$$\begin{cases} 0 = -(\lambda)q_1 + \mu q_2 \\ 0 = \lambda q_1 - (\mu + \lambda)q_2 + 2\mu q_3 \\ 0 = \lambda q_2 - (2\mu + \lambda)q_3 + 2\mu q_4 \\ 0 = \lambda q_3 - (2\mu + \lambda)q_4 + 2\mu q_5 \\ 0 = \lambda q_4 - (2\mu + \lambda)q_5 + 2\mu q_6 \\ 0 = \lambda q_5 - 2\mu q_6 \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 1 \end{cases}$$

Решим данную систему в пакете MathCADи получаем такой вектор финальных вероятностей:

$$\vec{q} = (0.025, 0.074, 0.111, 0.166, 0.25, 0.374)$$

Как видно, довольно большая вероятность, что машине будет отказано в заправке. Поэтому можно порекомендовать владельцу либо увеличить длину очереди, либо увеличить число каналов обслуживания.

Литература

1.Рудый, А.Н. Элементы математической теории надежности : конспект лекций / А. Н. Рудый. – Минск : БНТУ, 2014. – 130 с.

2. Половко, А. М. Основы теории надёжности / А. М. Половко, С. В. Гуров – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
2. Половко, А. М. Основы теории надёжности / А. М. Половко, С. В. Гуров – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
3. Плескунов, М.А. Теория массового обслуживания / М.А.Плескунов- Екатеринбург:Изд.Уральского Университета, 2022.

УДК 005.5:51

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Щеклеина В.П.
Научный руководитель – Бричикова А.П., ассистент

Получение наибольшей выгоды – это основная задача любого предприятия вне зависимости от периода времени или рода деятельности предприятия. Для этого необходимо произвести расчеты, которые покажут при каких условиях можно получить максимальный доход и минимизировать расходы. Для таких расчетов используется теория экстремумов нескольких переменных.

Задача настоящей работы состоит в том, чтобы показать, как теория экстремумов двух переменных применяется в экономических приложениях. План работы: в задаче 1 рассматривается нахождение локального экстремума, в задачах 2 и 3 используется теория условных экстремумов (задача максимизации и минимизации соответственно).

Дополнительно, будем работать в предположениях, что значения количества товаров и ресурсов являются положительными, т. е.x, y>0.

Задача1. *Найти значения величин используемых ресурсов (x, y), при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция* $K(x,y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ *и цены* p_1*=4,* p_2*=1/48 на единицу первого и второго ресурсов.*

Решение.

1. Составим функцию прибыли, которая зависит от количества произведенных товаров и затрат на их производство:

$$F(x,y) = K(x,y) - (p_1x + p_2y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - (4x + \frac{y}{48}).$$

2. Найдем частные производные функции прибыли:

$$F'_x = \frac{30\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}} - 4;\ F'_y = \frac{30\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y^2}} - \frac{1}{48}.$$

3. Найдем критические точки функции из системы: $F'_x = 0,\ F'_y = 0$, откуда x=6750^2 и y=1800^3, т. е. имеется одна критическая точка (6750^2; 1800^3).

4.Находим значения частных производных второго порядка в критической точке: $F''_{xx} = -\frac{15*900}{6750^3} = A;\ F''_{xy} = F''_{yx} = \frac{1}{1350*1800^2} = B;\ F''_{yy} = \frac{45000}{1800^5} = C.$

5. Проверяем выполнение достаточного условия экстремума:

$A < 0, \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$, следовательно, точка ($6750^2$; 1800^3) есть точка максимума.

Ответ. Необходимо произвести 45562500 товаров первого вида и 5832000000 товаров второго вида для получения максимальной прибыли.

Задача2.*Фабрика выпускает два вида товара в объеме x и y соответственно. От реализации единицы товара x фабрика получает 128 у.е., а от единицы товара y – 120 у.е. Функция издержек имеет вид TC (x, y) =*$4x^2 + y^2$*. Сколько единиц товара каждого вида нужно производить, чтобы доход был максимальным, если на все издержки выделено 1156 у.е.? Найдите максимальное значение дохода.*

Решение.

1. Составим функцию дохода и уравнение связи:

$$F(x,y) = 128x + 120y;\quad 4x^2 + y^2 = 1156.$$

2. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 128x + 120y + \lambda(4x^2 + y^2 - 1156).$$

3. Найдем частные производные:

$$L'_x = 128 + 8\lambda x;\ L'_y = 120 + 2\lambda y;\ L'_\lambda = 4x^2 + y^2 - 1156.$$

4. Приравнивая частные производные первого порядка к нулю, находим критическую точку:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 30. \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

5. Проверяем достаточное условие, идля этого находим производные второго порядка, составляем второй дифференциал.

$$L''_{xx} = 8\lambda;\ L''_{xy} = L''_{yx} = 0;\ L''_{yy} = 2\lambda$$
$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2$$

$$d^2L = -16dx^2 - 4dy^2$$

Так как $d^2L<0$, то точка (8, 30) – точка условного максимума.

Ответ. Для получения максимального дохода, равного 4624 у.е., необходимо производить 8 единиц первого товара и 30 единиц второго товара.

Задача3. *Фирма реализует автомобили двумя способами: через оптовую и розничную торговлю. При реализации x автомобилей в розницу расходы на реализацию составляют $150x+2x^2+ x^3$у.е., а при продаже y автомобилей оптом – y^3-94y у.е. Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 60 шт.*

Решение.

1. Составим функцию суммарных расходов и уравнение связи:

$$F(x, y) = 150x + 2x^2 + x^3 + y^3 - 94y;\quad x + y = 60.$$

2. Составим функцию Лагранжа:$L(x, y, \lambda) = 150x + 2x^2 + x^3 + y^3 - 94y + \lambda(x + y - 60)$.

3. Приравнивая к нулю частные производные функции Лагранжа, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 150 + 4x + 3x^2 + \lambda = 0 \\ 3y^2 - 94 + \lambda = 0 \\ x + y - 60 = 0 \end{cases}.$$

Решением этой системы будет x=29, y=31, λ=-2789.

4. Далее найдем частные производные второго порядка:

$$L''_{xx} = 4 + 6x;\ \ L''_{xy} = L''_{yx} = 0;\ L''_{yy} = 6y.$$

5. Получим значения частных производных второго порядка в критической точке и проверим достаточное условие существования экстремума:

$$L''_{xx} = 178;\ \ L''_{xy} = L''_{yx} = 0;\ L''_{yy} = 186$$
$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = \ 178dx^2 + 186dy^2 > \ 0,$$

Следовательно,(29; 31) является точкой условного минимума.

Ответ. Для минимизации расходов необходимо реализовать 29 автомобилей в розницу и 31 автомобиль – оптом.

Литература

1. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер и др. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.

УДК 621.311

ПОСЛЕДНЯЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

Мисюля Д. Я.
Научный руководитель – Марченко Н. И., ст. пр.

Самая известная заметка, когда-либо оставленная в книге, вполне может звучать так: «У меня есть поистине чудесная демонстрация этого утверждения, которое слишком узко для того, чтобы вместить его на этих полях».

В 1630-х годах французский математик Пьер де Ферма сделал набросок этого непритязательного утверждения, на основании которого формируется теорема. Условие данной теоремы формулируется просто, однако доказательство теоремы искали многие математики более трёхсот лет.

Теорема утверждает, что выражение:

$$a^n + b^n = c^n$$