

РАСЧЕТ КООРДИНАТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА КОЛЕСА АВТОМОБИЛЯ

Канд. техн. наук, доц. ГРИЦУК А. К., асп. ЩЕРБИНА А. В.

Национальный транспортный университет (г. Киев, Украина)

Как известно, углы установки колес – это конструктивные параметры подвески, которые определяют положение колес как при прямолинейном движении, так и при поворотах автомобиля. Каждой модели автомобиля соответствуют свои индивидуальные углы установки колес и шкворней, обусловленные конструкцией подвески автомобиля [1, 2].

Многие авторы [3–5], исследуя кинематику подвески автомобиля, часто не учитывают такой параметр, как угол схождения колес автомобиля, мотивируя это тем, что величина угла схождения мала и вследствие этого при расчетах данным параметром можно пренебречь. Безусловно, в расчетах при неучете угла схождения колес получаем минимальную погрешность. Но следует отметить, что в последние десятилетия углы установки колес автомобиля уменьшались и на данный момент времени углы развала колес имеют величины порядка $\pm 45'$, а схождения $\pm 20'$, причем для одного и того же автомобиля. В целом углы развала могут достигать $\pm 25'$ и даже 0° , а углы схождения колес автомобиля $\pm 10'$ [6, 7]. Таким образом, углы развала колес автомобиля также имеют малые величины, но, как правило, данные углы при расчетах не учитываются.

Очевидно, что угол схождения необходимо учитывать при теоретических исследованиях кинематики подвески и построении математических моделей для более полного отображения процессов, которые возникают во время работы как подвески, так и автомобиля в целом.

Положение автомобильного колеса в пространстве можно определить через его геометрический центр, т. е. с помощью координат центра колеса. Таким образом, можно утверждать, что центр колеса является характерной точкой, которая отображает установку колес автомобиля с углами развала и схождения. Из конструкции автомобиля известно, что между осью шкворня и управляемым колесом суще-

ствует промежуточное звено, а именно цапфа [2, 8]. Таким образом, цапфа – это рычаг, начало которого закреплено на оси шкворня, а второй его конец соединен с центром колеса, и при этом цапфа всегда перпендикулярна к плоскости колеса. Тогда упрощенно процесс установки колеса автомобиля с углами развала и схождения можно изобразить, как показано на рис. 1.

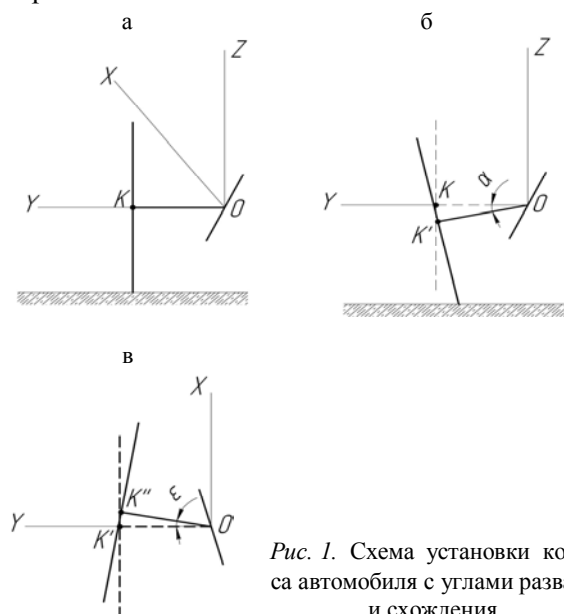


Рис. 1. Схема установки колеса автомобиля с углами развала и схождения

На данной схеме приняты следующие обозначения: $XYZO$ – основная система координат, при этом ось OX совпадает с направлением движения автомобиля вперед, а ось OZ направлена вверх; точка K – центр левого управляемого колеса автомобиля; OK – цапфа колеса, длина цапфы равна $l_{ц}$, т. е. $OK = l_{ц}$; α – угол развала колеса автомобиля; ϵ – то же схождения.

Отметим, что рис. 1 и 2 отображают установку колеса автомобиля с $\alpha > 0$ и $\epsilon > 0$. Поскольку центр (точка O), основной системы координат $XYZO$ является точкой пересечения осей цапфы и шкворня, ось цапфы при нулевых значениях углов развала и схождения колес ав-

томобиля будет совпадать с осью OY основной системы координат (рис. 1а). Таким образом, изначально точка K имеет координаты (X_K, Y_K, Z_K) или $(0, l_{ц}, 0)$, а затем эти координаты изменятся вследствие поворота цапфы OK на угол α , т. е. точка K занимает новое положение в пространстве $K' (X'_K, Y'_K, Z'_K)$ (рис. 1б), и вследствие поворота цапфы на угол ε точка K' займет положение K'' (рис. 1в). Таким образом получим новые координаты (X''_K, Y''_K, Z''_K) .

Решить задачу по нахождению координат точек K' и K'' можно двумя путями: с помощью проекции радиус-вектора точки K на соответствующие оси координат или создания матрицы поворота точки K относительно соответствующей оси. Второй способ определения координат точки K является более простым и требует меньшего времени для получения конечного результата. Суть этого способа заключается

в определении координат точки после поворота на некоторый угол любых двух осей относительно третьей оси с дальнейшим составлением матрицы поворота и умножении ее на начальные координаты точки [9, 10]. Во избежание ошибок в определении знаков поворота осей координат и для того чтобы расчетная схема как можно больше соответствовала реальному положению колес в пространстве оси координат необходимо поворачивать в противоположную сторону от того направления, в котором поворачивают цапфу при установке колеса с углами развала и схождения.

Таким образом, исходя из изложенных выше рекомендаций будем использовать расчетную схему, в которой поворот осей координат происходит в направлении, противоположном повороту цапфы (рис. 2).

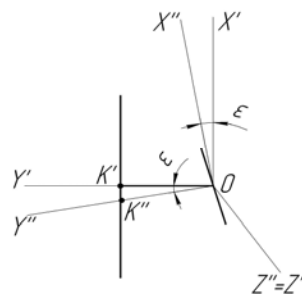
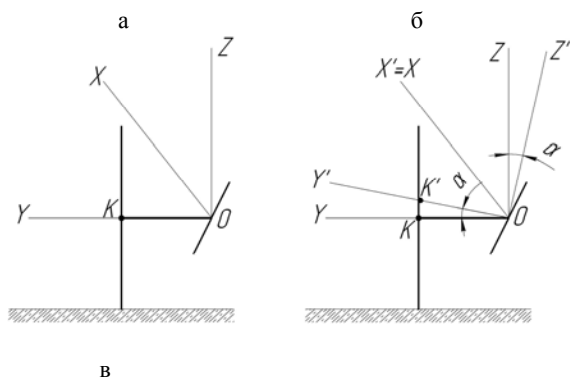


Рис. 2. Расчетная схема для определения координат центра колеса при повороте осей координат в направлении, противоположном повороту цапфы колеса при установке его с $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$

На данной схеме, помимо обозначений на рис. 1, приняты следующие обозначения: $X'Y'Z'O$ – вспомогательная система координат, полученная путем поворота основной системы координат $XYZO$ на угол α относительно оси OX ; $X''Y''Z''O$ – то же вспомогательной системы координат $X'Y'Z'O$ на угол ε относительно оси OZ' .

Алгоритм решения задачи для определения координат центра колеса автомобиля с учетом углов развала и схождения может быть выполнен в следующей последовательности.

Определим координаты точки K после поворота системы координат $XYZO$ относительно оси OX на угол α

$$K' = M_{OX}K, \quad (1)$$

где M_{OX} – матрица поворота относительно оси OX на угол α ; K – координаты точки K в основной системе координат $XYZO$.

Тогда координаты центра колеса после поворота системы координат $X'Y'Z'O$ относительно оси OZ' на угол ε найдем по формуле

$$K'' = M_{OZ'}K', \quad (2)$$

где $M_{OZ'}$ – матрица поворота относительно оси OZ' на угол ε ; K' – координаты точки K в системе координат $X'Y'Z'O$.

При этом выражение (2) с учетом формулы (1) будет иметь вид

$$K'' = M_{OZ'}M_{OX}K. \quad (3)$$

С учетом

$$M_{OZ'}M_{OX} = M_{\Sigma}, \quad (4)$$

где M_{Σ} – общая матрица поворота точки K , формула (3) примет вид

$$K'' = M_{\Sigma}K. \quad (5)$$

Или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} X''_K \\ Y''_K \\ Z''_K \end{pmatrix} = M_\Sigma \begin{pmatrix} X_K \\ Y_K \\ Z_K \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В соответствии с рис. 2б матрица поворота относительно оси OX на угол α

$$M_{OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (7)$$

А матрица поворота относительно оси OZ' на угол ε имеет вид (рис. 2в)

$$M_{OZ} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Тогда в соответствии с (4) общая матрица поворота примет вид

$$M_\Sigma = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

То есть

$$M_\Sigma = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \cos \alpha & \sin \varepsilon \sin \alpha \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \cos \alpha & \cos \varepsilon \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, полученная общая матрица поворота (9) есть не что иное как направляющие косинусы точки K или цапфы OK при переходе от основной системы координат $XYZO$ к вспомогательной системе координат $X''Y''Z''O$.

Из курса аналитической геометрии известно [9], что сумма квадратов направляющих косинусов любой точки или прямой равна единице. Следовательно, если полученная общая матрица поворота верна, то сумма квадратов любой ее строки должна быть равна единице:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \cos^2 \alpha + \sin^2 \varepsilon \sin^2 \alpha &= 1; \\ \sin^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon \cos^2 \alpha + \cos^2 \varepsilon \sin^2 \alpha &= 1; \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \end{aligned}$$

т. е. полученная общая матрица поворота точки K (9) является верной.

Подставив полученное значение общей матрицы поворота в формулу (6), получим:

$$\begin{pmatrix} X''_K \\ Y''_K \\ Z''_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \cos \alpha & \sin \varepsilon \sin \alpha \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \cos \alpha & \cos \varepsilon \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_K \\ Y_K \\ Z_K \end{pmatrix} \quad (10)$$

или

$$\begin{pmatrix} X''_K \\ Y''_K \\ Z''_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_K \cos \varepsilon & Y_K \sin \varepsilon \cos \alpha & Z_K \sin \varepsilon \sin \alpha \\ -X_K \sin \varepsilon & Y_K \cos \varepsilon \cos \alpha & Z_K \cos \varepsilon \sin \alpha \\ 0 & -Y_K \sin \alpha & Z_K \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (11)$$

То есть

$$\begin{aligned} X''_K &= X_K \cos \varepsilon + Y_K \sin \varepsilon \cos \alpha + Z_K \sin \varepsilon \sin \alpha; \\ Y''_K &= -X_K \sin \varepsilon + Y_K \cos \varepsilon \cos \alpha + Z_K \cos \varepsilon \sin \alpha; \\ Z''_K &= -Y_K \sin \alpha + Z_K \cos \alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом $X_K = 0$, $Y_K = l_u$, $Z_K = 0$ зависимость, характеризующая функциональную зависимость координат центра колеса от углов развала и схождения (12), примет вид:

$$\begin{aligned} X''_K &= l_u \sin \varepsilon \cos \alpha; \\ Y''_K &= l_u \cos \varepsilon \cos \alpha; \\ Z''_K &= -l_u \sin \alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что система уравнений (12), помимо того, что отображает функциональную зависимость координат центра колеса от углов развала и схождения, также позволяет перейти от системы координат $XYZO$ к системе координат $X''Y''Z''O$, т. е., зная координаты любой точки в системе координат $XYZO$, можем определить координаты этой точки в системе координат $X''Y''Z''O$. Чтобы решить эту задачу в обратной последовательности, т. е., зная координаты точки в системе координат $X''Y''Z''O$, найти координаты этой точки в системе координат $XYZO$, необходимо общую матрицу поворота (9) транспонировать и умножить на координаты точки в системе координат $X''Y''Z''O$ таким образом:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M_\Sigma^T \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix}; \quad (14)$$

$$M_\Sigma^T = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon \cos \alpha & \cos \varepsilon \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \varepsilon \sin \alpha & \cos \varepsilon \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 X &= X'' \cos \varepsilon - Y'' \sin \varepsilon; \\
 Y &= X'' \sin \varepsilon \cos \alpha + Y'' \cos \varepsilon \cos \alpha - Z'' \sin \alpha; \quad (16) \\
 Z &= X'' \sin \varepsilon \sin \alpha + Y'' \cos \varepsilon \sin \alpha + Z'' \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

ВЫВОД

Очевидно, что схождение колес влияет на различные параметры и факторы движения автомобиля, а зависимости (12) и (13) позволяют при дальнейших расчетах описывать кинематику подвески с учетом функциональной зависимости координат центра колеса от углов развала и схождения. А это в свою очередь позволит на стадии проектирования автомобиля уточнить уравнения его движения и тем самым приблизить расчетные характеристики автомобиля к его реальным показателям. При проведении расчетов, например момента сил, от равнодействующих в пятне контакта, относительно оси шкворня общая погрешность при неучете углов схождения может достигать 5–7 %, а использование (12) позволяет снизить общую погрешность расчетов до 3 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Основы** конструкции автомобиля / А. М. Иванов [и др.]. – М.: За рулем, 2006. – 336 с.
2. **Ларин, А. Н.** Колесные узлы современных автомобилей / А. Н. Ларин, Е. Е. Черток, А. Н. Юрченко. – Харьков: С.А.М., 2004. – 260 с.
3. **Дугельный, В. Н.** Улучшение показателей курсовой устойчивости легкового автомобиля с учетом силовой неоднородности его шин: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.02 / В. Н. Дугельный. – Киев: НТУ, 2006. – 136 с.
4. **Черненко, С. М.** Підвищення стійкості колісного керуючого модуля проти коливань, викликаних гідравлічним підсилювачем кермового керування автомобіля: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.02 / С. М. Черненко // Кременчуцький держ. політехнічний ун-т. – Киев, 2005. – 145 с.
5. **Волков, В. П.** Теорія експлуатаційних властивостей автомобіля: навч. посібник / В. П. Волков. – Харків: ХНАДУ, 2003. – 292 с.
6. **Мир** легковых автомобилей: автокаталог. – 2007. – М.: За рулем, 2006. – 424 с.
7. <http://www.rucar.net>
8. **Тарасик, В. П.** Теория движения автомобиля: учеб. для вузов / В. П. Тарасик. – СПб.: БХВ – Петербург, 2006. – 478 с.
9. **Корн, Г.** Справочник по математике: для науч. работников и инж. / Г. Корн, Т. Корн. – М., 1974. – 832 с.
10. **Синг, Дж. Л.** Классическая динамика / Дж. Л. Синг. – М., 1963. – 450 с.

Поступила 03.03.2009