

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ НАНОБАЛОК С УЧЕТОМ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВЫХ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

<sup>1</sup>Михасев Г. И., <sup>2</sup>Radi E.

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Università di Modena e Reggio Emilia, Reggio Emilia, Italy

**Введение.** Семейства параллельно ориентированных нанотрубок, взаимодействующих между собой посредством полей межмолекулярных сил, представляют собой уникальные объекты, которые находят свое применение в различных микро- и наноразмерных электромеханических системах (МЭМС и НЭМС). В частности, пара конусообразных параллельно расположенных нанотрубок, взаимодействующих между собой как два бистабильных электрода, является основным элементом наноразмерных пинцетов, используемых в современной микрохирургии для манипуляций на клеточном уровне [1]. Массив вертикально ориентированных нанотрубок, запечатанных с обеих сторон между пластинками или мембранами, является сверхчувствительным элементом в таких НЭМС как наноразмерные датчики давления и напряжений [2], настраиваемые осцилляторы и резонаторы [3], биометрические сенсоры [4]. Такие факторы, как оптимальное расстояние между трубками, их длина, а также возникающие межмолекулярные ван-дер-ваальсовы и казимировые силы, являются определяющими при моделировании механического поведения подобных НЭМС. Сверхмалые размеры всех элементов системы ставят задачу учета не только межмолекулярных сил взаимодействия между трубками, но и внутренних нелокальных эффектов деформирования самих трубок.

Целью данной статьи является постановка задачи о колебаниях системы параллельно ориентированных нанотрубок, моделируемых нанобалками, в рамках нелокальной теории упругости Эрингена [5–8]. Предполагается, что расстояние между нанобалками достаточно мало, что приводит к появлению межмолекулярных ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия.

**Общая постановка задачи.** Рассмотрим плоскую систему из  $N$  параллельно ориентированных нанобалок длиной  $l$ , стоящих на жесткой неподвижной подложке, см. рисунок 1. Верхние края балок могут быть свободны, жестко защемлены, либо свободно оперты. Расстояние между соседними балками в их основании одинаково и равно  $g$ . Уравнение движения  $n$ -ой нанобалки, моделируемой в рамках континуальной теории упругости, будем описывать уравнением

$$\frac{\partial^2 M_n}{\partial x^2} = -q_n(x) + \rho S \frac{\partial^2 W_n^*}{\partial t^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где  $M_n$  – изгибающий момент,  $x$  – осевая координата, общая для всех балок и отсчитываемая от их основания,  $t$  – время,  $W_n^*$  – нормальное перемещение  $n$ -ой балки (в направлении, ортогональном к оси  $Ox$ ),  $\rho$ ,  $S$  – плотность материала и площадь поперечного сечения балок, соответственно, а  $q_n(x)$  – равнодействующая распределенных ван-дер-ваальсовых сил, действующих на  $n$ -ю балку со стороны соседних, и зависящая от относительных перемещений  $W_n^* - W_{n-1}^*$  и  $W_{n+1}^* - W_n^*$ .

Поставим задачу о выводе системы интегро-дифференциальных и дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий, описывающих динамику семейства параллельно ориентированных балок с учетом как ван-дер-ваальсовых сил, так и эффектов нелокального деформирования каждой балки.

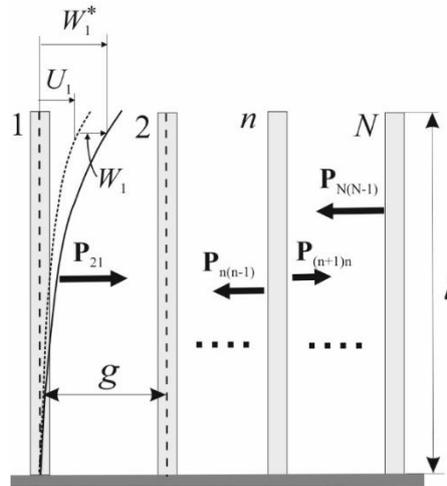


Рис. 1. Плоская система  $N$  параллельно ориентированных нанобалок

**Ван-дер-ваальсовы силы.** Межмолекулярные ван-дер-ваальсовы силы действующие между ближайшими нанобалками, вызванные их отклонением от положения равновесия, могут быть найдены с использованием потенциала Леннарда-Джонсона [9],

$$\varphi_{ij} = \frac{C_{12}}{r_{ij}^{12}} - \frac{C_6}{r_{ij}^6}, \quad (2)$$

где  $r_{ij}$  – расстояние между  $i$ -ым и  $j$ -ым атомами, например,  $n$ -ой и  $(n+1)$ -ой нанобалками, рассматриваемых как дискретные системы, а  $C_{12}$  и  $C_6$  – так называемые отталкивающая и притягивающая константы, соответственно. Ван-дер-ваальсова сила  $P_{(n+1)n}$  взаимодействия двух соседних нанобалок, вызванных их относительным перемещением  $W_{n+1}^* - W_n^*$  из положения равновесия может быть найдена путем интегрирования ван-дер-ваальсовой энергии взаимодействия по объему двух нанобалок подобно тому, как это было сделано в работе [10] при оценке ван-дер-ваальсовых сил между двумя нанотрубками. Заметим, что в общем случае соответствующие соотношения для компонент силы  $P_{(n+1)n}$  достаточно сложны и носят нелинейный характер относительно функции  $W_{n+1}^*(x, t) - W_n^*(x, t)$ .

Приведем здесь полученную в [11] наиболее простую формулу ван-дер-ваальсовых сил для двух консольных параллельно ориентированных трубок толщиной  $h$  с внешним радиусом  $R$ :

$$P_{12} \approx \frac{3Ah^2}{254R^2(g - 2W^*)^{5/2}}, \quad (3)$$

где  $A$  – постоянная Хамакера, а  $W^*$  – перемещение одной трубки. Формула (3) выведена в [11] при моделировании устойчивости нанопинцета и соответствует случаю симметричной деформаций первой и второй трубок, а также при условии выполнения сильно-

го неравенства  $R \ll g$ , при котором коэффициент  $C_{12}$  пренебрежительно мал, а  $C_6 = 15,6 \text{ eV\AA}^6$ .

Представим перемещение в виде

$$W^*(x, t) = U_s(x) + W(x, t), \quad (4)$$

где  $U_s(x)$  – статическое отклонение, вызванное действием ван-дер-ваальсовых сил, а  $W(x, t)$  – дополнительно динамическое перемещение, соответствующее малым колебаниям в окрестности положения равновесия. Предполагая выполнение условия  $W \ll g - 2U_s$  для любого  $0 \leq x \leq l$ , ван-дер-ваальсову силу (3) можно представить в виде  $P_{12} = P_{vdW}^{(s)} + P_{vdW}^{(d)}$ , где

$$P_{vdW}^{(s)} = \frac{3Ah^2}{254R^{3/2}(g-2U_s)^{5/2}}, \quad P_{vdW}^{(d)} = c_{vdW}^*(x)W(x, t), \quad c_{vdW}^*(x) = \frac{15Ah^2}{254R^{3/2}[g-2U_s(x)]^{7/2}}. \quad (5)$$

Таким образом, в случае двух одинаковых параллельно ориентированных трубок, их малые симметричные колебания в окрестности статического деформированного состояния, вызванного действием сил  $P_{vdW}^{(s)}$ , можно описать линейным уравнение

$$\frac{\partial^2 M^{(d)}}{\partial x^2} = -c_{vdW}^*(x)W + \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Здесь,  $M^{(d)}(x, t)$  – динамический момент, являющийся функцией амплитуды  $W(x, t)$  малых изгибных колебаний, а  $c_{vdW}^*(x)$  – переменный ван-дер-ваальсов коэффициент, зависящий от статического перемещения  $U_s(x)$ , которое, в свою очередь, находится из решения нелинейного уравнения

$$\frac{\partial^2 M^{(s)}}{\partial x^2} = -P_{vdW}^{(s)}, \quad (7)$$

где  $M^{(s)}(x)$  – изгибающий статический момент, определяемый через перемещение  $U_s(x)$ , а статическая ван-дер-ваальсова сила  $P_{vdW}^{(s)}$  находится согласно (5).

Уравнение (7) не допускает точного аналитического решения, однако его приближенное решение  $U_s(x)$  может быть найдено так же как и в статье [12] в предположении о линейной или квадратичной зависимости ван-дер-ваальсовой силы  $P_{vdW}^{(s)}$  от координаты  $x$  в случае консольного нановыключателя. Заметим при этом, что брешь  $g$  между балками не должна быть меньше некоторого критического значения  $g_c$ , при котором происходит критическое втягивание трубок и их взаимное касание в вершине [13; 14].

Если считать, что величина  $g$  и жесткость каждой трубки  $EI$  на изгиб достаточно велики, а длина трубок  $l$  мала, так что  $U_s(x) \ll g/2$  для любого  $x$ , то коэффициент  $c_{vdW}^*$  в уравнении (6) можно считать приблизительно постоянным. Заметим, что аналогичное предположение о постоянстве коэффициента  $c_{vdW}^*$  вдоль оси нанотрубки было подтверждено в работе [10] в результате оценки ван-дер-ваальсовых сил между одностенными углеродными нанотрубками (УНТ) с использованием потенциала Леннарда-Джонсона (2). В частности, для двух одностенных УНТ длиной  $l = 5 \text{ нм}$  и внешним радиусом  $R = 1,34 \text{ нм}$ , находящихся на расстоянии  $g = 3 \text{ нм}$ , расчеты, выполненные в [10], дали значение  $c_{vdW}^* \approx 10 EI/l^4$ .

В дальнейшем, моделируя малые колебания семейства  $N > 2$  нанобалок в окрестности слабо возмущенного статического состояния, будем считать, что ванн-дер-ваальсовы связи между двумя соседними параллельно ориентированными нанобалками подчиняются линейному закону

$$P_{(n+1)n} = c_{vdW}^*(W_{n+1} - W_n), \quad (8)$$

где  $c_{vdW}^*$  – постоянная ван-дер-ваальсова константа, зависящая как от расстояния  $g$  между нанобалками, так и от геометрических и физических характеристик нанобалок [10,11], а  $W_n(x, t)$  – дополнительное динамическое отклонение балки от статического равновесного положения, характеризующегося отклонением  $U_n(x)$  (на рисунок 1 данные перемещения показаны лишь для первой нанобалки).

**Нелокальный изгибающий момент.** В рамках классической (локальной) теории упругости, изгибающий момент в  $n$ -ой балке при малых колебаниях в окрестности положения равновесия определяется как

$$M_n = -EI \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где  $EI$  – изгибная жесткость, которая здесь принимается постоянной для всех нанобалок. В рамках двух-фазной (смешанной) нелокальной теории упругости Эрингена, изгибающий *нелокальный* момент находится как сочетание локальной и нелокальной составляющих [15; 16]

$$M_n = -EI \left( \xi_1 \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} + \xi_2 \int_0^l K(|x - \hat{x}|, \kappa) \frac{\partial^2 W_n}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} \right). \quad (10)$$

Здесь  $K(|x - \hat{x}|, \kappa)$  – положительная функция (ядро), быстро затухающая вдали от  $x$ , удовлетворяющая условия симметрии относительно  $x$ , а также условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(|x - \hat{x}|, \kappa) d\hat{x} = 1,$$

где  $\kappa = e_0 a$  – нелокальный параметр, зависящий от материальной константы  $e_0$  и внутренней характерной длины  $a$  (параметр решетки или гранул, расстояние между атомами и т. п.), а  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – объемные доли локальной и нелокальной фаз, соответственно, такие что  $\xi_1 + \xi_2 = 1$  и  $\xi_1 \xi_2 \geq 0$ . Если  $\xi_1 = 0$ , то (10) принимает форму, соответствующую чисто нелокальной модели Эрингена, а при  $\xi_1 = 1$  формула (10) вырождается в (9).

**Уравнения движения. Граничные условия.** Подстановка (8), (10) в (1) приводит к системе  $N$  интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} EI \left( \xi_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l K(|x - \hat{x}|, \kappa) \frac{\partial^2 W_1}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} \right) - c_{vdW}^*(W_2 - W_1) + \rho S \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = 0, \\ EI \left( \xi_1 \frac{\partial^4 W_n}{\partial x^4} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l K(|x - \hat{x}|, \kappa) \frac{\partial^2 W_n}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} \right) - \\ - c_{vdW}^*(W_{n+1} - 2W_n + W_{n-1}) + \rho S \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2} = 0, \dots, n = 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$EI \left( \xi_1 \frac{\partial^4 W_N}{\partial x^4} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l K(|x - \hat{x}|, \kappa) \frac{\partial^2 W_N}{\partial \hat{x}^2} d\hat{x} \right) + c_{vdW}^*(W_{N-1} - W_N) + \rho S \frac{\partial^2 W_N}{\partial t^2} = 0.$$

Уравнения (11) следует дополнить граничными условиями. На нижнем крае каждой балки рассмотрим условия жесткого защемления:

$$W_n = \frac{\partial W_n}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (12)$$

На верхнем крае рассмотрим один из следующих вариантов:

а) жесткое защемление

$$W_n = \frac{\partial W_n}{\partial x} = 0 \text{ при } x = l; \quad (13)$$

б) шарнирное опирание

$$W_n = M_n = 0 \text{ при } x = l; \quad (14)$$

в) свободный край

$$M_n = Q_n = 0 \text{ при } x = l, \quad (15)$$

где  $Q_n = \frac{\partial M_n}{\partial x}$  – перерезывающая сила. Заметим, что в силу принятия нелокального закона физического состояния Эрингена, изгибающий момент и перерезывающая сила на краях носят нелокальный характер и зависят от перемещений точек в окрестности края.

Система уравнений (11) с граничными условиями (12, 13) или (12, 14) может быть использована для моделирования динамики большого массива нанотрубок, запечатанных между двумя жесткими пластинами, а граничная задача (11, 15) – для исследования колебаний «леса» нанотрубок, свободно стоящих на жесткой подложке.

**Сведение задачи к эквивалентной дифференциальной форме.** Система интегро-дифференциальных уравнений (11) достаточно сложна для анализа. Однако в случае принятия ядра Гельмгольца [17–19], которое наиболее часто используется для исследования динамики *одномерных* наноразмерных объектов (нитей, стержней и балок), уравнения (12) могут быть сведены к эквивалентной системе дифференциальных уравнений. В дальнейшем в уравнениях (11) примем

$$K(|x - \hat{x}|, \kappa) = \frac{1}{2\kappa} \exp\left(-\frac{|x - \hat{x}|}{\kappa}\right). \quad (16)$$

Заметим, что для данного ядра справедливы следующие преобразования:

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 e^{-\frac{|s-\hat{s}|}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ e^{\frac{s}{\varepsilon}} \int_s^1 e^{-\frac{\hat{s}}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} - e^{-\frac{s}{\varepsilon}} \int_0^s e^{\frac{\hat{s}}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} \right], \quad (17)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \int_0^1 e^{-\frac{|s-\hat{s}|}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 e^{-\frac{|s-\hat{s}|}{\varepsilon}} y(\hat{s}) d\hat{s} - \frac{2}{\varepsilon} y(s). \quad (18)$$

Имея в виду исследовать свободные колебания системы, перемещения нанобалок представим в виде  $W_n = w_n(s) \exp(i \omega t)$ , где  $s = x/l$  – безразмерная осевая координата,  $i$  – мнимая единица, а  $\omega$  – собственная частота колебаний. Введем также безразмерные параметры

$$\varepsilon = \frac{\kappa}{l}, \quad \lambda^4 = \frac{\rho S l^4 \omega^2}{EI}, \quad c = \frac{l^4 c_{vdW}}{EI}, \quad (19)$$

где  $1 \gg \varepsilon$  – малый параметр.

Решения системы (11) будем искать в классе функций [16, 19]  $w_n(s) \in C^6[0, 1]$ . Дифференцируя уравнения (11) дважды по  $s$  и принимая во внимание тождество (18), приходим к системе  $N$  дифференциальных уравнений 6-го порядка:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\varepsilon\xi} \frac{d^4 w_1}{ds^4} - \mathbf{J}_\varepsilon [c(w_2 - w_1) + \lambda^4 w_1] &= 0, \\ \mathbf{I}_{\varepsilon\xi} \frac{d^4 w_n}{ds^4} - \mathbf{J}_\varepsilon [c(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) + \lambda^4 w_n] &= 0, \quad n = 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{I}_{\varepsilon\xi} \frac{d^4 w_N}{ds^4} - \mathbf{J}_\varepsilon [c(w_N - w_{N-1}) + \lambda^4 w_N] = 0,$$

где  $\xi = \xi_1$ , а  $\mathbf{I}_{\varepsilon\xi}$  и  $\mathbf{J}_\varepsilon$  – дифференциальные операторы второго порядка, определяемые как

$$\mathbf{I}_{\varepsilon\xi} = \varepsilon^2 \xi \frac{d^2}{ds^2} - 1, \quad \mathbf{J}_\varepsilon = \varepsilon^2 \frac{d^2}{ds^2} - 1. \quad (21)$$

Граничные условия в случае, когда верхние края свободны или шарнирно оперты, также могут быть переписаны в дифференциальной форме. Для этого обратимся к исходным интегро-дифференциальным уравнениям (11). Используя свойство (18) и выражая из уравнений (11) интегральные компоненты, условия  $M_n(1) = 0$  и  $Q_n(1) = 0$  можно переписать в чисто дифференциальной форме [16]:

$$\begin{aligned} M_n(1) = 0 &\Rightarrow w_n''(1) + \varepsilon^2 K_n = 0, \\ Q_n(1) = 0 &\Rightarrow \varepsilon \xi w_n'''(1) - \Gamma_n = 0, \quad n = 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= -\xi w_1^{IV}(1) + \lambda^4 w_1(1) + c[w_2(1) - w_1(1)], \\ K_n &= -\xi w_n^{IV}(1) + \lambda^4 w_n(1) + c[w_{n+1}(1) - 2w_n(1) + w_{n-1}(1)], \\ K_N &= -\xi w_N^{IV}(1) + \lambda^4 w_N(1) - c[w_N(1) - w_{N-1}(1)], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\varepsilon^2 \xi w_1^{IV}(1) + (1 - \xi) w_1''(1) + \varepsilon^2 \{c[w_2(1) - w_1(1)] + \lambda^4 w_1(1)\}, \\ \Gamma_n &= -\varepsilon^2 \xi w_n^{IV}(1) + (1 - \xi) w_n''(1) + \varepsilon^2 \{c[w_{n+1}(1) - 2w_n(1) + w_{n-1}(1)] + \lambda^4 w_n(1)\}, \\ \Gamma_N &= -\varepsilon^2 \xi w_N^{IV}(1) + (1 - \xi) w_N''(1) + \varepsilon^2 \{c[w_N(1) - w_{N-1}(1)] + \lambda^4 w_N(1)\} \end{aligned}$$

при  $n = 2, \dots, N-1$ .

Ввиду повышения порядка дифференцирования в уравнениях (20), по сравнению с исходными уравнениями (11), общие решения уравнений (20) могут содержать посторонние частные решения, которые должны быть исключены. Для этого на систему дифференциальных уравнений (20) должны быть наложены дополнительные  $2N$  граничных условий – по одному краевому условию на каждом крае для каждой балки. Эти условия могут быть получены из исходных интегро-дифференциальных уравнений (11). Интегрируя каждое из них по  $s$  и используя свойства ядра (17, 18), приходим к недостающим  $N$  краевым условиям на нижнем крае,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \xi w_1^V(0) - \varepsilon^2 \xi w_1^{IV}(0) - (1 - \xi)[\varepsilon w_1'''(0) - w_1''(0)] + \\
& + \varepsilon^2 \lambda^4 [w_1(0) - \varepsilon w_1'(0)] + c \varepsilon^2 \{w_2(0) - w_1(0) - \varepsilon [w_2'(0) - w_1'(0)]\} = 0, \\
& \varepsilon^3 \xi w_n^V(0) - \varepsilon^2 \xi w_n^{IV}(0) - (1 - \xi)[\varepsilon w_n'''(0) - w_n''(0)] + \varepsilon^2 \lambda^4 [w_n(0) - \varepsilon w_n'(0)] + \\
& + c \varepsilon^2 \{w_{n+1}(0) - 2w_n(0) + w_{n-1}(0) - \varepsilon [w_{n+1}'(0) - 2w_n'(0) + w_{n-1}'(0)]\} = 0, \\
& \varepsilon^3 \xi w_N^V(0) - \varepsilon^2 \xi w_N^{IV}(0) - (1 - \xi)[\varepsilon w_N'''(0) - w_N''(0)] + \\
& + \varepsilon^2 \lambda^4 [w_N(0) - \varepsilon w_N'(0)] - c \varepsilon^2 \{w_N(0) - w_{N-1}(0) - \varepsilon [w_N'(0) - w_{N-1}'(0)]\} = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

и  $N$  условиям на верхнем крае,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \xi w_1^V(1) + \varepsilon^2 \xi w_1^{IV}(1) - (1 - \xi)[\varepsilon w_1'''(1) + w_1''(0)] - \\
& - \varepsilon^2 \lambda^4 [w_1(1) + \varepsilon w_1'(1)] - c \varepsilon^2 \{w_2(1) - w_1(1) + \varepsilon [w_2'(1) - w_1'(1)]\} = 0, \\
& \varepsilon^3 \xi w_n^V(1) + \varepsilon^2 \xi w_n^{IV}(1) - (1 - \xi)[\varepsilon w_n'''(1) + w_n''(1)] - \varepsilon^2 \lambda^4 [w_n(1) + \varepsilon w_n'(1)] - \\
& - c \varepsilon^2 \{w_{n+1}(1) - 2w_n(1) + w_{n-1}(1) + \varepsilon [w_{n+1}'(1) - 2w_n'(1) + w_{n-1}'(1)]\} = 0, \\
& \varepsilon^3 \xi w_N^V(1) + \varepsilon^2 \xi w_N^{IV}(1) - (1 - \xi)[\varepsilon w_N'''(1) + w_N''(1)] - \\
& - \varepsilon^2 \lambda^4 [w_N(1) + \varepsilon w_N'(1)] + c \varepsilon^2 \{w_N(1) - w_{N-1}(1) + \varepsilon [w_N'(1) - w_{N-1}'(1)]\} = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Система (20), состоящая из  $N$  дифференциальных уравнений 6-го порядка, является сингулярно возмущенной, ибо содержит малый параметр при старшей производной. Непосредственное интегрирование данных уравнений с соответствующими краевыми условиями и определение собственных значений  $\lambda$  является непростой задачей и является предметом отдельного рассмотрения и дополнительных исследований. Заметим лишь что в частном случае для  $N=1$  она была решена в [16] методом асимптотического интегрирования, при котором общее решение строилось в виде суперпозиции основного решения, описывающего напряженно-деформированное состояние внутри нанобалки, и интегралов краевого эффекта, учитывающих нелокальные эффекты вблизи краев наноконсоли.

**Заключение.** С использованием нелокальной двухфазной теории упругости Эрингена получена система из  $N$  интегро-дифференциальных уравнений, описывающая свободные плоскостные колебания семейства  $N$  параллельно ориентированных нанобалок с учетом ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия. Показано, что в случае принятия в законе физического состояния ядра Гельмгольца, система интегро-дифференциальных уравнений может быть сведена к эквивалентной системе  $N$  дифференциальных уравнений 6-го порядка, а граничные условия для свободного или шарнирно-опертого краев могут быть также записаны в дифференциальной форме. Выведены дополнительные  $2N$  граничных условия, гарантирующие исключение «побочных» решений. Полученная система дифференциальных уравнений может быть использована для исследования свободных колебаний «леса» вертикально-ориентированных нанотрубок на подложке, для анализа колебаний семейства параллельно ориентированных нанотрубок, запечатанных между двумя пластинками, а также для исследования колебаний нанопинцета в окрестности статического деформированного состояния с учетом ван-дер-ваальсовых сил взаимодействия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kim, P. Nanotube nanotweezers / P. Kim, C. M. Lieber // Science. – 1999. –V. 286. – P. 2148–2150.
2. Bsoul, A., Piezoresistive pressure sensor using vertically aligned carbon-nanotube forests / A. Bsoul, M. S. Mohamed, K. Takahata // Electronic Letters. – 2011. – V. 47 (14). – P. 807–808.

3. A tunable carbon nanotube electromechanical oscillator / V. Sazonova [et al.] // *Nature*. – 2004. – V. 431. – P. 284–287.
4. Schneider, J. J. Vertically aligned carbon nanotubes as platform for biomimetically inspired mechanical sensing, bioactive surfaces, and electrical cell interfacing / J. J. Schneider // *Advanced Biosystems*. – 2017. – V. 1(11) – 1700101–13.
5. Eringen, A. C. Nonlocal polar elastic continua / A. C. Eringen // *Int. J. Eng. Sci.* – 1972. – V. 10. – P. 1–16.
6. Eringen, A. C. On nonlocal elasticity / A. C. Eringen, D. G. B. Edelen // *Int. J. Eng. Sci.* – 1972. – V. 10. – P. 233–248.
7. Eringen, A. C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves / A. C. Eringen // *J. Appl. Phys.* – 1983. – V. 54. – P. 4703–4710.
8. Eringen, A. C. *Nonlocal Continuum Field Theories* / A. C. Eringen. – New York: Springer, 2002.
9. Jones, J. E. On the Determination of Molecular Fields. I. From the Variation of the Viscosity of a Gas with Temperature / J. E. Jones // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1924. – V. 106(738). – P. 441–462.
10. Kiani, K. In- and out-of-plane dynamic flexural behaviors of two-dimensional ensembles of vertically aligned single-walled carbon nanotubes / K. Kiani // *Physica B*. – 2014. – V. 449. – P. 164–180.
11. Farrokhabadi A. Modeling the static response and pull-in instability of CNT nanotweezers under the Coulomb and van der Waals attractions / A. Farrokhabadi, R. Rach, M. Abadyan // *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*. – 2013. – V. 53. – P. 137–145.
12. Mikhasev, G. I. Pull-in instability analysis of a nanocantilever based on the two-phase nonlocal theory of elasticity / G. I. Mikhasev, E. Radi, V. Misnik // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. – 2022. – V. 8(4). – P. 1456–1466.
13. Electrostatic pull-in instability for tweezer architectures / G. Bianchi [et al.] // *Mecanica*. – 2022. – V. 57. – P. 1767–1781.
14. Radi, E. Bounds to the pull-in voltage of a MEMS/NEMS beam with surface elasticity / E. Radi, G. Bianchi, A. Nobili // *Applied Mathematical Modelling*. – 2021. – V. 91. – P. 1211–1226.
15. Fernández-Sáez, J. Vibrations of Bernoulli-Euler beams using the two-phase nonlocal elasticity theory / J. Fernández-Sáez, R. Zaera // *International Journal of Engineering Sciences*. – 2017. – V. 119. – P. 232–248.
16. Mikhasev, G. On the solution of the purely nonlocal theory of beam elasticity as a limiting case of the two-phase theory / G. Mikhasev, A. Nobili // *International Journal of Solids and Structures*. – 2020. – V. 190. – P. 47–57.
17. Challamel, N. The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved / N. Challamel, C. M. Wang // *Nanotechnology*. – 2008. – V. 19. – P. 345703–345710.
18. Benvenuti, E. One-dimensional nonlocal and gradient elasticity: Closed-form solution and size effect / E. Benvenuti, A. Simone // *Mechanics Research Communications*. – 2013. – V. 48. – P. 46–51.
19. Mikhasev, G. Free high-frequency vibrations of nonlocally elastic beam with varying cross-section area / G. Mikhasev // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. – 2021. – V. 33. – P. 1299–1312.

Поступила: 15.05.2023