УДК 62-83: 621.313.333

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ «ОДНОФАЗНЫЙ АСИНХРОННЫЙ ДВИГАТЕЛЬ – ЛИНЕЙНЫЙ УПРУГИЙ ЭЛЕМЕНТ»

Докт. техн. наук, проф. ЛУКОВНИКОВ В. И.,
канд. техн. наук, доц. РУДЧЕНКО Ю. А., асп. САМОВЕНДЮК Н. В.

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Общим классом автоколебательных систем с одной степенью свободы являются системы, описываемые уравнением

$$\ddot{x} + x = \mu f(\dot{x}), \tag{1}$$

где $x,\ \dot{x},\ \ddot{x}$ – относительная координата положения и ее первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по времени; $f(\dot{x})$ – функция, определяемая диссипативными силами нагрузки и силами подпитки от источника; μ – малый параметр, который определяет близость системы к линейной консервативной.

К данному классу относится, например, известное уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \tag{2}$$

которое достаточно хорошо описывает некоторые автоколебательные системы.

Предположение о том, что автоколебания близки к синусоидальным, широко используется в теории колебаний для асимптотического решения уравнений вида (1). Такие приближенные методы, как метод Ван-дер-Поля, Пуанкаре и др., основаны на этом предположении [1]. Точность решения, например по методу Ван-дер-Поля, напрямую зависит от величины малого параметра μ.

Целью данной работы является получение аналитического выражения для малого параметра автоколебательной системы «однофазный асинхронный двигатель – линейный упругий элемент» [2]. Это позволит определить область применения и погрешность приближенных методов при использовании их для анализа автоколебательных систем данного вида.

Уравнение движения автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» при отсутствии сухого трения и аппроксимации механической характеристики двигателя по Сюмеку [3] в производных по абсолютному времени t имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = \frac{3\sqrt{3}M_{\text{кр.ОАД}}}{2\omega_1}\dot{\varphi} - \frac{3\sqrt{3}M_{\text{кр.ОАД}}}{2\omega_1^3}\dot{\varphi}^3 - H\dot{\varphi} - C\varphi,$$

где H – коэффициент жидкостного трения (демпфирование); J – момент инерции системы; C – коэффициент жесткости; $M_{\text{кр.ОАД}}$ – критический момент ОАД; ω_1 – скорость идеального холостого хода ОАД.

Введя относительное время $\tau = \omega_0 t$, где $\omega_0 = \sqrt{C/J}$ – собственная частота колебаний, упростим данное уравнение, приведя его к виду

$$\ddot{\varphi} - \mu_1\dot{\varphi} + \mu_2\dot{\varphi}^3 + \mu_3\dot{\varphi} + \varphi = 0, \tag{3}$$

где φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ – относительные угловая координата, скорость и ускорение; μ_1, …, μ_3 – относительные коэффициенты, которые зависят от параметров двигателя и упругого элемента.

Уравнение (3) приводится к уравнению Ван-дер-Поля (2) с помощью замен

$$x = \dot{\varphi}\sqrt{\frac{3\mu_2}{\mu_1 - \mu_3}}, \quad \mu = \mu_1 - \mu_3.$$

Таким образом получим выражение для малого параметра автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент»

$$\mu = \frac{3\sqrt{3}M_{\text{кр.ОАД}} - 2\omega_1 H}{2J\omega_0\omega_1}. \tag{4}$$

Проанализируем далее, как влияет величина малого параметра μ на погрешность метода Ван-дер-Поля при решении уравнения движения автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» (3).

Решение уравнения (3) методом Ван-дер-Поля дает три корня для амплитуды колебаний [4]:

$$\varphi_{m1} = 0; \quad \varphi_{m2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2}}; \quad \varphi_{m3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2}}. \tag{5}$$

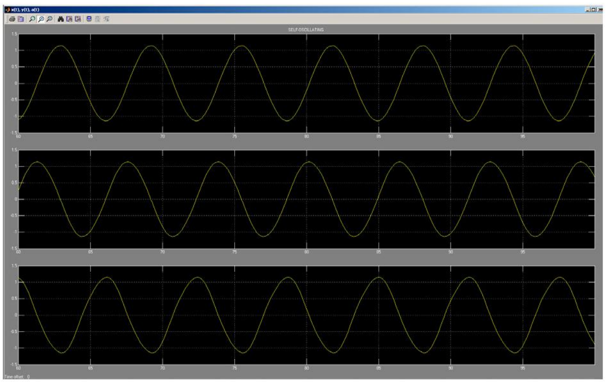
Анализ устойчивости данных решений показывает, что состоянию устойчивого равновесия соответствует амплитуда колебаний φ_{m2}.

Относительную погрешность будем рассчитывать по формуле

$$\delta = \frac{|\varphi_m - \varphi_{m2}|}{\varphi_m} \cdot 100\,\%,$$

где φ_m – амплитуда колебаний, найденная в результате численного решения уравнения движения (3); φ_{m2} – то же, найденная по (5), которые получены в результате решения уравнения (3) методом Ван-дер-Поля.

Численное решение уравнения движения (3) проводилось в программном пакете MatLab. Результаты расчетов для характерных случаев нелинейности системы представлены ниже в виде временных диаграмм на рис. 1–3.



φ

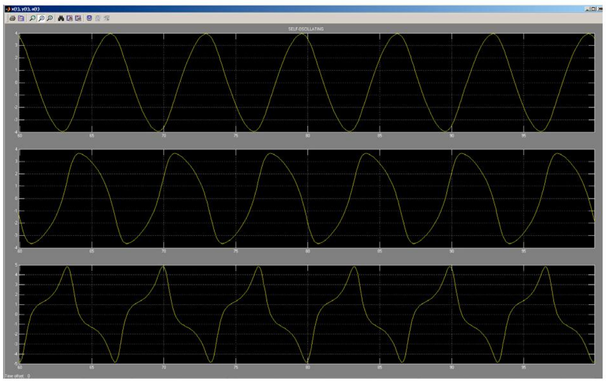
$\dot{\varphi}$

$\ddot{\varphi}$

Рис. 1. Временные диаграммы φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ при «малой» нелинейности системы ($\mu = 0,1$)

1. Случай «малой» нелинейности автоколебательной системы ($\mu \ll 1$).

Задаем параметры автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» такими, чтобы малый параметр составлял $\mu = 0,1$.



φ

$\dot{\varphi}$

$\ddot{\varphi}$

Рис. 2. Временные диаграммы φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ при «средней» нелинейности системы ($\mu = 1$)

В результате решения (3) с заданными параметрами методом Ван-дер-Поля по (5) получаем амплитуду устойчивых колебаний $\varphi_{m2} = 1,155$ о. е.

Амплитуда колебаний, найденная по временным диаграммам (рис. 1) в результате численного решения уравнения движения (3) в программном пакете MatLab $\varphi_m = 1,142$ о. е. Как видно из рис. 1, в системе с «малой» нелинейностью относительные угловая координата φ, скорость $\dot{\varphi}$ и ускорение $\ddot{\varphi}$ изменяются по синусоидальному закону.

Погрешность метода Ван-дер-Поля для случая «малой» нелинейности автоколебательной системы составит

$$\delta = \frac{|\varphi_m - \varphi_{m2}|}{\varphi_m} \cdot 100\,\% = \frac{|1,142 - 1,155|}{1,142} \cdot 100\,\% = 1,14\ \%.$$

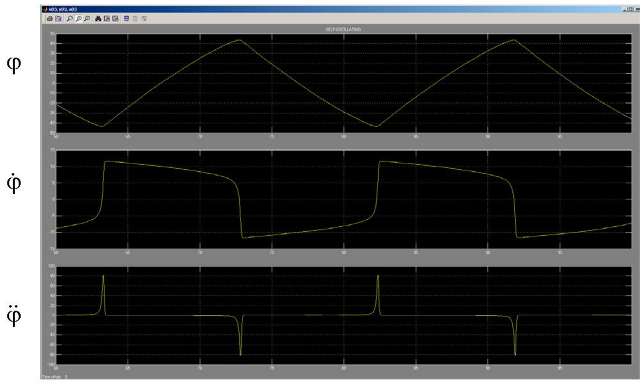


Рис. 3. Временные диаграммы φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ при «большой» нелинейности системы ($\mu = 10$)

2. Случай «средней» нелинейности автоколебательной системы ($\mu = 1$).

Задаем параметры автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» такими, чтобы $\mu = 1$.

В результате решения (3) с заданными параметрами методом Ван-дер-Поля по (5) получаем амплитуду устойчивых колебаний $\varphi_{m2} = 3{,}651$ о. е.

Амплитуда колебаний, найденная по временным диаграммам (рис. 2) в результате численного решения уравнения движения (3) в программном пакете MatLab, 4 о. е. Как видно из рис. 2, в данном случае нелинейность системы проявляется в несинусоидальности автоколебательного движения, что особенно заметно для ускорения $\ddot{\varphi}$.

Погрешность метода Ван-дер-Поля для данного случая $\delta = 8{,}73$ %.

3. Случай «большой» нелинейности автоколебательной системы ($\mu = 10$).

Задаем параметры автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» такими, чтобы $\mu = 10$.

В результате решения (3) с заданными параметрами методом Ван-дер-Поля по (5) получаем амплитуду устойчивых колебаний $\varphi_{m2} = 11{,}55$ о. е.

Амплитуда колебаний, найденная по временным диаграммам (рис. 3) в результате численного решения уравнения движения (3) в программном пакете MatLab $\varphi_m = 43{,}55$ о. е. Как видно из рис. 3, в случае «большой» нелинейности системы несинусоидальность проявляется и по относительной угловой координате φ, и по скорости $\dot{\varphi}$, и по ускорению $\ddot{\varphi}$.

Погрешность метода Ван-дер-Поля для данного случая $\delta = 74{,}48$ %.

Проведя дополнительные расчеты для промежуточных значений малого параметра μ, в диапазоне 0,1–10,0 получим зависимость $\delta = f(\mu)$, график которой представлен на рис. 4.

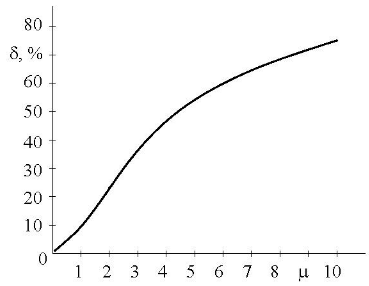


Рис. 4. Зависимость погрешности метода Ван-дер-Поля δ от величины малого параметра μ для автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент»

ВЫВОДЫ

1. Получено выражение (4) для определения малого параметра, который определяет близость нелинейной автоколебательной системы к линейной консервативной. Данное выражение совместно с графиком зависимости $\delta = f(\mu)$ можно использовать для определения погрешности, которую дают асимптотические методы анализа автоколебательной системы, описанной в данной работе (в частности, метод Ван-дер-Поля).

2. Выражение (4) можно использовать при проектировании приводов на основе однофазных асинхронных электродвигателей, работающих в автоколебательном режиме. Следует выбирать электродвигатель и нагрузку с такими параметрами, чтобы значение малого параметра было как можно меньше. В этом случае мощность двигателя не будет затрачиваться на растягивание или сжатие пружины, а идти только на компенсацию потерь трения в системе, что приведет к улучшению энергетических характеристик электропривода.

3. Получена зависимость погрешности метода Ван-дер-Поля δ от величины малого параметра μ для автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейный упругий элемент» (рис. 4). Из рис. 4 видно, что приближенные методы анализа уравнения движения (в частности, метод Ван-дер-Поля) дают удовлетворительные результаты лишь при $\mu < 1$, в этом случае погрешность менее 10 %. Если же $\mu < 0{,}1$, то закон колебаний можно считать гармоническим и погрешность расчетов не превышает 1 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.

2. Луковников, В. И. Физические процессы автоколебательного движения в системе «однофазный асинхронный электродвигатель – упругий элемент» / В. И. Луковников, Ю. А. Рудченко // Вестник ГГТУ имени П. О. Сухого. – 2006. – № 4. – С. 60–66.

3. Sumec, I. K. Der einphasige Induktionsmotor / I. K. Sumec // Archiv der Math. Und Physik. – 1905. – Bd8. – S. 306.

4. Луковников, В. И. Критический сравнительный анализ методов исследования электромеханических автоколебательных систем / В. И. Луковников, Ю. А. Рудченко, Г. И. Селиверстов // Вестник ГГТУ имени П. О. Сухого. – 2007. – № 2. – С. 76–81.

Представлена кафедрой
электроснабжения

Поступила 04.11.2010