ЛИТЕРАТУРА

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000. – 960 с., 263 ил.

УДК 621.9

В. Г. Смирнов, С. С. Соколовский, К. Д. Венгер

РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НОМИНАЛЬНО КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПО КОНТРОЛЬНЫМ ТОЧКАМ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В машиностроении часто используют функциональные элементы деталей формы тел вращения, среди которых широко представлены такие номинально криволинейные поверхности как тор, сфера, цилиндр. Контроль геометрических параметров таких элементов является сложной и трудоемкой измерительной задачей, поскольку они, как правило, имеют малую протяженность, и к ним предъявляются высокие точностные требования.

Нами была разработана новая методика расчета геометрических параметров поверхности, позволяющая производить расчет геометрических параметров по малому фиксированному количеству контрольных точек. При получении большего, чем минимально необходимого количества контрольных точек методика позволяет рассчитать геометрические параметры с большей точностью за счет сглаживания высокочастотных отклонений точек.

В основу методики положено использование аналитического моделирования реальных поверхностей, которое базируется на следующем условии: для каждой реальной поверхности всегда можно выделить низкочастотную и высокочастотные составляющие отклонения точек, характеризующие ее макрогеометрию (погрешность формы), причем высокочастотные отклонения точек пренебрежимо малы по сравнению с доминирующей низкочастотной составляющей (рис. 1). Здесь речь идет о некоторых предельных соотношениях между амплитудами высших и низших гармоник отклонения точек, формирующих реальную поверхность, при которых влиянием высших гармоник на суммарную погрешность измерения низкочастотного отклонения, принимаемого за погрешность формы, можно пренебречь. Для обоснования числовых значений таких предельных соотношений необходимо проведение экспериментальных исследований, имеющих соответствующую направленность.

Сформулированное выше условие позволяет при оценке отклонений формы выделенного класса объектов вместо реальных поверхностей использовать аналитические модели их аппроксимирующих поверхностей. Такие аппроксимирующие поверхности должны характеризовать низкочастотные отклонения точек реальных поверхностей и удовлетворять при этом следующим требованиям.

Во-первых, аппроксимирующие поверхности, выступающие в роли моделей реальных поверхностей деталей, должны сглаживать заменяемые реальные поверхности наилучшим образом, т. е. обеспечивать пренебрежимо малое несоответствие модели реальному объекту измерения.

Во-вторых, используемые аппроксимирующие поверхности должны достаточно просто описываться аналитически.

В-третьих, аналитические модели аппроксимирующих поверхностей должны строиться по минимальному количеству контролируемых точек.

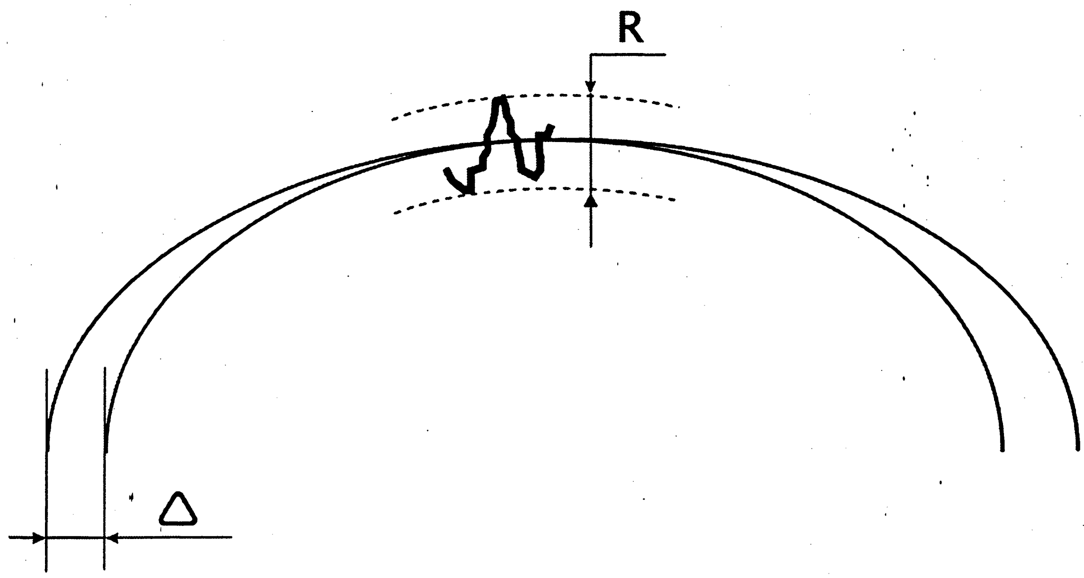

Рис. 1. Виды отклонений точек реальной поверхности, определяющих ее макрогеометрию (погрешность формы), где:

R – размах высокочастотных отклонений точек;

Δ – амплитуда низкочастотных отклонений

Исходя из этих требований, а также предпосылок разработки новых методов измерения, будем использовать для аппроксимации реальных поверхностей деталей различные гладкие теоретические поверхности второго-четвертого порядков, задаваемые параметрическими уравнениями. Выбор параметрических уравнений обусловлен их относительной простотой описания с их помощью поверхностей вращения различной сложности.

Суть предлагаемой методики заключается в следующем:

1. Строим параметрическое уравнение аппроксимирующей поверхности вида:

$$\begin{aligned} X &= F_x(p_1, p_2, ..., p_N, u, v) \\ Y &= F_y(p_1, p_2, ..., p_N, u, v) \\ Z &= F_z(p_1, p_2, ..., p_N, u, v) \end{aligned} \qquad (1)$$

где X, Y, Z – координаты, u,v – параметрические переменные, $p_1,p_2,...p_N$ – геометрические параметры поверхности.

2. Подставляя в уравнения значения координат контрольных точек, получим систему уравнений следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&F_x(p_1, p_2, ..., p_N, u_1, v_1) - X_1 = 0 \\
&F_y(p_1, p_2, ..., p_N, u_1, v_1) - Y_1 = 0 \\
&F_z(p_1, p_2, ..., p_N, u_1, v_1) - Z_1 = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&F_x(p_1, p_2, ..., p_N, u_M, v_M) - X_M = 0 \\
&F_y(p_1, p_2, ..., p_N, u_M, v_M) - Y_M = 0 \\
&F_z(p_1, p_2, ..., p_N, u_M, v_M) - Z_M = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где X_i, Y_i, Z_i – координаты i-ой точки, u_i, v_i – параметрические переменные в i-ой точке, $p_1, p_2, ... p_N$ – геометрические параметры поверхности, N – количество геометрических параметров, M – количество контрольных точек.

3. Задача решения данной системы уравнений может быть сведена к задаче минимизации $Q(p^*) = \min Q(p)$, где $Q(p)$ – суммарное отклонение контрольных точек от поверхности заданной вектор столбцом искомых геометрических параметров p.

$$
Q(p) = \sum_{i=1}^{N} \left[\begin{aligned} &(F_x(p_1, p_2, ..., p_N, u_i, v_i) - X_i)^2 + \\ &+ (F_y(p_1, p_2, ..., p_N, u_i, v_i) - Y_i)^2 + \\ &+ (F_z(p_1, p_2, ..., p_N, u_i, v_i) - Z_i)^2 \end{aligned} \right]
\tag{3}
$$

4. Задача минимизации решается численными методами.

Полагая, что функции $F_x(p_1, p_2, ..., p_N, u_i, v_i)$, $F_y(p_1, p_2, ..., p_N, u_i, v_i)$, $F_z(p_1, p_2, ..., p_N, u_i, v_i)$ являются непрерывно дифференцируемыми, введем в рассмотрение матрицу первых частных производных функций по переменным $p_1, p_2, ..., p_N, u_i, v_i$ – матрицу Якоби:

$$
J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}
\tag{4}
$$

Если матрица J невырожденная, то система имеет единственное решение. Для выполнения данного требования необходимо соблюдение следующих условий:

- количество различных уравнений должно быть больше либо равно количеству неизвестных. Говоря другими словами, количество контрольных точек должно быть больше либо равно количеству искомых контролируемых параметров, при этом сведение задачи решения системы нелинейных уравнений к задаче минимизации позволяет повысить точность измерения контролируемой поверхности на зашумленных данных, увеличением количества контрольных точек, за счет снижения влияния высокочастотных отклонений.

- контрольные точки не должны быть симметричными, так как в этом случае мы можем получить линейную комбинацию уравнений, что приведет к выроженности матрицы J.

При практической реализации методики мы столкнулись с проблемой сильного влияния на результат начальных значений параметрических переменных, а также высокими вычислительными затратами на проведение поиска оптимального вектора в состав которого входят, в том числе, и параметрические переменные. Данная проблема была успешно решена применением двух итераций. Поскольку значения параметрических переменных определяют расположение контрольных точек, а схема расположения контрольных точек известна, то всегда можно определить начальные значения параметрических переменных и исключить их из вектора искомых переменных на первой итерации. Схема расположения контрольных точек выбирается исходя из условий оптимизации вычислений и ограничений, связанных с параметрами конкретной исследуемой детали. Таким образом, на первой итерации мы получим начальные значения искомых переменных, которые будут использованы для второй итерации. Вторая итерация проводит поиск по всем переменным более совершенным и дорогостоящим, с точки зрения вычислительных затрат, методом. В результате мы сможем обеспечить высокую точность и приемлемые вычислительные затраты. При этом если схема расположения контрольных точек в процессе измерений не изменяется то, получив один раз уточненные на второй итерации значения параметрических переменных их можно использовать для расчета параметров следующей детали, исключив из вектора искомых параметров, и тем самым избежать лишней итерации. Данный прием особенно актуален в производственных условиях.

Также нами было выявлено ограничение, связанное с геометрическими свойствами исследуемых поверхностей: контрольные точки должны лежать хотя бы в двух различных плоскостях, в противном случае возможно вырождение в линию на плоскости.

Используя данную методику, нами было разработано программное обеспечение расчета геометрических параметров тороидальных поверхностей, которое использовалось для проведения вычислительного эксперимента, при проведении которого были получены следующие ограничения и результаты:

- расстояние между точками должно быть не менее $10d$, где d – максимальная абсолютная погрешность входных данных;

- порядок методической погрешности по абсолютному значению отклонения параметров реальной поверхности от рассчитанных параметров моделируемой поверхности не превышает порядок погрешности входных данных.

В заключение вышесказанного следует отметить, что разработанная нами методика имеет ряд преимуществ перед существующими методиками:

1. высокая точность;
2. возможность измерения расположенной произвольным образом поверхности, что позволяет решать ряд других задач;
3. данная методика является универсальной, что позволяет использовать ее для расчета геометрических параметров различных поверхностей второго и более высоких порядков.