

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

Василевич Ю. В.¹, Остриков В. О.², Остриков О. М.²

СТАТИКА И ДИНАМИКА ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА АУСТЕНИТ / МАРТЕНСИТ В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ ФЕРРОМАГНИТНОМ МОНОКРИСТАЛЛЕ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКЕ И МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. Белорусский национальный технический университет,
Минск, Беларусь

2. УО «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,
Гомель, Беларусь

Прочность, жесткость и надежность работы элементов машиностроения зависят от эксплуатационных условий их функционирования. Изложен метод решения статической задачи для призматического ферромагнитного монокристалла с эффектом памяти формы, находящегося в жесткой заделке в магнитном поле. Показано, что для уравнивания силы, действующей со стороны магнитного поля на межфазную границу, на свободном торце кристалла должна возникать уравнивающая сила. Дано решение динамической задачи для границы раздела аустенит / мартенсит в магнитном поле.

Введение. Экспериментальному исследованию уникальных физико-механических свойств ферромагнитных материалов с памятью формы посвящено большое количество работ [1–12]. Исследования посвящены преимущественно сплавам Гейслера системы $Ni-Mn-Ga$. Назрела необходимость в создании и развитии теории границ раздела аустенит / мартенсит (в работах [1–12] данная граница называется двойниковой) для применения ее результатов в технологии изделий и устройств, функционирующих на основе ферромагнитных смарт-кристаллов.

В работе [13] на основе методов механики деформируемого твердого тела решена статическая и динамическая задача в случае находящегося в жесткой заделке механически нагруженного призматического ферромагнитного монокристалла с единичной границей раздела аустенит / мартенсит при отсутствии магнитного поля. При решении динамической задачи в [13] было решено уравнение движения границы раздела аустенит / мартенсит, предложенное в [13].

Целью данной работы стало решение статической и динамической задачи для границы раздела аустенит / мартенсит в случае механически ненагруженного ферромагнитного призматического монокристалла, находящегося в жесткой заделке и магнитном поле.

Постановка статической задачи. Задача схематически проиллюстрирована на рис. 1. Призматический механически не нагруженный ферромагнитный монокристалл с памятью формы находится в жесткой заделке. Разделяющая аустенитную и мартенситную части кристалла граница ориентирована к поверхности под углом ψ (рис. 1). В результате бездиффузионных фазовых превращений мартенситная часть кристалла повернулась таким образом, что изначально параллельные торцевые плоскости стали непараллельными. Силу \vec{F}_{Bmag} (рис. 1) будем считать заданной. Возникновение этой силы на границе раздела аустенит / мартенсит обусловлено наличием магнитного поля. Величина

и направление силы \vec{F}_{Bmag} зависит от величины и направления магнитного поля. В данной работе не будем рассматривать природу этой силы и примем экспериментально [2; 5–7; 12] доказанный факт ее существования за постулат.

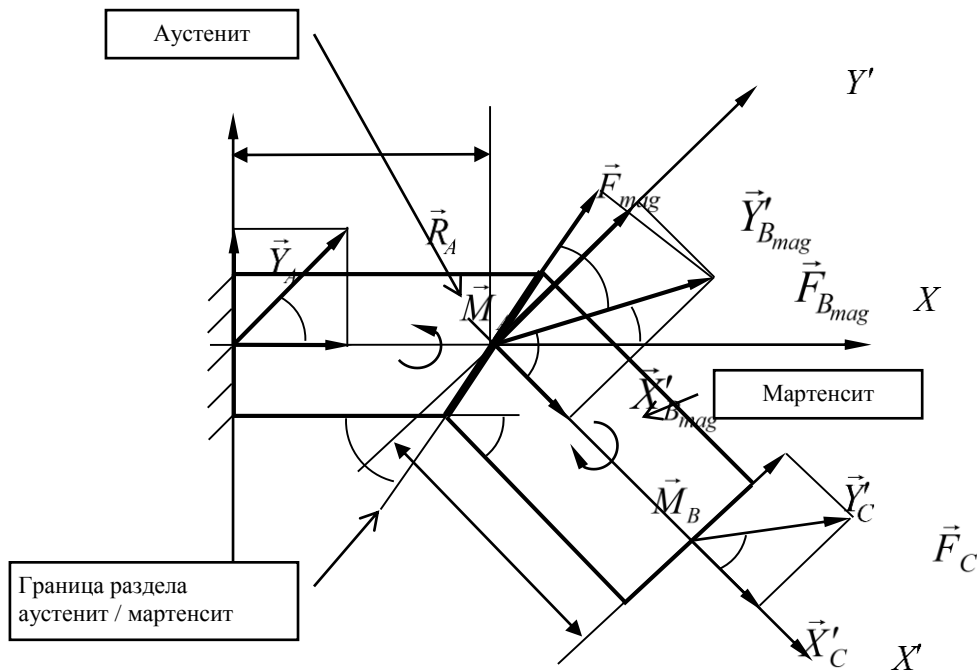


Рис. 1. Схематическое изображение находящегося в жесткой заделке и в магнитном поле призматического монокристаллического образца с границей раздела аустенит / мартенсит

Действующая в точке B сила \vec{F}_{Bmag} в точке C будет уравниваться силой \vec{F}_C , направленной к оси BX' под неизвестным углом γ (рис. 1).

В точке A действует сила \vec{R}_A , для которой справедливо:

$$\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \operatorname{tg} \alpha = Y_A / X_A, \quad (1)$$

здесь \vec{i} и \vec{j} – единичные векторы ортонормированного базиса, направленные вдоль осей Ax и Ay , соответственно;

X_A и Y_A – составляющие силы \vec{R}_A (X_A и Y_A – модули составляющих \vec{X}_A и \vec{Y}_A);

α – неизвестный угол наклона вектора \vec{R}_A к оси Ax .

Аналогично для сил \vec{F}_{Bmag} и \vec{F}_C , действующих в точках B и C , соответственно, можно записать:

$$\vec{F}_{Bmag} = X'_{Bmag} \vec{i}' + Y'_{Bmag} \vec{j}'; F_{Bmag} = \sqrt{X'^2_{Bmag} + Y'^2_{Bmag}}; \operatorname{tg} \beta = Y'_{Bmag} / X'_{Bmag},$$

$$\vec{F}_C = X'_C \vec{i}' + Y'_C \vec{j}'; F_C = \sqrt{X'^2_C + Y'^2_C}; \operatorname{tg} \gamma = Y'_C / F_C \quad (2)$$

здесь \vec{i}' и \vec{j}' – единичные векторы ортонормированного базиса, направленные вдоль осей BX' и BY' , соответственно;

X'_{Bmag} и Y'_{Bmag} – модули составляющих силы \vec{F}_{Bmag} ;

β – угол наклона вектора \vec{F}_{Bmag} к оси BX' ;

X'_C и Y'_C – модули составляющих силы \vec{F}_C .

Проекция силы \vec{F}_{Bmag} на ось AX есть $F_{BmagX} = F_{Bmag} \cos \vartheta$, где ϑ – угол наклона \vec{F}_{Bmag} к оси AX . Соответственно, вдоль границы раздела аустенит / мартенсит будет действовать сила \vec{F}_{mag} , величина которой находится по формуле:

$$F_{mag} = F_{Bmag} \cos \delta, \quad (3)$$

где δ – угол наклона \vec{F}_{Bmag} к границе раздела аустенит / мартенсит.

По умолчанию принято допущение о том, что рассматриваемый смарт-кристалл невесомый.

Решение статической задачи. Пусть при включении магнитного поля в точке B на границе раздела аустенит / мартенсит начала действовать сила \vec{F}_{Bmag} . Для нахождения мартенситного объема (рис. 1) в равновесии на свободном ненагруженном торце кристалла в точке C должна возникнуть уравновешивающая сила \vec{F}_C . Тогда справедливо:

$$\vec{F}_{Bmag} + \vec{F}_C = 0. \quad (4)$$

Отсюда следует:

$$\sum_i F_{iX'} = F_{Bmag} \cos \beta + X'_C = 0, \quad (5)$$

$$\sum_i F_{iY'} = F_{Bmag} \sin \beta + Y'_C = 0, \quad (6)$$

где

$$X'_C = F_C \cos \gamma, Y'_C = F_C \sin \gamma. \quad (7)$$

Для моментов сил, действующих на мартенситный объем (рис. 1) в статическом равновесии, справедливо уравнение:

$$\sum_i M_B(F_i) = F_C l_m \sin\gamma - M_B = 0, \quad (8)$$

где l_m – длина мартенситной части образца (рис. 1).

В результате из (5), (6) и (8) получим:

$$F_C \cos\gamma = -F_{Bmag} \cos\beta, \quad F_C \sin\gamma = -F_{Bmag} \sin\beta, \quad M_B = F_C l_m \sin\gamma. \quad (9)$$

Принимая $\beta = -\gamma$, из (9) получим

$$F_C = -F_{Bmag}. \quad (10)$$

Исходя из представленной на рис. 1 схемы, получим

$$F_{mag} = F_{Bmag} \cos\delta = -F_C \cos\delta. \quad (11)$$

В частном случае, когда $\delta = 0$, будем иметь

$$F_{mag} = -F_C. \quad (12)$$

Аналогично (5), (6) и (8) для аустенитной части кристалла можно записать:

$$\sum_i F_{iX} = X_A + F_{Bmag} \cos\vartheta = 0, \quad (13)$$

$$\sum_i F_{iY} = Y_A + F_{Bmag} \sin\vartheta = 0, \quad (14)$$

$$\sum_i M_A(F_i) = F_{Bmag} l_a \sin\vartheta + M_A - M_B = 0, \quad (15)$$

где l_a – длина аустенитной части образца; ϑ – угол наклона вектора \vec{F}_{Bmag} к оси AX (рис. 1).

В (13) и (14) принято:

$$X_A = -F_{Bmag} \cos \vartheta, \quad (16)$$

$$Y_A = -F_{Bmag} \sin \vartheta. \quad (17)$$

С учетом (9) и (10) из (15) получим

$$M_A = F_C l_m \sin \gamma - F_{Bmag} l_a \sin \vartheta = F_C (l_a \sin \vartheta + l_m \sin \gamma). \quad (18)$$

Решение динамической задачи.

По аналогии с [15] для межфазной границы раздела аустенит / мартенсит уравнение движения примем в виде:

$$a\ddot{L} + b\dot{L} + cL = F(t), \quad (19)$$

где a , b и k – эмпирические коэффициенты;

L – положение межфазной границы на оси AX (рис. 1).

Введем обозначения:

$$2\lambda = b/a, \quad \omega_0^2 = c/a. \quad (20)$$

Тогда (19) с учетом (20) запишем в виде:

$$\ddot{L} + 2\lambda\dot{L} + \omega_0^2 L = \frac{1}{a} F(t). \quad (21)$$

Как и в [12], примем

$$F(t) = \text{const} = F_{mag}. \quad (22)$$

Пусть выполняются начальные условия

$$L(0) = L_0; \quad \dot{L}(0) = V_0, \quad (23)$$

здесь L_0 – положение межфазной границы в начальный момент времени ($t = 0$);

V_0 – начальная скорость границы раздела аустенит / мартенсит.
Решение однородного уравнения

$$\ddot{L} + 2\lambda\dot{L} + \omega_0^2 L = 0 \quad (24)$$

имеет вид [16; 17]

$$L_o(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t}. \quad (25)$$

здесь C_1 и C_2 – постоянные величины;

a_1 и a_2 – характеристические числа, которые находятся из соотношений [16]:

$$a_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}, \quad a_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (26)$$

При $\omega_0^2 \neq 0$ пусть частное решение уравнения (21) имеет вид

$$L^* = P. \quad (27)$$

Подстановка (27) в (21), с учетом (22), даст

$$L^* = \frac{F_{mag}}{a\omega_0^2}. \quad (28)$$

Решение уравнения (21) есть [16]

$$L = L_o + L^*. \quad (29)$$

Подстановка (25) и (28) в (29) даст

$$L(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + \frac{F_{mag}}{a\omega_0^2}. \quad (30)$$

Начальные условия (23) из (30) позволяют получить уравнения для нахождения неизвестных констант C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} L_0 = C_1 + C_2 + \frac{F_{mag}}{a\omega_0^2} \\ V_0 = a_1 C_1 + a_2 C_2 \end{cases} \quad (31)$$

Отсюда получаем:

$$C_1 = \left(L_0 - \frac{F_{mag}}{a\omega_0^2} \right) - \frac{a_1 \left(L_0 - \frac{F_{mag}}{a\omega_0^2} \right) - V_0}{a_1 - a_2}, \quad (32)$$

$$C_2 = \frac{a_1 \left(L_0 - \frac{F_{mag}}{a\omega_0^2} \right) - V_0}{a_1 - a_2}. \quad (33)$$

При $L_0 = 0$, $V_0 = 0$ из (32), (33) будем иметь

$$C_1 = \frac{a_2 F_{mag}}{a\omega_0^2 (a_1 - a_2)}, \quad (34)$$

$$C_2 = -\frac{a_1 F_{mag}}{a\omega_0^2 (a_1 - a_2)}. \quad (35)$$

В ферромагнитных материалах с эффектом запоминания формы при бездиффузионных фазовых превращениях межфазная граница раздела, как правило, имеет высокую подвижность [12]. Это в уравнении (21) позволяет принять $\lambda = 0$. Тогда получим уравнение:

$$\ddot{L} + \omega_0^2 L = \frac{1}{a} F(t). \quad (36)$$

Решение данного уравнения имеет вид (29), где L_o есть решение уравнения

$$\ddot{L} + \omega_0^2 L = 0. \quad (37)$$

Известно [16], что

$$L_o(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t, \quad (38)$$

Или

$$L_o(t) = A \cos(\omega_0 t + \omega). \quad (39)$$

Здесь A_1 и A_2 – постоянные; $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$; $\operatorname{tg} \omega = -A_2 / A_1$.

Частное решение уравнения (36) примем в виде (28). Тогда решение уравнения (36) примет вид:

$$L(t) = A \cos(\omega_0 t + \omega) + \frac{F_{mag}}{a \omega_0^2}. \quad (40)$$

Заключение. Таким образом, решена задача о статическом равновесии призматического ферромагнитного монокристалла с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке в магнитном поле. Показано, что для уравновешивания силы, действующей со стороны магнитного поля на межфазную границу, на свободном торце кристалла возникает уравновешивающая сила. Решена динамическая задача для границы раздела аустенит / мартенсит, находящейся под действием магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Toman, J. Epitaxial re-solidification of laser-melted Ni-Mn-Ga single crystal / J. Toman, D. C. Pagan, P. Müllner, M. Chmielus // Acta Materialia. – 2021. – V. 219. – P. 117236.
2. Musiienko, D. Effect of crystal quality on twinning stress in Ni-Mn-Ga magnetic shape memory alloys / D. Musiienko, F. Nilsén, A. Armstrong, M. Rameš, P. Veřtát, R. H. Colman, J. Čapek, P. Müllner, O. Heczko, L. Straka // J. Materials Research and Technology. – 2021. – V. 14. – P. 1934–1944.
3. Armstrong, A. Traveling surface undulation on a Ni-Mn-Ga single crystal element / A. Armstrong, B. Karki, A. Smith, P. Müllner // Smart Mater. Struct. – 2021. – V. 30. – P. 85001.
4. Armstrong, A. Actuating a magnetic shape memory element locally with a set of coils / A. Armstrong, P. Müllner // Metals. – 2021. – V. 11. – P. 536.
5. Ullakko, K. Magnetically controlled shape memory alloys: a new class of actuator materials / K. Ullakko // J. Mater. Eng. Perform. – 1996. – V. 5. – P. 405–409.
6. Ullakko, K. Large magnetic-field-induced strains in Ni₂MnGa single crystals / K. Ullakko, J. K. Huang, C. Kantner, R. C. O’Handley, V. V. Kokorin // Appl. Phys. Lett. – 1996. – V. 69. – P. 1966–1968.
7. Ullakko, K. Magnetically controlled shape memory effect in Ni₂MnGa intermetallics / K. Ullakko, J. K. Huang, V. V. Kokorin, R. C. O’Handley // Scripta Metall. – 1997. – V. 36. – P. 1133–1138.

8. James, R. D. Large field-induced strains in ferromagnetic shape memory materials / R. D. James, R. Tickle, M. Wuttig // Mater. Sci. Eng. – 1999. – V. A273–275. – P. 320–325.
9. Tickle, R. Ferromagnetic shape memory in the NiMnGa system / R. Tickle, R. D. James, T. Shield, M. Wuttig, V. V. Kokorin // IEEE Trans. Magn. – 1999. – V. 35. – P. 4301–4310.
10. O’Handley, R. C. Phenomenology of giant magnetic-field induced strain in ferromagnetic shape-memory materials / R. C. O’Handley, S. J. Murrey, M.
11. Murrey, S. J. 6% magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni-Mn-Ga / S. J. Murrey, M. Marioni, S M. Allen, R. C. O’Handley // Appl. Phys. Lett. – 2000. – V. 77. – P. 886–888.
12. Saren, A. Dynamic twinning stress and viscous-like damping of twin boundary motion in magnetic shape memory alloy Ni-Mn-Ga / A. Saren, K. Ullakko // Scripta Materialia. – 2017. – V. 139. – P. 126–129.
13. Остриков, В. О. Статика и динамика границы раздела аустенит / мартенсит в нагруженном призматическом монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке / В. О. Остриков, О. М. Остриков // Машиностроение. – Минск: БНТУ, 2021. Вып. 33. – С. 139–147.
14. Straka, L. Temperature dependence of twinning stress of Type I and Type II twins in 10M modulated Ni–Mn–Ga martensite / L. Straka, A. Soroka, H. Seiner, H. Hänninen, A. Sozinov // Scripta Materialia. – 2012. – V. 67. – P. 25–28.
15. Остриков, О. М. Физическая модель движения границы остаточного двойника / О. М. Остриков // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. Физика. – 2016. – № 4. – С. 103–107.
16. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Мн.: Выш. шк., 1988. – 269 с.
17. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

Поступила 15.07.2022

УДК 539.3

Василевич Ю. В.¹, Остриков В. О.², Остриков О. М.²

**СТАТИКА И ДИНАМИКА ГРАНИЦ РАЗДЕЛА
АУСТЕНИТ / МАРТЕНСИТ МАРТЕНСИТНОЙ ПРОСЛОЙКИ
В НАГРУЖЕННОМ ПРИЗМАТИЧЕСКОМ ФЕРРОМАГНИТНОМ
МОНОКРИСТАЛЛЕ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ,
НАХОДЯЩЕМСЯ В ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКЕ**

*1. Белорусский национальный технический университет,
Минск, Беларусь*

*2. УО «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,
Гомель, Беларусь*

Решена статическая и динамическая задача для находящегося в жесткой заделке нагруженного призматического монокристалла с памятью формы с находящейся в нем мартенситной прослойки. Показано, что в статическом равновесии мартенситной прослойки при данной схеме нагружения в плоскостях границ раздела аустенит / мартенсит действуют силы противоположного знака. При этом изменение ширины мартенситной прослойки линейно зависит от разности скоростей границ раздела.

Введение. В современном машиностроении широко используются материалы с эффектом памяти формы. Структура используемого материала существенно влияет на прочностные и деформационные характеристики в реализуемых изделиях при действии