

## БИОМЕХАНИКА И ЕЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ГЛАЗА ПРИ ПНЕВМОТОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЯХ

<sup>1</sup>Чигарев А. В., <sup>2</sup>Михнович М. О.

<sup>1</sup>Белорусского государственного университета, Минск

<sup>2</sup>Белорусского национально технического университета, Минск

**Общие сведения.** Пневмотонометр, предназначенный для измерения внутриглазного давления (ИОД) сочетает механическое воздействие импульсом воздуха на роговицу глаза с оптическим измерением перемещения точек поверхности роговицы [10; 7]. В работе рассмотрена биомеханика глаза под внешним действием. Оптическая составляющая измерения не рассматривается, т. к. оптические воздействия на динамику роговицы ничтожно малы по сравнению с механическими и будут отдельно рассмотрены в дальнейшем в рамках дифракции оптической волны на неровной поверхности роговицы при ее деформировании.

Экспериментальные исследования биомеханики глаза человека при пневмотонометрических испытаниях показывают, что движение точек поверхности роговицы представляет собой суперпозицию нескольких механических деформаций и перемещений под действием импульса воздуха [18; 19; 22]. Точки поверхности роговицы вследствие деформации перемещаются вертикально, а амплитуда убывает в виде быстро затухающей волны практически вдоль радиуса. Практически одновременно, глаз как целое тело поступательно перемещается вдоль оптической оси и одновременно совершает вращательные микродвижения вокруг центра масс глаза (прецессия и нутация). Собственное вращение глаза вокруг оптической оси экспериментально не наблюдается. Исследования выявляют микровибрации оболочки глаза вследствие кровообращения в микрососудах глаза. Это позволяет выделять максимальное давление в фазе систолы и минимальное в фазе диастолы и среднее за сердечный цикл [5; 7; 8; 12; 13].

Передняя камера глаза, ограничена спереди роговицей, а задняя часть (мембрана) образуется совокупностью хрусталика, цилиарных мышц и заполнена жидкостью, создающей внутриглазное давление (ИОД). Задняя камера глаза ограничена склерой, а дно выстлано сетчатой и сосудистой оболочкой. Таким образом, глаз имеет сложную структуру, сочетающую материалы с разной реологией.

Существующие контактные и бесконтактные, статические и динамические методы имеют различную точность и дают довольно ощутимый разброс в результатах [13; 16; 18; 19; 22], имеющих сложный характер совместного влияния структуры глаза и материалов составляющих его структуру, в частности роговицы [1–4; 10]. Статические контактные методы с точки зрения механики исключают переходные процессы нагружения, т. к. за счет длительной экспозиции успевают закончиться релаксационные явления, однако могут начаться за счет аппланации явления ползучести, что естественно влияет на результаты измерения внутриглазного давления. Безаппланационные методы [7; 8] основанные на бесконтактном измерении вибраций кровеносных сосудов глаза также завязаны от физико-механических свойств оболочки глаза. Бесконтактные методы измерения внутриглазного давления обладают рядом технологических преимуществ, однако динамические методы имеют серьезный разброс измерений, погрешность также существенно зависит от влияния реакции материала глаза на статические и динамические воздействия. Роговица глаза восстанавливает свою геометрию после прекращения воздействия без видимых, ощущаемых колебаний роговицы [16; 19; 22], что свидетельствует, что материал роговицы и глаза в целом обладают памятью состояния,

что является одним из необходимых условий аккомодации глаза как оптической системы [1–19].

При пневмотонометрических испытаниях импульс объема воздуха движется вдоль оптической оси и взаимодействует с роговицей. Будем моделировать роговицу мягкой оболочкой, т. е. считать, что материал ее сам по себе имеет нулевую сдвиговую жесткость. Подобные материалы слабо сопротивляются сжатию, но хорошо сопротивляются растяжению, т. е. это двухмодульная модель [15; 21; 23].

Мягкая оболочка в начальном (ненагруженном) состоянии не имеет собственной формы. Под действием внутреннего давления мягкая оболочка принимает форму, соответствующую среднему объему. В этом случае в материале оболочки возникают растягивающие напряжения, образующие вместе с внутренней средой самоуравновешенную систему, в которой формообразующая оболочка растянута, а внутренняя среда (жидкость, гель) сжаты. При любых внешних воздействиях и нагрузках возникают, вследствие избыточного давления, только растягивающие напряжения. Таким образом внутреннее давление придает мембране необходимую конструктивную эффективную жесткость.

**Математическая модель деформации роговицы под действием внешнего импульса.**

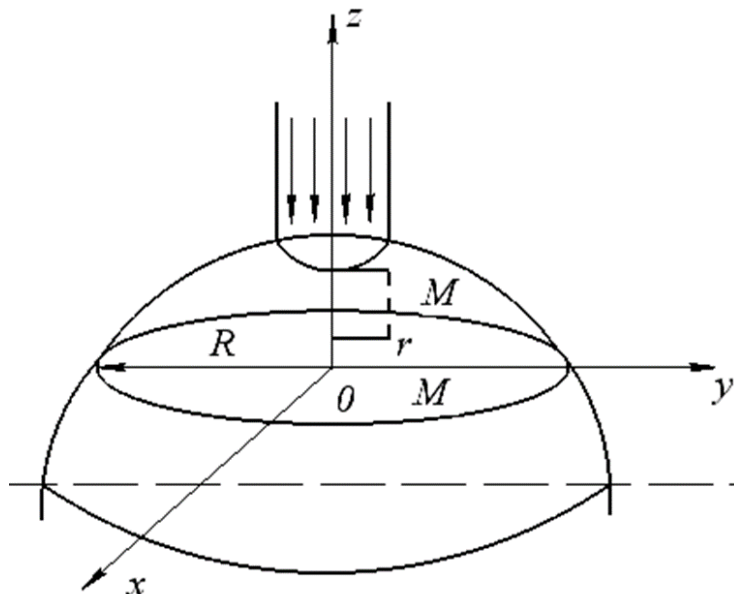


Рис. 1. Схема деформации модели роговицы глаза 1 импульсом воздуха 2

Оси  $x, y$  системы координат разместим в плоскости круга радиуса  $R$  – расстояние до точки, куда возмущение роговицы импульсом не доходит, т. е. деформация равна нулю. Произвольная точка роговицы  $M$  имеет координаты  $M(x, y, z) = M(r, z)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , прогиб под действием импульса обозначим  $W(t, x, y, z)$ .

Будем считать, что сопротивление жидкости и роговицы зависит от скорости движения точки роговицы и от величины прогиба  $W$ . Причем в первом приближении эти зависимости имеют линейный характер.

Уравнение, описывающее динамику мембраны с учетом вязкоупругих сил сопротивления запишем в виде [14; 21; 23]

$$\frac{d^2W}{dt^2} + k \frac{dW}{dt} = a^2 \Delta_2 - bW + \Phi(x, y, t) \quad (1)$$

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$$

Здесь коэффициент  $k$  характеризует вязкое,  $a b$  – упругое сопротивление растяжению,  $\Phi(x, y, t)$  – внешняя сила.

Уравнение (1) принадлежит к телеграфному типу [14]. Так как материал оболочки двухмодульный и при сжатии оказывает слабое сопротивление, то мембрана прогибается до состояния апланации средней части и затем прогиб меняет знак и деформируется вогнутостью вверх. Так как при этом происходит растяжение, то возникает сопротивление деформированию мембраны при достижении определенной величины прогиба часть энергии импульса совершает работу по перемещению глаза, как целого тела, вдоль оптической оси и угловые смещения как следствия несовпадения оси импульса и оптической оси. Это связано с тем, что энергия импульса активизирует степени свободы поступательного и вращательного движений.

Отметим, что в уравнении (1) не учитывается возможное действие сил поверхностного натяжения, т. к. об этом отсутствует экспериментальная информация.

Поскольку в первом приближении можем считать, что деформируемая область глаза имеет осевую симметрию, то перейдем от декартовых координат  $x, y$  к полярным считая, что  $W(x, y, t) = W(r, t)$ , тогда получим:

$$\frac{d^2W}{dt^2} + k \frac{dW}{dt} = a^2 \left( \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) - bW + \Phi(r, t). \quad (2)$$

Представляя  $W(r, t)$  в виде (3) и подставляя в (2)

$$W(r, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)U(r, t), \quad (3)$$

получим для  $U(r, t)$  уравнение:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \left( \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) - \left(b - \frac{1}{4}k^2\right)U + \exp\left(\frac{1}{2}kt\right)\Phi(r, t). \quad (4)$$

Решение неоднородного уравнения (4) записывается в общем случае в интегральном виде с помощью функции Грина и имеет очень громоздкий вид, поэтому упростим модель положив, что внутриглазное давление в передней камере глаза вместе с жидкостью и задней частью передней камеры, образованной хрусталиком и мышцами действуют на мембрану (роговицу) как линейно упругое основание Винклера с конструктивной жесткостью. Тогда можно положить  $\Phi(r, t) \equiv 0$ . Рассмотрим одномерное упрощенное уравнение (4) рассматривая его в плоскости  $Oxz$  и полагая  $r = x, y = 0$ .

В этом случае уравнение (4) запишется в виде уравнения Клейна-Гордона [21–23; 14].

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - \left(b - \frac{1}{4}k^2\right)U \quad (5)$$

Вид решений уравнения (5) зависят от знака выражения  $b - \frac{1}{4}k^2 = \beta$ , характеризующего зависимость между упругостью и вязкостью в рассматриваемой модели глаза. При  $\beta > 0$  решение имеет вид [14]

$$W(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)[AJ_0(\xi) + BY_0(\xi)]$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2},$$
(6)

где  $J_0(\xi)$ ,  $Y_0(\xi)$  – функции Бесселя,  $A, B, C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

При  $\beta < 0$  решение имеет вид

$$W(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)[AI_0(\xi) + BK_0(\xi)]$$

$$\xi = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2},$$
(7)

где  $I_0(\xi)$ ,  $K_0(\xi)$  – модифицированные функции Бесселя.

Для нахождения  $A, B, C_1, C_2$  поставим начальные и другие необходимые условия для нахождения произвольных констант.

Начальные условия сформулируем в виде:

$$W(x, 0) = f(x);$$

$$d_t W(x, 0) = g(x),$$
(8)

тогда в зависимости от знака  $\beta$  получим:

При  $\beta > 0$

$$f(x) = AJ_0(\xi_0) + BY_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2}.$$
(9)

В выражении (7) функция  $Y_0(\xi)$  при  $\xi = 0$  обращается в бесконечность. Это соответствует:

$$a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2 = 0.$$
(10)

Из (9) считая  $\xi_0 = 0$ , получим:

$$a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2 = 0.$$
(11)

В центре роговицы  $x = 0$ , тогда из (11) получим:

$$a^2 C_1^2 - C_2^2 = 0, \quad C_2 = \pm a C_1.$$
(12)

Подставляя (12) в (11) находим:

$$\begin{aligned} a^2 C_1^2 - (x \pm a C_1)^2 &= 0, \\ \pm 2a C_1 - x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

При  $x = 0$  должно быть  $C_1 = C_2 = 0$ .

Таким образом,

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{(at - x)(at + x)}. \quad (14)$$

Чтобы решение в виде (7) было корректно, нужно положить  $\beta = 0$ , тогда соответственно начальное условие имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= A J_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{-x^2} = \pm \frac{\sqrt{\beta} x}{a} i, \\ J_0(iz) &= I_0(z), \end{aligned} \quad (15)$$

или

$$f(x) = A I_0\left(\pm \frac{\sqrt{\beta}}{a} x\right).$$

В начальный момент времени мембрана под действием внутреннего давления представляет собой часть сферической поверхности, ограниченную лимбом глаза.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(W(0,0) - R)^2} + \frac{W^2}{(W(0,0) - R)^2} &= 1; \\ x^2 + W^2 &= (W(0,0) - R)^2; \\ \frac{x^2}{R^2} + \frac{W^2}{R^2} &= 1; \\ \frac{x^2}{R^2} + \frac{(W + R - W_{00})^2}{R^2} &= 1; \\ x^2 + (W + R - W_n)^2 &= R^2; \\ W + R - W_n &= R; \\ x^2 + (R - W_{00})^2 &= R^2; \\ x^2 + R^2 - 2RW_{00} + W_n^2 &= R^2; \\ x &= \pm W_{00}^{1/2} \sqrt{R - W_{00}} = \pm a. \end{aligned}$$

В плоскости лимба расположим координатную плоскость  $Oxy$ .

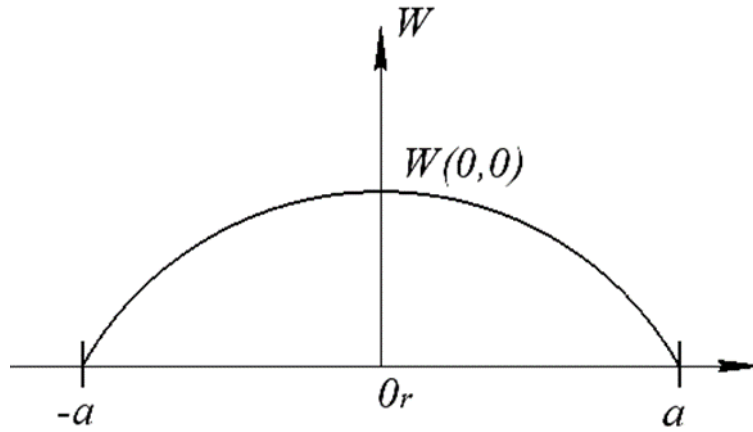


Рис. 2. Начальный профиль мембраны (роговицы)

Тогда начальный профиль мембраны представим в виде рисунка 4:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + W_{00} - R. \quad (16)$$

Представим (15, 16) в окрестности центра роговицы в виде разложений правой и левой частей в степенные ряды с учетом (16) тогда получим:

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta x^2}{a^2 4}\right)^k}{k! \sqrt{k+1}} = W_{00} - R + R \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \dots\right). \quad (17)$$

Приравниваем члены при одинаковых степенях  $x$

$$A \left(1 + \frac{\beta x^2}{4a^2 \Gamma(2)} + \dots\right) = W_{00} - R + R \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \dots\right), \quad (18)$$

$$A = W_{00} - R + R,$$

$$A \frac{\beta}{4a^2 \Gamma(2)} = \frac{R}{2} \frac{1}{R^2}.$$

Из (18) следует

$$W_{00} = A, \quad \frac{\beta W_{00}}{4a^2 \Gamma(2)} = \frac{1}{2R} \Rightarrow \beta > 0. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь нахождение произвольных постоянных при  $\beta < 0$  согласно формуле (7). Исходя из условия конечности перемещений в центре зрачка требуется положить  $B = 0$ , тогда решение (7) запишется в виде:

$$W(x, t) = A \exp\left(-\frac{1}{2} kt\right) I_0(\xi). \quad (20)$$

Начальное условие (9) имеет вид:

$$f(x) = AI_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2}. \quad (21)$$

Полагая  $\xi_0 = 0$ , получим из (21)

$$a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2 = 0. \quad (22)$$

В центре роговицы  $x = 0$ , тогда из (22) следует

$$a^2 C_1^2 - C_2^2 = 0, \quad C_2 = \pm a C_1. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (24) получим:

$$\begin{aligned} a^2 C_1^2 - (x \pm a C_1)^2 &= 0, \\ \pm 2a C_1 - x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) находим при  $x = 0$

Таким образом,

$$\xi = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (20) получим решение в общем виде.

Начальное условие записывается в виде

$$\begin{aligned} f(x) = AI_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{-x^2} = \pm \frac{\sqrt{-\beta x}}{a} i, \\ I_0\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta x}}{a} i\right) = J_0\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta}}{a} x\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом

$$f(x) = AJ_0\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta x}}{a}\right). \quad (27)$$

Подставим разложения правой и левой частей в степенные ряды

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta x}}{a}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)} = W_{00} - R + R\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \dots\right).$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях  $x$ , получим:

$$A \left(\frac{1}{\Gamma(1)}\right) = W_{00}.$$

$$A \left( \frac{\pm (-\beta)}{a^2} x^2 \right) / 4 = \frac{1}{2} \frac{x^2}{R}. \quad (28)$$

Из (28) найдем

$$\begin{aligned} W_{00} &= A \\ \frac{-\beta W_{00}}{4a^2} &= \frac{x^2}{2R}. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим второе начальное условие

$$d_t W|_{t=0} = g(x). \quad (30)$$

При  $\beta > 0$  дифференцируя (5) при  $t = 0$  получим

$$g(x) = -\frac{A}{2} k \frac{dJ_0}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{Ak}{2} (-J_1(\xi_0(x))) \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - (x+C_2)^2}}.$$

Будем считать, что импульс длится до момента, когда мембрана начинает оказывать сопротивление останавливаясь в нижнем положении так, что глазное яблоко начинает двигаться как целое тело. Это следует из модели мембраны как мягкой оболочки, почти не оказывающей сопротивления сжатию.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{1}{2\sqrt{}} 2a^2(t+C_1) = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{2a^2 C_1}{2\sqrt{a^2 C_1^2 - (x+C_2)^2}}, \\ \xi &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{(at+C_1)^2 - (x+C_2)^2}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\sqrt{\beta} 2}{a} \frac{(at+C_1)a}{2\sqrt{(at+C_1)^2 - (x+C_2)^2}}, \\ \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - (x+C_2)^2}}, \\ \frac{d\xi}{dt} \Big|_{x=0} &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{a(at+C_1)}{\sqrt{(at+C_1)^2 - C_2^2}}, \\ \frac{d\xi}{dt} \Big|_{\substack{t=0 \\ x=0}} &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}. \end{aligned}$$

Тогда профиль  $g(x)$  представляет собой параболу, которая описывает профиль скорости в трубке пневмотонометра.



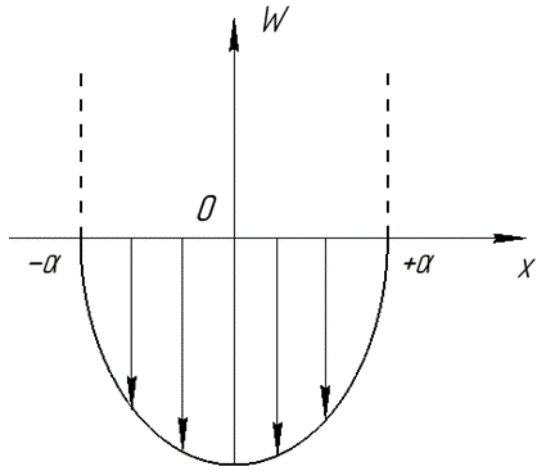


Рис. 3. Схема профиля скорости в тонометре:  $g(x)$  представляет собой параболу

$$g(x) = V_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right) \quad (31)$$

При  $x=0, t=0, g(x) = V_0$ , тогда из (31) следует

$$V_0 = -\frac{Ak}{2} (-J_1(\xi_0(0))) \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}, \quad (32)$$

раскладывая  $J_1(\xi_0)$  в ряд

$$J_1(\xi_0) = \left(\frac{\xi_0}{2}\right) \left[ \frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{(-\xi_0^2/4)}{\Gamma(3)} \dots \right];$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{(at + C_1)^2 - (x + C)^2};$$

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{C_1^2 - (x + C_2)^2};$$

$$V_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left[ 1 - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} (C_1^2 + C_2^2) + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 C_1 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^4 C_1 \right];$$

$$0 = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left[ 2 \frac{C_2}{C_1} + \frac{\beta C_1^2 C_2 C_1}{2a^2 C_1} - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta C_2 C_1}{4a^2 C_1} \right];$$

$$\frac{V_0}{a^2} = \left( -\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1^2}{C_1} + \frac{\beta}{a^2} C_1 \frac{1}{8C_1^2} - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1}{C_1^2} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \frac{\beta}{2a^2} \frac{C_1 C_2^2}{C_1^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1}{C_1^2} \right) \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1;$$

$$-J_1(\xi_0(0)) \approx -\left(\frac{\xi_0(0)}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{C_1^2 - C_2^2} = V_0;$$

$$\begin{aligned}\xi_0(0) &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{C_1^2 - C_2^2}; \\ V_0 &= \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1, \quad C_1 = \frac{2V_0 a}{\sqrt{\beta}}; \\ \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta C_1}{a^2 4C_1} &= \frac{2}{C_1} + \frac{\beta C_1}{2a^2}; \\ C_2^2 &= \frac{4 \cdot 2C_1^2 a^2}{\beta} + \frac{\beta C_1 a^2 C_1^2}{2a^2 \beta}; \\ C_2 &= \pm \sqrt{C_1^3 + \frac{8C_1^2 a^2}{\beta}} = \pm \sqrt{\frac{8V_0^3 a^3}{\beta^{3/2}} + \frac{8a^2 4V_0^2 a^2}{\beta}} = \pm \sqrt{\frac{8V_0^3 a^3}{\beta^{3/2}} + \frac{32V_0^2 a}{\beta^2}}.\end{aligned}$$

Размерность:  $(C_2 + x) - (C_1 + at)$ , тогда размерность  $C_2 - x$ ,  $C_1 - at$ , а размерность скорости  $\frac{L}{T}$ .

$$\beta = b - \frac{1}{4}k^2, \quad C_1 = \frac{2V_0 a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{L^2}{T^2}, \quad \sqrt{\beta} \approx \frac{L}{T^2}.$$

где  $b$  – упругий коэффициент роговицы,  $k$  – коэффициент вязкого сопротивления роговицы,  $k \frac{L}{T} \approx bL \approx F$  – сила,  $a^2 \approx \frac{L^2}{T^2}$  – квадрат скорости.

Тогда должно быть  $\sqrt{\beta} \approx \frac{L}{T^3}$ .

Рассмотрим теперь уравнение волнового движения мембраны в полярной системе координат в виде [14]

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + k \frac{dW}{dt} = a^2 \left( \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) - bW + \Phi(r, t). \quad (33)$$

Представим решение (33) в виде

$$W(r, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)U(r). \quad (34)$$

Подставляя (34) в (33), получим  $\frac{1}{4}k^2 U(r) - \frac{k^2}{2} U(r) = a^2 \left( \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) - bU(r)$ .

Приведя подобные члены, получим:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \left( \frac{k^2}{4a^2} - \frac{b}{a^2} \right) U = 0. \quad (35)$$

Решение уравнения (35) запишем в виде [14]

$$U(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) + BY_0(\sqrt{\lambda}r), \quad (36)$$

где  $J_0(\sqrt{\lambda}r)$ ,  $Y_0(\sqrt{\lambda}r)$  - функции Бесселя первого и второго рода.

$$\lambda = \frac{k^2}{4a^2} - \frac{b}{a^2} > 0.$$

Так как при  $r=0$  решение по физическому смыслу должно быть конечным, то  $B=0$ .

Таким образом, имеем

$$U(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) \quad (37)$$

Решение  $U \equiv 0$  удовлетворяет (36), поэтому представляет интерес найти условия существования нулевых решений при определении  $\lambda$ , которые являются собственными значениями. Для нахождения собственных значений обычно формулируется задача Штурма-Лиувилля для уравнения (36). Задаются нулевые краевые условия, которые в данной задаче можно сформулировать исходя из физических условий. Первое условие дало  $B=0$ . Второе условие сформулируем исходя из того, что деформация волнообразного изменения роговицы быстро затухает и на лимбе перемещение равно нулю. Поэтому положим, что при  $r = \rho_0$ ,  $U(r) = 0$ . Из (37) тогда следует

$$J_0(\sqrt{\lambda}\rho_0) = 0. \quad (38)$$

Уравнение (38) представляет собой соотношение для нахождения простых вещественных корней функции Бесселя первого порядка которых имеется бесконечное число, и они связаны соотношением

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \quad \lambda_k = \frac{\mu_k^2}{\rho_0^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (39)$$

Таким образом, собственными функциями задачи являются функции

$$J_0\left(\frac{\mu_k}{\rho_0}r\right), \quad (40)$$

а собственными значениями

$$\mu_k = \sqrt{\lambda_k}\rho_0. \quad (41)$$

Тогда общее решение (34) имеет вид

$$W(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n t} J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}r\right). \quad (42)$$

Коэффициент  $A_n$  находим из начальных условий

$$W(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_n e^{-k_n t} J_0 \left( \frac{\mu_n}{\rho_0} r \right). \quad (43)$$

Умножим обе части (43) на  $r J_0 \left( \frac{\mu_k}{\rho_0} r \right)$  и проинтегрируем обе части равенства на промежутке  $[0, \rho_0]$ . Тогда, с учетом свойства ортогональности функций и формул для квадрата их нормы получим

$$\int_0^{\rho_0} r f(r) J_0 \left( \frac{\mu_k}{\rho_0} r \right) dr = A_k \frac{\rho_0^2}{2} \left[ J_0'(\mu_k) \right]^2 \quad (44)$$

Из (44) получим

$$A_k = \frac{2}{\rho_0^2 \left[ J_0'(\mu_k) \right]^2} \int_0^{\rho_0} r f(r) J_0 \left( \frac{\mu_k}{R} r \right) dr. \quad (45)$$

Второе начальное условие

$$d_t W(r, t) \Big|_{t=0} = g(r) \quad (46)$$

дает с учетом (41)

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (-k_n) J_0 \left( \frac{\mu_n}{\rho_0} r \right). \quad (47)$$

Умножая  $g(r)$  на  $r J_0 \left( \frac{\mu_n}{\rho_0} r \right)$  и интегрируя аналогично предыдущему, получим

$$\int_0^{\rho_0} r g(r) J_0 \left( \frac{\mu_k}{R} r \right) dr = (-A_k k_k) \frac{\rho_0^2}{2} \left[ J_0'(\mu_k) \right]^2. \quad (48)$$

Из (48) следует

$$-A_k k_k = \frac{2}{\frac{\rho_0^2}{2} \left[ J_0'(\mu_k) \right]^2} \int_0^{\rho_0} r g(r) J_0 \left( \frac{\mu_k}{R} r \right) dr. \quad (49)$$

Подставляя  $A_k$  из (45) в (49) получим

$$k_k = \frac{\int_0^{\rho_0} rg(r)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)dr}{\int_0^{\rho_0} rf(r)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)dr}. \quad (50)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда запишем решение в виде

$$W(r, t) = A_1 e^{-k_1 t} J_0\left(\frac{\mu_1}{\rho_0} r\right) + A_2 e^{-k_2 t} J_0\left(\frac{\mu_2}{\rho_0} r\right). \quad (51)$$

Значения  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  находятся по таблице нулей функций Бесселя [14]

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2,4048 \\ \mu_2 &= 5,5201 \end{aligned}$$

Тогда из (51), получаем

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1^2}{\rho_0^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2^2}{\rho_0^2}. \quad (52)$$

Величина радиуса лимба  $\rho_0$  является индивидуальной геометрической характеристикой роговицы глаза конкретного человека. Значения  $\lambda$  выражаются через механические характеристики роговицы глаза конкретного человека. Среднее значение коэффициентов упругости и вязкости зависят от возраста.

$$\lambda_1 = \frac{k_1^2}{4a_1^2 \frac{b_1}{a_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{k_2^2}{4a_2^2 \frac{b_2}{a_2}}. \quad (53)$$

В (53) задаем известные коэффициенты, например,  $\frac{b_1}{a_1^2}$ ,  $\frac{b_2}{a_2^2}$  и находим  $\frac{k_1}{2a_1}$ ,  $\frac{k_2}{2a_2}$  или используем другие комбинации. На практике нужно брать значения ближайšie к экспериментальным данным.

#### **Поступательное движение глазного яблока под воздействием импульса воздуха.**

Экспериментальные наблюдения [7; 18; 22] показывают, что часть энергии импульсов воздуха вызывает не только деформацию роговицы, но и смещение глазного яблока как целого тела вдоль оптической оси. Отмечается, что это движение начинается с некоторым временным запаздыванием после воздействия импульса на роговицу. Это объясняется тем, что материал роговицы является двухмодульным, т. е. имеет разные модули упругости на растяжение и сжатие (рисунок 4.).

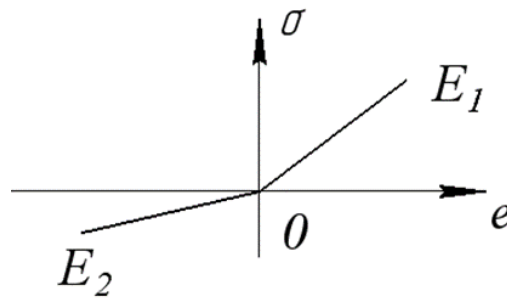


Рис. 4. Диаграмма нагружения для двухмодульного материала:  
 $E_1$  – модуль Юнга растяжение,  $E_2$  – модуль Юнга сжатие

Вследствие этого роговица под действием импульса воздуха деформируется в зоне действия (площади  $S$ ) импульса до состояния апланации практически без сопротивления. После прохождения плоского состояния мембрана начинает работать на растяжение и испытывает сопротивление так, что при достижении некоторой величины растяжения сопротивление дальнейшему растяжению оказывается выше сопротивления поступательному движению глазного яблока как целого вдоль оптической оси.

Рассмотрим двухмассовую модель глазного яблока исходя из того, что передняя камера между роговицей и хрусталиком имеет структуру и физико-механические свойства отличные от структуры и физико-механических свойств стекловидного тела. Поэтому рассмотрим модель глаза, схематически изображенную на рисунке 5.

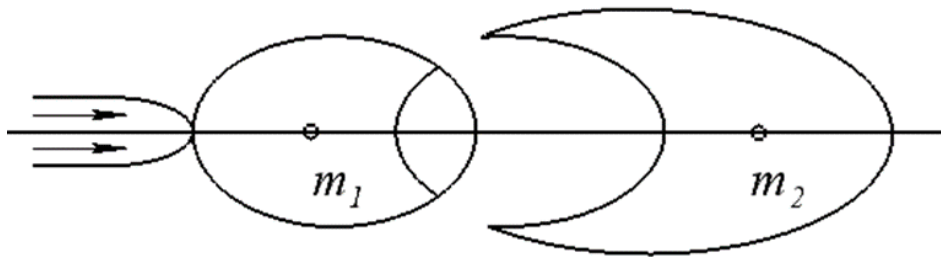


Рис. 5. Схема глазного яблока в виде двухмассовой системы, где  $m_1$  – масса передней камеры,  $m_2$  – масса стекловидного тела с сетчаткой

Часть глаза  $m_2$  находится в глазнице и окружена слоем жироподобного материала, обладающего также свойствами упругости и вязкости.

Часть глаза  $m_1$  обладает вязкоупругими свойствами.

Граница между  $m_1$ ,  $m_2$  образована хрусталиком и мышечными тканями и в общем случае также обладает вязкоупругими свойствами.

Схема глазного яблока, учитывающая вышеперечисленные свойства изображена на рисунке 6.

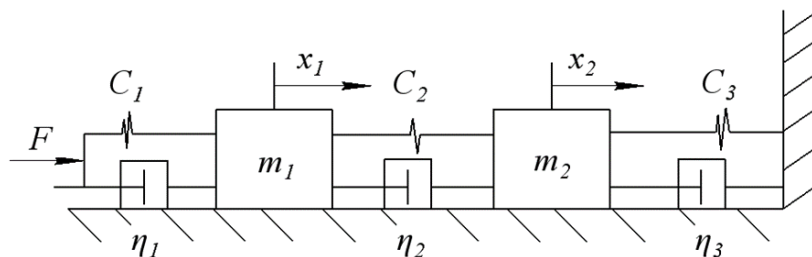


Рис. 6. Схема модели вязкоупругого глазного яблока

На рисунке 6  $C_i$  – коэффициенты жесткости (упругости),  $\eta_i$  – коэффициенты вязкости,  $m_1, m_2$  – масса передней и задней частей глазного яблока.

Для простоты считаем, что поверхность глазницы, по которой перемещаются  $m_1, m_2$  абсолютно гладкая, однако не составляет труда обобщить модель с учетом сухого и жидкого трения.

Динамика поступательного движения модели глаза описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (\eta_1 + \eta_2) \dot{x}_1 - \eta_2 \dot{x}_2 + (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2 &= F_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 + (\eta_2 + \eta_3) \dot{x}_2 - \eta_2 \dot{x}_1 + (C_2 + C_3)x_2 - C_2 x_1 &= F_2, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0 = V_0, \\ x_2(0) &= x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0 = V_1. \end{aligned} \quad (55)$$

В векторно-матричной форме уравнения движения (54) имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{M} \ddot{\bar{x}} + \hat{K} \dot{\bar{x}} + Cx &= \bar{F}; \\ \hat{M} &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 & -\eta_2 \\ -\eta_2 & \eta_2 + \eta_3 \end{pmatrix}, \\ \hat{C} &= \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & -\eta_2 \\ -\eta_2 & C_2 + C_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда в выражениях для кинетической  $T$  и потенциальной  $\Pi$  энергий отсутствуют произведения  $x_1, x_2$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2). \quad (56)$$

Следовательно,  $x_1, x_2$  являются главными (нормальными) координатами [6]. Диссипативная функция имеет вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\eta_1 \dot{x}_1^2 + 2\eta_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \eta_3 \dot{x}_2^2). \quad (57)$$

Решение уравнений (54) ищется в виде:

$$x_1 = C_1 e^{kt} \quad x_2 = C_2 e^{kt} \quad (58)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$m_1 m_2 k^4 + (m_1 \eta_2 + m_2 \eta_1) k^3 + (m_1 C_2 + m_2 C_1 + \eta_1 \eta_3 - \eta_2^2) k^2 + (C_1 \eta_3 + \eta_1 C_2) k + C_1 C_2 = 0. \quad (59)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}x_1 &= -n_1 + ik_1, & \bar{x}_1 &= -n_1 - ik_1, \\x_2 &= -n_2 + ik_2, & \bar{x}_2 &= -n_2 - ik_2.\end{aligned}\tag{60}$$

Решение запишем в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{-n_1 t} [A_1^{(1)} \cos k_1 t + B_1^{(1)} \sin k_1 t] + e^{-n_2 t} [A_1^{(2)} \cos k_2 t + B_1^{(2)} \sin k_2 t], \\x_2 &= e^{-n_1 t} [A_2^{(1)} \cos k_1 t + B_2^{(1)} \sin k_1 t] + e^{-n_2 t} [A_2^{(2)} \cos k_2 t + B_2^{(2)} \sin k_2 t].\end{aligned}\tag{61}$$

Если сопротивление (вязкость) достаточно большое, то аperiodическое движение описывается уравнениями

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{-n_1 t} [A_1^{(1)} \cos k_1 t + B_1^{(1)} \sin k_1 t] + C_1^{(2)} e^{-n_2 t} + C_1^{(3)} e^{-n_3 t}, \\x_2 &= e^{-n_1 t} [A_2^{(1)} \cos k_1 t + B_2^{(1)} \sin k_1 t] + C_2^{(2)} e^{-n_2 t} + C_2^{(3)} e^{-n_3 t}.\end{aligned}\tag{62}$$

### Вращательное плоское движение глазного яблока вокруг центра масс.

Вращательные степени свободы глаза активизируются за счет части энергии воздушного импульса, если ось трубки пневмотонометра не совпадает точно с оптической осью. В этом случае имеется плечо силы и возникает момент силы под действием, которого глаз в глазнице совершает вращательное движение в плоскости оптической оси и плоскости действия силы (рисунок 7).

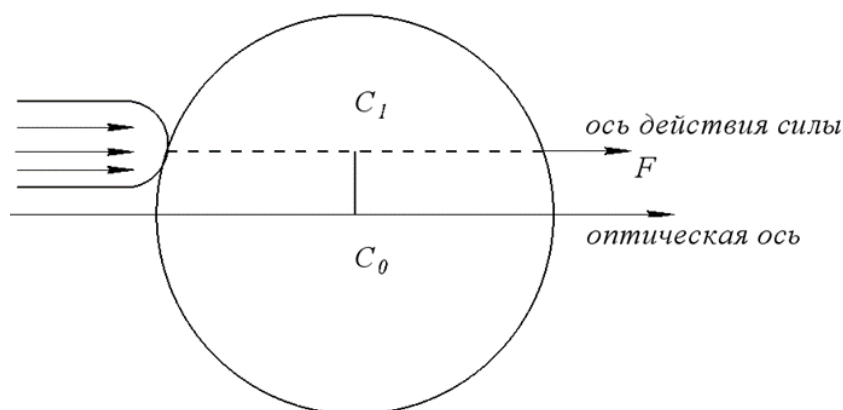


Рис. 7. На схеме  $C_0 C_1 = d$  – плечо силы,  $C_0$  – центр масс

Колебания глаза в плоскости можно описать, как колебания физического маятника сферической формы вокруг оси перпендикулярной плоскости и проходящей через точку  $C_1$ . Будем считать колебания малыми описываемые вязкоупругой моделью.

Уравнение колебаний должно описывать восстановление положения глаза после его поворота на некоторый угол под воздействием момента силы.

В общем случае, уравнение вращательного движения глаза имеет вид [6]:

$$\frac{d}{dt} \left( Y_z \frac{d\varphi}{dt} \right) + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + mgd\varphi = f(t),\tag{63}$$



где  $Y_z$  – момент инерции глаза относительно оси  $C_1, z$ ,  $\alpha$  – коэффициент вязкости,  $m$  – масса,  $g$  – ускорение свободного падения,  $d$  – расстояние  $C_0C_1$ ,  $f(t)$  – момент силы, создаваемый воздушным импульсом.

Здесь учитывается, что форма глаза при воздействии импульса воздуха меняет свою форму сравнительно незначительно. Поэтому в данном случае  $Y_z = \text{const}$ .

В начальный момент времени

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0. \quad (64)$$

Преобразуем уравнение (63) к виду удобному для решения

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n \frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi &= Q(t), \\ 2n &= \frac{\alpha}{Y_z}, \quad k^2 = \frac{mgd}{Y_z}, \quad Q(t) = \frac{f(t)}{Y_z}. \end{aligned} \quad (65)$$

Решение уравнения (63) при условии (64) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{Y_z k^*} \int_0^t Q(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1, \\ k^* &= \sqrt{k^2 - n^2}. \end{aligned} \quad (66)$$

Пусть сила действия воздушного импульса примерно постоянна на интервале  $t_1 = 0$  и  $t = t_1 + \tau$ , тогда (66) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{ak^*} \int_0^t e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1 = \\ &= \frac{Q}{ak^*} \frac{k^*}{n^2 + (k^*)^2} \left\{ 1 - e^{-nt} \left( \frac{n}{k^*} \sin k^*t + \cos k^*t \right) \right\} = \\ &= \frac{Q}{c\zeta} \left\{ 1 - e^{-nt} \left( \frac{n}{k^*} \sin k^*t + \cos k^*t \right) \right\}, \quad C = \frac{ak^* [n^2 + (k^*)^2]}{k^*}. \end{aligned} \quad (67)$$

Отклонение угла  $\varphi$  происходит в течении времени действия  $\tau$  силы  $Q$ ,  $t \leq \tau$ .

Максимальное отклонение глаза находится из уравнения, получаемого на основе уравнения (65)

$$\dot{\varphi} = \frac{Q}{c\zeta} \left\{ e^{-nt} (n \cos k^*t - k^* \sin k^*t) + ne^{-nt} \left( \frac{n}{k^*} \sin k^*t + \cos k^*t \right) \right\}. \quad (68)$$

Условие максимума отклонения, когда вращение глаза останавливается перед тем, как начать возвратное движение в нормальное положение (обратно) имеет вид  $\dot{\varphi} = 0$ , тогда получим

$$e^{-nt} \sin k^* t = 0. \quad (69)$$

Или при конечном  $t$  получим

$$e^{-nt} \sin k^* t = 0, \quad t = \frac{\pi}{k^*}. \quad (70)$$

Из (70) следует, что максимальное отклонение глаза достигается при  $t = \frac{T^*}{2}$  т. е. в том случае, когда промежуток времени  $t$  равен половине периода  $T^*$  затухающих колебаний. Коэффициент динамичности  $\lambda$  для  $\tau \geq \frac{T^*}{2}$   $\lambda = 1 + e^{-\frac{nT^*}{2}}$ .

После прекращения действия воздушного импульса глаз возвращается в исходное состояние под действием вязкоупругих связей (мышц), приложенных к главному яблоку. При этом движение глаза описывается уравнением свободного движения, которое имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n \frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0. \quad (71)$$

В качестве начальных условий возьмем

$$\varphi(\tau) = \varphi_{\max}, \quad \dot{\varphi}(\tau) = 0. \quad (72)$$

Экспериментальные данные показывают, что возвращение глаза в нормальное состояние происходит без колебательных движений.

Решение (71) с начальными условиями (72) имеет вид

$$\varphi = \varphi_{\max} e^{-n(t-\tau)} \left( \cos k^*(t-\tau) + \frac{n}{k^*}(t-\tau) \right). \quad (73)$$

При возврате состояния глаза в исходное состояние в некоторый момент  $t = t_{\text{кон}}$  угол поворота глаза должен быть равен нулю. Запишем (73) при  $t = t_{\text{кон}}$

$$\varphi = \varphi_{\max} e^{-n(t_{\text{кон}}-\tau)} \left( \cos k^*(t_{\text{кон}}-\tau) + \frac{n}{k^*}(t_{\text{кон}}-\tau) \right). \quad (74)$$

Уравнение (74) при заданных  $k^*, n$  является уравнением относительно  $t_{\text{кон}}$ .

В случае, если задан момент вращения, когда глаз возвращается в исходное состояние, например  $t_{\text{кон}} = T^*$ , то уравнение (74) представляет уравнение относительно  $k^*$  и  $n$  т. е. параметров, определяющих упругость и вязкость элементов глаза при вращательном движении.

Из (74) получаем

$$1 = -\frac{n}{k^*} \operatorname{tg} k^*(t_{\text{кон}} - \tau) \quad (75)$$

Или

$$\operatorname{tg} k^* (t_{\text{кон}} - \tau) = \frac{k^*}{n}. \quad (76)$$

Трансцендентное уравнение решается графически (рисунок 8).

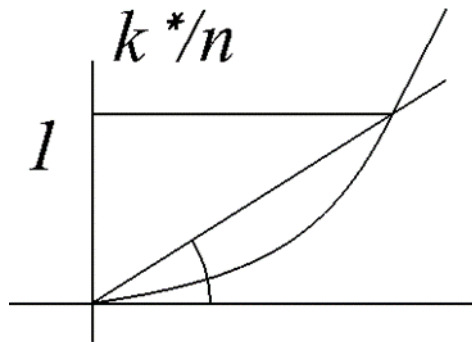


Рис 8. Графическое решение уравнения (76)

$$\frac{k^*}{n} = 1, \quad k^* (\tau - t_{\text{кон}}) = \frac{\pi}{4}, \quad t_{\text{кон}} = \frac{k^* \tau - \frac{\pi}{4}}{k^*}.$$

Если процессы циклов деформирования роговицы, поступательного и вращательного движения известны, то тогда возникает задача идентификации упругих и вязких коэффициентов элементов глаза для конкретных людей. Эти коэффициенты могут быть определены и соответствуют модели поведения глаза как деформируемого твердого тела, пассивно совершающего механическое движение под действием воздушного импульса. Однако на самом деле глаз такая адаптивная система, меняющая свои оптические, механические свойства в зависимости от решаемых задач. Очевидно, что и реакция глаза на внешнее механическое воздействие будет адаптивным, что выражается в способности живых биологических структур управлять своими упругими и вязкими свойствами. Влияние физико-механических, геометрических свойств роговицы на деформирование глазного яблока рассматривается в [1–4; 10]. В данной работе влияние толщины роговицы на величину деформации не учитывается.

#### **Заключение.**

Получена математико-механическая модель динамики глазного яблока под воздействием импульса воздуха, излучаемого пневмотонометром. Энергия импульса деформирует роговицу до состояния, когда она оказывает сопротивление и тело глаза начинает двигаться поступательно, как целое и испытывает вращательные движения за счет несоосности объема воздушного импульса и оптической оси, экспериментальные измерения суммарных и составляющих смещений глазного яблока показывают возвращение глаза в исходное состояние. Это делает целесообразным применение рассматриваемой вязкоупругой модели глазного яблока для более точной оценки ВГД.

Глаз под действием воздушного импульса, воздействующего на роговицу, старается уменьшить возможность повреждающего действия за счет распределения энергии по степеням свободы. Часть энергии совершает работу по деформированию роговицы, часть энергии идет на совершение работы поступательного перемещения глаза вдоль оптической оси и часть на вращательное движение. Когда энергия воздушного импульса исчерпана глаз автоматически возвращается в исходное состояние при этом энергия внешнего воздействия, запасенная за счет упругости элементов глаза, расходуется на совершение работы по восстановлению упругости формы.

Рассмотренная модель глаза, как пассивной системы, работающей в автоматическом режиме применима для тестовых воздействий простых типов. Однако глаз, как биологическая система относится к системам адаптивным, поэтому математическая модель глаза должна иметь вид системы уравнений, включающих модель аккомодации.

Предложенная модель пассивного поведения глаза может служить для решения задач диагностики внутриглазного давления, т. е. позволяет более точно оценивать энергетический баланс внешнего воздействия на глаз конкретного человека.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Об энергозатратах глаза при чтении / С. М. Бауэр [и др.] // Сборник трудов конференции «Биомеханика глаза 2009». – М, 2009. – С. 3–6.
2. Бауэр С. М. Оценка влияния формы роговицы и склеры на показатели внутриглазного давления / С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова, А. С. Типяев // Сборник трудов конференции «Биомеханика глаза 2009». – М, 2009. – С. 94–97.
3. О математическом моделировании измерения внутриглазного давления при тонометрии по методу Маклакова / С. М. Бауэр [и др.] // Сборник трудов конференции «Биомеханика глаза 2005». – М, 2005. – С. 121–122.
4. О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления при измерении ВГД аппланационными методами / С. М. Бауэр [и др.] // Сборник трудов конференции «Биомеханика глаза 2007». – М, 2007. – С. 119–124.
5. Биомеханика глаз при их вынужденных и собственных колебаниях [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.dissercat.com/content/biomekhanika-glaz-pri-ikh-vynuzhdennykh-i-sobstvennykh-kolebaniyakh#ixzz2CEC1zc9U>
6. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Санкт-Петербург, 1998 – 729 с.
7. Глаз. [Электронный ресурс], <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B7>
8. Гундорова Р. А. Современная офтальмотравматология. / Р. А. Гундорова, А. В. Степанов, Н. Ф. Курбанова – М., 2007.
9. Дубровский В. И. Биомеханика : учебник для средних и высших учебных заведений / В. И. Дубровский, В. Н. Федорова – М., 2004.
10. Estimation of the elastic characteristics of the eyeball from the response of the emulated eye to the introduction of given volumes of lignid / Maiseeva I. N. [et al.] // Russian Journal of Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University – 24, № 4, – P. 351–366.
11. Коскас Г. Комплексная диагностика патологии глазного дна / Г. Коскас, Ф. Коскас, А. Зурдан А.; пер. с фр. под общ. ред. В. В. Нероева, М. В. Рябиной – М. : Практическая медицина, 2007. – 496 с.
12. Межнациональное руководство по глаукоме, Т. 1 – Минск, «Альтиора-Живые краски» – 2013. – 108 с.
13. Полянин А. Д. Справочник. Линейные уравнения математической физики – М. : Физматлит, 2001. – 575 с.
14. Седов Л. Н. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. – М. : Наука, 1970.
15. Хусаинов Р. Р. Моделирование деформации глаза при изменении внутриглазного давления оптическим методом / Р. Р. Хусаинов, В. Р. Цибульский, В. Л. Якушев // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2011. Т. 51, № 2. – С. 349–362.
16. Чигарев А. В. Моделирование биомеханики глаза при пневмотонометрических испытаниях методом суперпозиции движений и деформаций вязкоупругого тела /

А. В Чигарев, М. О Михнович // МЕХАНИКА МАШИН, МЕХАНИЗМОВ И МАТЕРИАЛОВ. – 2020. – № 1 – С. 82–94.

17. Asejczyk-Widlicka Sródka W. Influence of Intraocular Pressure on Geometrical Properties of a Linear Model of the Eyeball: Effect of Optical Self-adjustment / W. Asejczyk-Widlicka Sródka, H. Kasprzak, R. Iskander // Optic 115 – № 11 (2004). – P. 517–524.

18. Kopinski R. Automatic method of analysis and measurement of additional parameters of corneal deformation in the Corvis tonometer. BioMedical Engineering Onlirce. – 2014. – 13:150. – P. 1–15.

19. Kubo R. Thermodynamics – North – Holland, Publishing Compong – Amsterdam, 1968. – 304 p.

20. Sedt A. Active and nonlinear wave propagation in electronics. – Wiley – Intekscience, New York, London, Sydney, Toronto, 1970. – 367 p.

21. Sródka W. Effect of material properties of the eyeball coat on optical image stability / W. Sródka , B. W Pierscionek // J. Biomedical Optics – 13(5).

22. Whitham F. R. S. Linear and nonlinear wales. – Wiley – Interscience, New York, London, Sydney, Toronto, 1974. – 622 p.

Поступила: 12.04.2023