УДК 519.6

ОПЕРАТОРНЫЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ БОЛЬШИХ СТЕПЕНЕЙ РЯДОВ ФУРЬЕ

***Бартошевич Анастасия Валерьевна*, *Семенович Ангелина Викторовна*,**
студенты 2-го курса Строительного факультета
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Акимов В.А., канд. физ.-мат. наук)

Как известно [3, 5] функцию f(x), периодичную с периодом T=2l и удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в ряд Фурье на отрезке [*-l, l*]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\delta_n x)$$

где:

$$\delta_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\delta_n x\,dx\,, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Если *f(x)* – четная функция, то b_n=0, n=1,2,…,

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\delta_n x\,dx\,, \qquad n = 0,1,\ldots$$

В некоторых случаях заданную на отрезке [0, l] функцию достаточно разложить в ряд только по косинусам, а затем продолжить ее четным способом на отрезок [-l, 0]. В точке разрыва первого рода ряд Фурье функции сходится к значению $f(x)$=0,5[$f(x+0)+f(x-0)$].

Рассмотрим оператор

$$T_l[f(x)] = \frac{\mathrm{f(x+l)-f(x-l)}}{2} \quad (3.1)$$

Используя известные тригонометрические формулы, определяем:

$$T_l[\cos\delta_n x] = -sin\,\delta_n x\sin\pi n = 0 \quad (3.2)$$

Аналогично:

$$T_l[\cos\delta_n x] = (-1)^n l\cos\delta_n x \ (3.3)$$

Кроме T_l введем оператор V_n:

$$V_n[f(x)] = \frac{f(x)}{1 + d_x^2/\delta_n^2} \ (3.4)$$

На основе принципа суперпозиции устанавливаем свойства операторов D_0 и D_2:

$$D_0 = \frac{sh(ld_x)}{ld_x}$$

$$D_0[\cos\delta_m x] = 0, D_0[C] = C$$

$$D_2 = \frac{ld_x sh(ld_x)}{1 + d_x^2/\delta_n^2}$$

$$D_2[\cos\delta_m x] = \begin{cases} \frac{(-1)^n l^2 \delta_n^2}{2}\cos\delta_n x & \text{при } m \neq n \\ 0 & \text{при } m = n \end{cases}; \ D_2[C] = 0$$

Рассмотрим конкретные примеры нахождения коэффициентов рядов Фурье операторным методом.

Пусть $x^{2r} = \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos\delta_k x, \quad r = 0,1,2,\ldots$

Непосредственно установим:

$$D_0[x^{2r}]|_{x=0} = \frac{l^{2r}}{2r+1}, D_0\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_k\cos\delta_k x\right] = a_0,$$

$$D_0[x^{2r}]|_{x=0} = 2rl^{2r} + \cdots + (-1)^{r-1}\frac{(2r)!\,l^2}{\delta_n^{2r-2}}, D_2\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_k\cos\delta_k x\right]|_{x=0} =$$

$$= a_n\frac{(-1)^n l^2\delta_n^2}{2}$$

Окончательно получим:

$$x^{2r} = \frac{l^{2r}}{2r+1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2r(2r-1)l^{2r-2}}{\delta_n^2} + \cdots + (-1)^{r-1}\frac{(2r)!}{\delta_n^{2r}}\right]\cos\delta_n x \ (3.5)$$

Выражение (3.5) после подстановки в него значений r=4 и l=π, а также r=5 и l=π принимает соответственно следующий вид:

$$x^8 = \frac{\pi^8}{9} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{8\pi^6}{n^2} - \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot \pi^4}{n^4} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot \pi^2}{n^6} - \frac{8!}{n^8}\right]\cos nx$$

$$x^{10} = \frac{\pi^{10}}{11} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{10\pi^8}{n^2} - \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot \pi^6}{n^4} + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot \pi^4}{n^{66}} - \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot \pi^2}{n^8} - \frac{10!}{n^{10}}\right]\cos nx$$

Таким образом приходим к разложению четных степенных функций в ряды Фурье.