МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «МАТЕМАТИКА (РАЗДЕЛ: ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ)»

для специальности 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»

Составитель: Воронова Н.П.

Рассмотрено и утверждено

на заседании совета факультета транспортных коммуникаций

«26» декабря 2022 г., протокол № 4

Минск БНТУ 2022

Рецензенты:

Севастенко Наталья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой общей и медицинской физики Международного государственного экологического института им. А.Д. Сахарова БГУ;

Булдык Георгий Митрофанович, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой физических и математических основ информатики Белорусской государственной академии связи.

Электронный учебно-методический комплекс «Математика (Раздел: Векторный анализ и элементы теории поля)» состоит из следующих разделов:

– вспомогательных материалов;

– кратких теоретических материалов;

– материалов для проведения практических занятий по учебной дисциплине;

– материалов для текущего контроля.

Вспомогательный раздел ЭУМК содержит программу дисциплины по указанным разделам, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины (по данному разделу) в объеме, установленном учебным планом по специальности. Теоретический материал дополнен подробными решениями задач по данным темам.

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения практических занятий в аудитории и заданий для самостоятельной работы.

Раздел контроля знаний ЭУМК содержит материалы тематического контроля знаний в виде тестов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс «Математика (Раздел: Векторный анализ и элементы теории поля)» предназначен для студентов первого курса обучения по специальности 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов». Объем изучаемого раздела «Векторный анализ и элементы теории поля» дисциплины в соответствии с учебным планом составляет 7 часов лекций и 12 часов практических занятий (очная форма получения высшего образования) и 2 часа лекций и 2 часа практических занятий (заочная форма получения высшего образования).

Целью ЭУМК является скоординировать и оптимизировать работу студентов и преподавателей по изучению предмета математика для студентов специальности 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов». Систематизировать разделы теоретического, практического материала и материала для проверки и контроля знаний в единый модуль.

Структурирование и подача учебного материала. Материал курса представлен в виде краткого лекционного материала, материала для аудиторной и самостоятельной работы, и тестов по данному разделу. Учебный материал четко разделен по темам курса и излагается в соответствии с типовой программой в объеме, предусмотренном учебным планом.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК. Изучение учебного материала в ЭУМК может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения. Предварительно следует изучить тему лекционного материала, затем ознакомиться и проанализировать решение задач соответствующей темы. При выполнении самостоятельной работы использовать примеры, приведенные в ЭУМК. В случае появления вопросов при изучении учебного материала необходимо обратиться за консультацией к преподавателю.

Целями преподавания дисциплины «Математика» являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни общества;
- развитие интеллектуального потенциала студентов и способностей их к логическому и алгоритмическому мышлению;
- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений технических задач и выбора наилучших способов реализации этих решений;
- обучение методам обработки и анализа результатов численных и натуральных экспериментов;

Задачами преподавания дисциплины «Математика» являются:

- демонстрация сущности научного подхода на примерах математических понятий и методов;
- обучение студентов приемам исследования и решения математически формализованных задач;
- выработка у студентов умения анализировать полученные результаты;
- привитие студентам навыков самостоятельного изучения литературы по математике и ее приложениям.

В результате изучения учебной дисциплины «Математика» по данному разделу студент должен:

знать:

- основные понятия и методы векторного анализа и основы теории поля;
- некоторые математические методы решения инженерных задач;

уметь:

- владеть основными понятиями теории поля;
- исследовать скалярное поле с помощью поверхностей и линий уровня, производной по направлению градиента;
- исследовать векторное поле с помощью векторных линий, потока, дивергенции, циркуляции и ротора;
- владеть векторными дифференциальными операциями первого и второго порядка;
- определять тип векторного поля: соленоидальное, потенциальное, гармоничное и знать свойства этих полей;
- уметь применять понятия теории поля к задачам физики, механики, электротехники, гидродинамики и др.

владеть:

- навыками творческого аналитического мышления;
- исследовательскими навыками для решения теоретических и практических задач;
- умением самостоятельно и творчески работать, способностью самостоятельно генерировать и реализовывать новые идеи и методы.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующих компетенций:

БПК-1. Владеть основными понятиями и методами векторного анализа и теории поля, применять полученные знания для решения задач теоретической и практической направленности.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел X. Векторный анализ и элементы теории поля

Тема 10.1. Скалярные и векторные поля. Поток векторного поля

Скалярные и векторные поля. Поток векторного поля. Вывод уравнения неразрывности среды.

Тема 10.2. Дивергенция, циркуляция и ротор векторного поля

Дивергенция векторного поля, ее свойства, вычисление и физический смысл. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля, его свойства, вычисление и физический смысл

Тема 10.3. Виды векторных полей. Потенциал поля

Различные виды векторных полей: соленоидальное, потенциальное и гармоническое. Потенциал поля и его отыскание.

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Скалярные и векторные поля. Поток векторного поля

Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если каждой точке M этой области соответствует определенное число $U = U(\bar{r})$, говорят, что в области определено (задано) скалярное поле (или функция точки). Иначе говоря, скалярное поле – это скалярная функция $U(M)$ вместе с ее областью определения. Если же каждой точке М области пространства соответствует некоторый вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$, то говорят, что задано векторное поле (или векторная функция точки).

Примерами скалярных полей могут быть поля температуры (воздуха, тела, …), атмосферного давления, плотности (массы, воздуха, …), электрического потенциала и т.д. Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического тока и т.д.

Если функция $U(M)$ $(\bar{a}(M))$ не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется стационарным (или установившимся); поле, которое меняется с течением времени (меняется, например, скалярное поле температуры при охлаждении тела), называется нестационарным (или неустановившимся).

Далее будем рассматривать только стационарные поля.

Если V – область трехмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки M):

$$U = U(x; y; z). \tag{1.1}$$

Наряду с обозначениями $U = U(M)$, $U = U(x; y; z)$, используют запись $U = U(\bar{r})$, где $(\bar{r})$ – радиус-вектор точки M.

Если скалярная функция $U(M)$ зависит только от двух переменных, например x и y, то соответствующее скалярное поле $U(x; y)$ называют плоским.

Аналогично: вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трех скалярных аргументов x, y и $z : \bar{a} = \bar{a}(x; y; z)$ (или $\bar{a} = \bar{a}(\bar{r})$).

Вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$ можно представить (разложив его по ортам координатных осей) в виде

$$\bar{a} = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k}, \tag{1.2}$$

где $P(x;y;z), Q(x;y;z), R(x;y;z)$ – проекции вектора $\bar{a}(M)$ на оси координат. Если в выбранной системе координат $Oxyz$ одна из проекций вектора $\bar{a} = \bar{a}(M)$ равна нулю, а две другие зависят только от двух переменных, то векторное поле называется *плоским*. Например, $\bar{a} = P(x;y)\bar{i} + Q(x;y)\bar{j}$.

Векторное поле называется однородным, если $\bar{a}(M)$ – постоянный вектор, т. е. P, R и Q – постоянные величины. Таким полем является поле тяжести. Здесь $P = 0$, $Q = 0$, $R = -mg$, g – ускорение силы тяжести, m – масса точки.

Рассмотрим скалярное поле, задаваемое функцией (1.1). Для наглядного представления скалярного поля используют поверхности и линии уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U(M)$ принимает постоянное значение, т.е.

$$U(x;y;z) = c.$$

Придавая величине c различные значения, получим различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расслаивают поле. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня.

Для скалярного поля, образованного функцией $U = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, поверхностями уровня является множество концентрических сфер с центрами в начале координат: $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} = c.$ В частности, при $c = 1$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = 0,$ т. е. сфера стягивается в точку.

Для равномерно раскаленной нити поверхности уровня температурного поля (изотермические поверхности) представляют собой круговые цилиндры, общей осью которых служит нить.

В случае плоского поля $U = U(x;y)$ равенство $U(x;y) = c$ представляет собой уравнение линии уровня поля, т. е. линия уровня – это линия на плоскости Oxy, в точках которой функция $U(x;y)$ сохраняет постоянное значение.

В метеорологии, например, сети изобар и изотерм (линии одинаковых средних давлений и одинаковых средних температур) являются линиями уровня и представляют собой функции координат точек местности.

Линии уровня применяются в математике при исследовании поверхностей методом сечения.

Производная по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $U = U(M)$ в заданном направлении введем понятие «производной по направлению».

Возьмем в пространстве, где задано поле $U = U(x; y; z)$, некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки M в произвольном направлении $\bar{\lambda}$. Пусть вектор $\bar{\lambda}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Приращение функции U, возникающее при переходе от точки M к некоторой точке M_1 в направлении вектора $\bar{\lambda}$ определяется как

$$\Delta U = U(M_1) - U(M),$$

или

$$\Delta U = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x; y; z).$$

Тогда

$$\Delta\lambda = |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Производной от функции $U = U(M)$ в точке М по направлению $\bar{\lambda}$ называется предел

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}.$$

Производная по направлению $\bar{\lambda}$ характеризует скорость изменения функции (поля) в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0,$ то функция U возрастает в направлении $\bar{\lambda}$, если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0,$ то функция U в направлении $\bar{\lambda}$ убывает. Кроме того, величина $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции U в направлении $\bar{\lambda}$ в точке M: чем больше $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$, тем быстрее изменяется функция U. В этом состоит физический смысл производной по направлению.

Введем формулу для вычисления производной по направлению, считая, что функция $U = U(x; y; z)$ дифференцируема в точке M. Тогда ее полное приращение в этой точке M можно записать так:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\Delta z + \xi_1\Delta x + \xi_2\Delta y + \xi_3\Delta z,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – бесконечно малые функции при $\Delta\lambda \to 0.$

Поскольку $\Delta x = \Delta\lambda\cos\alpha, \Delta y = \Delta\lambda\cos\beta, \Delta z = \Delta\lambda\cos\gamma,$ то

$$\frac{\Delta U}{\Delta\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma + \xi_1\cos\alpha + \xi_2\cos\beta + \xi_3\cos\gamma.$$

Переходя к пределу при $\bar{\lambda} \to 0$, получим формулу для вычисления производной по направлению:

$$\frac{\Delta U}{\Delta\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (1.3)$$

В случае плоского поля $U = U(x;y)$ имеем: $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$ $\cos\gamma = 0.$ Формула (1.3) принимает вид:

$$\frac{\Delta U}{\Delta\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha.$$

<u>Пример</u>. Найти производную функцию $U = x^2 + y^2 - 4yz$ в точке $M(0;1;2)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(2;3;3)$.

Решение: находим вектор $\overline{MM_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{MM_1} = (2;2;1),\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке M:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - 4z, \frac{\partial U}{\partial z} = -4y,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M = 2\cdot 0 = 0, \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M = 2 - 4\cdot 2 = -6, \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M = -4.$$

Следовательно, по формуле (1.3) имеем:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_M = 0\cdot\frac{2}{3} - 6\cdot\frac{2}{3} - 4\cdot\frac{1}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0,$ то заданная функция в данном направлении убывает.

Градиент скалярного поля и его свойства

В каком направлении $\bar{\lambda}$ производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ имеет наибольшее значение? Это направление указывает вектор, называемый градиентом скалярного поля.

Можно заметить, что правая часть равенства (1.3) представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta, \cos\gamma)$ и некоторого вектора $\bar{g} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right).$

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U = U(x; y; z)$ в точке $M(x; y; z),$ называют градиентом функции и обозначают $\overline{\mathrm{grad}}U,$ т. е. $\overline{\mathrm{grad}}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right),$ или

$$\overline{\mathrm{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.$$

Отметим, что $\overline{\mathrm{grad}}U$ есть векторная величина. Говорят, что скалярное поле *U* порождает векторное поле градиента *U*. Теперь равенство (1.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \bar{e}\cdot\overline{\mathrm{grad}}U,$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \left|\overline{\mathrm{grad}}U\right|\cdot\cos\varphi, \qquad (1.4)$$

где φ – угол между вектором $\overline{\mathrm{grad}}U$ и направлением $\bar{\lambda}$.

Из формулы (1.4) сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1,$ т. е. при $\varphi = 0.$ Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\bar{\lambda}$, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, т. е. градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции. Наибольшая скорость изменения функции *U* в точке *M* равна

$$\left|\overline{\text{grad}}U\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

В этом состоит физический смысл градиента. На указанном свойстве градиента основано его широкое применение в математике и других дисциплинах.

Приведем важные свойства градиента функции.

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

Действительно, по любому направлению вдоль поверхности уровня $(U = c)\,\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0$. Но тогда из (1.4) следует, что $\cos\varphi = 0$, т. е. при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2. $\overline{\text{grad}}(U+V) = \overline{\text{grad}}U + \overline{\text{grad}}V,$
3. $\overline{\text{grad}}(c \cdot U) = c \cdot \overline{\text{grad}}U,\ c = \text{const},$
4. $\overline{\text{grad}}(U \cdot V) = U\,\overline{\text{grad}}\text{V} + V\,\overline{\text{grad}}\text{U},$
5. $\overline{\text{grad}}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V\,\overline{\text{grad}}U - U\,\overline{\text{grad}}V}{V^2},$
6. $\overline{\text{grad}}F(U) = \frac{\partial F}{\partial U}\overline{\text{grad}}U.$

<u>*Пример.*</u> Найти наибольшую скорость возрастания функции $U = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ в точке $A(-1;1;-1)$.

Решение: имеем

$$\overline{\text{grad}}U = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\bar{j} + \left(\frac{-y}{z^2} + \frac{1}{x}\right)\bar{k};$$

$$\overline{\text{grad}}U(-1;1;-1) = 2\bar{i} + 0\bar{j} - 2\bar{k} = 2\bar{i} - 2\bar{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$\left|\overline{\text{grad}}U\right| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}.$$

Отметим, что функция U будет убывать с наибольшей скоростью $2\sqrt{2},$ если точка A движется в направлении $-\overline{\text{grad}}U\left(A\right) = -2\bar{i} + 2\bar{k}$ (антиградиентное направление).

Векторные линии поля

Рассмотрим векторное поле, задаваемое вектором $\bar{a} = \bar{a}\left(M\right).$ Изучение поля удобно начинать с понятия векторных линий; они являются простейшими геометрическими характеристиками поля.

Векторной линией поля $\bar{a}$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора $\bar{a}\left(M\right).$

Это понятие для конкретных полей имеет ясный физический смысл. Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока); для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется векторной трубкой.

Изучение векторного поля обычно начинают с изучения расположения его векторных линий. Векторные линии поля (1.2) описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P\left(x;y;z\right)} = \frac{dy}{Q\left(x;y;z\right)} = \frac{dz}{R\left(x;y;z\right)}.$$

Действительно, пусть PQ – векторная линия поля (1.2), $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ – ее радиус-вектор. Тогда вектор $\overline{dr} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}$ направлен по касательной к линии PQ в точке M.

В силу коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\overline{dr}$ следует пропорциональность их проекций.

Криволинейные интегралы

Пусть на плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB (или L) длины l. Рассмотрим непрерывную функцию $f\left(x;y\right),$ определенную в точках дуги AB. Разобьем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, M_2, ..., M_n = B$ на n произвольных дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами $\Delta l_i \left(i=1,2,...,n\right)$. Выберем на каждой дуге M_{i-1}, M_i произвольную точку $\left(x_i; y_i\right)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i; y_i\right)\Delta l_i.$$

Ее называют *интегральной суммой* для функции $f(x;y)$ по кривой *AB*.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$ – наибольшая из длин дуг деления. Если при $\lambda \to 0$ (тогда $n \to \infty$) существует конечный предел интегральных сумм, то его называют *криволинейным интегралом* от функции $f(x;y)$ по длине кривой *AB* (или I рода) и обозначают $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ (или $\int\limits_{L} f(x;y)dl$).

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i; y_i\right)\Delta l_i. \tag{1.5}$$

Условие существования криволинейного интеграла I рода представляет следующая теорема, которую мы приводим здесь без доказательства.

<u>*Теорема.*</u> Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой (в каждой точке $(x;y)\in L$ существует касательная к данной кривой и положение ее непрерывно меняется при перемещении точки по кривой), то криволинейный интеграл (1.5) существует и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.

Аналогичным образом вводится понятие криволинейного интеграла от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой *L*.

Приведем основные свойства криволинейного интеграла по длине дуги (I рода).

1. $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl,$ т. е. криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования.

2. $\int\limits_{L} c\cdot f(x;y)dl = c\cdot\int\limits_{L} f(x;y)dl,\ c=\text{const}.$

3. $\int\limits_L \left(f_1(x;y) \pm f_2(x;y) \right) dl = \int\limits_L f_1(x;y)\,dl \pm \int\limits_L f_2(x;y)\,dl.$

4. $\int\limits_L f(x;y)\,dl = \int\limits_{L_1} f(x;y)\,dl + \int\limits_{L_2} f(x;y)\,dl,$ если путь интегрирования L разбит на части L_1 и L_2 такие, что $L = L_1 \cup L_2$ и L_1 и L_2 имеют единственную общую точку.

5. Если для точек кривой L выполнено неравенство $f_1(x;y) \le f_2(x;y)$, то $\int\limits_L f_1(x;y)\,dl \le \int\limits_L f_2(x;y)\,dl.$

6. $\int\limits_L dl = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i = l$, где l – дина кривой AB.

7. Если функция $f(x;y)$ непрерывна на кривой AB, то на этой кривой найдется точка $(x_c;y_c)$ такая, что $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = f(x_c;y_c)\cdot l$ (теорема о среднем).

Вычисление криволинейного интеграла I рода

Вычисление криволинейного интеграла I рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла. Приведем без доказательства правила вычисления криволинейного интеграла I рода в случаях, если кривая L задана параметрическим, полярным и явным образом.

Параметрическое представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, задаваемой уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta$:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t))\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt.$$

Явное представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x,\ y = \varphi(x),\ x \in [a;b],$ где $\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f(x;\varphi(x))\cdot\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}\,dx.$$

Подынтегральное выражение в правой части получается заменой в левой части $y = \varphi(x)$ и $dl = \sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}\,dx$.

Полярное представление кривой интегрирования

Если плоская кривая L задана уравнением $r = r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$ в полярных координатах, то $dl = \sqrt{r^2+\left(r'_\varphi\right)^2}\,d\varphi$ и

$$\int\limits_{L} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2+r'^2_\varphi}\,d\varphi.$$

<u>*Пример*</u>. Вычислить $\int\limits_L (2x+3y)\,dl$, где L – лепесток лемнискаты $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в первом координатном углу.

Решение: вычислим $dl = \sqrt{r^2+\left(r'_\varphi\right)^2}\,d\varphi = \sqrt{\sin 2\varphi + \dfrac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi =$ $= \dfrac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \dfrac{d\varphi}{r}$. С учетом того, что $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, получим $\int\limits_L (2x+3y)\,dl =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2r\cos\varphi + 3r\sin\varphi)\frac{d\varphi}{r} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi + 3\sin\varphi)\,d\varphi = (2\sin\varphi - 3\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5.$$

Некоторые приложения криволинейного интеграла I рода

Криволинейный интеграл I рода имеет разнообразные приложения в математике и механике.

Длина кривой

Длина l кривой AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле $l = \int\limits_{AB} dl$.

Площадь цилиндрической поверхности

Если направляющей цилиндрической поверхности служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, а образующая параллельна оси Oz, то площадь поверхности, задаваемой функцией $z = f\left(x;y\right)$, находится по формуле $Q = \int\limits_{AB} f(x;y)\,dl$.

Масса кривой

Масса материальной кривой AB (провод, цепь, трос) определяется формулой $m = \int\limits_{AB} \gamma(M)\,dl$, где $\gamma = \gamma\left(M\right) = \gamma\left(x;y\right)$ – плотность кривой в точке M.

Разобьем кривую AB на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Пусть $\left(x_i;y_i\right)$ – произвольная точка дуги $M_{i-1}M_i$. Считая приближенно участок дуги однородным, т. е. считая, что плотность в каждой точке дуги такая же, как и в точке $\left(x_i;y_i\right)$, найдем приближенное значение массы m_i дуги $M_{i-1}M_i$:

$$m_i \approx \gamma\left(x_i;y_i\right)\Delta l_i.$$

Суммируя, находим приближенное значение массы m:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma\left(x_i;y_i\right)\Delta l_i.$$

За массу кривой AB примем предел этой суммы при условии, что $\max \Delta l_i \to 0 \left(n \to \infty\right)$, т. е.

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max \Delta l_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i; y_i)\Delta l_i,$$

или

$$m = \int\limits_{AB} \gamma(x; y)\, dl.$$

Заметим, что предел существует, если кривая *AB* гладкая, а плотность задана непрерывной в каждой точке *AB* функцией.

Статические моменты, центр тяжести

Статические моменты относительно осей *Ox* и *Oy* и координаты центра тяжести материальной кривой *AB* определяются по формулам

$$S_x = \int\limits_{AB} y \cdot \gamma(x; y)\, dl, \quad S_y = \int\limits_{AB} x \cdot \gamma(x; y)\, dl, x_c = \frac{S_y}{m}, y_c = \frac{S_x}{m}.$$

Моменты инерции

Для материальной кривой *AB* моменты I_x, I_y, I_O инерции относительно осей *Ox* и *Oy* и начала координат соответственно равны:

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2 \cdot \gamma(x; y)\, dl, \quad I_y = \int\limits_{AB} x^2 \cdot \gamma(x; y)\, dl, I_O = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right) \cdot \gamma(x; y)\, dl.$$

Криволинейный интеграл II рода

Решение задачи о вычислении работы переменной силы при перемещении материальной точки вдоль некоторой кривой приводит к понятию криволинейного интеграла II рода.

Пусть в плоскости *Oxy* задана непрерывная кривая *AB* (или *L*) и функция $P(x; y)$, определенная в каждой точке кривой. Разобьем кривую *AB* точками $M_0 = A, M_1, M_2, ..., M_n = B$ в направлении от точки *A* к точке *B* на *n* дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами $\Delta l_i \left(i = 1, 2, ..., n\right)$.

На каждой «элементарной дуге» $M_{i-1}M_i$ возьмем точку $\left(x_i; y_i\right)$ и составим интегральную сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – проекция дуги $M_{i-1} M_i$ на ось Ox.

Эту сумму называют *интегральной суммой* для функции $P(x;y)$ по переменной x. Таких сумм можно составить бесчисленное множество.

Если при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$ интегральная сумма имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой AB, ни от выбора точек $(x_i; y_i)$, то его называют *криволинейным интегралом* по координате x (или II рода) от функции $P(x;y)$ по кривой AB и обозначают $\int\limits_{AB} P(x;y)dx$ или $\int\limits_{L} P(x;y)dx$.

Итак,

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i; y_i) \Delta x_i. \qquad (1.6)$$

Аналогично вводится криволинейный интеграл от функции $Q(x;y)$ по координате y:

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i; y_i) \Delta y_i, \qquad (1.7)$$

где Δy_i – проекция дуги $M_{i-1} M_i$ на ось Oy.

Криволинейный интеграл II рода общего вида $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ определяется равенством

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{AB} P(x;y)dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)dx.$$

Криволинейный интеграл $\int\limits_{L} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ по пространственной кривой L определяется аналогично.

<u>*Теорема*</u>. Если кривая AB гладкая, а функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывные на кривой AB, то криволинейный интеграл II рода существует.

Отметим лишь некоторые свойства криволинейного интеграла II рода.

1. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II рода изменяет свой знак на противоположный, т. е.

$$\int_{AB} = -\int_{BA}$$

(проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на оси Ox и Oy меняют знаки с изменением направления).

2. Если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям, т. е.

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB}.$$

3. Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то

$$\int_L P(x;y)\,dx = 0 \text{ (все } \Delta x_i = 0\text{)}.$$

Аналогично для кривой, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси Oy:

$$\int_L Q(x;y)\,dy = 0 \text{ (все } \Delta y_i = 0\text{)}.$$

4. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой (обозначается $\oint$) не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода кривой).

Вычисление криволинейного интеграла II рода

Вычисление криволинейного интеграла II рода, как и I рода, может быть сведено к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем начальной точке A кривой соответствует значение параметра $t = \alpha$, а конечной точке B – значение $t = \beta$. И пусть функция $P(x;y)$ непрерывна на кривой AB. Тогда, согласно формуле (1.6),

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i;y_i)\Delta x_i.$$

Преобразуем интегральную сумму к переменной *t*. Так как

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}),$$

то по формуле Лагранжа имеем: $\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i$, где $c_i \in (t_{i-1};t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Выберем точку $(x_i;y_i)$ так, чтобы $x_i = x(c_i)$, $y_i = y(c_i)$. Тогда преобразованная интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} P\big(x(c_i);y(c_i)\big)\cdot x'(c_i)\cdot\Delta t_i$ будет интегральной суммой для функции одной переменной $P\big(x(t);y(t)\big)\cdot x'(t)$ на промежутке $[\alpha;\beta]$. Поэтому

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t);y(t)\big)x'(t)\,dt.$$

Аналогично из (1.7) получаем:

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\big(x(t);y(t)\big)y'(t)\,dt.$$

Складывая почленно полученные равенства, получаем:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)\Big)dt.$$

Явное представление кривой интегрирования

Если кривая *AB* задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, где функция $\varphi(x)$ и ее производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то приняв *x* за параметр, имеем параметрические уравнения кривой *AB*: $x = x$, $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, откуда получим:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} \Big[P(x;\varphi(x)) + Q(x;\varphi(x))\varphi'(x)\Big]dx.$$

В частности,

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx = \int\limits_a^b P(x;\varphi(x))\,dx.$$

Если AB – гладкая пространственная кривая, которая описывается непрерывными на отрезке $[\alpha;\beta]$ функциями $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz$$

вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \Big(P(x(t);y(t);z(t))x'(t) + Q(x(t);y(t);z(t))y'(t) + R(x(t);y(t);z(t))z'(t)\Big)dt.$$

Замечание. Криволинейные интегралы I и II рода связаны соотношением $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,dl,$ где α и β – углы, образованные касательной к кривой AB в точке $M(x;y)$ с осями Ox и Oy соответственно.

Пример. Вычислить $I = \int\limits_L y^2dx + \left(x^2 + z\right)dy + \left(x + y + z^2\right)dz, L -$ отрезок прямой в пространстве от точки A (1;0;2) до точки B (3;1;4).

Решение: составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ или в параметрической форме: $x = 2t + 1, y = t, z = 2t + 2.$ При перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1. Тогда имеем:

$$I = \int\limits_0^1 \left[t^2 \cdot 2 + \left((2t+1)^2 + 2t + 2\right)\cdot 1 + \left(2t + 1 + t + (2t+2)^2\right)\cdot 2\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(14t^2 + 28t + 13\right)dt = \frac{95}{3}.$$

Формула Остроградского-Грина

Связь между двойным интегралом по области *D* и криволинейным интегралом по границе *L* этой области устанавливает формула Остроградского-Грина, которая широко применяется в математическом анализе.

Пусть на плоскости *Oxy* задана область, ограниченная кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям не более чем в двух точках, т. е. область *D* – правильная.

<u>*Теорема.*</u> Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в области *D*, то имеет место формула

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy, \qquad (1.8)$$

где *L* – граница области *D* и интегрирование вдоль кривой *L* производится в положительном направлении (т. е. при движении вдоль кривой, область *D* остается слева).

Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Пусть $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ – две произвольные точки односвязной области *D* плоскости *Oxy* (область *D* называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит *D* (область без «дыр»)). Точки *A* и *B* можно соединить различными линиями. По каждой из этих кривых интеграл $I = \int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ имеет, вообще говоря, свое значение.

Если же его значения по всевозможным кривым *AB* одинаковы, то говорят, что интеграл *I* не зависит от вида пути интегрирования. В этом случае для интеграла *I* достаточно отметить лишь его начальную точку $A(x_1;y_1)$ и его конечную точку $B(x_2;y_2)$ пути. Записывают:

$$I = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

Каковы условия, при которых криволинейный интеграл II рода не зависит от вида пути интегрирования?

Теорема. Для того чтобы криволинейный интеграл $I = \int\limits_L Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области *D*, в которой функции $P(x;y)$, $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.9}$$

Следствие. Если выполнено условие (1.9), то подынтегральное выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x;y)$, т. е.

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = dU(x;y).$$

Тогда:

$$I = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} dU(x;y) = U(x;y)\Big|_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} =$$

$$= U(x_2;y_2) - U(x_1;y_1),$$

т. е.

$$\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = U(x_2;y_2) - U(x_1;y_1). \tag{1.10}$$

Формула (1.10) называется обобщенной формулой Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла от полного дифференциала.

Следствие. Если подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал и путь интегрирования *L* замкнутый, то $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$.

Некоторые приложения криволинейного интеграла II рода

Площадь плоской фигуры

Площадь *S* плоской фигуры, расположенной в плоскости *Oxy* и ограниченной замкнутой линией *L*, можно найти по формуле

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx,$$

при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

Действительно, положив в формуле Остроградского-Грина (1.8) $P(x;y)=0, Q(x;y)=x,$ получим:

$$\iint_D (1-0)dxdy=\oint_L 0\cdot dx+xdy,$$

или

$$S=\oint_L xdy.$$

Аналогично, полагая $P=-y, Q=0,$ найдем еще одну формулу для вычисления площади фигуры с помощью криволинейного интеграла:

$$S=-\oint_L ydx.$$

Сложив почленно полученные равенства и разделив на два, получим:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx.$$

Работа переменной силы

Переменная сила $\overline{F}\left(P(x;y);Q(x;y)\right)$ на криволинейном участке AB производит работу, которая находится по формуле

$$A=\int_{AB} Pdx+Qdy.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x=a\cdot\cos^3 t,\ y=a\cdot\sin^3 t.$

Решение: при обхождении астроиды в положительном направлении параметр t изменяется от 0 до 2π.

Тогда:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cdot\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t+a\cdot\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}3a^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2t}{4}dt=\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{3a^2\pi}{8}.$$

Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого рода

Пусть функция $f(x,y,z)$ – непрерывная функция, заданная на гладкой поверхности S. Разобьем поверхность на n частей , имеющих площади $\Delta S_i,\ i=\overline{1,n}$. В каждом из разбиений выберем точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Если существует предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$ при $n\to\infty$, который не зависит от способа разбиения S на части и выбора точек M_i, то он называется поверхностным интегралом первого рода по поверхности S и обозначается

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i. \quad (1.11)$$

Поверхностные интегралы первого рода обладают свойствами линейности, аддитивности, для них справедлива теорема о среднем, их величина не зависит от выбора стороны поверхности.

Приложения поверхностных интегралов первого рода:

1). Площадь поверхности.

$\iint\limits_S dS=S_{пов.}$

2). Масса поверхности.

$\iint\limits_S \rho(x,y,z)dS=m$, где $\rho(x,y,z)$– поверхностная плотность.

3). Статические моменты относительно плоскостей *yoz, xoz* и *xoy* соответственно.

$\iint\limits_S x\rho(x,y,z)dS=M_{yoz}$,

$\iint\limits_S y\rho(x,y,z)dS=M_{xoz}$,

$$\iint\limits_S z\rho(x,y,z)dS = M_{xoy}.$$

4). Координаты центра тяжести поверхности.

$$x_0 = \frac{M_{yoz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{xoz}}{m}, \quad z_0 = \frac{M_{xoy}}{m}.$$

5). Моменты инерции поверхности.

Относительно начала координат:

$$\iint\limits_S \rho\left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dS = I_0.$$

Относительно осей координат:

$$\iint\limits_S \rho\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)dS = I_z,$$

$$\iint\limits_S \rho\left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dS = I_y,$$

$$\iint\limits_S \rho\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dS = I_x.$$

Относительно координатных плоскостей:

$$\iint\limits_S x^2\rho(x,y,z)dS = I_{yoz},$$

$$\iint\limits_S y^2\rho(x,y,z)dS = I_{xoz},$$

$$\iint\limits_S z^2\rho(x,y,z)dS = I_{xoy}.$$

Вычисление поверхностных интегралов первого рода начинается с выбора координатной плоскости, на которую наглядно проектируется поверхность *S*. Если это плоскость *xoy* и всякая прямая, параллельная оси *z* пересекает поверхность только в одной точке, то поверхность можно задать уравнением $z = F(x,y)$, а проекцию обозначим D_{xoy}. Тогда поверхностный интеграл первого рода сводится к вычислению двойного интеграла:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xoy}} f\left(x,y,F(x,y)\right)\sqrt{1+\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2}dxdy. \qquad (1.12)$$

Если при вычислении интеграла (1.11), выбирается проекция в координатную плоскость *yoz* и поверхность задается $x = F(y,z)$, то аналогично формуле (1.12) поверхностный интеграл первого рода имеет вид:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xoy}} f\left(F(y,z)\,y,z\right)\sqrt{1+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}dydz.$$

Пример. Вычислить $\iint\limits_S \sqrt{x^2+z^2}dS$, где S – часть конической поверхности $x^2+z^2=y^2$, расположенная между плоскостями $y = 0$ и $y = 1$.

Решение: из уравнения данной поверхности находим, что для рассматриваемой ее части $y=\sqrt{x^2+z^2}$ проекцией в плоскость xoz является круг $x^2+z^2\le 1$.

Тогда $F(x,z)=\sqrt{x^2+z^2}$, $F'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$, $F'_z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$ и переходим к двойному интегралу

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+z^2}dS=\iint\limits_{D_{xoz}} \sqrt{x^2+z^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2}dxdz=$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xoz}} \sqrt{x^2+z^2}\cdot dxdz=\begin{vmatrix}x=r\cos\varphi\\ z=r\sin\varphi\end{vmatrix}=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^2dr=$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Поверхностные интегралы второго рода

Стороной двухсторонней поверхности S называется совокупность всех точек S с выбранными в них направлениями нормалей, получаемых непрерывными перемещениями в пространстве. Поверхность с выбранной стороной называется ориентированной. Если поверхность S задана уравнением $z=F(x,y)$, то нормальный вектор $\bar{n}$, образующий с осью z острый угол имеет координаты: $\bar{n}=\left(-F'_x,-F'_y,1\right)$.

Единичный вектор нормали равен $\bar{n}^0=\dfrac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$, где $|\bar{n}|=\sqrt{1+\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2}$ и $\bar{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma);\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{n}^0$.

Если поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$ и $F'_z\ne 0$, то $n^0=\pm\dfrac{\overline{gradF}}{\left|\overline{gradF}\right|}$, где берется знак «+», если угол между вектором нормали и положительным направлением оси z острый, знак «–», если угол тупой. Рассмотрим в пространстве область V, в которой задана векторная функция $\overline{a}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$, где P, Q и R – функции, непрерывные в области V. Пусть S – гладкая ориентированная поверхность, лежащая в области V. Разобьем поверхность на n частей с площадями ΔS_i, $i=\overline{1,n}$ и в каждом разбиении выберем точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Если существует предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{a}(x_i,y_i,z_i)\cdot\overline{n}^0(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$ при $n\to\infty$, который не зависит от способа разбиения S на части и выбора точек M_i, то он определяет поверхностный интеграл второго рода по поверхности S, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\overline{a}(x_i,y_i,z_i)\cdot\overline{n}^0(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i=\iint_S\overline{a}\cdot\overline{n}^0ds=$$
$$=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS \qquad (1.13)$$

Т.к. $\cos\alpha dS=dydz, \cos\beta dS=dxdz, \cos\gamma dS=dxdy,$ то интеграл (1.13) можно переписать в виде

$$\iint_S\overline{a}\cdot\overline{n}^0dS=\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy. \qquad (1.14)$$

Если поверхность S проектируется в плоскость yoz в область D_{yoz} и нормаль к поверхности образует острый (тупой) угол с положительным направлением оси x, то при вычислении поверхностного интеграла $\iint_S P(x,y,z)dydz$ переходим к двойному интегралу по D_{yoz} и берем знак "+" ("–") перед интегралом, $x=f_1(y,z)$ из уравнения поверхности подставляем в функцию $P(x,y,z)$, т.е. справедлива формула

$$\iint_S P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yoz}}P\left(f_1(y,z),y,z\right)dydz \qquad (1.15)$$

Аналогично формуле (1.15) получим:

$$\iint_S Q(x,y,z)dxdz=\pm\iint_{D_{xoz}}Q\left(x,f_2(x,z),z\right)dxdz, \qquad (1.16)$$

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xoy}}R\left(x,y,f_3(x,y)\right)dxdy, \qquad (1.17)$$

где $y = f_2(x,z)$ и $y = f_3(x,y)$ задают поверхность S, плюс или минус перед интегралами (1.16) и (1.17)выбираются в соответствии с углами, образуемыми нормалью с положительными направлениями осей y и z соответственно. Тогда интеграл (1.14) равен сумме интегралов (1.15), (1.16) и (1.17).

Пример. Вычислить $\iint\limits_S z dydz - 4y dxdz + x^2 dxdy$,

где S – часть поверхности $z = x^2 + y^2 - 1$, отсеченная плоскостью $z = 0$, если нормаль к поверхности S составляет тупой угол с осью z.

Решение: Т.к. $\cos\gamma < 0$, то с помощью градиента находим вектор нормали в виде $\bar{n} = (2x, 2y, -1)$. Вектор $\bar{a} = \left(z, -4y, x^2\right)$. Тогда

$$\iint\limits_S \bar{a}\cdot\bar{n} dS = \iint\limits_S \left(2xz - 8y^2 - x^2\right) dS = \iint\limits_{D_{xoy}} \left[2x\left(x^2 + y^2 - 1\right) - 8y^2 - x^2\right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xoy}} \left(2x^3 + 2xy^2 - 2x - 8y^2 - x^2\right) dxdy =$$

$$= 4\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(2x^3 + 2xy^2 - 2x - 8y^2 - x^2\right) dy =$$

$$= 4\int\limits_0^1 \left(2x^3 y + 2x\frac{y^3}{3} - 2xy - 8\frac{y^3}{3} - x^2 y\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= 4\int\limits_0^1 \left(2x^3\sqrt{1-x^2} + 2x\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3} - 2x\sqrt{1-x^2} - 8\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3} - x^2\sqrt{1-x^2}\right) dx =$$

$$= \begin{vmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ x_1 = 0, t_1 = 0 \\ x_2 = 1, t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2} \left(2\sin^3 t\cdot\cos t + \frac{2}{3}\sin t\cdot\cos^3 t - 2\sin t\cdot\cos t - \frac{8\cos^3 t}{3} - \sin^2 t\cdot\cos t\right)\cos t dt = -4\pi.$$

Поток векторного поля

Потоком векторного поля $\bar{a}$ через поверхность S в сторону единичного вектора нормали $\bar{n}^0$ поверхности S называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_S \bar{a} \cdot \bar{n}^0 dS. \quad (1.18)$$

Если векторное поле $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ является векторным полем скоростей текущей несжимаемой жидкости, то формула (1.18) определяет объем жидкости, протекающей через поверхность S в направлении вектора $\bar{n}^0$ за единицу времени. Если поверхность S – замкнутая кусочно-гладкая поверхность, то справедлива формула Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S \bar{a} \cdot \bar{n}^0 dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \quad (1.19)$$

где V – объем, ограниченный поверхностью S.

Тогда, в силу физического смысла интеграла (1.18) следует, что при $\Pi > 0$ из области V вытекает больше жидкости, чем втекает в нее. Это возможно, когда внутри области V имеются источники. Если $\Pi < 0$, то из области V вытекает меньше жидкости, чем в нее втекает и, следовательно, внутри области V находятся стоки. При $\Pi = 0$ либо количества втекающей и вытекающей жидкости одинаковые, либо источники компенсируют стоки.

Рассмотрим ламинарное стационарное течение жидкости, когда жидкость не стекает и не вытекает через боковую поверхность трубок тока. Вдоль любой трубки тока справедливо уравнение неразрывности жидкости, выражающее постоянство массового расхода жидкости в любом сечении

$$m_1 = m_2,$$

где $m_1 = \rho_1 S_1 v_1, \quad m_2 = \rho_2 S_2 v_2$ – масса жидкости, проходящей через сечение S_1, S_2 соответственно в единицу времени, v_1, v_2 – скорости течения жидкости, ρ_1, ρ_2 – плотности жидкостей.

Справедлива теорема Эйлера (уравнение неразрывности струи) $S_1 v_1 = S_2 v_2$ или $Sv = const$, т.е. произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

Задания для аудиторных занятий

№1. Вычислить производную функции $u=\ln\left(3-x^2\right)+xy^2z$ в точке $M_1(1,3,2)$ по направлению к точке $M_2(0,5,0)$.

№2. Вычислить производную функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M_0(3,4)$ по направлению: а) $\bar{a}=(1,1)$; б) радиуса-вектора точки M_0; в) $\bar{s}=(4,3)$.

№3. Найти $\overline{\text{grad}}\,u$ в точке $M_0(0,1,1)$, если $u=x^2yz-xy^2z+xyz^2$.

№4. Найти угол φ между градиентами функций $u=\frac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2$ и $v=x^2yz$ в точке $M_0\left(2,\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

№5. Записать уравнения поверхностей уровня скалярных полей, определяемых следующими функциями:

а) $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$; в) $u=\frac{z}{\left(x^2+y^2\right)}$.

№6. Найти векторные линии векторного поля, если:

а) $a(M)=-5x\bar{i}+10y\bar{j}$; б) $a(M)=-y\bar{i}+x\bar{j}+\bar{k}$.

№7. Найти поток векторного поля $\bar{a}=z\bar{i}-x\bar{j}+y\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника, полученного при пересечении плоскости $3x+5y-2z-6=0$ с координатными плоскостями.

№8. Найти поток векторного поля $\bar{a}=8x\bar{i}+11y\bar{j}+17z\bar{k}$ через часть плоскости $x+2y+3z=1$, расположенную в первом октанте, нормаль к которой составляет острый угол с осью z.

Ответы: №1. $-\frac{11}{3}$; №2. а) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$, б) 1, в) $\frac{24}{25}$; №3. $0i+0j+0k$; №4. $\arccos\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}\sqrt{34}}$; №5. а) $z^2=c^2\left(x^2+y^2\right)$, б) $x^2+y^2+z^2=c^2$, в) $z=c\left(x^2+y^2\right)$; №6. а) $\begin{cases}x^2+y^2=c_1\\ z=c_2\end{cases}$, б) $\begin{cases}x=c_1\cos t;\\ y=c_1\sin t;\\ z=t+c_2.\end{cases}$

№7. $\frac{23}{6}$; №8. $\pi R^2 H$.

Задания для самостоятельной работы

№1. Вычислить производную функции $u = x + \ln\left(y^2 + z^2\right)$ в точке $M_0(2,1,1)$ в направлении вектора $\overline{s} = -2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$.

№2. Вычислить производную функции $z = \operatorname{arctg}(xy)$ в точке $M_0(1,1)$ параболы $y = x^2$ в направлении этой кривой.

№3. Найти векторные линии векторного поля $a(M) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

№ 4. Найти $\overline{\mathrm{grad}u}$, если $u = x + y^2$.

Ответы: №1. $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; №2. $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$; №3. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{c_1} = \dfrac{z}{c_2}$; №4. $\overline{i} + 2y\,\overline{j}$.

2. Дивергенция, циркуляция и ротор векторного поля

Дивергенцией векторного поля в точке *M* называется предел отношения потока поля через замкнутую поверхность *S*, окружающую точку *M*, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку $M\ (V \to 0)$.

Дивергенция векторного поля $\overline{a}$ в точке *M* может быть вычислена по формуле

$$div\overline{a}(M) = \left.\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_M . \qquad (2.1)$$

Отметим некоторые свойства дивергенции:

1. $div\overline{a} = 0$, если $\overline{a}$ – постоянный вектор.
2. $div(c\overline{a}) = c \cdot div\overline{a}$, где $c = const$.
3. $div\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = div\overline{a} + div\overline{b}$.
4. $div(u \cdot \overline{a}) = u \cdot div\overline{a} + \overline{a} \cdot \overline{\mathrm{grad}u}$, где u –скалярная функция, $\overline{a}$ – вектор.

Физический смысл дивергенции – характеристика плотности источников и стоков векторного поля в заданной точке. Если $div\overline{a}(M) > 0$, то точка М является источником, если $div\overline{a}(M) < 0$, то – стоком.

Из формулы (1.19) следует, что

$$\Pi = \iiint\limits_V div\bar{a}dxdydz. \qquad (2.2)$$

<u>*Пример 1.*</u> Найти поток векторного поля $\bar{a} = 2x \cdot \bar{i} + 3y \cdot \bar{j} - z \cdot \bar{k}$ через внешнюю сторону поверхности прямого кругового цилиндра с радиусом основания *R*, высотой *H*, ось которого совпадает с осью *z*, нижнее основание лежит в плоскости *xoy*.

Решение: воспользуемся формулой (1.19), тогда $div\bar{a} = 2+3-1=4$ $\Pi = \iiint\limits_V 4dxdydz = 4\iiint\limits_V dxdydz = 4\pi R^2 H$, где $\iiint\limits_V dxdydz$ из геометрического смысла тройного интеграла равен объему в данном случае кругового цилиндра.

<u>*Пример 2.*</u> Найти поток векторного поля $\bar{a} = 2z \cdot \bar{i} + x \cdot \bar{j} + 3y \cdot \bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника, полученного при пересечении плоскости $x + 2y - 3z - 6 = 0$ с координатными плоскостями.

Решение: поток векторного поля вычисляется по формуле $\iint\limits_S \bar{a} \cdot \bar{n}^0 dS$. Используя взаимосвязь поверхностных интегралов I и II рода, получим для $\bar{a} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ формулу для вычисления потока в виде $\Pi = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$. Интеграл от суммы равен сумме интегралов. Рассмотрим $\Pi_1 = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \iint\limits_S 2zdydz$. Нормаль к верхней стороне треугольника образует с осью x тупой угол (т.к. единичный вектор нормали к верхней стороне треугольника $\bar{n}^0 = -\frac{1}{\sqrt{14}}\bar{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\bar{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\bar{k}$). Тогда

$$\Pi_1 = \iint\limits_S 2zdydz = -\iint\limits_{D_{yoz}} 2zdydz = -2\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\frac{2}{3}y-2}^{0} zdz = 4.$$

Единичный вектор нормали к верхней стороне треугольника образует с осью *y* тупой угол, а с осью *z* – острый. Тогда имеем с учетом того, что $D_{yoz}, D_{xoz}, D_{xoy}$ – проекции треугольника соответственно на плоскости *yoz*, *xoz* и *xoy*, переходя к двойным интегралам по проекции, получим

$$П_2=\iint_S -xdxdz=-\iint_{D_{xoz}} -xdxdz=\int_0^6 xdx\int_{\frac{1}{3}x-2}^{0} dz=12,$$

$$П_3=\iint_S 3ydxdy=3\iint_{D_{xoy}} ydxdy=3\int_0^6 dx\int_0^{-\frac{1}{2}x+3} ydy=36.$$

В ответе $П=П_1+П_2+П_3=4+12+36=52$.

Пусть векторное поле образовано вектором $\bar{a}$, в котором задана замкнутая кривая L с выбранным направлением обхода. Если $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ – радиус-вектор произвольной точки на контуре L, то вектор $\overline{dr}=dx\bar{i}+dy\bar{j}+dz\bar{k}$ направлен по касательной к кривой L в направлении ее обхода.

Тогда циркуляцией вектора $\bar{a}$ вдоль кривой называется криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на вектор $\overline{dr}$, т.е.

$$Ц=\oint_L \bar{a}\cdot\overline{dr}=\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz. \qquad (2.3)$$

Физический смысл циркуляции состоит в том, что в силовом поле циркуляция – это работа силы поля при перемещении материальной точки вдоль контура L. Причем, вдоль замкнутых векторных линий циркуляция отлична от нуля.

Ротором векторного поля (вихрем) называется вектор, определяемый формулой

$$\overline{rot}\bar{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}. \qquad (2.4)$$

Формулу (2.4) можно записать с помощью символического определителя

$$\overline{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Основные свойства ротора:

1. $\overline{rot}\bar{a}=0$, если $\bar{a}$ –постоянный вектор.
2. $\overline{rot}(c\bar{a})=c\cdot\overline{rot}\bar{a}$, где c – $const$.
3. $\overline{rot}(\bar{a}+\bar{b})=\overline{rot}\bar{a}+\overline{rot}\bar{b}$.
4. $\overline{rot}u\cdot\bar{a}=u\cdot\overline{rot}\bar{a}+\overline{grad}u\times\bar{a}$, где u – скалярная функция.

Связь криволинейных и поверхностных интегралов можно проследить с помощью формулы Стокса:

$$\oint_L Pdx+Qdy+Pdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+ \\ +\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (2.5)$$

Формула (2.3) показывает, что циркуляция вектора вдоль замкнутого контура равна потоку ротора этого вектора через поверхность, лежащую в поле вектора и ограниченную этим замкнутым контуром.

Ротором вектора в точке называется вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции вектора по контуру плоской площадки, перпендикулярной этому направлению, к площади этой площадки.

Физический смысл ротора – угловая скорость вращения твердого тела в поле скоростей. Направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к плоской площадке.

Пример 1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a}=(x-z)\bar{i}+(x+2y+z)\bar{j}+(3x+y)\bar{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1).

Решение: воспользуемся формулой (2.1).

$$Ц=\oint_L(x-z)dx+(x+2y+z)dy+(3x+y)dz\,.$$

Контур L – периметр треугольника, поэтому вычислим циркуляцию, разбив контур L на три части: AB, BC, CA.

1) На отрезке AB: $y=1-x,\ z=0,\ x\in[0;1],\ dy=-dx,\ dz=0$, следовательно получим:

$$\int_1^0 (x-0)\,dx + \left[x+2(1-x)+0\right](-dx)+0=\frac{5}{2}.$$

2) На отрезке BC: $z=1-y,\ x=0,\ y\in[0;1],\ dz=-dy,\ dx=0$, следовательно получим:

$$\int_1^0 \left[0-(1-y)\right]\cdot 0+(0+2y+1-y)\,dy+(0+y)(-dy)=-1.$$

3) На отрезке CA: $z=1-x,\ y=0,\ dz=-dx,\ dy=0$, следовательно получим:

$$\int_1^0 \left[x-(1-x)\right]dx+(x+0+1-x)\cdot 0+(3x+0)\cdot(-dx)=-\frac{3}{2}.$$

В результате $Ц=\frac{5}{2}-1-\frac{3}{2}=0$.

<u>*Пример 2*</u>. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a}=y\bar{i}+x^2\bar{j}-z\bar{k}$ по контуру $L: x^2+y^2=1, z=1$, обходимого в положительном направлении.

Решение: воспользуемся формулой Стокса (2.5)

$$rot\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & z \end{vmatrix}=(2x-1)\bar{k}.$$

В качестве поверхности S возьмем круг $x^2+y^2\le 1, z=1$, тогда

$$Ц=\iint\limits_S (2x-1)dxdy=\iint\limits_{D_{xoy}} (2x-1)dxdy=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 (2r\cos\varphi-1)\,rdr=-2\pi\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1=-\pi.$$

Задания для аудиторных занятий

№1. Вычислить дивергенцию векторного поля $\bar{a} = \left(xy + z^2\right)\bar{i} + \left(yz + x^2\right)\bar{j} + \left(zx + y^2\right)\bar{k}$ в точке $M(1,3,-5)$.

№2. Вычислить дивергенцию вектора напряженности магнитного поля $\bar{H} = \frac{2I}{r}\left(-y\bar{i} + x\bar{j}\right)$, создаваемого током I, проходящим по бесконечно длинному проводу.

№3. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k}$ через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями $1 - z = x^2 + y^2, z = 0$ в направлении внешней нормали.

№4. Найти циркуляцию вектора поля скоростей вращающегося тела $\bar{v} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ вдоль замкнутой кривой, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения через площадь S области, ограниченной кривой L.

№5. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\bar{n}(1,1,1)$ этой плоскости двумя способами: 1). использовав определение циркуляции; 2). с помощью формулы Стокса.

Ответы: №1. –1; №2. 0; №3. $-\pi$; №4. $2\omega S$; №5. –3.

Задания для самостоятельной работы

№1. Найти $div\left(\overline{grad}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

№2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k}$ вдоль контура $L: x^2 + y^2 = 4, z = 0$, проходимого в положительном направлении, непосредственно и по формуле Стокса.

№3. Найти ротор векторного поля $\bar{a} = xyz\bar{i} + (x + y + z)\bar{j} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\bar{k}$ в точке $M(1;-1;2)$.

№4. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\bar{a} = xy^2z^2\bar{i} + x^2yz^2\bar{j} + xyz\bar{k}$ в точке $M(2;-1;1)$.

Ответы: №1. 2; №2. 4π; №3. $-3\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$; №4. $\left|\overline{rot\bar{a}}(M)\right| = 5\sqrt{5}$.

3. Виды векторных полей. Потенциал поля

Основные понятия векторного анализа: градиент, дивергенция, ротор удобно описываются с помощью оператора ∇(«набла»):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k},$$

который называется оператором Гамильтона. Если скалярное поле задано функцией $u = u(x, y, z)$, а векторное поле

$$\bar{a} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}, \text{ то}$$

$$\overline{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \bar{\nabla}u,$$

$$div\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\bar{k} = \bar{\nabla}\cdot\bar{a},$$

$$\overline{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{\nabla}\times\bar{a}.$$

Эти операции называются дифференциальными операциями первого порядка. Дифференциальные операции второго порядка удобно описывать с помощью оператора Лапласа

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla} = \bar{\nabla}^2.$$

Основные свойства дифференциальных операций второго порядка:

$$div\overline{grad}\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla u,$$

$$\overline{rot}\,\overline{grad}\, u = \left(\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\right)u = 0,$$

$$div\,\overline{rot}\,\bar{a} = \bar{\nabla}\left(\bar{\nabla}\times\bar{a}\right) = 0,$$

$$\overline{grad}\,div\,\bar{a} = \bar{\nabla}\left(\bar{\nabla}\times\bar{a}\right).$$

$$\overline{rot}\left(\overline{rot}\,\bar{a}\right) = \bar{\nabla}\left(\bar{\nabla}\times\bar{a}\right) = \overline{grad}\,div\,\bar{a} - \Delta\bar{a}.$$

Классификация векторных полей осуществляется на основании конкретных значений их основных характеристик. Так, векторное поле называется соленоидальным (трубчатым) в некоторой области, если в каждой точке этой области $div\,\bar{a} = 0$. Из свойств дифференциальных операций второго порядка следует, что $div\,\overline{rot}\,\bar{a} = 0$, следовательно поле ротора любого векторного поля является соленоидальным. На основании формулы Остроградского-Гаусса поток соленоидального векторного поля в направлениях его векторных линий через каждое сечение векторной трубки есть величина постоянная. Соленоидальное поле не имеет источников и стоков. Для каждого соленоидального поля $\bar{a}$ существует вектор-потенциал (векторное поле $\bar{b}$), для которого выполняется равенство $\bar{a} = \overline{rot}\,\bar{b}$.

Примером соленоидальных полей являются: магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток; поле линейных скоростей вращающегося твердого тела.

Векторное поле называется потенциальным, если во всех точках поля $\overline{rot}\,\bar{a} = 0$. Из определения ротора векторного поля следует, что для потенциального поля выполняются равенства

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{3.1}$$

Т.к. $\overline{rot}\,\overline{grad}\,u = 0$, то поле градиента любого скалярного поля является потенциальным. Потенциальное поле определяется заданием одной скалярной функции $u = u(x, y, z)$, для которой $\bar{a} = \overline{grad}\,u$.

Циркуляция потенциального поля по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю. В потенциальном поле криволинейный интеграл $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ вдоль любой кривой зависит от положения начальной и конечной точек и не зависит от формы кривой.

При выполнении условий (3.1) функция $u = u(x, y, z)$дважды непрерывно дифференцируемая, такая, что $\bar{a} = \overline{grad}\,u$, называется потенциальной функцией (потенциалом) поля $\bar{a}$. Потенциал поля можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int\limits_{M_0 M} Pdx + Qdy + Rdz + c, \tag{3.2}$$

где M_0 – некоторая фиксированная точка, M – любая точка, c – произвольная постоянная.

Потенциал векторного поля может быть найден по формуле

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{x,y,z} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz+c. \qquad (3.3)$$

Из формулы (3.2) получаем формулу для вычисления криволинейного интеграла, не зависящего от пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=u(B)-u(A),$$

где $u(A)$ и $u(B)$ – значения потенциала в начальной точке *A* и конечной точки *B* пути.

Примером потенциального поля является электрическое поле напряженности точечного заряда и другие.

Векторное поле называется гармоническим, если оно является одновременно и соленоидальным, и потенциальным. Для гармонического поля $\bar{a}$ справедлива система из двух условий

$$\begin{cases} \overline{rot}\,\bar{a}=0, \\ div\bar{a}=0. \end{cases}$$

Из потенциальности поля $\bar{a}$ следует, что $\bar{a}=\overline{grad}\,u$, где $u=u(x,y,z)$ – потенциал поля. Из того, что поле $\bar{a}$ соленоидальное, делаем вывод, что $div\bar{a}=div\overline{grad}\,u=0$. Используя дифференциальные операции второго порядка это равенство равносильно $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$. Следовательно, потенциал гармонического поля является решением дифференциального уравнения $\Delta u=0$, т.е. уравнения Лапласа. Такая функция называется гармонической.

Примером гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

<u>*Пример.*</u> Определить тип векторного поля $\bar{a}=(2xy+z)\bar{i}+\left(x^2-2y\right)\bar{j}+x\bar{k}$ и если оно является потенциальным, найти его потенциал.

Решение: найдем

$$div\bar{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial(2xy+z)}{\partial x}+\frac{\partial\left(x^2-2y\right)}{\partial y}+\frac{\partial(x)}{\partial z}=$$

$=2y-2\neq 0$. Следовательно, поле не является соленоидальным и также гармоническим. Вычислим $\overline{rot\bar{a}}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z & x^2-2y & x\end{vmatrix}=$

$=(0-0)\,\bar{i}+(1-1)\,\bar{j}+(2x-2x)\bar{k}=0$. Поле является потенциальным. Найдем его потенциал, взяв точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M(x,y,z)$.

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0M}(2xy+z)dx+\left(x^2-2y\right)dy+xdz+c.$$

Т.к. функции $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$являются непрерывными и имеют непрерывные частные производные во всех точках пространства, то в качестве точки M_0 можно взять т. O(0;0;0), в качестве М – произвольную точку $(x;y;z)$. Тогда $P(x,y_0,z_0)=P(x;0;0)=-0$, $Q(x,y,z_0)=x^2-2y$, $R(x;y;z)=x$ и по формуле (3.3) имеем:

$$u(x,y,z)==\int\limits_0^x 0dx+\int\limits_0^y\left(x^2-2y\right)dy+\int\limits_0^z xdz+c=x^2y-y^2+xz+c.$$

Уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=0,$$

или

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+divu=0.$$

Если пренебречь сжимаемостью жидкости, то ее плотность в любом сечении будет одинакова $(\rho=const)$ и не будет зависеть от времени, тогда уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости запишется в виде $\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$, или $divu=0$.

Задания для аудиторных занятий

№1. Найти потенциал поля $\overline{a}=(yz+1)\overline{i}+xz\overline{j}+xy\overline{k}$.

№2. Является ли поле $u=\ln r$, если $r=\sqrt{x^2+y^2}$ гармоническим?

№3. Установить потенциальность поля $\overline{a}=2xy\overline{i}+\left(x^2-2yz\right)\overline{j}+y^2\overline{k}$ и найти его потенциал.

№4. Является ли векторное поле $\overline{a}=(y+z)\overline{i}+xy\overline{j}+xz\overline{k}$ соленоидальным?

№5. Показать, что гравитационное поле, создаваемое точечной массой m, помещенной в начало координат, $\overline{a}=-\frac{\gamma m}{\left|r^3\right|}\overline{r}$, где $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, γ – ньютоновская постоянная тяготения, является гармоническим и найти его потенциал. Убедиться, что он удовлетворяет уравнению Лапласа.

Ответы: №1. $x+xyz+c$; №2. да; №3. x^2y-y^2z+c; №4. да; №5. $\frac{\gamma m}{|r|}$.

Задания для самостоятельной работы

№1. Установить потенциальность поля и найти его потенциал:

а). $\overline{a}=\left(3x^2y-y^3\right)\overline{i}+\left(x^3-3xy^2\right)\overline{j}$;

б). $\overline{a}=(y+z)\overline{i}+(x+z)\overline{j}+(x+y)\overline{k}$.

№2. С помощью потенциала векторного поля $\overline{a}=2xyz\overline{i}+x^2z\,\overline{j}+x^2y\overline{k}$ вычислить значение криволинейного интеграла второго рода по дуге кривой, соединяющей точки $A(1;–1;2)$ и $B(–2;4;2)$.

№3. Является ли векторное поле $\overline{a}=(x+y)\overline{i}-2(y+z)\overline{j}+(z-x)\overline{k}$ соленоидальным?

№4. Является ли векторное поле $\bar{a} = \overline{grad u}$, где $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, гармоническим?

Ответы: №1. а). $x^3 y - xy^3 + c$; б). $xy + yz + xz + c$; №2. 34; №3. да; №4. да.

Тесты

Тест I

1. Даны функция $U(M) = U(x,y,z)$ и точки M_1, M_2.. $U(M) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$, M_1 (1;–1;2); M_2 (3;4;–1).

Вычислить:

1). производную функции в точке M_1 по направлению вектора $\overline{M_1 M_2}$;

2). $\overline{\text{grad}}\, U(M_1)$.

2. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $x + 3y + z = 3$ и координатными плоскостями.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = z\bar{i} + (x+y)\bar{j} + y\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $2x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости.

4. Является ли векторное поле $\bar{a} = x^2 z\bar{i} + y^2\bar{j} - xz^2\bar{k}$ гармоническим?

Ответы теста I

1.	1). $-\dfrac{26}{\sqrt{38}}, 2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$; 2). $\dfrac{14}{\sqrt{38}}, 2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$; 3). $-\dfrac{26}{\sqrt{20}}, 2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$; 4). $\dfrac{4}{\sqrt{20}}, 2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$; 5) $\dfrac{26}{\sqrt{38}}, 2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$.
2.	1). $-\dfrac{9}{\sqrt{2}}$; 2). 5; 3). $\dfrac{9}{2}$; 4).–5; 5). $\dfrac{7}{2}$.
3.	1). $\dfrac{5}{2}$; 2). $\dfrac{7}{2}$; 3). $\dfrac{9}{2}$; 4). $\dfrac{3}{2}$; 5). $\dfrac{1}{2}$.
4.	1). Нет; 2). Да.

Тест II

1. Даны функция $U(M) = U(x,y,z)$ и точки M_1, M_2.. $U(M) = 5xy^3z^2$, M_1 (2;1;–1); M_2 (4;–3;0).

Вычислить:

1). производную функции в точке M_1 по направлению вектора $\overline{M_1M_2}$;

2). $\overline{\text{grad}}\,U\left(M_1\right)$.

2. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = \left(3x-1\right)\bar{i} + \left(y-x+z\right)\bar{j} + 4z\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $2x-y-2z=2$ и координатными плоскостями.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = \left(x+z\right)\bar{i} + z\bar{j} + \left(2x-y\right)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $3x+2y+z=6$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости.

4. Является ли векторное поле $\bar{a} = \left(x+y\right)\bar{i} + \left(y+z\right)\bar{j} + \left(x+z\right)\bar{k}$ гармоническим?

Ответы теста II

1.	1). $\frac{55}{\sqrt{2}}, 5\bar{i} + 30\bar{j} + 20\bar{k}$; 2). $\frac{55}{\sqrt{321}}, 5\bar{i} + 30\bar{j} - 20\bar{k}$; 3). $-\frac{130}{\sqrt{21}}, 5\bar{i} + 30\bar{j} - 20\bar{k}$; 4). $\frac{130}{\sqrt{21}}, 5\bar{i} + 30\bar{j} - 20\bar{k}$; 5) $-\frac{90}{\sqrt{21}}, 5\bar{i} + 30\bar{j} + 20\bar{k}$.
2.	1). $-\frac{8}{3}$; 2). $\frac{8}{3}$; 3). $\frac{4}{3}$; 4). $-\frac{4}{3}$; 5). 0.
3.	1). 24; 2). –24; 3). 12; 4). –12; 5). – 48.
4.	1). Нет; 2). Да.

Тест III

1. Даны функция $U(M) = U(x,y,z)$ и точки M_1, M_2.. $U(M) = x^2y + xz^2 - 2$, M_1 (1;1;–1); M_2 (2;–1;3).

Вычислить:

1). производную функции в точке M_1 по направлению вектора $\overline{M_1M_2}$;

2). $\overline{\text{grad}}\, U(M_1)$.

2. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = z\bar{i} + (x+y)\bar{j} + y\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $2x + y + 2z = 2$ и координатными плоскостями.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x + 3y + z = 3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости.

4. Является ли векторное поле $\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$ гармоническим?

Ответы теста III

1.	1). $-\frac{7}{3}, 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$; 2). $-\frac{10}{3}, 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$; 3). $-\frac{10}{3}, 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$; 4). $\frac{7}{3}, 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$; 5) $\frac{4}{3}, 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$.
2.	1). $-\frac{1}{3}$; 2). $\frac{1}{3}$; 3).0; 4). $\frac{2}{3}$; 5). $-\frac{2}{3}$.
3.	1). 3; 2). ; 3). 6; 4). –3; 5). – 6.
4.	1). Нет; 2). Да.

Тест IV

1. Даны функция $U(M) = U(x,y,z)$ и точки M_1, M_2. $U(M) = 3xy^2 + z^2 - xyz$, M_1 (1;1;2); M_2 (3;–1;4).

Вычислить:

1). производную функции в точке M_1 по направлению вектора $\overline{M_1M_2}$;

2). $\overline{\text{grad}}\, U(M_1)$.

2. Вычислить поток векторного поля $\overline{a} = (x+z)\overline{i} + z\overline{j} + (2x-y)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $3x+2y+z=6$ и координатными плоскостями.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{a} = (3x-1)\overline{i} + (x-y+z)\overline{j} + 4z\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $2x-y-2z=-2$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости.

4. Является ли векторное поле $\overline{a} = (y-z)\overline{i} + (z-x)\overline{j} + (x-y)\overline{k}$ гармоническим?

Ответы теста IV

1.	1). $\frac{8}{\sqrt{3}}, \overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$; 2). $-\frac{8}{\sqrt{3}}, \overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$; 3). $-\frac{2}{\sqrt{3}}, 4\overline{j} + 3\overline{k}$; 4). $0, \overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$; 5) $\frac{2}{\sqrt{3}}, \overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}$.
2.	1). 6; 2). – 6; 3). 0; 4). 3; 5). – 3.
3.	1). 1; 2). 0; 3). –1; 4). 10; 5). – 10.
4.	1). Нет; 2). Да.

Номера правильных тестов

№ теста / № задания	I	II	III	IV
1	1).	3).	4.)	4).
2	3).	2).	2).	1).
3	1).	2).	5).	2).
4	1).	1).	2).	1).

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д.Т.Письменный. М., 2013.
2. Рябушко, А.П. Высшая математика : теория и задачи : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 4. Криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Функции комплексной переменной / А.П.Рябушко, Т.А.Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. –255с.: ил.
3. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П.Минорский. М., 2008.
4. Выгодский, М.Я. справочник по высшей математике / М.Я.Выгодский. М., 2010.
5. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е.Данко [и др.] М., 2014.
6. Гусак, А.А. высшая математика. В 2 т. Т.2 / А.А.Гусак. Минск, 2009.