Литература

1. Бокуть, Л.В. Исследование алгоритмов канального кодирования в системах передачи дискретно-непрерывных сообщений / Л.В. Бокуть, Н.А. Деев // Материалы 15 международной научно-технической конференции «Приборостроение–2022», Минск, БНТУ, 16–18 ноября 2022. – С. 223–224.
2. Прием сигналов на фоне помех / В.А. Чердынцев [и др.]. – Минск : БГУИР, 1995.

УДК 530.182

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Бокуть Л.В., Климович Т.А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Аннотация. В теории устойчивости движения функция Ляпунова является скалярной функцией, используемой для исследования устойчивости решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью второго (прямого) метода Ляпунова. Наиболее важным преимуществом метода функций Ляпунова перед всеми остальными подходами к решению разнообразных задач устойчивости является его универсальность. В настоящее время он является единственным математическим методом, который может использоваться для исследования устойчивости решений динамических систем любого нелинейного вида и любой размерности.

Ключевые слова: функции Ляпунова, системы дифференциальных уравнений, устойчивость.

APPLICATION OF LYAPUNOV FUNCTIONS TO THE STUDY OF CONTINUABILITY OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL SYSTEMS

Bokut L., Klimovich T.

Belarusian National Technical University
Minsk, Republic of Belarus

Abstract. In the theory of stability of motion, the Lyapunov function is a scalar function used to study the stability of the solution of ordinary differential equations using the second (direct) Lyapunov method. The most important advantage of the Lyapunov function method over all other approaches to solving various stability problems is its universality. Now it is the only mathematical method that can be used to study the stability of solutions of dynamical systems of any nonlinear type and any dimension.

Key words: Lyapunov functions, differential systems, stability.

Адрес для переписки: Климович Т.А., пр. Независимости, 65, г. Минск, 220113, Республика Беларусь
e-mail: tanya.tatina.klimovich@mail.ru

Функции Ляпунова являются мощным инструментом для исследования продолжимости решений систем дифференциальных уравнений. Они позволяют оценить поведение системы в окрестности определенной точки, а также определить ее устойчивость. Функция Ляпунова – это неотрицательная и непрерывная функция, которая позволяет оценить энергию или изменение состояния системы. Используя такую функцию, можно доказать сходимость или расходимость решений системы дифференциальных уравнений.

Под продолжимостью решений понимается способность решений системы дифференциальных уравнений сохраняться на всем интервале определения. Продолжимость решений системы дифференциальных уравнений зависит от свойств системы и начальных условий. В общем случае, если система дифференциальных уравнений является линейной и имеет постоянные коэффициенты, то существует теорема о продолжимости решений, которая гарантирует существование и единственность решений на всем интервале определения. Однако для нелинейных систем или систем с переменными коэффициентами, продолжимость решений может быть установлена сложнее. В этом случае необходимо провести дополнительные исслелования системы, такие как анализ устойчивости, сходимость и другие методы анализа [1]. Для исследования продолжимости решений систем дифференциальных уравнений используется так называемый метод Ляпунова. В этом методе строится функция Ляпунова, которая при определенных условиях может быть использована для доказательства устойчивости системы [2].

Существуют три основных типа функций Ляпунова: положительно определенная, отрицательно определенная, знакопостоянная функция.

Эти типы функций позволяют провести анализ устойчивости дифференциальных систем и определить поведение решений на всем интервале определения. Пример применения функции Ляпунова представлен на рисунке 1.

При исследовании продолжимости решений систем дифференциальных уравнений используются различные виды функций Ляпунова, в том числе квадратичные и запасные энергии, функции типа Ляпунова-Розенблока и др. Выбор конкретной функции зависит от особенностей системы в требуемых условиях продолжимости.

Существует также следующая классификация функций Ляпунова:

1. Прямая функция Ляпунова – это функция, которая описывает изменение энергии системы. Она положительно определена и ее производная по времени должна быть отрицательной.

2. Косвенная функция Ляпунова – это функция, которая описывает изменение расстояния между состояниями системы. Она положительно определена и ее производная по времени должна быть отрицательной.

Исследовать на устойчивость $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -2y - x(x-y)^2 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 3x - \frac{3}{2}y(x-y)^2 \end{cases}$

Решение: Функция $V = ax^2 + by^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

1) $V(x,y) \geq 0, V(0,0) = 0$

2) $\frac{\partial v}{\partial t} = 2ax(-2y - x(x-y)^2) + 2by\left(3x - \frac{3}{2}y(x-y)^2\right) = -4axy - 2ax^2(x-y)^2 + 6bxy - 3by^2(x-y)^2 = -2ax^2(x-y)^2 - 3by^2(x-y)^2 - 2xy(2a-3b)$

пусть a =3, b =2, тогда $V = 3x^2 + 2y^2 > 0$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -6x^2(x-y)^2 - 6y^2(x-y)^2 = -6(x-y)^2 \cdot (x^2+y^2) \leq 0$$

Следовательно, точка покоя устойчива

Рисунок 1 – Применение положительно определенной функции Ляпунова

Использование функций Ляпунова позволяет проводить более глубокий анализ продолжимости решений систем дифференциальных уравнений. Применение функций Ляпунова основано на теореме Ляпунова о продолжимости решений. Эта теорема гласит, что если существует функция Ляпунова, удолетворяющая определенным условиям, то решения системы будут продолжимы на бесконечности или в окресности краевой точки [3].

Пусть дано дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} = 0\,, \qquad (1)$$

или система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z - ay, \\ \dot{z} = -by^3. \end{cases} \qquad (2)$$

Критерий Винтнера-Еругина не гарантирует продолжимости всех решений. В самом деле $\left|by^3\right| \leq |b||y|^3$. Обозначим $|y| = u$. Тогда получим:

$$\int_A^\infty \frac{du}{u^3} \neq \infty. \qquad (3)$$

Отсюда можно сделать вывод, что для установления продолжимости на $[0;\infty]$ более эффективно использование функций Ляпунова, нежели признака Винтнера-Еругина.

Функция Ляпунова должна обдадать следующими свойствами:

1. Неотрицательность: значение функций Ляпунова должно быть неотрицательным для всех значений аргумента.

2. Возрастание: функция Ляпунова должна увеличиваться при движении системы вдоль траектории.

3. Дифференцируемость: функция Ляпунова должна быть дифференцируемой в заданной области.

4. Определенность знака производной: производная функции Ляпунова должна быть отрицательной или нулевой.

5. Нулевость в краевых точках: Функция Ляпунова должна быть равна нулю в краевых точках [4].

Функции Ляпунова играют важную роль в контроле и стабилизации систем, так как позволяют анализировать и предсказывать их поведение. Они используются в таких областях, как автоматика, управление технологическими процессами, робототехника и другие. Хорошо известно, что поиск функции Ляпунова является «краеугольным камнем» математической теории устойчивости. Применение функций Ляпунова позволяет установить условия продолжимости решений для различных типов систем дифференциальных уравнений, включая линейные и нелинейные системы, системы с положительно определенной или неопределенной матрицей, системы с ограниченным или неограниченным числом переменных и т. д. Это делает функции Ляпунова ценным инструментом для исследования свойств системы дифференциальных уравнений, оценки устойчивости системы и определения ее поведения вблизи определенной точки.

Литература

1. Финогенко, И.А. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / И.А. Финогенко. – Иркутск, 2013. – 82 с.

2. Общая теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений : учебно-методическое пособие / Н.А. Бегун [и др.]. – СПб., 2022. – 55 с.

3. Заика, Ю.В. Дифференциальные уравнения : курс лекций / Ю.В. Заика. – Петрозаводск, 2012. – 215 с.

4. Труфанова, Т.В. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Часть III. Системы дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных 1-го порядка : учебно-методическое пособие / Т.В. Труфанова. – Благовещенск : Амурский гос. ун-т, 2002. – 59 с.