технической конференции (70-й научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных работников, докторантов и аспирантов БНТУ) в 4 томах, Минск, май 2017 г. / БНТУ. – Минск, 2017. – Том 4. – С. 503.

16. Ермаков, А.И. Разработка 3d-принтера для образовательных учреждений / А.И. Ермаков, В.В. Книга, Е.П. Мелещеня, А.А. Третьякова // Переработка и управление качеством сельскохозяйственной продукции: сборник статей III международной научно-практической конференции, Минск, 23–24 марта 2017 г. / БГАТУ; редкол.: В.Я. Груданов [и др.]. – Минск, 2017. – С. 426–428.

17. Ермаков, А.И. Применение 3D-печати в кондитерском производстве / А.И. Ермаков, С.В. Чайко /НАУКА –ОБРАЗОВАНИЮ, ПРОИЗВОДСТВУ, ЭКОНОМИКЕ: Материалы 15-й Международной научно-технической конференции (70-й научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных работников, докторантов и аспирантов БНТУ) в 4 томах, Минск, май 2017г. / БНТУ. – Минск, 2017. – Том 4 – С.506

18. Ермаков, А.И. Разработка конструкции 3d- принтера, печатающего пищевыми материалами / А.И. Ермаков, С.В. Чайко// Мировая экономика и бизнес-администрирование малых и средних предприятий: материалы 13-го междунар. науч. семинара, проводимого в рамках 15-ой межд. научно-технической конференции «Наука– образованию производству, экономике, Минск, 26–28 января 2017 г. / БНТУ; редкол.: Б.М. Хрусталёв [и др.]. – Минск, 2017. – С. 255–256.

19. Шмелёв, А.В. Экспериментальное и расчетное определение механических характеристик образцов АБС-пластика при растяжении, изготовленных методом 3d-печати / А.В. Шмелёв, В.И. Ивченко, А.В. Талалуев / Инженерный журнал: наука и инновации, 2021, вып. 4. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-4-2070.

20. Балашов, А.В. Исследование структуры и свойств изделий, полученных 3D-печатью / А.В. Балашов, М.И. Маркова / Инженерный вестник Дона, 2019, №1 https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-struktury-i-svoystv-izdeliy-poluchennyh-3d-pechatyu/viewer.

21. Машков, Ю. К. Трибофизика конструкционных материалов : учеб. пособие / Ю. К. Машков, О. В. Малий // Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ,2017 – 176 с. ISBN 978-5-8149-2439-1

22. ГОСТ 11012-2017. Пластмассы. Метод испытания на абразивный износ// Электронный фонд [Электронный ресурс]. – 2022. – Режим доступа: https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293744/4293744275.pdf. – Дата доступа: 09.03.2023.

УДК 514.74

# НАХОЖДЕНИЕ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ПО ЗАДАННОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРИВИЗНЕ

*В.Н. Жуковец, БНТУ, г. Минск*

***Резюме**. Приведено решение задачи нахождения уравнений плоских кривых в декартовых координатах, согласно заданной кривизне в виде линейной функции. В результате решения системы дифференциальных уравнений первого порядка получены выражения, которые представлены в параметрическом виде. Описанная в статье методика может применяться при решении задач геометрии, теоретической и прикладной механики.*

***Ключевые слова**: дифференциальная геометрия, плоские кривые, дифференциальные уравнения, теоретическая и прикладная механика.*

**Введение.** Ранее, в работе [1], была дана методика построения плоской линии, когда задано линейное выражение для изменения радиуса кривизны в декартовой системе координат. Развивая упомянутую методику, следует получить решение другой задачи, когда задан линейный закон изменения кривизны плоской линии. Так как радиус кривизны и кривизна линии являются взаимно обратными величинами, то можно рассматривать два типа задач построения плоских кривых: по линейному закону радиуса кривизны и по линейному закону кривизны. В работе [1] рассмотрена задача первого типа, а в этой статье дано решение задачи второго типа.

**Основная часть.** Известно [2, 3], что в декартовых координатах кривизна линии находится как:

$$K = \frac{\left|y''_{xx}\right|}{\left(1+\left(y'_x\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (1)$$

Решение дифференциального уравнения (1) описывается лишь для нескольких частных случаев [4]. Эта задача дифференциальной геометрии может быть решена для гораздо большего перечня условий, если использовать в качестве основы методику, описанную в публикации [1]. Таким образом:

$$\begin{cases} K \cdot \dfrac{dx}{d\psi} = \cos\psi; \\ K \cdot \dfrac{dy}{d\psi} = -\sin\psi. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $K$ – кривизна плоской линии в декартовых координатах, $\psi$ – угол поворота нормали в радианах по часовой стрелке от оси ординат 0у, либо от ей параллельной оси. Линейный закон изменения кривизны:

$$K = \frac{1}{R} = a + b \cdot x + c \cdot y\,; \tag{3}$$

Система уравнений (2) примет вид:

$$\begin{cases} (a + b \cdot x + c \cdot y) \cdot \dfrac{dx}{d\psi} = \cos\psi; \\ (a + b \cdot x + c \cdot y) \cdot \dfrac{dy}{d\psi} = -\sin\psi. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} (a + b \cdot x + c \cdot y) \cdot b \cdot \dfrac{dx}{d\psi} = b \cdot \cos\psi; \\ (a + b \cdot x + c \cdot y) \cdot c \cdot \dfrac{dy}{d\psi} = -c \cdot \sin\psi. \end{cases} \tag{5}$$

Выполним сложение уравнений системы (5):

$$(a + b \cdot x + c \cdot y) \cdot \left( b \cdot \frac{dx}{d\psi} + c \cdot \frac{dy}{d\psi} \right) = b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi\,;$$

$$(a + b \cdot x + c \cdot y) \cdot \frac{d(a + b \cdot x + c \cdot y)}{d\psi} = b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi\,;$$

$$K \cdot \frac{dK}{d\psi} = b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi\,.$$

Проведем интегрирование:

$$\int_{K_0}^{K} K \cdot dK = \int_{\psi_0}^{\psi} (b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi) \cdot d\psi\,;$$

$$\frac{K^2}{2} - \frac{K_0^2}{2} = (b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi) - (b \cdot \sin\psi_0 + c \cdot \cos\psi_0)\,;$$

$$K^2 = K_0^2 + 2 \cdot b \cdot (\sin\psi - \sin\psi_0) + 2 \cdot c \cdot (\cos\psi - \cos\psi_0)\,. \tag{6}$$

Здесь $K_0 = a + b \cdot x_0 + c \cdot y_0$ при $\psi = \psi_0$. При этом $K^2 \geq 0$. После преобразований получаем:

$$K^2 = \left( K_0^2 - 2 \cdot b \cdot \sin\psi_0 - 2 \cdot c \cdot \cos\psi_0 \right) + 2 \cdot b \cdot \sin\psi + 2 \cdot c \cdot \cos\psi\,.$$

Примем обозначение $q = K_0^2 - 2 \cdot b \cdot \sin\psi_0 - 2 \cdot c \cdot \cos\psi_0$. Тогда получим:

$$K^2 = q + 2 \cdot b \cdot \sin\psi + 2 \cdot c \cdot \cos\psi\,. \tag{7}$$

Выполним преобразования [2, 3]:

$$2 \cdot b \cdot \sin\psi + 2 \cdot c \cdot \cos\psi = d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})\,;\; d = \sqrt{(2 \cdot b)^2 + (2 \cdot c)^2} = 2 \cdot \sqrt{b^2 + c^2}\,;$$

$$\cos\psi_{bc} = \frac{2 \cdot b}{2 \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}\,;\; \sin\psi_{bc} = \frac{2 \cdot c}{2 \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}\,;$$

$$K^2 = q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})\,;$$

$$K = \operatorname{sgn}(K) \cdot \sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}\,. \tag{8}$$

Здесь $\operatorname{sgn}(K)$ – функция знака (сигнум) [2, 3].

Систему (2) представим в виде:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\cos\psi \cdot d\psi}{K}; \\ dy = -\dfrac{\sin\psi \cdot d\psi}{K}. \end{cases} \tag{9}$$

Используя первое уравнение системы (9) и формулу (8), получим:

$$\int dx = \int \frac{\cos\psi \cdot d\psi}{\operatorname{sgn}(K) \cdot \sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}}\,.$$

При этом $\cos\psi = \cos((\psi + \psi_{bc}) - \psi_{bc}) = \cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot \cos\psi_{bc} + \sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot \sin\psi_{bc}$.

По свойству функции знака $\frac{1}{\operatorname{sgn}(K)} = \operatorname{sgn}(K)$. Тогда получим выражение:

$$\int dx = \operatorname{sgn}(K) \cdot \int \frac{\cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot \cos\psi_{bc} \cdot d\psi}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} + \operatorname{sgn}(K) \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot \sin\psi_{bc} \cdot d\psi}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}}. \quad (10)$$

Так как $\cos\psi_{bc} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$; $\sin\psi_{bc} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$; $d = 2 \cdot \sqrt{b^2 + c^2}$, проинтегрируем [5] выражение (10):

$$\int dx = \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} + \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}};$$

$$\int dx = \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{b}{d \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{d \cdot \cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} + \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}};$$

$$\int dx = \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{b}{2 \cdot \left(b^2 + c^2\right)} \cdot \int \frac{d(q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc}))}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} + \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}};$$

$$x = \operatorname{sgn}(K) \cdot \left( \frac{b}{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})} + \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} \right) + C_x;$$

$$x = \operatorname{sgn}(K) \cdot \left( \frac{b}{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})} + \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot Isqs(\psi + \psi_{bc}) \right) + C_x. \quad (11)$$

В выражении (11) используется специальная интегральная функция вида

$$Isqs(\psi + \psi_{bc}) = \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}}. \quad (12)$$

Выполним интегрирование [5] второго уравнения системы (9).

$$\int dy = \int \frac{-\sin\psi \cdot d\psi}{\operatorname{sgn}(K) \cdot \sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}}.$$

При этом $\sin\psi = \sin((\psi + \psi_{bc}) - \psi_{bc}) = \sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot \cos\psi_{bc} - \cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot \sin\psi_{bc}$; $\frac{1}{\operatorname{sgn}(K)} = \operatorname{sgn}(K)$.

Получаем выражение:

$$\int dy = \operatorname{sgn}(K) \cdot \int \frac{\cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot \sin\psi_{bc} \cdot d\psi}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} - \operatorname{sgn}(K) \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot \cos\psi_{bc} \cdot d\psi}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}}. \quad (13)$$

Интегрируем выражение (13):

$$\int dy = \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} - \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}};$$

$$\int dy = \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{c}{d \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{d \cdot \cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} - \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}};$$

$$\int dy = \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{c}{2 \cdot \left(b^2 + c^2\right)} \cdot \int \frac{d(q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc}))}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} - \operatorname{sgn}(K) \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}};$$

$$y = \operatorname{sgn}(K) \cdot \left( \frac{c}{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})} - \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \int \frac{\sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot d(\psi + \psi_{bc})}{\sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})}} \right) + C_y;$$

$$y = \operatorname{sgn}(K) \cdot \left( \frac{c}{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})} - \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot Isqs(\psi + \psi_{bc}) \right) + C_y. \quad (14)$$

Таким образом:

$$x(\psi) = \operatorname{sgn}(K) \cdot \left( \frac{b}{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{q + d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})} + \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot Isqs(\psi + \psi_{bc}) \right) + C_x; \quad (15)$$

$$y(\psi)=\operatorname{sgn}(K)\cdot\left(\frac{c}{b^2+c^2}\cdot\sqrt{q+d\cdot\sin(\psi+\psi_{bc})}-\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot Isqs(\psi+\psi_{bc})\right)+C_y\,; \tag{16}$$

Определяем постоянные величины интегрирования [5]:

$$C_x=\frac{x_0\cdot c^2-a\cdot b-y_0\cdot b\cdot c}{b^2+c^2}-\operatorname{sgn}(K_0)\cdot\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot Isqs(\psi_0+\psi_{bc})\,; \tag{17}$$

$$C_y=\frac{y_0\cdot b^2-a\cdot c-x_0\cdot b\cdot c}{b^2+c^2}+\operatorname{sgn}(K_0)\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot Isqs(\psi_0+\psi_{bc})\,. \tag{18}$$

**Заключение.** Данная методика является логическим продолжением работы [1], имеет серьезное прикладное значение в области дифференциальной геометрии, теоретической и прикладной механики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Жуковец В.Н. Построение плоских линий по заданному в декартовых координатах закону переменной кривизны // Материалы форума «Перспективы евразийской экономической интеграции», посвящ. 10-летию Евразийской экономической комиссии, в рамках 18-го Междунар. науч. семинара «Мировая экономика и бизнес-администрирование»: XX Междунар. науч.-техн. конф. «Наука – образованию, производству, экономике»; Республика Беларусь, Минск, 16-17 марта 2022 года / межд. программ. комитет С.В. Харитончик, А.В. Данильченко [и др.]. – Минск: «Четыре четверти», 2022. – С. 256-261.

2. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы: Справочник. Под ред. Богданова Ю.С. – Мн.: Выш. шк. 1995. – 380 с.

3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: 1973. – 832 с.

4. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: «Факториал», 1997. – 512 с.

5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 632 с.

УДК 681.138

## ПЕРСПЕКТИВЫ И НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТОРГОВЫХ АВТОМАТОВ

*А.А. Куликова, БНТУ, г.Минск*

***Резюме.*** *Рассмотрены основные перспективы и направления развития торговых автоматов.*

***Ключевые слова:*** *торговый автомат, мобильное приложение, безналичная оплата, распознание лиц, экология, сенсорные экраны.*

**Введение.** Интернет и цифровые технологии ускоряют темпы инноваций и трансформируют многие отрасли, одной из которых является рынок торговых автоматов. Торговые автоматы долгое время были удобным и недорогим средством продажи различных товаров и услуг. Однако большинство торговых автоматов до сегодняшнего дня были сосредоточены на сборе денег, выдаче сдачи и выдаче товаров. Тем не менее, индустрия торговых автоматов значительно растет и расширяется в различных сферах и направления, и далеко вышла за пределы традиционных товаров и услуг. Теперь торговые автоматы включают в себя различные гаджеты, электронику и всю необходимую технику.

**Основная часть.** Рассмотрим основные перспективы и направления развития торговых автоматов.

Всегда носить с собой наличные деньги, нужное количество монет неудобно, поэтому все больше людей предпочитают использовать карты или мобильные приложениядля оплаты. Долгое время торговые автоматы принимали только монеты и купюры, однако сейчас все больше автоматов оснащают системой для оплаты картами. Кроме того, современные торговые автоматы можно использовать через мобильные приложения, которые не только осуществляю платежи, но также могут показывать, что есть в наличии, делать более персонализированные предложения на основе истории покупок человека. Технологии безналичных и мобильных платежей становятся все более распространенными [1].

Возможность безналичной оплаты является причиной повышения безопасности платежей. Быстрое считывание карты и оплата очень удобны, однако это не всегда безопасный вариант. Из-за мошенничества и утечки данных индустрия торговых автоматов работает с финансовыми учреждениями, чтобы обеспечить самые высокие меры безопасности.

Владельцы торговых автоматов начали расширять ассортимент продуктов и предметов, продаваемых по средствам торговых автоматов. Многие ритейлеры по-прежнему избегают размещать более дорогие товары в автоматах, но с повышением безопасности и снижением уровня вандализма эти отраслевые тенденции также меняются. Разнообразие можно найти не только в ассортименте товаров и услуг, предлагаемых новыми торговыми автоматами, но в местах размещения данного вида оборудования. Исследования показывают, что