ударами вандалов и варваров. Если стремительное внедрение информационных технологий в общественную жизнь будет продолжаться с результатами, которые сейчас предусмотреть невозможно, но которые по своему воздействию на общественное сознание будут сопоставимы с ядерным оружием, то весьма возможно возникновение математического бума в области изучения дискретной математики. Тренд в этом направлении с некоторыми флуктуациями наблюдается последние двадцать лет.

Учитывая это, казалось бы имеет смысл менять структуру математического образования в сторону уменьшения континуальной математики в пользу дискретной. Однако это потребует перестройки всех других курсов физико-технического профиля.

Роль ЦТ в дискредитации математического образования требует отдельного серьезного рассмотрения. К сожалению, ни одного плюса здесь назвать нельзя. Возможно модификация ЦТ в направлении возврата к форме экзамена, требующего учиться решать задачи, писать сочинение вместо выбора готовых решений. Правильный путь, как уже было сказано, мода среди молодежи сейчас на два языка: программирование и английский. Именно эти языки обеспечивают их носителям востребованность, если не со стороны нашей экономики, то зарубежных – надежно. Математический язык не востребован нашей экономикой потому, что этот язык требуется для развития фундаментальных исследований в области механики, физики, техники. Экономика Советского Союза имела достаточно выраженный оборонный характер, что требовало создания конкурентной техники для сохранения паритета с Западом. Разрушение ВПК обусловило падение интереса математическому образованию, что нельзя сказать о Западе, где фундаментальные исследования продолжают и поддерживаются. Более того политика высасывания серого вещества на Запад и оставление серой массы на Востоке и Юге приобретает все более широкие масштабы. «Конкуренция – двигатель прогресса». Реальная конкуренция на выживание потребует реальных инноваций, а не имитаций тогда и математический язык снова станет востребованным.



# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.3

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В СЛОЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

член.-корр. НАН Беларуси <sup>1</sup>Плескачевский Ю.М., асп. <sup>2</sup>Чigareва Ю.А.

<sup>1</sup> Гомельский филиал НАН Беларуси

<sup>2</sup> Белорусский национальный технический университет, Минск

Рассмотрим распространение тепла в микрослоистой среде так, что температура  $T(x,t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

Считая  $\lambda(x)$  случайной функцией пространственной координаты  $x$ , осредним соотношение (1), тогда получим [1]

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda^* \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} \right) \quad (2)$$

где  $\lambda^*$  – оператор эффективной среды, имеющий в случае, когда  $\lambda(x)$  статистически однородная среда

$$\begin{aligned} \langle \lambda(x) \rangle &= const, \langle \lambda(x)\lambda(x_1) \rangle = R(x - x_1) \\ \lambda &= \lambda(x) - \langle \lambda \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

Вид интегрального оператора  $\lambda^*$  - представим следующим образом

$$\lambda^* f = \int_0^t \int_v K(x - x_1, t - t_1) f(x_1) dx, dt \quad (4)$$

Здесь ядро  $K(x - x_1, t - t_1)$  представляет собой произведение функции Грина  $G(x - x_1, t - t_1)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \lambda_0 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\delta(x - x_1)\delta(t - t_1) \quad (5)$$

и корреляционной функции  $R(x - x_1)$ , определяемой формулой (3).

Зависимость (4) указывает на наличие памяти среды во времени и пространстве [2,3]. Отсутствие памяти имеет место в сингулярном приближении, когда

$$K(x - x_1, t - t_1) = K_0 \delta(x - x_1)\delta(t - t_1) \quad (6)$$

Наличию полной (идеальной) памяти в среде соответствует зависимость вида [1-4]

$$K(\bar{z} - \bar{z}_1) = \frac{0}{\bar{z} - \bar{z}_1}, \quad \bar{z} = (x, t) \quad (7)$$

Для сред фрактальной структуры во времени и пространстве промежутки времени и пространства с эффектом памяти образуют множество Хаусдорфа – Безиковича, тогда связь (4) можно записать в виде

$$\lambda^* f = \frac{1}{r(\alpha)} \int_0^t \int_v \frac{f(z_1)}{(z - z_1)^{1-\alpha+\beta}} dz, \quad \bar{z}_1 = (x_1, t_1) \quad (8)$$

где  $\alpha$  является фрактальной размерностью по времени,  $\beta$  является фрактальной размерностью по пространству множества Хаусдорфа – Безиковича.

Среды с фрактальной размерностью по времени и пространству, обладающие частичной памятью описываются разными методами: с помощью корреляционных зависимостей [1], с помощью производных дробного порядка [4,5].

Переход от производных целого порядка к производным дробного порядка осуществляется по схеме

$$\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \Rightarrow \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(\bar{z})}{t_0 l_0 \partial \bar{z}^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dz} \int_0^t \int_v \frac{f(\bar{z}_1) d\bar{z}}{(z - \bar{z}_1)^{\alpha+\beta}} \quad (9)$$

Тогда процессы в средах со случайной неоднородностью фрактальной структуры можно описывать с помощью дифференциальных уравнений дробной степени.

Рассмотрим уравнение теплопроводности (1), которое относится к уравнениям с переменными коэффициентами, для решения которых развиты различные методы, из которых метод эффективного поля [1] является одним из наиболее распространенных.

Фрактальность структуры в этом случае учитывается с помощью корреляционных зависимостей. Эквивалентный подход состоит в переходе к дифференциальным уравнениям дробного порядка [2,5]

$$\frac{\partial^\alpha T}{t_0 \partial \tau} - \frac{\lambda_0}{l_0} \frac{\partial^{\beta+\gamma} T}{\partial \xi^{\beta+\gamma}} = 0 \quad (10)$$

В случае стационарной теплопроводности  $T(\tau, \xi) = T(\xi)$  из (10) следует

$$\frac{d^{\beta+\gamma} T(\xi)}{d\xi^{\beta+\gamma}} = 0 \quad (11)$$

Граничные условия для уравнения (11) имеют вид:

$$T(\xi_1) = T_1, \quad T(\xi_2) = T_2 \quad (12)$$

где  $\xi_1 = \frac{a}{l}$ ,  $\xi_2 = \frac{b}{l}$ ,  $l = b - a$

Уравнения (11), (12) описывают распределение температуры в слое толщины 1, имеющим фрактальную структуру.

Решение граничной задачи (11), (12) имеет вид [2,3]

$$T(\xi) = (\xi_1 \xi_2)^{1-\eta} \left\{ (\xi_2^\eta T_1 - \xi_1^\eta T_2)^{\eta-1} + (\xi_1^{\eta-1} T_2 - \xi_2^{\eta-1} T_1) \xi^\eta \right\} \quad (13)$$

При  $\eta = 1$  решение (13) дает классическое одинарное решение. В формуле (13) введены обозначения

$$\eta = \alpha - 1, \quad \alpha = \beta + \gamma \quad (14)$$

Среды с фрактальной структурой описываются значениями  $\alpha, \eta$ , измеряющимися в пределах

$$1 < \alpha < 2, \quad 0 < \eta < 1 \quad (15)$$

что соответствует нелинейным зависимостям.

Если рассматривать случай  $2 < \alpha \leq 3$ , когда  $\alpha = 2 + \gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ , то в этом случае требуется поставить еще одно граничное условие, т.к. порядок дифференциального уравнения (11) в этом случае выше второго.

Полагаем

$$\left. \frac{d^{1+\gamma} T(\xi)}{d\xi^{1+\gamma}} \right|_{\xi=\xi_1} = -\frac{q}{\lambda} \quad (16)$$

где  $q$  – тепловой поток на границе  $\xi = \xi_1$ .

Тогда общее решение уравнения (11) ищем в виде

$$T(\xi) = \frac{A}{\Gamma(\gamma)} \xi^{1-\xi} + \frac{B}{\Gamma(1+\gamma)} \xi^\gamma + \frac{D}{\Gamma(2+\gamma)} \xi^{1+\gamma} \quad (17)$$

Здесь  $A, B, D$  - постоянные, которые находятся их граничных условий (12), (16).

Решение сформулированной граничной задачи имеет вид

$$T(\xi) = (\xi_1 \xi_2)^{1+\gamma} \left\{ (\hat{T}_1 \xi_2^\gamma - \hat{T}_2 \xi_1^\gamma) \xi^{\gamma-1} + (\hat{T}_2 \xi_1^{\gamma-1} - \hat{T}_1 \xi_2^{\gamma-1}) \xi^\gamma \right\} - \frac{q(\xi_1)}{\lambda \Gamma(1+\gamma)} \xi^{1+\gamma},$$

$$T_i = T_i - \frac{q(\xi_1)}{\lambda \Gamma(2+\gamma)} \xi_i^{1+\gamma}, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

Рассмотрим некоторые модели фрактальных сред. Для модели Кантора имеем размерность 0,67, [6] тогда полагая  $\beta = \gamma = 0,63$ , получим  $\alpha = 1,26$ ,  $\eta = 0,26$ , а решение (13) имеет вид

$$T(\xi) = (\xi_1 \xi_2)^{-0,74} \left\{ (\xi_2^{0,26} T_1 - \xi_1^{0,26} T_2) \xi^{-0,74} + (\xi_1^{-0,74} T_2 - \xi_2^{-0,74} T_1) \xi^{0,26} \right\} \quad (19)$$

При  $\eta = 1$

$$T(\xi) = (\xi_2 T_1 - \xi_1 T_2) + (T_2 - T_1) \xi \quad (20)$$

получаем классическое решение с линейным распределением температуры в однородной пластине с коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ , толщины 1.

Соотношение (19) имеет четко выраженную нелинейную зависимость, характерную для композитов волокнистой структуры.

Рассмотрим теперь в качестве примера модель фрактальной среды типа Кох [7], положив  $\beta = \gamma = 1,26$ ,  $\alpha = 2,52$

В этом случае (18) имеет вид

$$T(\xi) = (\xi_1 \xi_2)^{1+\gamma} \{ (\hat{T}_1 \xi_2^{1,26} - \hat{T}_2 \xi_1^{1,26}) \xi^{0,26} + (\hat{T}_2 \xi_1^{0,26} - \hat{T}_1 \xi_2^{0,26}) \xi^{1,26} \} - \frac{q(\xi_1)}{\lambda \Gamma(1+1,26)} \xi^{2,26} \quad 21$$

$$\hat{T}_1 = T_1 - \frac{q(\xi_1)}{\lambda \Gamma(2+1,26)} \xi_i^{2,26}, \quad \hat{T}_2 = T_2 - \frac{q(\xi_1)}{\lambda \Gamma(2+1,26)} \xi_i^{2,26}$$

На рис.1 изображены зависимости  $T(\xi)$  для трех моделей сред:

1 – классическая, 2 – Кантора, 3 – Кох.

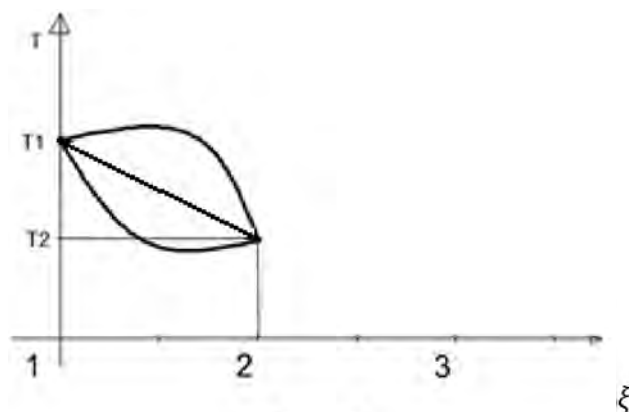


Рисунок 1

**Выводы.** Фрактальные модели структуры среды позволяют описать нелинейный характер распределения температуры в микронеоднородной среде. Для среды с размерностью меньше единицы (Кантор) нелинейность имеет выпуклость вниз, а для среды с размерностью больше единицы (Кох) выпуклость вверх, таким образом, размерность является параметром структуры, который наряду с толщиной пластины и материальными коэффициентами может использоваться для решения задач проектирования пластины с заданными теплопроводными свойствами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М. Наука, 1997, 399с.
2. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992, т. 90, с. 354-368.
3. Магомедов К.М. Теоретические основы геотермии. М. Наука, 2001, 277с.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые ее приложения. Минск, 1987, 688 с.
5. Marcel Ovidiu Vlad Fractional Diffusion on Fractals: Self-similar Stationare Solutions in a Force Field Derived from a Logarithmic Potential // Chaos, Solutions & Fractals, vol. 4, №2, pp 1.51-199, 1994.
6. Ф.Д. Морозов Введение в теорию фракталов, Москва-Ижевск, 2002, 159с.
7. E. Charkaluk, M. Bigerelle, A. Iost. Fractals and fracture // Engineering Fracture Mechanics 61 (1998) 119-139/

E-mail: [pleskym@mail.ru](mailto:pleskym@mail.ru)

Поступило в редакцию 17.11.2014

## ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

асп. **Икуас Юсиф Ф.Мабрук**, асп. **Хишам Аль Гамати**  
*Белорусский национальный технический университет, г. Минск*

Получены топологические уравнения для определения вероятностей состояний (структур) подсистем сложной динамической системы. Изменение структуры сложной мультиструктурной системы описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением для вероятностей состояний подсистем, зависящих от векторов интенсивностей смены состояний подсистем, а также - от матриц смежности и инцидентности, определяющих топологию сложной системы.

$$\dot{P}^{(s)}(t) = -P^{(s)}(t) \left\{ \sum_{r=1(r \neq s)}^M [v_0^{(sr)}(t) + V^T v^{(sr)}(t) - \tilde{A} \mu^{(sr)}(t)] \right\}^T, \quad P^{(s)}(t_0) = P_0(s).$$

$P^{(s)}$  – вектор, состоящий из вероятностей нахождения  $i$ -х подсистем в  $S$ -х состояниях ( $i=1, N, s=1, M$ ), характеризующих их надежность (исправное, неисправное, работоспособное, неработоспособное).

$V_0^{(sr)}$  – вектор интенсивностей переходов  $i$ -х подсистем в  $r$ -е состояния под действием своих внутренних факторов.  $V^{(sr)}$  – вектор интенсивностей переходов в  $r$ -е состояния смежных с  $i$ -ми подсистем.  $\mu^{(sr)}$  – вектор интенсивностей переходов в  $r$ -е состояния каналов связи, инцидентных  $i$ -й подсистеме.  $V^T$  – транспонированная матрица смежности системы размерности  $N \times N$  (рассматривается ориентированный граф системы).  $\tilde{A}$  – матрица инцидентности системы, в которой все положительные элементы заменены нулями.

Вывод топологических уравнений основан на рассмотрении эволюции сложной стохастической системы на элементарном (бесконечно малом) интервале времени. Уравнения для вероятностей состояний подсистем получены из уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова с учётом поглощения и восстановления реализаций.

Применение данного подхода при исследовании надёжности сложных технических систем учитывает иерархический уровень подсистем. Построенные на основе полученных топологических уравнений алгоритмы прогнозирования технического состояния достаточно просто реализуемы при наличии полученной экспериментально или аналитически информации о надёжности (состоянии) подсистем сложной системы.

**E-mail:** [upnkvyk@bntu.by](mailto:upnkvyk@bntu.by)

Поступило в редакцию 17.10.2014

## КОНСТРУКЦИЯ ВИХРЕВОЙ УСТАНОВКИ

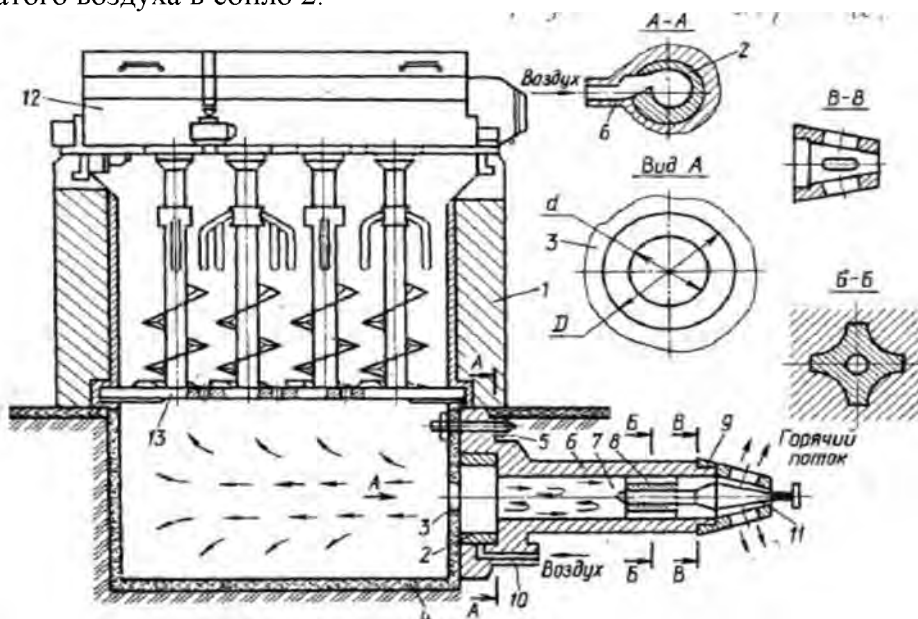
к.т.н. **Князева Г.В.**, к.т.н. **Анисимов В.М.**, **Балыко О.В.**  
*УО «Минский государственный высший авиационный колледж», г. Минск*

Правильное и качественное ведение аэродинамического и технологического режимов ращения зерна на солод на пневматических солодовнях пищевой отрасли Беларуси зависит от работы аэрирующего устройства, обеспечивающего необходимую подготовку воздуха, продуваемого через проращиваемый слой зерна высотой 1.2 метра, влажностью не менее 96-98% и температуры не выше 12<sup>0</sup>С. В существующих

солодорастиельных установках это сделать практически не возможно, так как в зимний период температура наружного воздуха очень низка, а в летний, наоборот, очень высока.

Кроме того, температура зерна, прооашиваемого в действующих установках, в следствии высокого (до 1.2м) слоя насыпи быстро повышается. Для ее выращивания приходится постоянно проводить рециркуляции воздуха уже в течении первых 1-4 суток проращивания. Содержание в рециркуляционном воздухе повышенного количества  $CO_2$  резко ухудшает аэродинамический, а, следовательно, и технологический режим, в результате чего зерно начинает медленно прорастать, биохимические процессы в нем искусственно замедляются и сдвигаются в неблагоприятную сторону. Через 3-5 суток корешки зеленогосолада становятся тонкими, быстро желтеют, сморщиваются и погибают. При этом диспергирование воды в камерах кондиционирования очень часто становится как грубой: вода вытекает из отверстия в трубке, в результате чего воздух поступает в подситовое пространство установки недостаточно увлажненным.

С целью устранения вышеуказанных недостатков предлагается (см. рисунок): на корпусе 1, где установлен солодovorошитель 12, под ситом 13 на внешней боковой стенке установить сопло 2 с внутренней поверхностью, выполненной в виде архимедовой спирали (А-А), а также диафрагму 3 (вид А). Последние крепятся в подситовом пространстве 4 при помощи болтов 5. Сопло 2, соединенное с патрубком 6, имеет внутреннюю полость 7, на противоположном конце которой установлены крестовина 8 (Б-Б) и регулирующий дроссель 9 (В-В) с иглой 11. Штуцер 10 служит для подачи сжатого воздуха в сопло 2.



Вихревая установка работает следующим образом: из сети сжатый воздух по штуцеру 10 подается в сопло 2, где, разгоняясь, образует в нем интенсивный вихрь. Вследствие перераспределения скоростей в потоке периферийные слои образующего горячего воздуха выпрямляются крестовиной 8 и выходят в атмосферу. Образующийся центральный холодный поток устремляется в противоположном направлении в диафрагме 3 и выходит в подситовое пространство 4. При помощи регулируемого дросселя 9 можно обеспечить подачу в подситовое пространство воздуха с требуемой температурой (не выше  $12^{\circ}C$ ) вне зависимости от температуры наружного воздуха.

Данная конструкция была признана Роспатентом в качестве изобретения (патент №5055743/13(010977) от 04.03.1992, г. Москва, НИИГПЭ).

**E-mail:** [krista.22@mail.ru](mailto:krista.22@mail.ru)

Поступило в редакцию 02.11.2014

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

асп. Икуас Ю.Ф.

*Белорусский национальный технический университет, г. Минск*

Рассматривается задача параметрической идентификации (оценки параметров) системы управления (СУ) на основе имеющейся априорной информации об уравнениях объекта в пространстве состояний и статистического анализа входных и выходных сигналов. Состояние СУ описывается уравнением в форме Ланжевена со случайными параметрами.

$$\dot{X}^{(s)}(t) = \varphi(X, D, s, t) + \sigma(X, D, s, t)U(t) + H(X, D, s, t)\xi(t).$$

при начальных условиях  $X^{(s)}(t_0) = X_0$ ,  $s = \overline{1, n_s}$  - номер состояния (структуры) системы. В данном случае  $D = D(t)$  - блочный вектор в общем случае случайных параметров СФУ.

Задача идентификации состоит в том, чтобы на основе экспериментальных данных определить значение вектора параметров,  $D^{(s)}(t)$  при котором разность  $\Delta D^{(s)}(t) = D^{(s)}(t) - \hat{D}^{(s)}(t)$  принимает наименьшее значение. Вектор  $D^{(s)}(t)$  представляется в виде  $D^{(s)}(t) = D_n(t) + d^{(s)}(t)$ , где  $D_n(t)$  - вектор номинальных значений параметров СФУ,  $d^{(s)}(t)$  - вектор малых отклонений параметров системы.

При такой постановке задачи производится совместное оценивание и идентификация процесса (объекта) на основе использования уравнений фильтрации, в которых вектор оценок фазовых координат  $X^{(s)}(t)$  необходимо заменить на расширенный вектор  $X_{\hat{\sigma}}^{(s)T}(t) = [X^{(s)}(t), d^{(s)}(t)]$ .

В качестве примера рассмотрен процесс идентификации параметров СУ, описываемую уравнением (1). Математическое моделирование данного примера идентификации параметров СУ производилось в среде Mathcad. Для обеспечения некоррелированности шумов процесса и измерителя, представленных в модели, интегрирование дифференциальных уравнений производилось методом Эйлера.

Представленные результаты моделирования показали работоспособность алгоритма идентификации. Расхождения в оценке параметров элементов СУ незначительны.

Для случая неизменного состояния (структуры) а также линейных уравнений объекта и измерителя алгоритм идентификации принимает вид оптимального фильтра.

E-mail: [upnkvk@bntu.by](mailto:upnkvk@bntu.by)

Поступило в редакцию 17.10.2014

## РАЗРАБОТКА СИСТЕМ БОРЬБЫ С ОБЛЕДЕНЕНИЕМ ВОЗДУШНОГО СУДНА

к.т.н. Лапцевич А.А., Сизиков С.В., к.т.н. Анисимов В.М., Сиянков А.Л.

*УО «Минский государственный высший авиационный колледж», г.Минск*

Настоящее изобретение относится к лобовым стеклам воздушных судов, в частности к борьбе с запотеванием/обледенением лобовых стекол воздушных судов.

**Назначение.** Заявленная система борьбы с обледенением лобового стекла воздушного судна обеспечивает нормируемую температуру лобового стекла от момента взлета до посадки воздушного судна без использования автотрансформатора, благодаря чему упрощается конструкция системы борьбы с обледенением лобового стекла и повышается надежность работы системы.

**Конструкция.** Система борьбы с обледенением лобового стекла воздушного судна содержит многослойное лобовое стекло, образованное склеиванием прозрачным

слоем 1 клея основного внутреннего стекла 2 с наружным стеклом 3, на внутренней поверхности которого расположены датчик 4 регулятора 5 температуры и в виде тонкой прозрачной пленки электронагреватель 6 стекла, который входом через силовой диод 7 замыкающийся контакт 8 первого контактора и автоматический выключатель 9 подключен к фазе «Л» трехфазной сети переменного тока воздушного судна, при этом к электросети 10 постоянного тока через второй автоматический выключатель 11 и три замыкающихся контакта 12, 13, 14 трехпозиционного переключателя 15 соответственно подключены: регулятор 5 температуры лобового стекла обмотка 17 первого контактора; и через конечный выключатель 18 контактирующий елевой стойкой шасси воздушного судна, обмотка 19 второго контактора, замыкающийся контакт 20 которого присоединен параллельно к выводам силового диода 7.

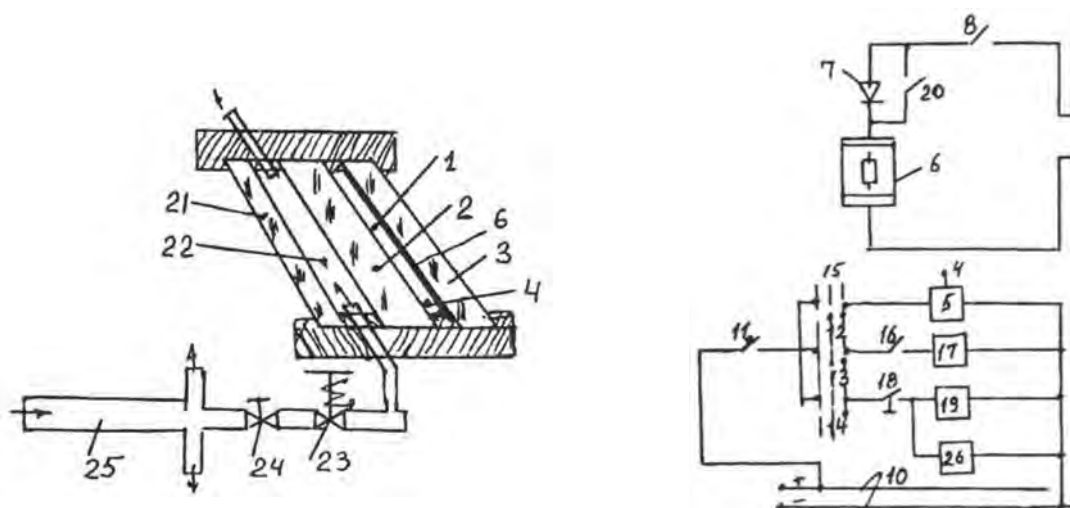
Для упрощения конструкции система борьбы с обледенением лобового стекла воздушного судна снабжена дополнительным внутренним стеклом 21, которое прикреплено к основному внутреннему стеклу 2 с образованием канала 22 для горячего воздуха, который входом подключен через электромагнитный клапан 23, регулирующий вентиль 24, к трубопроводу 25 подачи горячего воздуха к боковым стеклам кабины экипажа, а выходом сообщен с воздушной средой кабины, при этом обмотка 26 электромагнитного клапана 23 присоединена параллельно к выводам обмотки 19 второго контактора, а выход электронагревателя 6 лобового стекла подключен к фазе «В» трехфазной электросети переменного тока воздушного судна.

**Основной принцип работы.** Принцип работы заявленной модели.

Для предохранения растрескивания лобового стекла система обеспечивает обогрев стекла двумя режимами: «слабо» и «сильно». Перед полетом во время посадки пассажиров в салон пилот замыкает автоматические выключатели 9, 11 и ставит ручку трехпозиционного переключателя 15 в первое правое положение, при этом к электросети 10 постоянного тока подключается регулятор 5 температуры стекла, датчик 4 которого расположен в многослойном лобовом стекле. Система начинает обогрев лобового стекла в режиме «слабо». Если температура лобового стекла ниже 30 °С, то регулятор 5 замыкает свой контакт 16, при этом к электросети 10 постоянного тока подключается обмотка 17 первого контактора, он срабатывает и замыкает свой контакт 8. В этом случае к линейному напряжению трехфазной сети переменного тока воздушного судна через силовой диод 7 подключается электронагреватель 6 лобового стекла. Диод 7 пропускает ток в один полупериод, и лобовое стекло обогревается в режиме 2 «слабо». Контакт 8 первого контактора будет замнут до тех пор, пока температура лобового стекла не повысится до 30 °С. Далее процесс стабилизации температуры лобового стекла регулятором 5 повторяется.

После взлета в связи с уборкой шасси замыкается конечный выключатель 18, и при установке ручки трехпозиционного переключателя 15 во второе правое положение система начнет обогрев лобового стекла в режиме «сильно», так как резко возрастает охлаждение лобового стекла. В этом случае к электросети 10 постоянного тока подключается обмотка 19 второго контактора, он срабатывает и замыкается от своего контакта 20 шунтирует диод 7, а также к электросети 10 подключается обмотка 26 электромагнитного клапана 23, клапан открывается, и через регулирующий вентиль 24 горячий воздух из трубопровода 25 поступает в канал 22 между основным и дополнительным внутренними стеклами 2, 21.

Если температура лобового стекла меньше 30 °С, то регулятор 5 температуры стекла замыкает свой контакт 16, при этом первый контактор замыкает свой контакт 8 и начинается процесс нагрева лобового стекла в режиме «сильно». Так как диод 7 шунтирован контактом 20 второго контактора, то ток через нагреватель 6 протекает в оба полупериода и при линейном напряжении 208 вольт электронагреватель работает с электрической мощностью, близкой к номинальной.



Так, если номинальное напряжение электронагревателя 230 вольт, а линейное напряжение электросети 208 вольт переменного тока, то для дополнительного нагрева лобовых стекол открывают регулировочный вентиль 24 и при этом открытом электромагнитном клапане 23 изменяют расход горячего воздуха через канал 22 регулировочным вентилем 24, чтобы при температуре наружного воздуха  $-50^{\circ}\text{C}$  с учетом максимальной скорости воздушного судна регулятор 5 начал отключать электронагреватель 6 от электросети переменного тока. Когда температура лобового стекла достигнет  $30^{\circ}\text{C}$ , то первый контактор прекратит работу электронагревателя 6, при этом при открытых электромагнитном клапане 23 и регулировочном вентиле 24 через канал 22, когда воздушное судно находится в полете, будет непрерывно протекать горячий воздух, благодаря теплоте которого уменьшается частота срабатывания регулятора 5 температуры стекла, а следовательно, повышается надежность работы системы. При посадке пилот на высоте 1,0 – 1,4 километра ставит ручку трехпозиционного переключателя 15 в первое правое положение, при этом второй контактор размыкает свой контакт 20 и закрывается электромагнитный клапан 23, то есть система переходит в режим нагрева лобового стекла «слабо». При выпуске шасси размыкается конечный выключатель 18, который предназначен для продления режима «слабо» обогрева лобового стекла системой при взлете самолета.

**Недостатки.** Многие резистивные покрытия, используемые в настоящее время, питаются электроэнергией постоянного тока, которой на воздушном судне снабжаются другие системы, такие как радиоэлектронные системы. Тем не менее, некоторые резистивные пленки лучше снабжать электроэнергией переменного тока. До сих пор электроэнергия переменного тока вырабатывалась инвертором, который преобразовывал электроэнергию постоянного тока в электроэнергию переменного тока, при этом сигнал имеет синусоидальную форму.

Недостаток использования инвертора для преобразования электроэнергии постоянного тока в электроэнергию переменного тока с сигналом синусоидальной формы состоит том, что инвертор необходимо конфигурировать для выполнения указанной функции. Для того, чтобы на выходе инвертора был синусоидальный сигнал переменного тока, инвертор должен содержать некоторые компоненты, такие как фильтрующие конденсаторы и/или фильтрующие катушки индуктивности, что увеличивает вес и стоимость инвертора.

Таким образом, необходимо чтобы в системе борьбы с запотеванием/обледенением лобового стекла воздушного судна отсутствовали описанные выше и другие недостатки.

E-mail: [krista.22@mail.ru](mailto:krista.22@mail.ru)

Поступило в редакцию 11.11.2014



## **ПАМЯТИ ИГОРЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА МИКЛАШЕВИЧА**

3 июля 2013 года трагически прервалась жизнь известного белорусского исследователя доктора физико-математических наук, заведующего научно-исследовательской лабораторией динамики систем и механики материалов Белорусского национального технического университета Игоря Александровича Миклашевича, постоянного участника нашего издания. И.А. Миклашевич родился 2 июля 1963 г. в Минске. Закончил Белорусский государственный университет по кафедре теоретической физики, работал в Институте порошковой металлургии и БГПА-БНТУ.

В 1994г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ТРЕЩИНЫ У ГРАНИЦЫ СОЕДИНЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ» по специальности 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела, в которой получил нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее траекторию трещины в неоднородной среде при произвольных заданных нагрузках, а также исследовал зоны устойчивости решений этого уравнения для определенных типов сред; предложил метод расчёта энергии связи, позволяющий получить верхнюю оценку поверхностной энергии двухкомпонентных неупорядоченных систем и обосновал его эффективность; показал существование областей, в которые затруднено проникновение трещины; получил условия стохастизации траектории трещины в неоднородной среде, определил длину трещины, начиная с которой траектория трещины ведёт себя случайным образом; получил выражения для частоты периодической структуры, возникающей в зоне соединения, определил время и длину развития неустойчивости.

В 2004 по той же специальности защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему «Влияние структурной неоднородности на процессы стохастизации и регуляризации процессов деформирования и разрушения твердых сред», в которой впервые получено аналитическое выражение для локального микроскопического метрического тензора дефектного континуума в зоне вершины трещины, что позволяет из первых принципов определить уравнение траектории трещины; впервые рассмотрена теория разрывов в пространстве Финслера применительно к теории трещин, что позволило получить уравнение поверхности трещины как функцию связности континуума и тензора напряжений; впервые получены условия, налагаемые на группу операторов макроскопического деформирования; получены аналитические выражения для уравнения траектории трещины для некоторых типов неоднородных сред; получены условия на угол отклонения распространяющейся через резкую структурную границу трещины; совместно с А.В. Чигаревым условия стохастизации лучей обобщены на задачу стохастизации траектории трещины, что позволяет прогнозировать материалы с заданным характером разрушения; получено физическое обоснование фрактального характера траектории трещины, что дает возможность влиять на фрактальные параметры траектории.

Игорь Александрович – автор около сотни работ по механике разрушения, в том числе двух монографий, в которых он использовал методы современной геометрии для описания процессов деформирования и разрушения неоднородных материалов с дефектами, предполагая эффективную неевклидову геометрию в основании динамики волновых процессов в них. Стохастизация волновых процессов в таких средах приводит к важности использования понятий энтропии и самоорганизации для их теории.

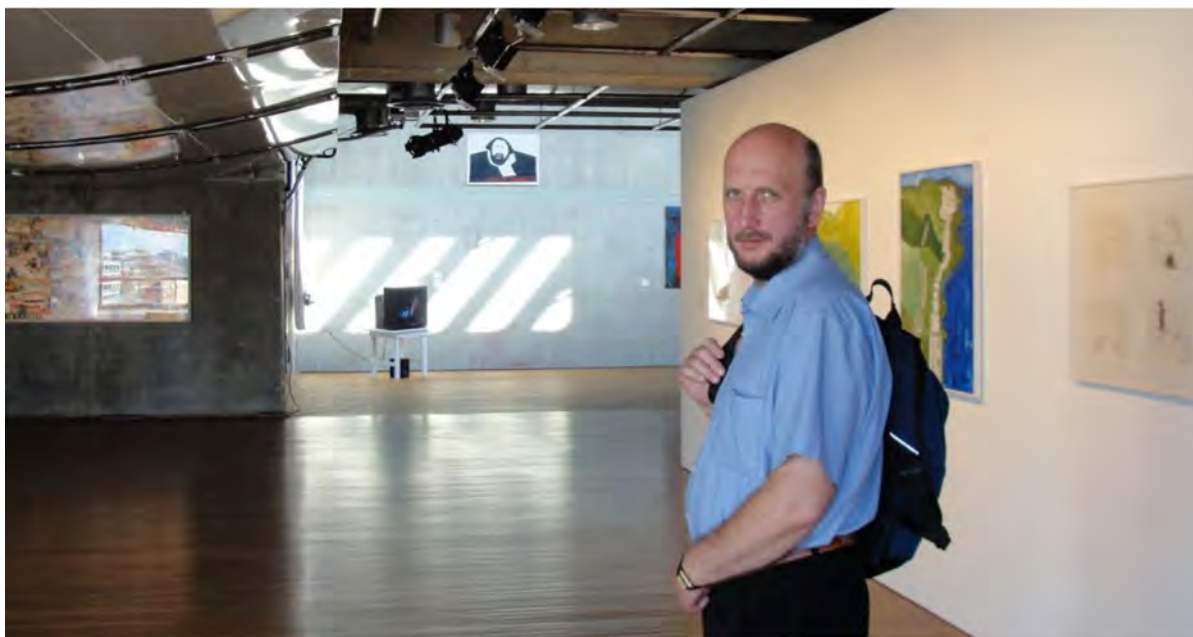
Многогранность личности Игоря Александровича проявилась в интеллектуальном синтезе на основе этих понятий таких далеко отстоящих друг от друга сфер, как механика разрушения и социодинамика, которой он посвятил много времени и усилий. Сама внутренняя необходимость этого синтеза имела истоками высокоразвитое национальное самосознание И.А. Миклашевича как представителя белорусской интеллигенции и его увлечение этнодинамикой Льва Гумилева. Еще в конце 90 гг. он в художественной форме под псевдонимом Стаха Дедича в книге «Эпилог» опубликовал не слишком оптимистичный прогноз развития белорусского этноса, с которым внутренне сам не мог смириться. Увлечение социодинамикой и теорией самоорганизации было попыткой поиска некоторой альтернативы.

Социодинамика в наиболее развитой форме представлена в настоящее время работами немецкой школы проф. Вайдлиха, с которым И.А. был лично знаком. Они основаны на

вероятностном представлении динамики чисел заполнения фиксированного набора групп индивидуумов данного социума, но наиболее интересное событие - формирование новых групп – остается вне рамок этого подхода. Здесь начинается область теории многоуровневых иерархических систем в форме, предложенной белорусским математиком С.И.Новиковой, теории, которую в более традиционной форме нестандартного анализа применили к социодинамике И.А. Миклашевич и В.В. Баркалин. К сожалению, несколько попыток получить финансирование на продолжение этих работ не увенчались успехом. Тем не менее, иерархический подход к моделированию сложных систем, в практическую реализацию которого внес существенный вклад И.А., развивается в Беларуси достаточно успешно. Как представитель Беларуси в Европейской Грид-Инфраструктуре (EGI) и член Исследовательского комитета по социкибернетике (RC51) Международной социологической ассоциации он смог продвинуть инфраструктурные проекты по грид-технологиям в программе FP7 ЕС, программе НАТО Science for Peace and Security и программы трансграничного сотрудничества Литва-Латвия-Беларусь, в рамках которых удалось создать грид-инфраструктуру БНТУ и оснастить ее суперкомпьютерным оборудованием. Эта инфраструктура используется не только для иерархического моделирования сложных систем, включая детали авиационной техники, беспилотные летательные аппараты, реактивные микродвигатели, наноструктурированные материалы и наносистемы, но и для поддержания корпуса белорусского языка и системы ранней диагностики меланомы кожи. Представляется, что развитие этих работ способствовало бы реализации мечте Игоря Александровича о создании виртуального банка белорусской истории, языка и культуры.

Еще одна сторона личности Игорь Миклашевича – его спортивные интересы. Он - кандидат в мастера спорта по пешему туризму, участник многих сложных пеших и горных путешествий по Тянь-Шаню, Памиру, Кавказу, Аконкагуа – самую высокую гору Южной Америки, над которой теперь развивается флаг БНТУ.

Память об Игоре Александровиче Миклашевиче навсегда сохранится в памяти его друзей, коллег и единомышленников. Люди в его присутствии всегда ощущали себя талантливее, увереннее и добрее.



На протяжении 15 лет научно-педагогическая деятельность И.А. Миклашевича была связана с кафедрой теоретической механики БНТУ, начиная с поступления в аспирантуру и заканчивая докторантурой и успешной защитой диссертации. Сотрудники кафедры, знавшие Игоря Александровича, сохраняют память о нем как коллеге, друге, скорбят о его гибели.

**Коллектив лаборатории ДСиММ НИЧ БНТУ  
и кафедры «Теоретическая механика» БНТУ  
Редакция журнала ТПМ**

## Некролог. Круподеров Андрей Валентинович



9 июля 2014 года трагически прервалась жизнь талантливого ученого и замечательного человека, кандидата физико-математических наук Круподерова Андрея Валентиновича.

Андрей Валентинович Круподеров родился 20 декабря 1983 года в Хабаровском крае. Он закончил с золотой медалью школу в деревне Рясна Каменецкого района Брестской области. Неоднократно являлся чемпионом и призером районных и областных соревнований в беге, а в 1999 году выиграл Малоритский международный марафон.

В 2001 году Андрей Валентинович успешно сдал вступительные испытания, поступил на математический факультет Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина. В студенческие годы он проявлял незаурядный интерес к математическому анализу и его приложениям, был призером республиканской студенческой олимпиады по математике, вел активную спортивную жизнь. В 2006 г. Андрей Валентинович с отличием окончил БрГУ имени А.С. Пушкина по специальности «Математика».

С 1 сентября 2006 года по 30 ноября 2010 года Круподеров А.В. проходил обучение в очной магистратуре, а затем в аспирантуре на кафедре теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета. 24 декабря 2010 г. в Совете по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете Андреем Валентиновичем успешно защищена диссертация «Решение задач геомеханики на основе фундаментальных решений механики сплошных сред» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Во время обучения в аспирантуре стал лауреатом стипендии Президента Республики Беларусь для аспирантов.

После защиты кандидатской диссертации результативность научной деятельности А.В. Круподерова значительно возросла. Работая в должности заведующего лабораторией Белорусского государственного университета, активно занимается разработкой механико-математических моделей пространственного напряженно-деформированного состояния массива горных пород. Полученные результаты сделали возможным проведение мероприятия по эффективной и безопасной добыче полезных ископаемых на новых участках отработки Старобинского месторождения калийных солей. Данные разработки были оценены на государственном уровне: Андрей Валентинович стал лауреатом стипендии Президента Республики Беларусь, присуждаемой талантливым молодым ученым.

Андрей Валентинович прожил короткую, но очень яркую жизнь, всегда имел активную позицию, его отличали подлинная интеллигентность, высокий профессионализм, оптимизм, он ценил дружбу и был замечательным сыном, мужем и отцом двоих детей. Жизнь Андрея Валентиновича – яркий пример беззаветного служения избранному делу, верности своим идеалам и убеждениям.

Светлая память о Круподерове Андрее Валентиновиче навсегда останется в наших сердцах.

**Друзья, коллеги по работе  
Редакция журнала ТПМ**

## РЕФЕРАТЫ

УДК 539.374

Бондарь В.С., Данишин В.В. **Термовязкопластическое циклическое деформирование и разрушение материалов** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 13-19. В статье рассматриваются основные положения и уравнения современной теории термовязко-пластичности (неупругости). Выделяются материальные функции, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций, замыкающих теорию термо-вязкопластичности. Иллюстрируются возможности теории термовязкопластичности по адекватному описанию процессов деформирования и разрушения конструкционных сталей и сплавов при разнообразных режимах термосилового циклического нагружения. – Ил. 6. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.3

Старовойтов Э. И. Савицкий Д.М. **Повторное знакопеременное нагружение упругопластических тел в нейтронном потоке** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 20-28. Рассмотрено влияние нейтронного облучения на упругопластическое деформирование твердых тел при циклическом силовом воздействии. На основе экспериментальных данных предложена формула радиационного упрочнения. Доказана теорема о переменных нагружениях. Приведено аналитическое решение и численные результаты для трехслойного металлополимерного стержня. – Ил. 4. Библиогр. – 10 назв.

УДК 624.042.12:534.1

Мищенко А.В., Немировский Ю.В. **Динамический анализ гибридных стержневых систем** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.29-37. На основе метода Бубнова-Галеркина приведено решение начально-краевой задачи динамического расчета гибридного вязкоупругого стержня. При учете осредненного сдвига и взаимодействия с внешней средой сформулированы основные группы уравнений: движения, физические и кинематические соотношения. Сформулированы матричные уравнения динамики гибридных стержневых систем. – Библиогр.–5назв.

УДК 539.3

Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. **Точное решение трехмерной задачи термоупругости для цилиндра** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.38-44. В работе получено уравнение относительно объемной деформации с учетом температурных членов, представлены интегрируемые комбинации уравнений термоупругости в перемещениях. Построены точные решения уравнений трехмерной задачи термоупругости в предположении линейной зависимости температуры и перемещений вдоль оси цилиндра. Рассмотрен пример. – Библиогр. – 4 назв.

УДК 620.172 – 620.173 (088.8)

Ошинокова О.А. **Экспериментальное обеспечение метода сравнительного анализа механических свойств материалов** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.45-48. Разработаны конструкции реверсоров, которые позволяют снять погрешности сравнительных испытаний при растяжении, сжатии, кручении в любой последовательности в режимах статического нагружения, ползучести и релаксации. – Ил. 2. Библиогр. – 2 назв.

УДК 518:517.5:536.2

Мелешко И.Н., Чигарев А.В., Ширевель П.И. **Приближенное представление полилогарифмами одной задачи теории теплопроводности для круга при граничных условиях второго рода** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.49-52. Получено приближенное представление второй основной задачи теории теплопроводности (задачи Неймана) для уравнения Лапласа в единичном круге. Равномерная оценка погрешности приближенной формулы позволяет проводить вычисления с заданной точностью. – Табл. 1. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3

Янковский А.П. **Равнонапряженное армирование поперечно изгибаемых упругих пластин, подчиняющихся гипотезам Тимошенко** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.53-60. В рамках гипотез теории Тимошенко сформулирована задача равнонапряженного армирования поперечно изгибаемых упругих пластин волокнами постоянного поперечного сечения. Выполнен качественный анализ соответствующей системы разрешающих уравнений и граничных условий. Показано, что система разрешающих уравнений является системой квазилинейных уравнений смешанно-составного типа, которой соответствуют нелинейные статические граничные условия, порождающие возможность существования нескольких альтернативных решений поставленной задачи. В осесимметричном случае методом пристрелки численно решена двухточечная нелинейная задача о равнонапряженном армировании кольцевой пластины. Сравниваются результаты расчетов по классической теории и теории Тимошенко.–Ил. 2. Библиогр.– 13 назв.

УДК 539.374

Леоненко Д.В. **Собственные колебания трехслойного стержня на упругом инерционном основании Винклера**//ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 61-64. В статье рассмотрены собственные колебания трехслойного стержня на упругом инерционном основании. Для описания кинематики несущих слоев приняты гипотезы Бернулли. Заполнитель жесткий, сжимаемый. Реакция основания описывается инерционной моделью Винклера. Получена система дифференциальных уравнений движения и ее точное решение в перемещениях. Приведены численные результаты для трехслойного стержня. Ил. 3. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3:534.1

Поленов В.С. **Динамическое деформирование насыщенной жидкостью наследственно упругой пористой среды** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.65-69. Получены аналитические выражения для определения скорости, коэффициента затухания и тангенса угла механических потерь поперечных и продольных звуковых волн, распространяющихся в насыщенной жидкостью упругой пористой среде. На примере продольной звуковой волны получены числовые характеристики, когда упругая среда описывается функцией Ю.Н Работнова. Библиогр. – 8 назв.

УДК 531.3

Чигарев А.В., Борисов А.В. **Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 70-81. Проведена постановка задачи обобщения дифференциальных уравнений движения стержневых механических систем антропоидного типа. Получены рекурсивные зависимости, позволяющие записать непосредственно уравнения подобной механической систем с произвольным количеством звеньев и переменным моментом инерции звена. – Ил. 4. Библиогр. – 5. назв.

УДК 539.4:620.2+519.621.64

Скойбеда А.Т., Капустя П.П., Шпаковский И.Т., Гужов Д.С. **Прочностная доводка гидромеханических коробок передач в условиях стендовых испытаний** //ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 82-87. Изложены результаты стендовых испытаний гидромеханической коробки передач с измененной конструкцией турбинного вала. – Ил. 7. Табл. 1.

УДК 531.662

Мухутдинов Р.Ф., Шигабутдинов Ф.Г. **Моделирование нелинейного выпучивания цилиндрической оболочки со стрингерами при продольном ударе с учетом неосесимметричности деформирования** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 88-93. В статье рассматриваются неосесимметричные движения цилиндрических оболочек, имеющих дискретное изменение толщины по фиксированной окружной координате по всей длине оболочки, при продольном ударе с учетом волнового характера передачи продольных деформаций по длине. Исследуется влияние стрингеров на картину прогибов. – Ил. 4. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.3

Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Сахоненко С.В., Неумержицкая Е.Ю. **Моделирование поведения препрега при проколе в нем круглого отверстия** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 94-99. Разработана математическая модель поведения препрега при проколе в нем круглого отверстия. – Ил. 2. Библиогр. 8.

УДК 621.01

Бокун Г.С., Гапанюк Д.В., Савинко А.А., Савинко П.А. **Разработка и применение компьютерной мультимедийной работы по проектированию зубчатой передачи в курсе теории механизмов и машин** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 100-103. Представлен опыт кафедры теоретической механики по внедрению компьютерных методов при проектировании механизмов во время обучения студентов по курсу теории машин и механизмов. Дано описание мультимедийной компьютерной работы, используемой для проектирования зубчатой передачи. – Ил. 2. Библиогр. 5.

УДК 539.3

Журавков М.А., Чумак Н.Г., Мартыненко И.М. **Компьютерное моделирование деформаций нанотрубок при различных типах нагружения** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 104-109. В работе на основе компьютерного моделирования выполнено исследование напряженно-деформированного состояния одна и пятислойных углеродных нанотрубок при индексе хиральности (5,5) при различных типах их деформирования (осевом растяжении, сжатии, поперечном изгибе). Рассчитан коэффициент напряжения, характеризующий запас прочности нанотрубок. – Ил. 17. Табл. 1. Библиогр. – 6 назв.

УДК 539.3

Мустафа Эсури, Бенур Маатуг, Халид Курмажи **Определение и анализ напряжений и деформаций в структуре треугольного крыла** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.110-115. Исследуется прочность ответственных элементов конструкций современного авиационного строения. Рассматривается деформирование крыла сверхзвукового самолета. Крыло нагружается системой равномерно распределенных вертикальных сил, материал принят однородным и изотропным. С помощью метода конечных элементов численно исследуется НДС ребра крыла. Представлено сравнение полученных численных результатов с результатами натуральных испытаний. Экспериментальные и численные результаты хорошо согласуются (качественно и количественно). – Ил. 6. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3+621.039.5

Ширвель П.И. **Результаты моделирования неосесимметричного НДС длинных цилиндрических тел при неоднородном нагреве и нейтронном облучении** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 116-125. Выполнено виртуальное моделирование 2D( $r, \theta$ ) деформирования односвязного цилиндрического тела в условиях терморadiационных воздействий. Установлены особенности деформирования конструкционных материалов с учетом зависимости их характеристик от уровней действующих температур и облучения, эффектов радиационного формоизменения и терморadiационной ползучести. Исследовано влияние окружной неравномерности на неосесимметричное НДС для различных значений амплитуд температур. В качестве модельного тела рассмотрен сплошной цилиндр без внутренних источников тепла. Свойства модельного тела соответствуют нержавеющей аустенитной стали (AISI 316). Полученные результаты могут быть использованы при определении и анализе НДС, а также при прогнозировании ресурса экстремально нагруженных конструктивных элементов в машиностроении и энергетике. – Ил. 8. Библиогр. – 21 назв.

УДК 539.3

Адищев В.В., Кучеренко И.В., Грачева М.С. **Моделирование напряженно-деформированного состояния бетона с использованием аналитического и численного подходов** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.126-130.

В статье предлагается моделировать напряженно-деформированное состояние структурно-неоднородного материала с использованием аналитического и численного подходов. Использование аналитического подхода позволяет определять осредненные физические характеристики бетона как квазизоднородного анизотропного материала. ПК ANSYS дает качественную картину распределения напряжений и деформаций и позволяет выявить локальные зоны начала разрушения. – Ил. 4. Табл. 2. Библиогр. – 6 назв.

УДК 539.3+681.7:068

Веремейчик А.И., Сазонов М.И., Хвиевич В.М., Цыганов Д.Л. **Исследование теплообмена между плазменной дугой и поверхностью реза металлического листа** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.131-135. Для изучения особенностей теплообмена дуги с поверхностью полости реза разработана и создана экспериментальная плазменная установка, которая позволяет моделировать технологический процесс резки металлов. Проведены исследования распределения плотности тока и тепловых потоков вдоль полости реза металлического листа при различных способах подключения плазмотрона. – Ил. 3. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3

Антонюк В.Е., Ярошевич Е.П. **Косоугруженный изгиб дисков и динамическая стабилизация** // ТПМ. Выпуск 30.2015.С.136-139. В статье обоснована возможность использования схемы косоугруженного изгиба диска при использовании динамической стабилизации для дисков с переменным сечением. – Ил. 2. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3

Косых Э.Г. **Устойчивость стержня сжатого распределенной нагрузкой переменной интенсивности** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.140-145. Рассмотрена устойчивость сжатых стержней под действием неравномерно распределенной нагрузки. Приведено аналитическое решение и численные результаты для двух видов граничных условий. Показано, что поправки в известное решение составляют до 24 %. – Ил. 2. Библиогр. – 15 назв.

УДК 539.3/6:621.01

Омаров Т.И., Гончарова И.А., Сибилькова Н.П., Алысбаева Б.М. **Определение крутильной жесткости ступенчатого вала** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.146-149. В статье описаны случаи, когда целесообразно ступенчатый вал заменить гладким валом эквивалентной жесткости из условия равенства потенциальных энергий приводимой и приведенной систем. – Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 681.3

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. **Кинематический и динамический расчет манипулятора для обрабатывающего центра** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.150-154. Исследуемый манипулятор имеет 4 степени свободы. Для определения кинематических характеристик решается прямая задача кинематики манипулятора с использованием метода преобразования координат в матричной форме. Далее для нахождения обобщенных движущих сил составлена система из 4 уравнений Лагранжа 2-

го рода, соответствующих принятому закону изменения обобщенных координат и обобщенных скоростей. Для определения динамических нагрузок в кинематических парах (реактивных сил и моментов) выполнен кинестатический силовой анализ манипулятора. На основании полученных зависимостей выполнена программная реализация кинематического и динамического анализа рассмотренного манипулятора. – Ил. 3. Библиогр. – 4 назв.

УДК 532.516

Конон П.Н., Жук А.В. **Уравнения эволюции слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.155-160. Получена система дифференциальных уравнений в частных производных для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя конечной толщины при умеренных и больших числах  $Re$  с учетом сил инерции. Показано, что при пренебрежении инерционными членами из полученной системы выводится уравнение Пушчаева для тонкой пленки. Разработан численно-аналитический метод и решена нестационарная задача о движении плоского слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволил проследить за механизмом эволюции поверхности слоя при  $Re \gg 1$ . – Ил. 3. Библиогр. – 6 назв.

УДК 681.5.09

Гулай А.В., Зайцев В.М. **Программное управление исполнительными органами в интеллектуальных мехатронных системах** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.161-168. Рассмотрена обобщенная схема организации автоматического управления исполнительными органами в интеллектуальных мехатронных системах. Показаны особенности построения прямой цепи управления и цепи обратной связи при введении в их состав процессоров цифровой обработки сигналов. Проанализированы условия информационной совместности взаимодействующих элементов интеллектуальной мехатронной системы. – Ил. 1. Библиогр. – 6 назв.

УДК 372.863

Новицкий П.М., Нортон Т., Кларе Д., Питс С. **Преподавание мехатроники при подготовке сельскохозяйственных инженеров для развития технологии точного земледелия** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.169-172. Обоснована необходимость преподавания мехатроники при подготовке сельскохозяйственных инженеров, рассмотрен опыт Университета Харпер Адаме (Ньюпорт, Великобритания) в преподавании, проанализированы возможности преподавания мехатроники и смежных дисциплин в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия», Горьки. – Ил. 1. Библиогр. – 3.

УДК 539.3

Шилько С.В. **Эластопласты: модели механического поведения в демпфирующих системах** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.173-177. Обсуждается применение эластопластов в качестве материала демпфирующих элементов амортизаторов удара и колебаний. Рассматриваются упругие, вязкоупругие и вязкопластические модели указанных материалов. Анализируются факторы, влияющие на диссипацию энергии при внешнем и внутреннем трении. – Ил. 4. Библиогр. – 11 назв.

УДК 531.01

Гончаров М.В., Кончина Л.В., Куликова М.Г., Романова О. **Исследование колебательных движений мехатронных систем в пищевой промышленности** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.178-180. В работе рассматриваются колебательные движения ленты конвейера, возникающие при движении неравномерно распределенного груза по ленте. – Ил. 2. Библиогр. – 3 назв.

УДК 621.762:539

Хмельев А.А., Орсич Ю.В. **Теоретический анализ ударной вязкости** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.181-183.

Рассмотрены взаимосвязи сертификатов механических характеристик материалов и их твердости со значениями поглощенной энергии (ударной вязкости) на основе диаграмм хрупковязкого состояния. Приведены теоретические формулы оценки ударной вязкости пригодные для образцов любой формы и размеров. – Ил. 2. Библиогр. – 2 назв.

УДК 539.3

Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В., Хвиевич В.М. **К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.184-189.

В статье построены интегральные уравнения плоской краевой задачи неоднородной термоупругости. Разработан алгоритм численного решения задачи. Составлена FORTRAN-программа и реализован тестовый пример. Достоверность алгоритма проверена путем сравнения полученных результатов с известным аналитическим решением. – Ил. 1. Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.3

Акимов В.А., Гончарова С.В. **Операторный метод решения первой основной плоской задачи теории упругости** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.190-192.

В статье представлен алгоритм построения новых решений бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости. Приведены конкретные примеры построения бигармонических полиномов четвертой, пятой, шестой и седьмой степени. – Библ. – 2 назв.

УДК 539.37

Гавриленко С.Л. **Аттестация механико-математических моделей полимерных материалов на примере нелинейной вязкопластической модели** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.193-199. Представлен алгоритм аттестации механико-математических моделей полимерных материалов, который апробирован для нелинейной вязкопластической модели, с учетом значительного предела текучести и скоростной чувствительности. По результатам испытаний полимерного материала и композита на сжатие и растяжение проведена идентификация и верификация модели. Установлено, что методика является устойчивой к вариации экспериментальных данных без использования процедуры регуляризации. – Ил. 1. Табл. 1. Библиогр. – 4 назв.

УДК 629.3.023 Вихренко Д.В., Пацкевич Г.А. **Динамический анализ каркаса платформы спортивного грузового автомобиля в системе конечно-элементного анализа MSC/ NASTRAN** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.200-206.

Рассмотрена виброагруженность платформы спортивного грузового автомобиля MA3-5309RR, предназначенного для участия в соревнованиях по ралли-рейдам. Выполнен расчет собственных частот колебаний каркаса платформы на раме автомобиля с использованием системы конечно-элементного анализа MSC/Nastran. По результатам расчета собственных частот выбран способ оценки динамического поведения конструкции, а именно гармонический анализ вынужденных колебаний в частотной постановке в диапазоне до 100 Гц, определен способ задания нагрузочного воздействия на исследуемую структуру. На основе расчетных исследований предложено конструкция задней дуги каркаса, позволяющая существенно снизить напряжения в опасных зонах без увеличения массы конструкции. – Ил. 4. Библиогр. – 2 назв.

УДК 621.039.7

Куликов И. С., Каменев А.Я., Климова Л.А., Ширвель П.И., Глембоцкий А.В. **Использование вязкой композиции для очистки металлических поверхностей оборудования АЭС** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.207-209. Приводятся данные о состоянии разработок в указанной области на настоящее время. На основе собственных исследований и разработок предложена новая высокоэффективная, невымывающаяся, вязкая композиция. В работе приводятся данные об опыте ее использования для очистки поверхности ме-

таллов от окисления, ржавчины и многих видов загрязнения, а так же о состоянии металлической поверхности после воздействия пасты. – Библиогр. – 3 назв.

УДК 621.039.7

Каменев А.Я., Куликов И.С., Климова Л.А., Ширвель П.И., Левчук А.В. **Применение электролитно-плазменной полировки при дезактивации поверхности нержавеющей и углеродистой стали** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.210-212.

Для дезактивации поверхности оборудования АЭС предложен метод электролитно-плазменной полировки. Метод также подходит для очистки поверхности металлов и сплавов от продуктов коррозии, окисления с эффектом полировки. Описан метод электролитно-плазменной полировки. Получены данные о влиянии состава металлов, их структуры на чувствительность материалов к растрескиванию, питтингообразованию, межкристаллитной коррозии. – Ил. 1. Библиогр. – 3 назв.

УДК 621.8

Куликова М.Г., Кончина Л.В., Толкова Т.С. **Технические решения проектирования оборудования для автоматизации водоподготовки** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.213-215. В работе представлена конструкция аппарата для обессоливания воды методом вымораживания. Описаны преимущества рассматриваемой технологии, определены механические параметры представленной конструкции. – Ил. 2. Библиогр. – 2 назв.

УДК 539.4:620.2

Докукова Н.А., Кафтайкина Е.Н., Конон Н.П. **Сравнительные характеристики пяти типов виброамортизаторов** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.216-222. Представлены основные типы современных виброизолирующих устройств, встречающихся в машиностроении; изучены соответствующие им динамические схемы; линеаризованы и исследованы их математические модели; сопоставлены результаты численных расчетов с экспериментальными данными, приведенными в научной литературе; представлен новый вид амортизатора из патента на полезную модель авторов, сравнены расчетные характеристики с известными основными типами виброамортизаторов, показаны его преимущества по коэффициенту передачи усилий на виброизолируемый объект и по коэффициенту поглощения энергии. – Ил. 6. Библиогр. – 6 назв.

УДК 626.86002.51: 62.868.001.4

Балицкий В.А. **Виброинерционные приводы мобильных машин** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.223-225. В статье показана принципиальная возможность создания безреактивных виброинерционных приводов. – Ил. 5. Библиогр. – 3 назв.

УДК 531.312.1

Локтионов А. В. **Кинестатический метод расчета уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.226-229. Предложен кинестатический метод расчета уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения с учетом сил тяжести ползуна и шарика. Для расчета реакции направляющих ползуна рассматриваемой механической системы использована теорема о движении центра масс. Получены уравнение свободных колебаний эллиптического маятника и закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника. – Ил. 1. Библиогр. – 3 назв.

УДК 621.835-41:514.764

Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. **Рациональные параметры колесно-шагающего движителя, перемещающегося по ступеням** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.230-235. Описана методика расчета рациональных параметров колесно-шагающего движителя при его движении по ступеням лестницы и по плоской поверхности. Данная методика применима при проектировании средств передвижения для лиц с ограниченными возможностями. – Ил. 2. Табл. 4. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3+539.4

Холодарь Б.Г. **О геометрическом представлении девиаторной деформации** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.236-242. Построена диаграмма, связывающая величины шаровой и девиаторной компонент деформаций. Предложен критерий перехода материала в пластическое состояние (критерий максимального формоизменения). Полученные результаты способствуют углублению представлений о деформировании материала за пределом текучести. – Ил. 6. Библиогр. – 5 назв.

УДК 534.015.1, 62.137

Петровский А.Л., Чигарев А.В. **Влияние коэффициентов жесткости и демпфирования на колебания системы с двумя степенями свободы** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.243-249.

В статье описан метод анализа осевых колебаний центробежной техники с вертикальным расположением вала на примере системы с двумя степенями свободы. Проведена оценка влияния коэффициентов жесткости и демпфирования на вынужденные колебания с вязким сопротивлением двух-массовой системы. – Ил.7. Табл. 3. Библиогр. – 6 назв.

УДК 519.876.52

Громыко О.В., Мирейко Е.В. **Автоматизированный подбор гленоидного адаптера для резекции поврежденной части суставной впадины лопатки** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.250-255. Представлен автоматизированный выбор гленоидного адаптера для резекции поврежденной части суставной впадины лопатки, включает в себя создание 3-D CAD модели сустава на основе компьютерных томографических снимков и 3-D модель гленоидного адаптера. – Ил.4. Табл. 2. Библиогр. – 9 назв.

УДК 539.3

Яровая А. В., Поддубный А. А. **Механико-математическая модель деформирования неупругой трехслойной балки, частично опертой на упругое основание** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.256-262. Рассмотрен изгиб трехслойной балки под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок при неполном контакте с упругим основанием. Наружные не-сущие слои упругопластические, наполнитель – нелинейно упругий. Выведена система дифференциальных уравнений равновесия, получено ее аналитическое решение в итерациях, выписаны граничные условия и условия сопряжения на границах участков. Проведено сравнение числовых значений перемещений и напряжений для упругой и неупругой балок. – Ил. 1. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3

Шемет Л.А., Щербаков С.С. **Моделирование трещиноподобного повреждения для различных эквивалентных напряжений** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.263-269. В работе представлены результаты компьютерного моделирования распространения трещиноподобного повреждения во времени для различных эквивалентных напряжений. Моделирование проводилось на основе модели деформированного твердого тела с опасным объемом путем удаления опасных площадей на каждом шаге нагружения. Представлены зависимости коэффициента интенсивности напряжений от длины трещиноподобного повреждения, величины опасной площади и их приращений для различных эквивалентных напряжений. – Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.3:531.2.001:621.81

Мартыненко Т.М., Пранкевич С.А., Скляр О.Н. **Соотношения оптимального проектирования мягких оболочек в плоской постановке** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.270-274. В статье приведена математическая теория определения напряженно-деформированное состояние оболочки с учетом нелинейных связей как между усилиями и деформациями (физическая нелинейность), а так же и между деформациями и перемещениями (геометрическая нелинейность). – Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.4:620.2

Докукова Н.А., Кафтайкина Е.Н., Конон Н.П. **Сравнительные характеристики пяти типов виброамортизаторов** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.275-281. Представлены основные типы современных виброизолирующих устройств, встречающихся в машиностроении; изучены соответствующие им динамические схемы; линеаризованы и исследованы их математические модели; сопоставлены результаты численных расчетов с экспериментальными данными, приведенными в научной литературе; представлен новый вид амортизатора из патента на полезную модель авторов, сравнены расчетные характеристики с известными основными типами виброамортизаторов, показаны его преимущества по коэффициенту передачи усилий на виброизолируемый объект и по коэффициенту поглощения энергии. –Ил. 6. Табл. 1. Библиогр. – 6 назв.

УДК 539.3

Тжевичински Т., Стахович Ф., Босьяков С., Рогозин С. **Исследование контактного взаимодействия и состояния трения стальных листов с помощью контактного трибометра типа штырь-диск** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.282 – 287. Представлен способ определения модели анизотропного контактного взаимодействия на основе данных, полученных в ходе испытания листового металла с помощью трибометра типа штырь-диск. Значение коэффициента трения измерялось как функция углового положения по отношению к направлению прокатки стального листа. Фрикционные исследования, проводились для холоднокатаного стального листа толщиной 1 мм. Модель построена и реализована в конечно-элементной среде с помощью программы *ABAQUS*. Модель анизотропного трения хорошо согласуется с экспериментальными результатами. Численно исследована задача полусферического контакта в упругопластической плоскости. Установлено, что изменение изотропного контактного взаимодействия в анизотропных условиях незначительно влияет на изменение распределения эквивалентной пластической деформации в зоне контакта. – Ил. 6. Табл. 1. Библиогр. – 15 назв.

УДК 624.131+539.215

Алтынбеков Ш.А. **Об одной многопараметрической математической модели процесса консолидации неоднородных грунтов** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.288-291. Рассматривается многопараметрическая модель консолидации неоднородных грунтов. Показано, что осадка во времени уплотняемого неоднородного грунта меньше, чем у однородного (в зависимости от их физико-механических свойств). Влияние коэффициента фильтрации, деформации ползучести, а также параметров ползучести к процессу уплотнения грунтов надо учитывать только в начальный момент времени. Показано, что при больших значениях времени их влияние на процесс уплотнения грунтов становится незначительным. – Библиогр. – 7 назв.

УДК 539.3

Маевская С.С. **Анализ собственных частот осесимметричных поперечных колебаний круглой трехслойной магнитореологической пластины** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С.292-296. Рассматриваются свободные осесимметричные поперечные колебания круглой трехслойной магнитореологической пластины. Проводится анализ влияния внешнего стационарного магнитного поля на собственные частоты и декремент колебаний, соответствующие различным модам пластины. – Ил. 2. Библиогр. – 13 назв.

УДК 517.958: 539.3; 539.375.6; 541.43/49

Журавков М.А., Щербаков С.С., Насань О.А. **Объемная повреждаемость динамически нагруженных элементов режущего инструмента сельскохозяйственного комбайна** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 297-305. Проведено конечно-элементное моделирование динамического напряженно-деформированного состояния режущего инструмента сельскохозяйственного комбайна. Для режущих областей ножа и противорежущего бруса получены распределения контактного давления, эквивалентных по Мизесу напряжений, а также разработана методика оценки объемной повреждаемости. Проведен сравнительный анализ влияния комбинаций материалов (стали и высокопрочного чугуна ВЧГГ) ножа и противорежущего бруса на величины опасных объемов и интегральной повреждаемости данных элементов системы. –Ил. 4. Табл. 3. Библиогр. – 4 назв.

УДК 531; 539.3; 620.3

Щербаков С.С., Сосновский Л.А. **Электромагнитно-силовой метод управления нанообъектами**//ТПМ. Выпуск 30.2015.С.306-310. Предложен метод управления наноразмерными объектами посредством токопроводящих посредников. В качестве последних могут быть использованы как имеющиеся инденторы атомно-силовых микроскопов, так и токопроводящие или заряженные частицы размером, сравнимых с размерами управляемых объектов. Представлено решение трехмерной модельной задачи о захвате несущим электрический заряд посредником нанообъекта, переносе их в точку доставки под действием электрического поля и сбросе нанообъекта в данной точке. –Ил. 2.

УДК 60.001.11:531.8(076.5)

Кудин В.В., Авсевич А.М., Кудин М.В., Иванов А.Ю. **Моделирование колебательных процессов при разработке виброзащиты машин** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 311-314. Представлено математическое и компьютерное моделирование колебательного процесса объекта виброзащиты при внешнем силовом воздействии. Рассмотрены частные случаи компоновки элементов виброзащиты. Приведены критерии эффективности виброзащиты в зависимости от частотных диапазонов. – Ил. 4. Библиогр. 3.

УДК 531/534:[57+61]

Славашевич И.Л., Михасев Г.И. **Локальные формы колебаний кольцевой пластины с неконцентрическим круговым вырезом** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 315-320. В работе исследованы свободные колебания кольцевой пластинки с неконцентрическим вырезом, жестко заземленной по обоим контурам. Формальные асимптотические решения были построены с использованием метода Говестика и соответствуют формам колебаний без узловых диаметров, а также локализацией прогибов в окрестности некоторого «слабого» радиуса. – Ил. 1. Табл. 1. Библиогр. 5.

УДК 531.10:621.01

Авсевич А.М., Пронкевич С.А., Шашко А.Е. **Расчет распределения контактных давлений по методу штаермана при динамическом анализе механизмов** // ТПМ. Выпуск 30. 2015. С. 321-324. В работе описан алгоритм расчета распределения контактных давлений по поверхностям вращательных кинематических пар. Предложен критерий оценки относительной интенсивности изнашивания механизма с определенными конструктивными параметрами. Описанный алгоритм вместе с программой расчета сил реакций в кинематических парах позволяют производить оптимизацию конструктивных параметров механизмов.– Библиогр. 2.



## ABSTRACTS

**UDC 539.374 Bondar V.S., Danshin V.V. Thermo-viscous plastic cyclic deformation and destruction of materials // TAM. – 2015. – Issue 30. – P. 13-19.** In the article explains the basic concepts and equations of the modern theory of thermo-visco plasticity (anelasticity). Allocated material functions, formulates the basic experiment and method of identification of the material functions, closing the theory of thermo-visco plasticity. Illustrates the possibilities of the theory of thermo-visco plasticity adequate description of the processes of deformation and destruction of structural steels and alloys, in a variety of modes thermal power cyclic loading. – **Fig. 6. Ref.: 9 titles.**

**UDC 539.3 Starovoitov E.I., Savitsky D.M. Cyclic loading elastoplastic bodies in the neutron flux // TAM. – 2015. – Issue 30. – P. 20-28.** The influence of neutron irradiation upon elastoplastic deformation of components of constructions under cyclic force disturbance is considered. On basis of experimental data the formula of irradiation reinforcement is suggested. The theorem about variable loading is proved. Numerical and analytical solution for sandwich metal-polymeric beam is adduced. – **Fig. 4. Ref.: 10 titles.**

**UDC 624.042.12:534.1 Mischenko A.V., Nemirovsky Yu.V. Dynamic analysis of hybrid rod systems // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.29-37.** By Bubnov-Galerkin method the decision of the initial-boundary dynamic problem of the composite viscoelastic rod is suggested. The basic dynamic system equations is obtain taking into account of the average shear deformation and external medium interaction. The matrix system equations is receive for the composite rods system. – **Ref.: 5 titles.**

**UDC 539.3 Guryanov N.G., Tyuleneva O.N. Exact solution of three-dimensional problem for a cylinder // TAM. – 2014. – Issue 30.– P.38-44.** Equation of relatively irrotational deformation with consideration of temperature members was obtained, integrable combinations of thermoelasticity equations in translation are presented in the study. Exact solutions of equations of three-dimensional thermoelasticity problem are developed under the assumption of linear dependence of temperature and translations along cylinder axis. An example is considered. – **Ref.: 4 titles.**

**UDC 620.172 – 620.173 (088.8) Odnokova OA Experimental support of the method of comparative analysis of mechanical properties of materials // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.45-48.** Designs of reversers, which allow you to catch errors of comparative tests in tension, compression, torsion, in any sequence in static loading, creep and relaxation. – **Fig. 2. Ref.:2 titles.**

**UDC 518:517.5:536.2 Meltshko I.N., Chigarev A.V., Shirvel P.I. Approximate representation of polylogarithms for one problem of heat conduction for a circle with the boundary condition of second sort // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.49-52.** The paper presents some results of approximate solution of heat conduction theory problem for circle. It is obtained an approximate of the second main boundary problem of heat conduction theory (Neyman's problem) for Laplace equation in an individual circle. A uniform estimation of approximate formula error makes it possible to conduct calculations with the given accuracy. – **Ref.: 5 titles.**

**UDC 539.3 Yankovskii A.P. Equalstress reinforcement of transverse bending of elastic plates under Tymoshenko hypotheses // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.53-60.** Under the hypotheses of Timoshenko theory the problem is formulated for trans-verse bending of elastic plates equal-stress reinforced by fibers of constant cross-section. The qualitative analysis carried out for the corresponding system of resolving equations and boundary conditions. It is shown that the resolving equations is a system of quasilinear equations of mixed-composite type, which correspond to nonlinear static boundary conditions, generating the possibility of the existence of several alternative solutions of the problem. In the axisymmetric case the two-point nonlinear problem about equal-stress reinforcement of circular plate is numerically solved by the shooting method. The results of calculations of such plates, particularly changes in the structure of reinforcement for different types of loading and at varying densities of reinforcement on the inner edge are discussed. The results of calculations according to the classical theory and Timoshenko theory are compared. **Fig. 2. Ref.: 13 titles.**

**UDC 539.374 Leonenko D.V. Natural oscillations of three-layer elastic rod to the inertial basis Winkler // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.61-64.** In the article explains the basic concepts and equations of the modern theory of thermo-visco plasticity (anelasticity). Allocated material functions, formulates the basic experiment and method of identification of the material functions, closing the theory of thermo-visco plasticity. Illustrates the possibilities of the theory of thermo-visco plasticity adequate description of the processes of deformation and destruction of structural steels and alloys, in a variety of modes thermal power cyclic loading. – **Fig. 3. Ref.: 5 titles.**

**UDC 539.3:534.1 Polenov V.S. Dynamic deformation of saturated liquid hereditarily elastic porous medium // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.65-69.** The analytical expressions for determining the velocity, attenuation coefficient and mechanical loss tangent of the angle of the transverse and longitudinal sound waves propagating in a saturated liquid elastic porous medium. On an example of a longitudinal sound wave obtained numerical characteristics, when the elastic medium is described by fractional exponential function Rabotnova. – **Ref.: 8 titles.**

**UDC 531.3 Chigarev A.V., Borisov A.V. Recursive method to obtain the differential equations of motion of a deformable flat anthropomorphic systems in unsupported and two phases of movement // TAM. – 2015. – Issue 30. – P. 70-81.** Conducted formulation of the problem of generalization of the differential equations of motion of a rod mechanical systems anthropoid type. The obtained recursive dependencies, allowing you to record directly the equations of such mechanical systems with an arbitrary number of links and variable moment of inertia of the link. – **Fig. 4. Ref.: 5 titles.**

**UDC 539.4:620.2+519.621.64 Skoybeda A.T., Cabbage P.P., Shpakovsky I.T., Guzhov D.S. Strength debugging hydromechanical transmissions in a bench test // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.82-87.** The article presents some results of the bench tests hydromechanical transmission with a modified design of the turbine shaft. Provides a comparison of standard and experimental design. The article contains the following parts: the test object, the test purpose, test and measurement equipment, test methods, test result and conclusion. The article contains illustrations hydromechanical transmission test stand, experimental design of the turbine shaft and the destruction of the bearing and wear axles and thrust washers satellites. – **Fig. 7.**

**UDC 531.662 Mukhutdinov R.F., Shigabutdinov F.G. Nonlinear buckling of cylindrical shells with stringers under longitudinal impact considering non-axisymmetric deformation // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.88-93.** The article deals with non-axisymmetric motion of cylindrical shells with a discrete change in thickness at a fixed circumferential coordinate the entire length of the shell under longitudinal impact, taking into account the wave nature of the transfer of longitudinal strains in length. The influence of the stringers on the picture deflections. – **Fig. 4. Ref.: 9 titles.**

**UDC 539.3 Vasilevich Yu.V., Sahonenko V.M., Sahonenko S.V., Neumerjitskay E.Yu. Modeling the behavior of prepreg puncture at round hole // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.94-99. – Fig. 2. Ref.: 8 titles.**

**UDC 621.01 Bokun G.S., Gapanjuk D.V., Savinko A.A., Savinko P.A. Development and Application of Computer Multimedia Works Design Gearing in Courses Theory of Machines and Mechanisms // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.100-103.** The experience of the Department of Theoretical Mechanics in implementation of computational methods during training of students in the field of mechanisms de-

sign in the course of the Theory of Machines and Mechanisms is represented. The description of a multimedia lab for designing gear is given. **Fig. 2. Ref.: 5 titles.**

**UDC 539.3 Zhuravkov M.A., Chumak N.G., Martynenko I.M. Computer simulation of the deformation of the nanotubes under different types of loading // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.104-109. In the work on the basis of computer modeling a study of the stress-strained state single- and double-wall carbon nanotubes with chirality index (5,5) under various types of deformation had performed. The stress ratio that characterizing the strength of the nanotubes had calculated. – **Fig. 17. Ref.: 6 titles.**

**UDC 539.3 Mostafa Essuri, Benur Maatug, Khalid Kurmaji Stress analysis of delta fin structure and determination of deformation // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.110-115. Investigated strength of the critical elements of the design of modern aircraft construction. The wing is loaded from the system of evenly distributed vertical forces the bearing surface is of monolithic type, manufactured from homogenous and isotropic material, with solid shell and strong oblique spars. The fin structure is studied numerically using finite element method (ANSYS) and results are verified by comparison with experiment. Six strain gages were used to measure stresses over expected critical locations. Experimental and numerical results are in good agreement. It is also found that the model withstands the applied loads. – **Fig. 6. Ref.: 5 titles.**

**UDC 539.3+621.039.5 Shirvel P.I. The results of simulation of asymmetric stress/strain state for long cylindrical elements under irregular heating and nuclear radiation // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.116-125. The paper contains the results of the simulation 2D(r,θ) stress/strain state for singly-connected cylindrical solid elements under conditions of thermo-irradiations impact. Influence of a circumferential distortion on asymmetric stress/strain state for various values of temperature amplitudes has been investigated. A solid cylinder without internal heat sources has been considered as a model body. The numerical solution to solve stress/strain state problem for the solid long cylinder under creep, swelling and thermal strain has been obtained. The analysis of the mechanisms of nonlinear nonaxisymmetric deformation for cylindrical bodies was produced. Properties of the model body correspond to steel 316 AISI. The obtained results can be used in the design and development of a wide class of problem for power engineering and nuclear power. – **Fig.8. Ref.: 21 titles.**

**UDC 539.3 Adishev V.V., Kucherenko I.V., Grachev M.S. Modeling of stress-strain state of concrete using analytical and numerical approaches // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.126-130. The article proposes to simulate the stress-strain state of structurally inhomogeneous material using analytical and numerical approaches. Using an analytical approach allows to determine averaged physical characteristics of concrete as a quasi-homogeneous anisotropic material. PC ANSYS provides a qualitative distribution pattern of stresses and strains and reveals the beginning of the destruction of the local area. – **Fig.: 4. Ref.: 6 titles.**

**UDC 539.3+681.7:068 Veremeychik A.I., Sazonov M.I., Khvisevich V.M., Tsyganov D.L. Research of heat exchange between plasma arc and surface of cutting of metallic sheet // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.131-135. In this article model the sectionalized model of cutting is proposed for study of process cutting metals. To studied the formation of the plasma arc, the current density distribution and heat flux along the cavity of cutting for direct and reverse polarity connection of plasmotron. – **Fig. 3. Ref.: 3 titles.**

**UDC 539.3 Antoniu V.E., Yaroshevich E.P. Loaded at an angle bending disks and dynamic stabilization // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.136-139. In the article the possibility of using the circuit-loaded at an angle bend the disc when using the dynamic stabilization of the disc with a variable cross section. **Fig. 2. Ref.: 5 titles.**

**UDC 539.3 Kosykh E.G Stability distributed web compressed load variable intensity // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.140-145. The stability of the compressed rod under unevenly distributed load-Univers. The analytical solution and numerical results for the two types of boundary conditions. It is shown that the amendments to the known solution of up to 24%. **Fig. 2. Ref.: 15 titles.**

**UDC 539.3/6:621.01 Lobster T.I., Goncharova I.A., Sibilkova N.P., Alpysbaeva B.M. Determination of torsional stiffness stepped shaft // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.146-149. The article describes the cases where it is appropriate to replace the stepped shaft smooth shaft equivalent stiffness of the condition of equality of potential energies of the driven and the present systems. – **Fig. 4. Ref.: 4 titles.**

**UDC 681.3 Antsiparovich P.P., Akulich B.K., Dubovskaya E.M. Kinematic and dynamic analyses of the manipulator for the processing centre // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.150-154. The investigated the manipulator has 4 degrees of freedom. For definition of kinematic characteristics the direct problem of kinematics of the manipulator with use of a method of transformation of coordinates in the matrix form. For a finding of the generalised motive forces the system is made of 4 equations in the form of Lagrange equations of the second kind to the accepted law of change of the generalised coordinates and the generalised speeds. For definition of dynamic loadings in kinematic steams (jet forces and the moments) it is executed the kinetostatic power analysis. On the basis of the received dependences program realisation of the kinematic and dynamic analysis of the considered manipulator is executed. – **Fig. 3. Ref.: 4 titles.**

**UDC 532.516 Konon P.N., Zhuk A.V. Evolution equation of viscous layer of fluid on the inner surface of the rotating cylinder // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.155-160. Plane motion of viscous layer of fluid in the gravity field, surface tension and inertia on inner surface of rotating with constant angular velocity cylinder is considered. System of partial differential equations was obtained for evolution of free surface of planar layer for large and moderate Reynolds numbers. Neglecting inertial terms we can get equation obtained by Puhnahev for thin film. Numerical method was developed and unsteady motion problem was solved. – **Fig. 3. Ref.: 6 titles.**

**UDC 681.5.09 Gulay A.V., Zaytsev V.M. Software control of the executive bodies of intelligent mechatronic systems // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.161-168. Analysis of the generalized organization scheme for management of executive bodies in mechatronic systems has been carried out. Peculiarities of construction of the direct and feedback circuit have been considered when they were included to digital signal processors. Conditions of informational compatibility of interacting components in the intellectual mechatronic system have been analyzed. – **Fig. 1. Refs.: 6 titles.**

**UDC 372.863 Navitski P., Norton T., Clare D., Peets S. Mechatronics teaching in preparing agricultural engineers for precision farming technology development // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.169-172. Necessary teaching mechatronics in preparing of agricultural engineers has substantiated, describes the experience of the University of Harper Adams (Newport, Shropshire, UK) in teaching, analyzed the possibilities of teaching mechatronics and related disciplines in the Educational Establishment "Belarusian State Agricultural Academy," Gorki. – **Fig. 1. Ref.: 3 titles.**

**UDC 539.3 Shil'ko S.V. Elastoplastic materials: models of mechanical behavior in damping systems // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.173-177. Application of elastoplastic materials for the damping elements of shock and vibration absorbers is discussed. The elastic, viscoelastic and viscoplastic models of these materials are considered. The factors influenced the energy dissipation at the external and internal friction are analyzed. – **Fig. 4. Ref.: 11 titles.**

**UDC 531.01 Goncharov M.V., Konchina L.V., Kulikova M.G., Romanova O.N. About mechatronics system design // TAM.** – 2015. – Issue 30. – P.178-180. The work considers vibrational motion of a conveyor belt, that arrives from the unevenly distributed burden movement along the belt. – **Fig. 2. Ref.: 3 titles.**

**UDC 621.762:539 Hmelev A.A., Orsich J.V. Theoretical analysis of the value of the shock vyazkosti // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.181-183.** Considers the relationships of certificate of mechanical characteristics of materials and their hardness with the values of absorbed energy (toughness) based on the diagrams hrupkovyazkogo state. The theoretical formula assessing toughness suitable for samples of all shapes and sizes. – **Fig. 2. Ref. 2 titles.**

**UDC 539.3 Veremejchik A.I., Harbachevsky V.V., Khvisevich V.M. To the solution of flat edge tasks of thermoelasticity of non-uniform bodies by a potential method // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.184-189.** In article the integrated equations of a flat edge task of non-uniform thermoelasticity are constructed. The algorithm of the numerical solution of a task is developed. FORTRAN program is made and the test example is realized. Reliability of algorithm is checked by comparison of the received results with the known analytical decision. – **Fig. 1. Ref.: 4 titles.**

**UDC 539.3 Akimov V.A., Goncharov S.V. The operator method for solving the first principal plane elasticity problem // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.190-192.** The article presents the algorithm for constructing of new solutions of the biharmonic equation of a flat task of the theory of elasticity is developed. Concrete examples of creation of biharmonic polynoms of the fourth, fifth, sixth and seventh degree are given. – **Ref. 2 titles.**

**UDC 539.37 Gavrilenko S.L. Attestation of mechanical and mathematical models of polymeric materials for nonlinear viscoplastic model // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.193-199.** An algorithm for the attestation of mechanical and mathematical models of polymeric materials has been suggested. It has been tested for non-linear viscoplastic model, given the significant yield stress and strain-rate sensitivity. An identification and verification of the model has been carried out according to the test results of the polymer material and composite under the tension and compression. It has found that the method has been robust to variations in the experimental data without the use of a regularization procedure. – **Fig. 1. Ref. 4 titles.**

**UDC 629.3.023 Vikhrenka D.V., Patskevich H.A. Dynamic analysis of the sport truck platform frame in a system of finite-element analysis MSC / NASTRAN // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.200-206.** This article considers the vibration loading of the sports truck MAZ-5309RR plat-form, designed for competition in rally-raids. The calculation of the platform frame normal modes with the use of finite element analysis of MSC/Nastran is done. It is determined that the first normal modes in the range 20Hz are the vibrations of the rear rollbar in a transverse vertical plane. By results of normal modes calculation method of estimating the dynamic behavior of the structure is chosen, specifically the modal frequency response analysis in the range of up to 100 Hz, the method of loading is determined effects on the studied structures - antisymmetric sinusoidal load at the connection points of springs with axles, leads to a twisting of the truck frame relative to the longitudinal axis. By results of frequency response calculation is determined that the stresses in rollbar dangerous sections have a marked maximum at a frequency of 15 Hz and at frequencies above 20 Hz are significantly reduced. By results of the forced oscillations calculation the design of the rear rollbar is proposed, which significantly reduce the stress in dangerous sections without increasing the weight of the structure. – **Fig. 4. Ref.: 2 titles.**

**UDC 621.039.7 Kamenev A.Ja., Kulikov I.S., Klimova L.A., Shirvel P.I., Hlembotski A.V. Development of viscous composition for cleaning of NPP's metal surfaces // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.207-209.** The paper shows the state of development in this area to date. On the basis of its own research and development proposed a new high-performance, non-drying, viscous composition. The paper presents data on the experience of its use for the treatment of metal surfaces from scale, rust, and many types of pollution, as well as on the state of the metal surface after exposure to a paste. Especially effective is the composition of the metal surface decontamination destined for recycling smelter. – **Ref.: 3 titles.**

**UDC 621.039.7 Kamenev A.Ja., Kulikov I.S., Klimova L.A., Hlembotski A.V., Shirvel P.I. Application of electrolytic-plasma polishing for decontamination steel surfaces // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.210-212.** For surface decontamination of NPP equipment proposed a method for electrolytic-plasma polishing. The method is also suitable for cleaning metal and alloy surfaces from corrosion products, scale effect polishing. A method is described for electrolytic-plasma polishing. The data on the effect of the composition of metals, their structure on the sensitivity of materials to cracking, intergranular corrosion. **Fig. 1. Ref.: 3 titles.**

**UDC 621.8 Kulikova M.G., Konchina L.V., Tolkova T.S. Engineering solutions to design the equipment for automation of water treatment // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.213-215.** This article presents the design of the apparatus for the desalination of water by freezing. It describes the advantages of the technology and determines mechanical parameters of presented construction. **Fig. 2. Ref.: 2 titles.**

**UDC 539.4:620.2 Dokukova N.A., Kaftaikina E.N., Konon N.P. Comparative characteristics of the five types of vibration dampers // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.216-222.** The main types of modern vibration isolation devices encountered in mechanical engineering; studied the corresponding dynamic scheme; linearized and investigated their mathematical models; numerical results are compared with the experimental data presented in the literature; represented a new kind of shock absorber patent for utility model authors, compare the calculated characteristics of the known main types of vibration dampers, showing its advantages transfer coefficient efforts on an insulated object vibration and energy absorption coefficient. **Fig. 6. Ref.: 6 titles.**

**UDC 626.86002.51: 62.868.001.4 Balitckiy V.A. Vibroinertial drive mobile machines // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.223-225.** In the article shows the possibility of creating Nonreactive vibroinertial drives. – **Fig. 5. Ref.: 3 titles.**

**UDC 531.312.1 Loktionov A.V. Kinetostatic method of calculating the equation of motion small oscillations elliptical pendulum. // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.226-229.** Kinetostatic proposed method of calculation of the equation of motion of small oscillations of a pendulum with a given elliptic initial angular velocity of its motion in view of a gravity slide and ball. To calculate the response of the slide rails considered mechanical system to use the theorem of the center of mass. Obtain the equation of free oscillations of the pendulum and the law of the elliptic motion of the slider, depending on the time and given initial angular speed of rotation of the pendulum. – **Fig. 1. Ref.: 3 titles.**

**UDC 621.835-41:514.764 Skoybeda A.T., Zhukavets V.M.. The rational parameters of wheel-step mover moving along the steps // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.230-235.** The paper describes method of calculating rational parameters of wheel-step mover in its motion along the stair steps and on the flat surface. The given method is appli-cable in design of vehicles for persons with disabilities. – **Fig. 2. Ref.: 3 titles.**

**UDC 539.3+539.4 Kholodar B.G. On the geometrical representation of the deviatoric strain // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.236-242.** The diagram linking the values of the spherical and deviatoric strain components is created. A criterion for the transition of the material to the plastic state (criterion of maximum form change) is proposed. The results obtained contribute to the deepening of the understanding about the deformation of the material beyond the yield point. – **Fig. 6. Ref.: 5 titles.**

**UDC 534.015.1, 62.137 Petrovskiy A.L. Chigarev A. V. The influence coefficients of stiffness and damping on variation system with two degrees of freedom // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.243-249.** The article describes the method of analysis of axial vibration of centrifugal technique with a vertical shaft on the example system with two degrees of freedom. Evaluation of influence of coefficients of stiffness and damping on the forced vibration with viscous re-sistance of system with two degrees of freedom are carried. **Fig. 7. Tab.3. Ref.: 6 titles.**

**UDC 519.876.5** *Gromyko O.V., Mireyka H.V.* **Automated glenoid adapter selection for resection of the damaged part of glenoid cavity** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.250-255. Presented automated selection glenoid adapter resection of the damaged part of the glenoid cavity of the blade, includes the creation of 3-D CAD model of the joint based on computer tomographic images and the 3-D model glenoid adapter. – **Fig. 4. Ref.: 9 titles.**

**UDC 539.3** *Yarovaya A. V., Poddubny A. A.* **Mechanical-mathematical model of inelastic deformation of sandwich beams, partially supported on elastic foundation** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P. 256-262. Shows the use of the package ANSYS and use a computer system Mathematica, when calculating displacement fields for materials tungsten and quartz. – **Fig. 12. Ref.: 3 titles.**

**UDC 539.3** *Shemet L.A., Sherbakov S.S.* **The simulation of crack-like damage for different equivalent stresses** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.263-269. Results of two-dimensional computer simulation of crack-like damage propagation in time for different equivalent stresses is considered in the paper. The simulation was made basing on the model of deformable solid with a dangerous volume by deleting the dangerous surfaces at each step of loading. The dependencies of stress intensity factor on the length of crack-like damage, the value of dangerous surface and their increments are presented for different equivalent stress **Fig. 4. Ref.: 4 titles.**

**UDC 539.3:531.2.001:621.81** *Martinenko T.M., Prankevich S.A., Sklar O.N.* **The ratio of optimal design of soft shells in the plane formulation** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.270-274. The article presents the mathematical theory of determining the stress-strain state of the shell taking into account the non-linear relationships between force and deformation (physical nonlinearity), as well as between strains and displacements (geometric nonlinearity). – **Ref.: 4 titles.**

**UDC 539.4:620.2** *Dokukova N.A., Kaftaikina E.N., Konon N.P.* **Comparative characteristics of the five types of vibration dampers** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.275-281. The main types of modern vibration isolation devices encountered in mechanical engineering; studied the corresponding dynamic scheme; linearized and investigated their mathematical models; numerical results are compared with the experimental data presented in the literature; represented a new kind of shock absorber patent for utility model authors, compare the calculated characteristics of the known main types of vibration dampers, showing its advantages transfer coefficient efforts on an insulated object vibration and energy absorption coefficient. – **Fig. 6. Tab.1. Ref.: 6 titles.**

**UDC 539.3** *Trzepieciński T., Stachowicz F., Bosiakov S., Rogosin S.* **Investigation of frictional conditions of steel sheets using pin-on-disk tribometer** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.282-287. The paper presents a method of determining the anisotropic friction model for sheet metal forming processes based on experimental data obtained from the pin-on-disk tribometer test. Friction coefficient value was measured as a function of angular position with respect to the rolling direction of the sheet metal. The frictional investigations presented in this work were conducted for deep drawing quality cold-rolled steel sheet with a sheet thickness of 1 mm. The anisotropic friction model corresponded to experimental results was implemented into a finite element (FE) model built using the ABAQUS software. In the numerical investigations the hemispherical contact against an elastic-plastic flat was analysed. The anisotropy of both material and friction was influenced on non-uniformity of the stress distribution around the hemisphere axis, which is clearly visible for higher values of hemispherical solid indentations. – **Fig. 6. Tab.1. Ref.: 15 titles.**

**UDC 624.131+539.215** *Altynbekov S.A.* **About a multi-parameter mathematical model of the process for consolidation of non-homogeneous soil** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.288-291. On the basis of existing models, the multi-parametrical mathematical model of process of consolidation of ground is designed and by that the effective step to algorithm of a task of the theory filter of consolidation of earthen weights ensuring is made to receive the decisions of one-dimensional, flat and spatial regional tasks first, second, third and mixed of sorts, when it is possible to count a skeleton of a ground: elastic homogeneous and non-uniform; linearly and not linearly is crawling homogeneous and non-uniform; is non-uniform inheritance-growing old. The numerical analyses are given and major factors deformations, influencing character, of earthen weights are revealed. – **Ref.: 7 titles.**

**UDC 539.3** *Maevskaia S.S.* **Analysis of the natural frequencies of axisymmetric transverse vibrations of three-layer magnetorheological circular plate.** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.292-296. Free axisymmetric transverse vibrations of a circular sandwich plate containing magnetorheological elastomer are considered. Influence of the external stationary magnetic field on the natural frequencies and damping rate fluctuations corresponding to different modes of the plate is analyzed. – **Fig. 2. Ref.: 12 titles.**

**UDC 517.958: 539.3; 539.375.6; 541.43/.49** *Zhuravkov M.A., Sherbakov S.S., Nasan O.A.* **Volume damageability of dynamically loaded elements of the cutting tool of agricultural harvester** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.297-305. Dynamic stress-strain state of the cutting tool of agricultural harvester using finite element simulation is investigated. Distributions of the contact pressure and equivalent von Mises stress on the cutting surfaces were obtained. The technique of damageability assessment was developed. A comparative analysis of the influence of knife's and shearbar's materials combinations (steel and high-strength cast iron VChTG) on the values of dangerous volumes and integral damage of system elements was made. – **Fig. 4. Tab.3. Ref.: 4 titles.**

**UDC 531; 539.3; 620.3** *Sherbakov S.S., Sonovskiy L.A.* **Electromagnetic-force method of nanoobjects control** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.306-310. Method of control of nanoscale objects by current-conducting mediators is proposed. The latter can be represented by both available indenters for atomic force microscopy and conductive or charged particles of a size comparable with the size of the controlled object. Interaction (mounting) of objects to the mediator is performed by van der Waals force while motion of the mediator with the object is performed by Lorentz force depending on the combination of electromagnetic fields. The solution of three-dimensional model problem is given for the seizure of the nanoobject by the electrically charged mediator, transporting them to the point of delivery under the action of the electric field and dumping the nanoobject at this point. – **Fig. 2.**

**UDC 60.001.11:531.8(076.5)** *Kudin V.V., Ausiyevich A.M., Kudin M.V., Ivanov A.Yu.* **Modeling of oscillatory processes in the development of machinery vibration protection** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.311-314. The mathematical and computer modeling of oscillatory process of object vibration protection under external forces impact is presented. Particular cases of vibration protection elements assembling are considered. Criteria of vibration protection efficiency on different frequency bands are given. – **Fig. 4, Ref.: 3 titles.**

**UDC 531/534:[57+61]** *Slavashevich I.L., Mikhasev G.I.* **Local mode shapes of an annular plate with a nonconcentric circular cutout** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.315-320. In this paper we studied the free oscillations of an annular plate with non-concentric cutout, rigidly clamped on both circuits. Formal asymptotic solutions were solved by using the method Tovstik, which fit the shape of oscillations without nodal diameters, as well as localization of deflections in the neighborhood of a "weak" radius. – **Fig. 1. Tabl. 1. Ref.: 5 titles.**

**UDC 531.10:621.01** *Ausiyevich A.M., Pronkevich S.A., Shashko A.E.* **The calculation of the contact pressure distribution by Staerman method for dynamic analysis of mechanisms** // TAM. – 2015. – Issue 30. – P.321-324. The paper describes the algorithm for calculating the distribution of the contact pressure on the surface of rotation kinematic pairs. Evaluation criterion for relative intensity of wear of the mechanism with certain design parameters is proposed. The described algorithm together with the program of the calculation of the forces of reaction in kinematic pairs allows optimizing the design parameters of the mechanism. – **Ref.: 2 titles.**

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Вершина Г.А.</i> Для всех нас чрезвычайно важно научно-технологическое развитие .....	3
<i>Чигарев А.В.</i> 80 лет кафедре "Теоретическая механика» БНТУ: история – современность – будущее .....	5
<i>Горбач Н.И.</i> К 100-летию со дня рождения профессора А.Х. Кима .....	9
Чигарев Юрий Власович (к 70-летию со дня рождения) .....	12
<i>Бондарь В.С., Данишин В.В.</i> Термовязкопластическое циклическое деформирование и разрушение материалов .....	13
<i>Старовойтов Э.И., Савицкий Д.М.</i> Повторное знакопеременное нагружение упругопластических тел в нейтронном потоке .....	20
<i>Мищенко А.В., Немировский Ю.В.</i> Динамический анализ гибридных стержневых систем .....	29
<i>Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н.</i> Точное решение трехмерной задачи термоупругости для цилиндра .....	38
<i>Одинокова О.А.</i> Экспериментальное обеспечение метода сравнительного анализа механических свойств материалов .....	45
<i>Мелешко И.Н., Чигарев А.В., Ширвель П.И.</i> Приближенное представление полилогарифмами одной задачи теории теплопроводности для круга при граничном условии второго рода .....	49
<i>Янковский А.П.</i> Равнонапряженное армирование поперечно изгибаемых упругих пластин, подчиняющихся гипотезам Тимошенко .....	53
<i>Леоненко Д.В.</i> Собственные колебания трехслойного стержня на упругом инерционном основании Винклера .....	61
<i>Поленов В.С.</i> Динамическое деформирование насыщенной жидкостью наследственно упругой пористой среды .....	65
<i>Чигарев А.В., Борисов А.В.</i> Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения .....	70
<i>Скойбеда А.Т., Капуста П.П., Шпаковский И.Т., Гузев Д.С.</i> Прочностная доводка гидромеханических коробок передач в условиях стендовых испытаний .....	82
<i>Мухутдинов Р.Ф., Шигабутдинов Ф.Г.</i> Моделирование нелинейного выпучивания цилиндрической оболочки со стрингерами при продольном ударе с учетом неосесимметричности деформирования .....	88
<i>Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Сахоненко С.В., Неумерзницкая Е.Ю.</i> Моделирование поведения препрега при проколе в нем круглого отверстия.....	94
<i>Бокун Г.С., Гапанюк Д.В., Савинко А.А., Савинко П.А.</i> Разработка и применение компьютерной мультимедийной работы по проектированию зубчатой передачи в курсе теории механизмов и машин .....	100
<i>Журавков М.А., Чумак Н.Г., Мартыненко И.М.</i> Компьютерное моделирование деформаций нанотрубок при различных типах нагружения .....	104
<i>Mostafa Essuri, Benur Maatug, Khalid Kurmaji</i> Stress analysis of delta fin structure and determination of deformation .....	110
<i>Ширвель П.И.</i> Результаты моделирования неосесимметричного НДС длинных цилиндрических тел при неоднородном нагреве и нейтронном облучении .....	116
<i>Адищев В.В., Кучеренко И.В., Грачева М.С.</i> Моделирование напряженно-деформированного состояния бетона с использованием аналитического и численного подходов .....	126

<i>Веремейчик А.И., Сазонов М.И., Хвисевич В.М., Цыганов Д.Л.</i> Исследование теплообмена между плазменной дугой и поверхностью реза металлического листа .....	131
<i>Антонюк В.Е., Ярошевич Е. П.</i> Косонагруженный изгиб дисков и динамическая стабилизация .....	136
<i>Косых Э.Г.</i> Устойчивость стержня сжатого распределенной нагрузкой переменной интенсивности.....	140
<i>Омаров Т.И., Гончарова И.А., Сибилькова Н.П., Алпысбаева Б.М.</i> Определение крутильной жесткости ступенчатого вала .....	146
<i>Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.</i> Кинематический и динамический расчет манипулятора для обрабатывающего центра .....	150
<i>Конон П.Н., Жук А.В.</i> Уравнения эволюции слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра .....	155
<i>Гулай А.В., Зайцев В.М.</i> Программное управление исполнительными органами в интеллектуальных мехатронных системах .....	161
<i>Navitski P., Norton T., Clare D., Peets S.</i> Mechatronics teaching in preparing agricultural engineers for precision farming technology development .....	169
<i>Шилько С.В.</i> Эластопласты: модели механического поведения в демпфирующих системах .....	173
<i>Гончаров М.В., Кончина Л.В., Куликова М.Г., Романова О.Н.</i> Исследование колебательных движений мехатронных систем в пищевой промышленности .....	178
<i>Хмелев А.А., Орсич Ю.В.</i> Теоретический анализ значений ударной вязкости .....	181
<i>Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В., Хвисевич В.М.</i> К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала .....	184
<i>Акимов В.А., Гончарова С.В.</i> Операторный метод решения первой основной плоской задачи теории упругости .....	190
<i>Гавриленко С.Л.</i> Аттестация механико-математических моделей полимерных материалов на примере нелинейной вязкопластической модели .....	193
<i>Вихренко Д.В., Пацкевич Г.А.</i> Динамический анализ каркаса платформы спортивного грузового автомобиля в системе конечно-элементного анализа MSC/NASTRAN .....	200
<i>Каменев А.Я., Куликов И.С., Климова Л.А., Ширвель П.И., Глембоцкий А.В.</i> Использование вязкой композиции для очистки металлических поверхностей оборудования АЭС .....	207
<i>Каменев А.Я., Куликов И.С., Климова Л.А., Ширвель П.И., Левчук А.В.</i> Применение электролитно-плазменной полировки при дезактивации поверхности нержавеющей и углеродистой стали .....	210
<i>Куликова М.Г., Кончина Л.В., Толкова Т.С.</i> Технические решения проектирования оборудования для автоматизации водоподготовки .....	213
<i>Докукова Н.А., Кафтайкина Е.Н., Конон Н.П.</i> Сравнительные характеристики пяти типов виброамортизаторов .....	216
<i>Балицкий В.А.</i> Виброинерционные приводы мобильных машин .....	223
<i>Локтионов А.В.</i> Кинестатический метод расчета уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника .....	226
<i>Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н.</i> Рациональные параметры колесно-шагающего движителя, перемещающегося по ступеням .....	230
<i>Холодарь Б.Г.</i> О геометрическом представлении девиаторной деформации .....	236

<i>Петровский А.Л., Чигарев А.В.</i> Влияние коэффициентов жесткости и демпфирования на колебания системы с двумя степенями свободы .....	243
<i>Громыко О.В., Мирейко Е.В.</i> Автоматизированный подбор гленоидного адаптера для резекции поврежденной части суставной впадины лопатки .....	250
<i>Яровая А. В., Поддубный А. А.</i> Механико-математическая модель деформирования неупругой трехслойной балки, частично опертой на упругое основание .....	256
<i>Шемет Л.А., Щербаков С.С.</i> Моделирование трещиноподобного повреждения для различных эквивалентных напряжений .....	263
<i>Мартыненко Т.М., Пранкевич С.А., Скляр О.Н.</i> Соотношения оптимального проектирования мягких оболочек в плоской постановке .....	270
<i>Докукова Н.А., Кафтайкина Е.Н., Конон Н.П.</i> Численно-аналитическая диагностика многоэлементных механических систем .....	275
<i>Trzepieciński T., Stachowicz F., Bosiakov S., Rogosin S.</i> Investigation of frictional conditions of steel sheets using pin-on-disk tribometer .....	282
<i>Алтынбеков Ш.А.</i> Об одной многопараметрической математической модели процесса консолидации неоднородных грунтов .....	288
<i>Маевская С.С.</i> Анализ собственных частот осесимметричных поперечных колебаний круглой трехслойной магнитоэологической пластины .....	292
<i>Журавков М.А., Щербаков С.С., Насань О.А.</i> Объемная повреждаемость динамически нагруженных элементов режущего инструмента сельскохозяйственного комбайна .....	297
<i>Щербаков С.С., Сосновский Л.А.</i> Электромагнитно-силовой метод управления нанообъектами .....	306
<i>Кудин В.В., Авсиевич А.М., Кудин М.В., Иванов А.Ю.</i> Моделирование колебательных процессов при разработке виброзащиты машин .....	311
<i>Славашевич И.Л., Михасев Г.И.</i> Локальные формы колебаний кольцевой пластины с неконцентрическим круговым вырезом .....	315
<i>Авсиевич А.М., Пранкевич С.А., Шашко А.Е.</i> Расчет распределения контактных давлений по методу Штаермана при динамическом анализе механизмов .....	321
<i>Чигарев А.В., Чигарев Ю.В.</i> И снова о математике .....	325
<i>Плескачевский Ю.М., Чигарева Ю.А.</i> Распределение температуры в слое с фрактальной структурой .....	328
<i>Икуас Ю.Ф., Хишам А.Г.</i> Оценка состояния системы с помощью топологических уравнений .....	331
<i>Князева Г.В., Анисимов В.М., Балыко О.В.</i> Конструкция вихревой установки .....	332
<i>Икуас Ю.Ф.</i> Параметрическая идентификация системы управления .....	333
<i>Лапцевич А.А., Сизиков С.В., Анисимов В.М., Синяков А.Л.</i> Разработка систем борьбы с обледенением воздушного судна .....	333
<u><i>Памяти Игоря Александровича Миклашевича</i></u> .....	336
<u><i>Некролог. Круподеров Андрей Валентинович</i></u> .....	338
<b>РЕФЕРАТЫ</b> .....	339
<b>ABSTRACTS</b> .....	344
<b>СОДЕРЖАНИЕ</b> .....	348

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ

Электронная версия научной статьи должна быть оформлена в формате Microsoft Word (2003). Материалы статьи необходимо выслать на e-mail: [seminar.mechatronics@gmail.com](mailto:seminar.mechatronics@gmail.com).

**Объем статьи:** полное количество страниц (последняя страница статьи должна быть заполнена не менее 75%), не должен превышать 7 страниц машинописного текста. Должен быть указан индекс публикации по универсальной десятичной классификации (УДК). **Текст** статьи набирается шрифтом Times New Roman 12 pt (междустрочный интервал – одинарный) с автоматической расстановкой переносов. Выравнивание текста по ширине. Страницы не нумеруются. **Отступ** первой строки абзацев везде постоянный, равный 10 мм. **Поля текста** на странице формата А4 (210x297мм): верхнее – 25 мм, нижнее 25 мм, левое и правое 30 мм. Посередине листа прописными буквами (полужирным шрифтом) печатается название статьи. Затем через 1 интервал посередине фамилии авторов (полужирным шрифтом). Затем через один интервал текст статьи с абзаца. В конце статьи через 1 интервал печатается «SUMMARY» (не более 75 слов на английском языке) и «РЕЗЮМЕ» на русском языке. После **резюме** печатается «ЛИТЕРАТУРА» и далее через 1 интервал перечисляются в виде списка источники литературы. Литературные ссылки (не более 15 источников) должны быть оформлены в порядке упоминания в тексте в соответствии с ГОСТ 7.32-2001. **Таблицы** должны содержать только экспериментальные данные и представлять собой обобщенные и статистически обработанные материалы исследований. Каждая таблица должна иметь заголовок, быть обязательно пронумерована и упомянута в тексте. Кегль текста – 9 pt. **Рисунки** должны быть выполнены в графическом редакторе и включены в текст. Количество иллюстраций не должно превышать 4, данные рисунков не должны повторять основной материал таблиц. Рисунки должны быть четкими, легко воспроизводимыми, **пронумерованы**, упомянуты в тексте и иметь подрисовочные подписи, а также объяснение всех условных обозначений. Подрисовочные подписи печатаются шрифтом Times New Roman 9pt курсивом. **Формулы** и буквенные обозначения по тексту должны быть набраны в среде редактора формул Microsoft Equation 3.0. Шрифт для греческих букв – Symbol, для всех остальных – Times New Roman, основной размер – 11, крупный индекс – 7, мелкий – 5. В обозначениях латинские буквы набираются курсивом, греческие и русские – прямо. В математических формулах следует избегать громоздких обозначений. Формулы располагаются по центру страницы и нумеруются (нумерация по тексту статьи сквозная).

На отдельной странице указываются полные сведения об авторах (полное имя, организация, должность, уч. степ., уч. звание, адрес, телефон, e-mail). Также к статье обязательно прилагаются реферат и резюме на русском и английском языках с переводом на английский язык фамилий авторов и названия статьи и доклада.

### ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

УДК 539.4:620.2+519.621.64

#### О ПРОЕКТИРОВАНИИ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ (12 pt)

<sup>1</sup>Иванов П.И., <sup>2</sup>Смирнов И.П. (12 pt)

<sup>1</sup>УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

<sup>2</sup>УО «Белорусский государственный университет» Минск (12 pt)

Мехатронные системы находят широкое использование в современных областях высокотехнологической промышленности ...

... повысить надежность и долговечность наиболее ответственных элементов конструкций и компонентов оборудования механических систем и мехатронных модулей. (12 pt)

#### SUMMARY

*This paper considers the problems of modern methods for computer and structures...*

#### РЕЗЮМЕ

Предлагаемый подход позволяет повысить надежность...

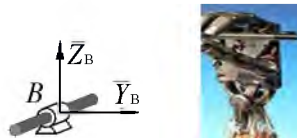


Рис.1. Простейшая механическая система (9 pt)

#### РЕФЕРАТ

УДК 539.4:620.2+519.621.64

Иванов П.И., Смирнов И.П. **О проектировании мехатронных систем** // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2016г, вып. 31. Проведена постановка задачи ... численные эксперименты – Ил. 3. Библиогр. 12.

#### ABSTRACT

UDC 539.4:620.2+519.621.64

Ivanov P.I., Smirnov I.P. **About mechatronics system design** //... *The mechatronics systems* ... – Fig. 3. Ref.: 12 titles.

#### ЛИТЕРАТУРА (12 pt)

1. Чигарев, А.В. Введение в мехатронику: учебное пособие / А.В. Чигарев, К. Циммерманн – Минск: БНТУ, 2013.– 388с.

**Не рассматриваются и обратно не высылаются материалы статей, оформленные с нарушением вышеперечисленных требований! Статьи, поступившие позднее установленных сроков (в случае положительной рецензии), публикуются в следующем выпуске журнала ТПМ.**