

σ_{\max} – максимальная прочность сцепления покрытия и основы, МПа;

σ_c – прочность сцепления покрытия и основы, МПа;

τ – время, в течение которого луч лазера проходит отрезок, равный его диаметру, с;

$1/\tau_a$ – частота колебаний атомов в решетке кристалла.

ρ_0 – плотность материала подложки;

ρ_{Π} – плотность покрытия;

ξ – координата реакции;

Индексы: В – бор; ef – эффективный; ij – номер коэффициента модели (совпадает с порядковым номером); max – максимальный; ∂ – диссипация; a – активация; e – внешний; l – луч лазера; MD – прочная связь между атомами подложки и покрытия; н – напыление; нас – насыщенный; ос – основа; п – покрытие; пер – перекрытие; с – сцепление покрытия и основы; ш – штифт; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ – индексы координатных осей в тензорах напряжений и скоростей деформации; по этим индексам выполняется суммирование.

УДК 621.891

Кравчук А.С., Чигарев А.В.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ С УЧЕТОМ СУБШЕРОХОВАТОСТИ¹

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

Введение. Разработка моделей деформирования многоуровневой шероховатости является одним из активно развивающихся областей физики [3, 4]. Много исследований посвящено решению задачи деформации многоуровневой шероховатости с помощью метода конечных элементов или созданию альтернативных теорий [4].

Однако не было уделено достаточного внимания теории Демкина-Крагельского для решения этой проблемы. Эта теория позволяет получить аналитическую зависимость относительных сближений от давлений для шероховатой поверхности [1].

Решение контактной задачи о совместной деформации шероховатости и субшероховатости, моделируемой основанием Винклера получено на основе теории Демкина-Крагельского.

Основные гипотезы, используемые при решении задачи о деформировании шероховатости без учета субшероховатости. Рассматривается контакт двухуровневой шероховатости и твердой гладкой поверхности. Шероховатость представляется сферическими сегментами с радиусами, имеющими некоторый разброс. Так радиус R_i имеет относительную частоту появления ω_i^{radius} .

Начальную часть опорной поверхности будем аппроксимировать степенной функцией в системе координат, связанной с наивысшим выступом:

$$\eta_s(\varepsilon) = b \varepsilon^\lambda, \quad (1)$$

¹ Исследования выполнены в соответствии с грантом INTAS (YS grant Ref. N 03-55-1894)

где $\varepsilon = v/H_{\max}$ - относительный уровень сечения, H_{\max} - максимальная высота шероховатости на первом уровне, v - абсолютный уровень сечения, $\eta_s(\varepsilon)$ - относительная область контакта.

Принимая во внимание (1) и результаты [1], мы можем получить что количество сферических выступов выше уровня z :

$$\varphi(z) = b \cdot \chi \cdot z^{\chi-1}, z \in [0, \varepsilon].$$

Исходя из формул Герца для сферического сегмента с номером i и радиусом R_i без учета субшероховатости имеем, что верно следующее уравнение для определения среднего давления $\bar{p}_{\text{real},i}^{\text{smooth}}(\varepsilon, z)$ в области контакта выступа с плоской жесткой поверхностью при деформации выступа от уровня z до уровня ε [2]:

$$\bar{p}_{\text{real},i}^{\text{smooth}}(\varepsilon, z) = \frac{4}{3\pi} E^* \sqrt{\frac{\delta_i^{\text{smooth}}(\varepsilon, z)}{R_i}} = \frac{4}{3\pi} E^* \sqrt{\frac{H_{\max} \cdot (1-z) \cdot (\varepsilon - z)}{R_i}}, \quad (2)$$

где $E^* = E/(1-\nu^2)$, E - модуль упругости пика (сферического выступа), ν - коэффициент Пуассона.

Площадь поверхности реальной области контакта меньше площади основания сферического выступа. Отношение площади реальной области контакта к площади основания будем называть функцией формы. Известно, что функция формы $\gamma^{\text{smooth}}(\varepsilon, z)$ в случае шероховатости, не имеющей субшероховатости на своей поверхности, не зависит от радиуса выступа и определяется выражением:

$$\gamma^{\text{smooth}}(\varepsilon, z) = S_{\text{real},i}^{\text{smooth}}(\varepsilon, z) / S_{\text{base},i}^{\text{smooth}}(z) = \frac{(\varepsilon - z)}{2}. \quad (3)$$

Очевидно, что произведение $\gamma^{\text{smooth}}(\varepsilon, z) \cdot \bar{p}_{\text{real},i}^{\text{smooth}}(\varepsilon, z)$ определяет давление на основании выступа шероховатости с номером i .

2. Метод учета влияния субшероховатости. Субшероховатость представляется упругим основанием Винклера. Коэффициент упругости основания C_i , высота основания $H_{\text{sub},i}$ и радиус кривизны пиков R_i не изменяются в пределах единичного выступа с номером i . Однако эти параметры имеют разброс для различных пиков: так радиусы R_i имеет относительную частоту появления ω_i^{radius} , высота субшероховатости $H_{\text{sub},i}$ - относительную частоту появления ω_k^{sub} , а коэффициент упругости основания C_i - относительную частоту появления $\omega_j^{\text{elastic}}$. Предполагается, что радиус пиков, высота суб-шероховатости и упругость суб-шероховатости являются независимыми случайными величинами (Рисунок 1).

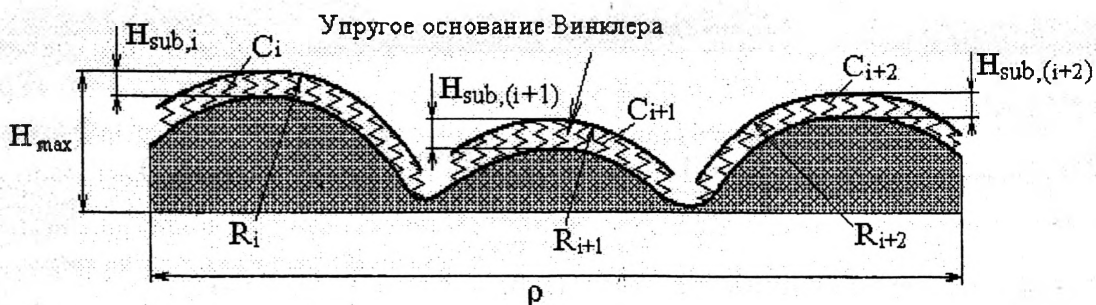


Рисунок 1 - Модель двухуровневой шероховатости

Рассмотрим среднее контактное давление $\bar{p}_{real,i,j,k}(\epsilon, z)$, которое действует в реальной области контакта единичного выступа с радиусом R_i , коэффициентом упругости субшероховатости C_j и высотой субшероховатости $H_{sub,k}$. Будем предполагать, что давление $\bar{p}_{real,i,j}(\epsilon, z)$ при деформации выступа от временного относительного уровня z до относительного уровня ϵ ($0 \leq z \leq \epsilon$), с учетом (2), определяется уравнением:

$$\bar{p}_{real,i,j,k}(\epsilon, z) = \bar{p}_{real,i}^{smooth}(\epsilon, z)(1 + \alpha_p \cdot \beta_{i,j,k}(\epsilon, z)), \quad (4)$$

где $\beta_{i,j,k}(\epsilon, z)$ - функция коррекции деформаций сферических выступов с учетом деформации субшероховатости, α_p - вспомогательный коэффициент.

Рассмотрим функцию формы $\gamma_{i,j,k}(\epsilon, z)$ ($0 < \gamma_{i,j,k}(\epsilon, z) \leq 1$), определяющую отношение реальной площади контакта выступа с субшероховатостью к площади основания. Будем предполагать, что с учетом (3) функция формы определяется уравнением:

$$\gamma_{i,j,k}(\epsilon, z) = \gamma^{smooth}(\epsilon, z)(1 + \alpha_\gamma \cdot \beta_{i,j,k}(\epsilon, z)), \quad (5)$$

где α_γ - вспомогательный коэффициент.

Определим усредненную величину давления на основание единичного пика с учетом разбросов R_i , $H_{sub,k}$ и C_j :

$$\begin{aligned} & \langle \gamma_{i,j,k}(\epsilon, z) \cdot \bar{p}_{real,i,j,k}(\epsilon, z) \rangle = \\ & = \sum_i \omega_i^{radius} \cdot \left(\sum_j \omega_j^{elastic} \cdot \left(\sum_k \omega_k^{sub} \cdot \gamma_{i,j,k}(\epsilon, z) \cdot \bar{p}_{real,i,j,k}(\epsilon, z) \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Приращение среднего давления $d\bar{p}$ на основаниях пиков определяется усредненным давлением (6) и приращением количества выступов $d\phi(z)$, участвующих в контактном взаимодействии на уровне z :

$$d\bar{p} = \langle \gamma_{i,j,k}(\epsilon, z) \cdot \bar{p}_{real,i,j,k}(\epsilon, z) \rangle d\phi(z).$$

Таким образом, среднее давление определяется по заданному уровню сближения ϵ уравнением:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \int_0^\epsilon \langle \gamma_{i,j,k}(\epsilon, z) \cdot \bar{p}_{real,i,j,k}(\epsilon, z) \rangle \phi'(z) dz = \\ &= \sum_i \omega_i^{radius} \cdot \left(\sum_j \omega_j^{elastic} \cdot \left(\sum_k \omega_k^{sub} \cdot \int_0^\epsilon \gamma_{i,j,k}(\epsilon, z) \cdot \bar{p}_{real,i,j,k}(\epsilon, z) \phi'(z) dz \right) \right) = \\ &= \int_0^\epsilon \frac{(\epsilon - z)}{2} \cdot \langle \bar{p}_{real,i}^{smooth}(\epsilon, z) \cdot I_i(\epsilon, z) \rangle \cdot \phi'(z) dz, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\langle \bar{p}_{real,i}^{smooth}(\epsilon, z) \cdot I_i(\epsilon, z) \rangle = \sum_i \omega_i^{radius} \cdot \bar{p}_{real,i}^{smooth}(\epsilon, z) \cdot I_i(\epsilon, z),$$

$$I_i(\epsilon, z) = \left(1 + (\alpha_p + \alpha_\gamma) \sum_j \omega_j^{elastic} \cdot \left(\sum_k \omega_k^{sub} \cdot \beta_{i,j,k}(\epsilon, z) \right) \right).$$

3. Определение функции коррекции $\beta_{i,j,k}(\epsilon, z)$ и вспомогательных коэффициентов

α_p и α_γ . Контактное перемещение $V_B^n(r)$ определено уравнением (Рис. 2):

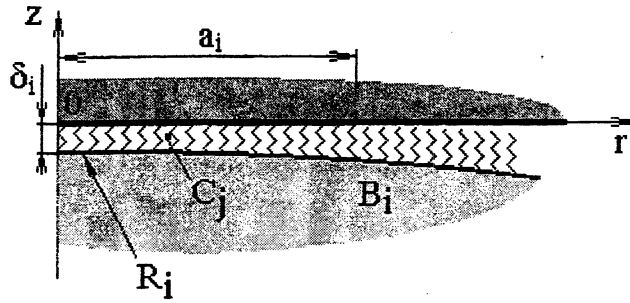


Рисунок 2- Модель взаимодействия единичного пика с плоской жесткой поверхностью

$$V_{B_i}^n(r) = V_{S_i}^n(r) + V_{Winkler,i,j,k}(r),$$

где $V_{S_i}^n(r)$ - нормальные контактные перемещения гладкого пика B_i , $V_{Winkler,i,j,k}(r)$ - дополнительные контактные перемещения, определенные деформацией основания Винклера высотой $H_{sub,k}$ и коэффициентом упругости C_j :

$$V_{Winkler,i,j,k}(r) = \frac{H_{sub,k}}{C_j} \cdot p_{i,j,k}(r), \quad r \in [0, a_i], \quad (8)$$

где $p_{i,j,k}(r)$ - нормальное контактное давление на пик радиусом R_i , с коэффициентом упругости субшероховатости C_j с высотой $H_{sub,k}$.

Предполагается, что перемещение $V_{Winkler,i,j,k}(r)$ может быть аппроксимировано следующим выражением:

$$V_{Winkler,i,j,k}(r) = H_{sub,k} \cdot \frac{\Delta_{i,j,k}}{2} \cdot \left(\frac{(a_{real,i}^{rough})^2}{\psi} - r^2 \right), \quad (9)$$

$$\text{где } \Delta_{i,j,k} = \frac{3 \cdot P}{\pi \cdot (a_{real,i,j,k}^{rough})^4} \cdot \frac{\psi}{C_j}, \quad \psi = - \left(\int_0^1 (\sqrt{1-\rho^2} - 1) \rho^2 d\rho / \int_0^1 \rho^4 d\rho \right) = \frac{5}{48} (16 - 3 \cdot \pi).$$

С учетом (9) и решения Герца [2] можно получить, что радиус области контакта выступа с субшероховатостью $a_{real,i,j,k}^{rough}$ и радиус области контакта гладкого выступа $a_{real,i}^{smooth}$ связаны приближенным уравнением:

$$a_{real,i,j,k}^{rough} \approx a_{real,i}^{smooth} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \beta_{i,j,k}(\epsilon, z) \right), \quad (10)$$

где $a_{real,i}^{smooth} = \sqrt[3]{3 \cdot P_i \cdot R_i / (4 \cdot E^*)}$, P_i - сила, действующая на выступ,

$$\beta_{i,j,k}(\epsilon, z) = H_{sub,k} \cdot \frac{4 \cdot \psi \cdot E^*}{\pi \cdot C_j \cdot \sqrt{R_i \cdot H_{max}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-z) \cdot (\epsilon - z)}}. \quad (11)$$

С учетом (11) получено уравнение:

$$\gamma_{i,j,k}(\epsilon, z) = \frac{S_{real,i,j,k}(\epsilon, z)}{S_{base,i,j,k}^{rough}(z)} = \gamma^{smooth}(\epsilon, z) \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \beta_{i,j,k}(\epsilon, z) \right).$$

Следовательно (5) $\alpha_\gamma = 2/3$. Кроме того, установлено, что

$$\begin{aligned}\bar{p}_{\text{real},i,j,k}(\varepsilon, z) &\approx \frac{4 \cdot E^*}{3 \cdot \pi} \sqrt{\frac{\delta_{i,j,k}(\varepsilon, z)}{R_i}} \left(1 - \frac{1 + 2 \cdot \psi}{4 \cdot \psi} \beta_{i,j,k}(\varepsilon, z) \right) = \\ &= \frac{4 \cdot E^*}{3 \cdot \pi} \sqrt{\frac{H_{\max}}{R_i}} \sqrt{(1-z) \cdot (\varepsilon - z)} \left(1 - \frac{1 + 2 \cdot \psi}{4 \cdot \psi} \beta_{i,j,k}(\varepsilon, z) \right).\end{aligned}$$

Таким образом (4): $\alpha_p = \frac{1 + 2 \cdot \psi}{4 \cdot \psi}$. Учитывая (7), получаем, что

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \int_0^\varepsilon \langle \gamma(\varepsilon, z) \cdot \bar{p}_{\text{real}}(\varepsilon, z) \rangle \varphi'(z) dz = \\ &= \frac{2 \cdot E^*}{3 \cdot \pi} b \chi (\chi - 1) \left(\sqrt{H_{\max}} \left(\sum_i \frac{\omega_i^{\text{radius}}}{\sqrt{R_i}} \right) \int_0^\varepsilon (1-z)^{1/2} (\varepsilon - z)^{3/2} z^{\chi-2} dz - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{3 - 2 \cdot \psi}{12 \cdot \psi} \right) \langle C_{\text{correction}, i,j,k} \rangle \int_0^\varepsilon (1-z)^{1/2} (\varepsilon - z) z^{\chi-2} dz \right),\end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\langle C_{\text{correction}, i,j,k} \rangle = \frac{4 \cdot E^*}{\pi} \left(\sum_i \frac{\omega_i^{\text{radius}}}{R_i} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\omega_j^{\text{elastic}}}{C_j} \right) \cdot \left(\sum_k \omega_k^{\text{sub}} \cdot H_{\text{sub},k} \right).$$

Выполненные вычисления свидетельствуют, что если высота субшероховатости существенно меньше высоты выступов первого уровня, то ее влияние на относительное сближение является минимальным (Рис. 3).

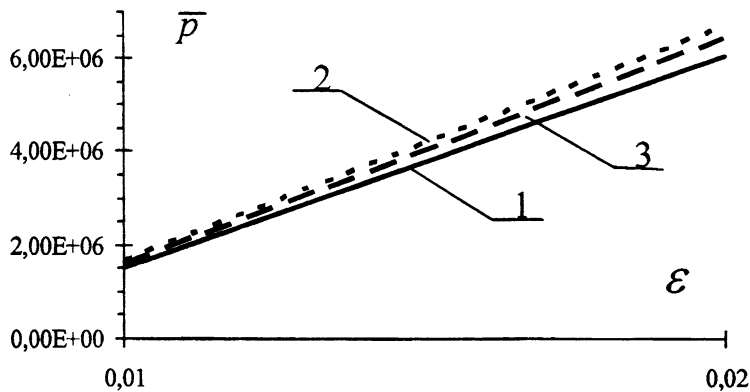


Рисунок 3- Зависимость нормального сближения и контактного давления ($H_{\max} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $b = 4$, $E^* = 2.2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\chi = 2$):

1. Давление вычислено в соответствии с теорией Демкина-Крагельского [1];
2. Давление вычислено только для разброса радиусов кривизны пиков: $\left\{ \left(\omega_i^{\text{radius}}; R_i \right) \right\}_{i=1}^6 = \left\{ \left(0.3; 3 \cdot 10^{-4} \text{ m} \right), \left(0.2; 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \right), \left(0.1; 1 \cdot 10^{-4} \text{ m} \right), \left(0.2; 4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \right), \left(0.1; 7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \right), \left(0.1; 6 \cdot 10^{-4} \text{ m} \right) \right\}$;
3. Давление вычислено с учетом деформирования субшероховатости (12): $\left\{ \left(\omega_j^{\text{elastic}}; C_j \right) \right\}_{j=1}^7 = \left\{ \left(0.1; 1.8 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \right), \left(0.15; 1.9 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \right), \left(0.05; 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \right), \left(0.3; 1.5 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \right), \left(0.15; 1.6 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \right), \left(0.2; 1.7 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \right), \left(0.05; 1.4 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \right) \right\}$;
 $\left\{ \left(\omega_k^{\text{sub}}; H_{\text{sub},k} \right) \right\}_{k=1}^{10} = \left\{ \left(0.1; 1 \cdot 10^{-7} \text{ m} \right), \left(0.03; 1 \cdot 10^{-8} \text{ m} \right), \left(0.03; 2 \cdot 10^{-8} \text{ m} \right), \left(0.04; 3 \cdot 10^{-8} \text{ m} \right), \left(0.1; 4 \cdot 10^{-8} \text{ m} \right), \left(0.2; 1 \cdot 10^{-6} \text{ m} \right), \left(0.1; 2 \cdot 10^{-7} \text{ m} \right), \left(0.1; 3 \cdot 10^{-7} \text{ m} \right), \left(0.15; 4 \cdot 10^{-7} \text{ m} \right), \left(0.15; 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \right) \right\}$

Выводы. Статья посвящена определению влияния субшероховатости на относительное сближение шероховатой и гладкой поверхностей. Решение задачи основано на использова-

нии аппроксимации начальной части опорной поверхности степенной функцией. Получено аналитическое уравнение для определения необходимого давления по относительному сближению. Выполненные вычисления свидетельствуют, что если высота субшероховатости существенно меньше высоты выступов первого уровня, то ее влияние на относительное сближение является минимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демкин, Н.В. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. Москва: Наука, 1970, 227 с.
2. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989, 510 с.
3. Greenwood, J.A., Wu, J.J. Surface Roughness and Contact: An Apology// Meccanica, N 36, 2001, 617–630 p.
4. Persson, B.N.J.: Elastoplastic Contact between Randomly Rough Surfaces// Physical Review Letters, Vol. 87, N 11, 2001, 116101.

УДК 539.3

Босяков С.М., Журавков М.А.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОСТЫХ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

*Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь*

Волновые задачи теории пластичности связаны с изучением процессов, возникающих в сплошных средах и элементах конструкций, под действием динамических нагрузок, интенсивность которых настолько велика, что могут возникнуть пластические деформации. К настоящему времени выполнено достаточно большое количество исследований закономерностей распространения одномерных, двумерных и пространственных волн напряжений для различных вариантов сложного напряженного состояния, волн, вызванных многопараметрическими нагрузками, а также волн температурных напряжений [1]. Настоящая работа посвящена анализу процессов распространения двумерных продольно-пластических волн в однородном упругопластическом полупространстве $x_1 > 0$, к поверхности которого приложены постоянные во времени нормальные и касательные напряжения. В рассматриваемой плоской задаче отсутствуют составляющие вектора перемещения в направлении оси x_3 и касательные напряжения σ_{13} и σ_{23} . С учетом этого соответствующую систему разрешающих уравнений движения представим в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau}{\partial x_2}, \quad \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} &= \frac{s \partial \Lambda}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = -\frac{s \partial \Lambda}{\partial t}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{2}{\mu} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{4\tau \partial \Lambda}{\partial t}, \quad \frac{4k^2 E}{3\alpha(k)} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - s \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} \right) = \frac{2\tau \partial \tau}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v_i - скорости перемещений, σ_i - нормальные напряжения, $\tau = \sigma_{12}$ - касательное напряжение, $s = 2(\sigma_1 - \sigma_2)/3$, ρ - плотность среды, E - модуль упругости, ν - коэффициент