

ЖЕСТКОСТЬ КОНСОЛЬНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

*Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь*

На данном примере проиллюстрируем процедуру использования метода, изложенного в работах [1,3]. Рассматривается квадратная пластинка, защемленная по одному из своих краев. В свободном углу пластинка имеет нагрузку: а) сосредоточенная поперечная сила P ; б) изгибающий сосредоточенный момент M (рис. 1). Отметим, впрочем, что граничные условия могут быть произвольными. Исследуем жесткость пластины при локальных нагрузках, вычисляя прогиб средней поверхности пластины.

Запишем уравнение поперечного изгиба изотропной пластины, не имеющей распределенной нагрузки:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0, \quad (1)$$

где w - прогиб пластины. Введем обозначение: $\frac{\partial(\)}{\partial x} = (\)'$.

Учитывая очевидные соотношения $W' = W'$, $W'' = W''$, $W''' = W'''$, запишем уравнение (1) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} W \\ W' \\ W'' \\ W''' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial^4}{\partial y^4} & 0 & -2\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W \\ W' \\ W'' \\ W''' \end{bmatrix} \quad (2)$$

или символически $W' = A_1 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + A_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + A_3 W,$ (3)

$$\text{где } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} W \\ W' \\ W'' \\ W''' \end{bmatrix}$$

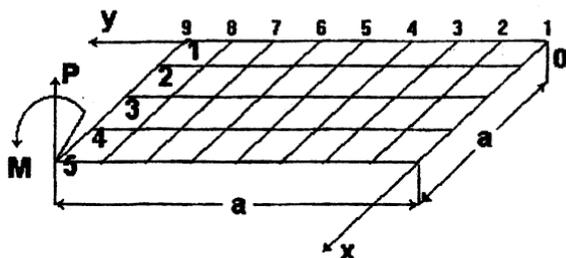


Рис. 1. Расчетная схема

Разобьем пластинку вдоль оси ОУ на восемь участков и запишем (3) в разностях [2] для каждой линии. Уравнение (3) запишем в центральных разностях для линий 3-7:

$$W'_k = B_{r-2}W_{k-2} + B_{k-1}W_{k-1} + B_k W_k + B_{k+1}W_{k+1} + B_{k+2}W_{k+2}, \text{ где}$$

$$B_{k-2} = B_{k+2} = \frac{A_1}{\Delta^4} - \frac{A_2}{12\Delta^2}; \quad B_{k-1} = B_{k+1} = -\frac{4A_1}{\Delta^4} + \frac{4A_2}{3\Delta^2},$$

$$B_k = \frac{6A_1}{\Delta^4} - \frac{15A_2}{6\Delta^2} + 3, \quad \Delta = \frac{a}{8},$$

a - ширина пластинки, т.е.

$$W'_k = B_{k-2}(W_{k-2} + W_{k+2}) + B_{k-1}(W_{k-1} + W_{k+1}) + B_k W_k, \quad k=3, \dots, 7$$

Уравнения для линий 1,2,8,9 запишем в несимметричных разностях [2]:

$$W'_1 = B_1^1 W_1 + B_2^1 W_2 + B_3^1 W_3 + B_4^1 W_4 + B_5^1 W_5$$

$$W'_9 = B_1^1 W_9 + B_2^1 W_8 + B_3^1 W_7 + B_4^1 W_6 + B_5^1 W_5$$

$$W'_2 = B_1^2 W_1 + B_2^2 W_2 + B_3^2 W_3 + B_4^2 W_4 + B_5^2 W_5, \text{ где}$$

$$W'_8 = B_1^2 W_9 + B_2^2 W_8 + B_3^2 W_7 + B_4^2 W_6 + B_5^2 W_5$$

$$B_1^1 = \frac{A_1}{\Delta^4} + \frac{35A_2}{12\Delta^2} + A_3, \quad B_2^1 = -\frac{4A_1}{\Delta^4} - \frac{26A_2}{3\Delta^2}, \quad B_3^1 = \frac{6A_1}{\Delta^4} + \frac{19A_2}{2\Delta^2},$$

$$B_4^1 = -\frac{4A_1}{\Delta^4} - \frac{14A_2}{3\Delta^2}, \quad B_5^1 = -\frac{A_1}{\Delta^4} + \frac{11A_2}{12\Delta^2}, \quad B_1^2 = \frac{A_1}{\Delta^4} + \frac{11A_2}{12\Delta^2},$$

$$B_2^2 = -\frac{4A_1}{\Delta^4} - \frac{5A_2}{3\Delta^2} + A_3, \quad B_3^2 = \frac{6A_1}{\Delta^4} + \frac{A_2}{2\Delta^2}, \quad B_4^2 = \frac{4A_1}{\Delta^4} + \frac{A_2}{3\Delta^2},$$

$$B_5^2 = \frac{A_1}{\Delta^4} - \frac{A_2}{12\Delta^2}.$$

Таким образом, получим систему четырех обыкновенных матричных дифференциальных уравнений ($n=9$):

$$z' = cz, \quad (4)$$

Выражения для продольного изгибающего момента M_1 и обобщенного по Кирхгофу усилия Q_1^* имеют вид:

$$\begin{bmatrix} W \\ W' \\ \bar{M} \\ \bar{Q}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & (\nu - 2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W \\ W' \\ W'' \\ W''' \end{bmatrix} \quad (5)$$

или $T = GW$, иначе $T = D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_2 W$, (6)

где $\bar{M} = \frac{M_1}{D}$, $\bar{Q}^* = \frac{Q_1^*}{D}$ $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu - 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Выражая в (6) производные в конечных разностях [2], получим систему:

$$T = GZ, \quad (7)$$

Соотношения (4) и (7) позволяют исключить Z , тогда

$$T(x_k) = G(x_k) \Omega_{x_H}^* [G(x_H)]^{-1} T(x_H), \quad (8)$$

где x_H, x_K - соответственно координата начала и конца участка разбиения пластины вдоль оси Ox (пластину разобьем на 4 участка; линии обозначены цифрами).

Перепишем уравнение (8) в виде системы:

$$(T_1)_k = a_{11}(T_1)_H + \dots + a_{19}(T_9)_H$$

$$(T_2)_k = a_{21}(T_1)_H + \dots + a_{29}(T_9)_H$$

.....

$$(T_9)_k = a_{91}(T_1)_H + \dots + a_{99}(T_9)_H$$

Вектор состояния T_i разобьем на геометрический $p = [W \ W']^T$ и силовой $q = [\bar{M} \ \bar{Q}^*]^T$, а матрицы a_{ij} на блоки:

$a_{ij} = \begin{bmatrix} b_{ij} & d_{ij} \\ l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}$, где размерность матриц $b_{ij}, d_{ij}, l_{ij}, m_{ij} - (2 \times 2)$:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} b_{11} & d_{11} \\ l_{11} & m_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix}_H + \dots + \begin{bmatrix} b_{19} & d_{19} \\ l_{19} & m_{19} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_9 \\ q_9 \end{bmatrix}_H$$

$$\begin{bmatrix} p_9 \\ q_9 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} b_{91} & d_{91} \\ l_{91} & m_{91} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix}_H + \dots + \begin{bmatrix} b_{99} & d_{99} \\ l_{99} & m_{99} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_9 \\ q_9 \end{bmatrix}_H$$

(9)

Систему (9) преобразуем к виду:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \cdot \\ p_i \\ \cdot \\ p_9 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdot & b_{19} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{91} & \cdot & b_{99} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_1 \\ \cdot \\ p_i \\ \cdot \\ p_9 \end{bmatrix}_H + \dots + \begin{bmatrix} d_{11} & \cdot & d_{19} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ d_{91} & \cdot & d_{99} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ q_i \\ \cdot \\ q_9 \end{bmatrix}_H$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ q_i \\ \cdot \\ q_9 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdot & l_{19} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ l_{91} & \cdot & l_{99} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_1 \\ \cdot \\ p_i \\ \cdot \\ p_9 \end{bmatrix}_H + \dots + \begin{bmatrix} d & & \\ m_{11} & \cdot & m_{19} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ m_{91} & \cdot & m_{99} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ q_i \\ \cdot \\ q_9 \end{bmatrix}_H$$

(10)

или

$$\begin{cases} P_K = BP_H + DQ_H \\ Q_K = LP_H + MQ_H \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует:

$$Q_H = D^{-1}P_K + D^{-1}BP_H. \quad (11)$$

Исключая Q_H , получим $Q_K = (L - MD^{-1}B)P_H + MD^{-1}BP_K$.

Запишем условия сопряжения участков:

$$\begin{array}{ll}
P_{H1} = P_0 & Q_{H1} = R_0 \\
P_{K1} = P_{H2} = P_1 & Q_{K1} - Q_{H2} = R_1 \\
\cdots & \cdots \\
P_{K4} = P_{H5} = P_4 & Q_{K4} - Q_{H5} = R_4 \\
P_{K5} = P_S & Q_{K5} = Q_{KS} = R_S
\end{array} \quad (12)$$

Тогда система разрешающих алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-B_{11}P_0 - B_{21}P_1 = R_0 \\
B_{31}P_0 + (B_{42} - B_{12})P_1 - B_{22}P_2 = R_1 \\
\cdots \\
B_{34}P_3 + (B_{44} - B_{15})P_4 - B_{25}P_5 = R_5 \\
B_{34}P_{15} + B_{45}P_S = R_S
\end{array} \right. \quad (13)$$

где $B_{j} = -D_j^1 B_j$, $B_{2j} = D_j^1$, $B_{3j} = L_j - M_j D_j^1 B_j$, $B_{4j} = M_j D_j^1$, а матрицы B_j, D_j, L_j, M_j - постоянны для всех участков.

Граничными условиями по краям $x=0$ (линия 1) и $x=a$ (линия 5) являются:

$$P_0 = 0 \quad \text{и} \quad R_S = R_5.$$

Граничными условиями по свободным краям при $y=0$ и $y=a$ (линии 1 и 9 соответственно) являются:

$$M_2 = 0, \quad Q_2^* = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

Очевидно, $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, тогда $\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - \frac{2}{\nu} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = 0$, т.е. $\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = 0$.

Итак, при $y=0$ и $y=a$ имеем $W'' = -\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$.

Записывая граничные условия в несимметричных разностях, получим:

$$W_1 = 3,6W_2 - 4,8W_3 + 2,8W_4 - 0,6W_5$$

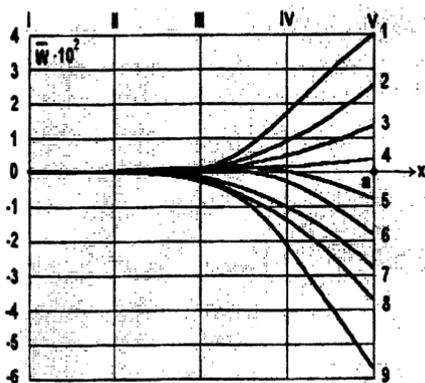
$$y=0: \quad W_1'' = -\frac{1}{\nu} [A(35W_1 - 104W_2 + 114W_3 - 56W_4 + 11W_5)],$$

$$\text{где} \quad A = \frac{1}{12\Delta^2}$$

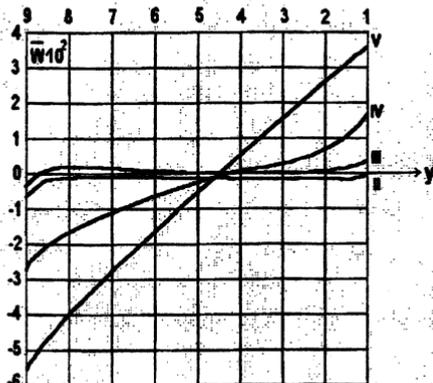
$$W_9 = 3,6W_8 - 4,8W_7 + 2,8W_6 - 0,6W_5$$

$$y=a: \quad W_9'' = -\frac{1}{y} [A(35W_9 - 104W_8 + 114W_7 - 56W_6 + 11W_5)]$$

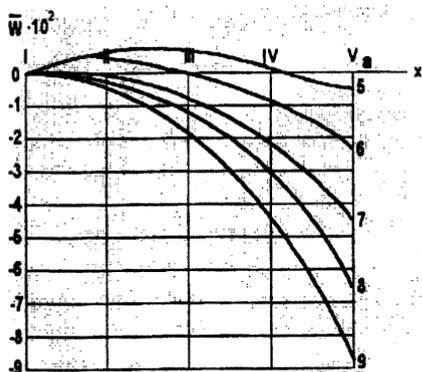
Граничные условия при $x=0$ и $x=a$ накладывались на разрешающую систему алгебраических уравнений (13), а при $y=0$ и $y=a$ на систему дифференциальных уравнений в обыкновенных производных (4). Отметим, что последние граничные условия могут накладываться на систему (13), однако это будет наложение условий в точках, а не по линиям, как это случается при наложении на систему. Система алгебраических уравнений (13) решалась методом Гаусса.



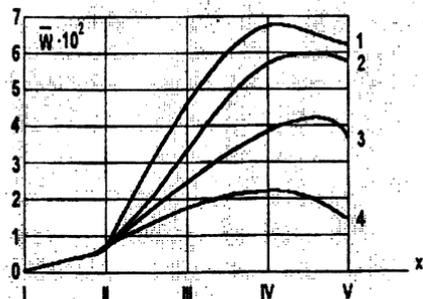
а)



б)



в)



г)

Рис.2.

Результаты вычислений представлены в виде графиков на рис.2. Здесь прогиб $\bar{W} = W \frac{D}{P}$ приведен в безразмерной форме. Рис.2а дает картину изгиба линий 1,2,3,4,5,6,7,8,9. На рис. 2б приведены формы изгиба поперечных сечений 2,3,4,5.

На рис. 2а,б дана картина изгиба пластины при действии локальной силы P , приложенной к пластине в углу ($x=a, y=a$). На рис. 2в,г показан изгиб пластины при действии момента M . В вычислительной программе исходными величинами являлись $\Delta X = 0,1$, $\Delta Y = \Delta = 0,05$, $\nu = 0,3$, $n = 9$. Заметим, что остальные величины входят в безразмерной прогиб \bar{W} ; $a = 0,4$.

На рис.2в,г $\bar{W} = W \frac{D}{M}$. Если воспользоваться теорией подобия, то несложно обобщить полученные результаты на случай пластины с иными размерами.

Отметим, что разработанная программа позволяет вычислять прогибы прямоугольных пластин с произвольным соотношением сторон. Если необходимо получить значения усилий в узлах, необходимо воспользоваться соотношениями (11) и (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Громыко О.В. Автоматизация расчета тонкостенных элементов конструкций // Наука и технологии на рубеже XXI века. Материалы между. НТК.- Мн.: «Технопринт», 2000.-С. 244-253.
2. Громыко О.В. Конечно-разностные соотношения при расчете тонкостенных элементов конструкций // Машиностроение.- Мн., 2000.- Вып.16.- С. 266-271.
3. Громыко О.В. Расчет оболочек с конечной сдвиговой жесткостью при сосредоточенных воздействиях // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике.-Мн.: «Технопринт», 2001.-С.139-144.

УДК 621.865.8

А.П. Дραπεзо, В.А. Ярмолович

ПРИМЕНЕНИЕ МИНИАТЮРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ХОЛЛА И МАЛОГАБАРИТНЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ В СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ДАТЧИКАХ ДЛЯ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Институт физики твердого тела и полупроводников НАН Б

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

Широко известно, что с использованием эффекта Холла можно реализовать большое число технических устройств, у которых отсутствует механический контакт