

## Нахождение наибольшего и наименьшего значений тригонометрических функций

Пинчукова С.П., Ковалёнок Н.В.

Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим примеры на нахождение наибольшего и наименьшего значений тригонометрических функций используя только функциональные свойства тригонометрических функций.

Задача 1. На промежутке  $(\pi; 2\pi)$  найти наименьшее значение функции  $y = \sin^4 x + 5 + \frac{1}{\sin^4 x}$ .

**Решение:** Используя неравенство  $a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \forall a > 0, (a + \frac{1}{a} = 2, a = 1)$ .

$\forall x \in (\pi; 2\pi) \sin^4 x > 0$ . Значит,  $\sin^4 x + 5 + \frac{1}{\sin^4 x} \geq 2$  и  $\sin^4 x + 5 + \frac{1}{\sin^4 x} \geq 7$ .

Наименьшее значение функции на промежутке  $(\pi; 2\pi)$  равно 7 и достигается, если  $\sin^4 x = 1$ , т. е.  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Ответ: 7.

Задача 2. Найти наибольшее значение функции  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|tgx|+|ctgx|+3tgx \cdot ctgx}$  на интервале  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

**Решение:** На интервале  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  имеем  $|tgx| + |ctgx| + 3tgx \cdot ctgx = |tgx| + \left|\frac{1}{tgx}\right| + 3 \geq 2 + 3 = 5$ .

Функция  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$  убывающая, то  $\left(\frac{1}{2}\right)^{|tgx|+|ctgx|+3tgx \cdot ctgx} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ .

$y_{\text{наи оль ее}} = \frac{1}{32} \cdot \left(y_{\text{наи оль ее}} = y\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ . *мве m:*  $\frac{1}{32}$ .

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x) = 8\sin^2 \frac{x}{8} \cos^4 \left(\frac{x}{8} - \sin^2 \frac{x}{8}\right)$ .

**Решение:**  $f(x) = 8\left(1 - \cos^2 \frac{x}{8}\right) \cos^4 \frac{x}{8} \left(1 + 1 - \sin^2 \frac{x}{8}\right) = 8\left(1 - \cos 2x\right) \left(1 + \cos 2x\right) \cos^4 \frac{x}{8} = 8(1 - \cos 4x) \cos^4 \frac{x}{8}$ .

Пусть  $\cos^4 \frac{x}{8} = t$ , тогда  $y = 8(1 - t)t$ , где  $0 \leq t \leq 1$ .

$y(0) = y(1) = 0 \quad t_{\text{вер}} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \quad y_{\text{вер}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2$ .

*мве m:* наибольшее значение функции равно 2, наименьшее равно 0.