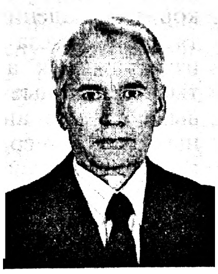
ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ



д. т. н. Молибошко Л.А.

Повышение прочности и долговечности машин и механизмов достигается конструктивными и технологическими мероприятиями, т.е. за счет использования новых материалов с более высокими механическими свойствами, применения более совершенных технологических процессов, совершенствования методов расчета деталей, уточнения нагрузочных режимов их работы.

Нагрузочный режим определяется внешними воздействиями и преобразующими свойствами машины или механизма, т.е. способностью механизма изменять подводимое к нему возмущение. При этом статические свойства определяются, в основном, коэффициентами передачи (передаточными отношениями), а динамические - параметрами объекта как колебательной системы.

Таким образом, оказывается возможным сформировать оптимальный нагрузочный режим с помощью целенаправленного выбора параметров объекта как динамической системы. Все сказанное будет поясняться на примерах крутильных динамических систем (двигателей внутреннего сгорания, трансмиссий машин и др.).

При расчетах такие объекты представляются в виде динамической системы (модели), состоящей из дискретных масс, соединенных между собой безынерционными упругими звеньями, и математически описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Их решение на компьютере не представляет проблем. Для расчета собственных частот, форм колебаний, амплитудных частотных характеристик, максимально возможных динамических моментов в упругих звеньях достаточно ограничиться линейной областью.

Решение таких задач удобно выполнять с использованием не дифференциальных уравнений движения, а их эквивалентов - передаточных функций в форме преобразований Лапласа. Их нахождение в общем случае сводится к составлению уравнений движения, преобразованию (по Лапласу) и нахождению отношений изображений интересующих переменных.

Анализ получаемых передаточных функций показывает, что их можно записывать без составления уравнений движений непосредственно по виду исходной динамической модели [1, 2]. Поясним это на примере простейшей цепной неразветвленной 5 – массовой крутильной динамической системы, рис. 1.

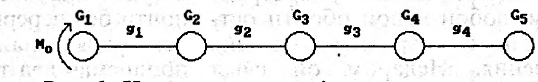


Рис. 1. Неразветвленная динамическая система

Если в качестве входной координаты принят внешний момент M_0, приложенный к массе G_1, а в качестве выходной - например, момент M_2 во втором упруго-диссипативном звене g_2 , то передаточная функция равна произведению инерционных G_i и упруго-диссипативных g_i параметров звеньев системы, расположенных по пути прохождения входного сигнала M_0 до выходной координаты M_2, умноженному на дробь, числитель которой равен характеристической функции (определителю) R_{34} подсистемы, расположенной вне пути прохождения сигнала до выходной координаты, а знаменатель – характеристической функции (определителю) R всей системы:

$$W_{0,2}(s) = \frac{M_2(s)}{M_0(s)} = G_1G_2g_1g_2\frac{R_{34}}{R}, \qquad (1)$$

где G_i - подвижность i – ой массы (величина, обратная моменту инерции: $G_i = 1 / I_i$); $g_i = b_is + c_i$, где b_i и c_i - соответственно коэффициент демпфирования и жесткость i – го упруго-диссипативного звена. Здесь и далее нижний индекс при R указывает номера упруго-диссипативных звеньев, входящих в подсистему, а верхний – номер неподвижно закрепленной (защемленной) массы G_i.

Если в качестве выходной координаты взять угол поворота φ_2 массы G_2 ,то

$$W_{0,2}(s) = \frac{\varphi_2(s)}{M_0(s)} = G_1G_2g_1\frac{R^{(2)}_{234}}{R}. \qquad (2)$$

Для динамических систем, имеющих несколько путей прохождения сигнала, искомая передаточная функция равна сумме передаточных функций, определяемых отдельно для каждого пути. При этом массы, расположенные по пути прохождения сигнала, считаются закрепленными, а упруго-диссипативные звенья – разорванными.

Такое правило записи передаточной функции представляет собой механическую трактовку известного в математике правила Крамера.

Из формул (1) и (2) следует, что для нахождения передаточной функции необходимо найти характеристические определители всей системы и ее подсистем. Для их вычисления используют правило Лапласа, позволяющее последовательно понижать порядок определителя путем его развертывания по элементам строк или столбцов. Такое разложение по своему физическому смыслу соответствует расщеплению исходной динамической системы на некоторое количество подсистем. Таким образом, характеристический определитель всей системы, состоящий из определителей подсистем более низкого порядка, можно записать непосредственно по геометрическому виду динамической системы путем ее последовательного расщепления.

На рис. 2 процесс последовательного расщепления показан на примере 5 – массовой динамической системы.

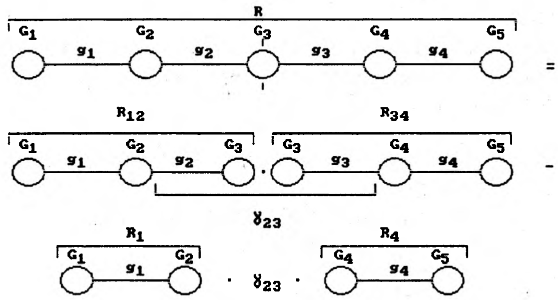


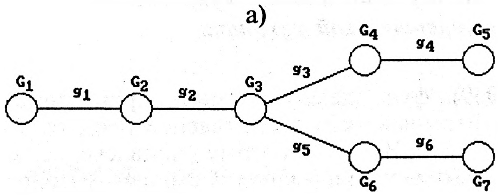
Рис. 2. Графическая интерпретация последовательного расщеплениядинамической системы

Сначала система делится на две подсистемы с повторением какой-либо массы, например, массы G_3, как показано на рис. 2. Характеристическая функция всей системы R равна произведению характеристических функций полученных подсистем R_{12} и R_{34} минус произведение коэффициента связи γ_{23} между ними на характеристические функции подсистем, получающихся в результате отбрасывания параметров, входящих в коэффициент связи γ_{23}. Аналогичным образом выполняется дальнейшее расщепление системы. Для приведенного на рис. 2 примера

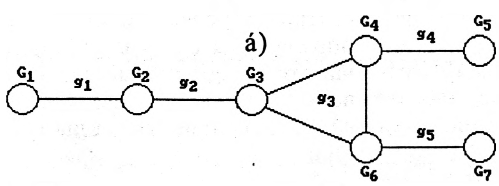
$$R=R_{12}R_{34}-\gamma_{23}R_1R_4;\ R_{12}=R_1R_2-\gamma_{12};\ R_{34}=R_3R_4-\gamma_{34}. \quad (3)$$
$$R_i=s_2+\lambda_i;\ \lambda_i=g_i(G_i+G_{i+1});\ i=1,4;\ \gamma_{jj,j+1}=g_j\,g_{j+1}\,G^2_{j+1}.$$

Передаточные и характеристические функции для других типов динамических систем приведены на рис. 3

а)



$$R=R_{12}R_{3456}-\gamma_{23}R_1R_4R^{(3)}{}_{56}-\gamma_{25}R_1R_6R^{(3)}{}_{34};$$
$$R_{12}=R_1R_2-\gamma_{12};\ R_{3456}=R_{34}R_{56}-\gamma_{35}R_4R_6; \quad (4)$$
$$R^{(3)}{}_{34}=R^{(3)}{}_3R_4-\gamma_{34};\ R^{(3)}{}_{56}=R^{(3)}{}_5R_6-\gamma_{56};$$
$$R^{(3)}{}_3=s^2+g_3G_4;\ R^{(3)}{}_5=s^2+g_5G_6.$$



$$R=R_{12}R_{345}-\gamma_{23}R_1R_4R_5;\ R_{345}=R_{34}R_5-\gamma_{35}R_4; \quad (5)$$
$$R_{12}=R_1R_2-\gamma_{12};\ R_{34}=R_3R_4-\gamma_{34};\ R_3=s^2+g_3(G_3+G_4+G_6).$$

Рис. 3. Передаточные и характеристические функции динамических систем:
а) – с разветвлением на массе; б) – с дифференциальным разветвлением на упругом звене.

Для нахождения частотных характеристик системы достаточно, как известно, заменить в передаточной функции оператор s на jω. В результате получается комплексная частотная характеристика (КЧХ) системы W(jω), которую можно представить состоящей из вещественной и мнимой частей:

$$W(j\omega)=ReW+jImW \quad (6)$$

Тогда квадрат модуля амплитудной частотной характеристики A((ω) будет равен

$$A^2(\omega)=(ReW)^2+j\,(ImW)^2. \quad (7)$$

Одной их основных задач расчета динамической системы является определение частот ее собственных колебаний. В общем случае задача сводится к составлению в каком-либо виде уравнения частот и нахождению его корней, которые и являются собственными частотами системы. Существует большое количество методов их нахождения. Один из наиболее простых состоит в преобразовании характеристической функции в искомое частотное уравнение. Для этого достаточно считать динамическую систему консервативной ($b_i=0$) и приравнять характеристическую функцию нулю, предварительно заменив s^2 на $-\omega^2$.

Например, для динамической системы, рис. 1, имеем:

$$R=R_{12}R_{34}-\gamma_{23}R_1R_4=(R_1R_2-\gamma_{12})(R_3R_4-\gamma_{34})-$$
$$-\gamma_{23}R_1R_4, \quad (8)$$
$$R_i=\lambda_i-\omega^2;\ \lambda_i=c_i(G_i+G_{i+1});\ i=1,4;\ \gamma_{jj,j+1}=c_jc_{j+1}G^2_{j+1}.$$

Передаточные функции являются удобным исходным материалом для анализа динамичности системы. Под динамичностью понимают способность системы преобразовывать прикладываемый к ней внешний крутящий момент (обычно ступенчатый) за счет ее упругих и инерционных свойств. Диссипативные силы мало сказываются на максимальных моментах, что связано со скоротечностью протекания переходного процесса, поэтому систему в таких расчетах считают консервативной. Динамичность оценивают коэффициентами динамичности моментов в упругих звеньях:

$$k_i=M_{imax}/M_o, \quad (9)$$

где M_{imax} - максимально возможный момент в i – ом упругом звене при ступенчатом приложении внешнего момента M_o.

Для i – го упругого звена

$$k_i=k_{io}(1+k_{is})=k_{io}\left(1+\frac{R(0)}{R_j(0)}\sum_{1}^{n}\left|\frac{R_j(\omega_i)}{\omega_i^2R'(\omega_i)}\right|\right), \quad (10)$$

где k_{io} – инерционный коэффициент, зависящий от соотношения масс системы; k_{is} – сумма динамических составляющих коэффициента динамичности k_i; $R(\omega_i)$ и $R_j(\omega_i)$ - частотные функции соответственно всей системы и подсистем, лежащих вне прямого пути прохождения входного сигнала; $R'(\omega_i)$ – производная частотной функции системы; ω_i – i - собственная частота системы.

Например, для системы, показанной на рис. 1,

$$k_2=\frac{I_3+I_4+I_5}{I_1+I_2+I_3+I_4+I_5}\left(1+\frac{R(0)}{R_{34}(0)}\sum_{1}^{4}\left|\frac{R_{34}(\omega_i)}{\omega_i^2R'(\omega_i)}\right|\right). \quad (11)$$

Каждый коэффициент динамичности состоит из статической составляющей, равной единице, и суммы динамических составляющих k_{is}, определяемых амплитудами моментов на соответствующих собственных частотах.

Анализ (10) показывает, что динамические составляющие k_{is} зависят от относительной ширины частотного диапазона, в котором расположены собственные частоты, и их взаимного расположения. С увеличением ширины диапазона k_{is} уменьшается до своего предельного значения, равного единице. Значение k_{is} для звена, наиболее близко расположенного к внешнему моменту, всегда равно единице и не зависит от колебательных свойств системы. Для остальных звеньев k_{is} больше единицы и при определенных условиях может принимать теоретически сколь угодно большие значения [1].

С помощью предложенного метода выполнен анализ динамических свойств трансмиссий грузовых автомобилей МАЗ, ЗИЛ и ГАЗ с колесной формулой 4x2. Их динамические системы соответствуют рис. 3 б. Расчеты показали, что они динамически подобны, т.е. для снижения максимальных нагрузок при трогании автомобиля с места и длительно действующих переменных нагрузок от неровностей дороги применимы одни и те же конструктивные мероприятия. Это связано с единой природой их возникновения. Определены условия, при которых нагрузки в трансмиссии минимальны. Одним из условий является равенство между собой парциальных частот подсистем R_4 и R_5, упругие звенья которых соответствуют: c_4 – тангенциальной жесткости ведущих колес, c_5 – жесткости рессор ведущего моста на выкручивание. В этом случае одна из собственных (резонансных) частот трансмиссии совпадает с антирезонансной частотой, что приводит к исчезновению (компенсации) резонансной зоны на данной частоте. Наибольшее влияние на максимальные моменты в трансмиссии оказывает жесткость полуосей. Как правило, при их уменьшении максимальные моменты в трансмиссии также уменьшаются.

Расчеты показывают, что за счет оптимизации динамических свойств нагруженность деталей трансмиссии можно снизить на 15..25 %.

Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Используемая литература

1. Молибошко Л.А. Теория динамических процессов в трансмиссии автомобиля.– н.:БПИ, 1988. – 55 с. – Деп. в ЦНИИТЭИавтопроме, № 1712 – ап88.
2. Применение ЭВМ при конструировании и расчете автомобиля / А.И. Гришкевич, Л.А. Молибошко, О.С. Руктешель, В.М. Беляев; Под общ. ред. А.И. Гришкевича. – Мн.: Выш. школа, 1978. – 264 с.

РЕПЛИКА

О ВИБРОУСТОЙЧИВОСТИ, ВИБРОЗАЩИТЕ К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ МАШИН

Кондратюк В.Ф., доц. кафедры "Сопротивление материалов и теория упругости"

Крушевский А.Е., профессор кафедры теоретической механики

Решение вопросов виброустойчивости, виброзащиты – неотъемлемая часть обеспечения безопасных условий эксплуатации машин. Это касается как строительного, так и машиностроительного комплексов. Создание виброзащищенных машин приобретает особую актуальность в горнодобывающей отрасли.

Одной из главных задач проблемы является определение спектра частот собственных колебаний конструкций. Эта информация нужна не только для предотвращения опасного резонанса при вынужденных колебаниях, но также и для изучения возникновения нелинейных колебаний (автоколебаний).

Имеется значительное количество литературы, посвященной расчету на вибрационную нагрузку, например, энциклопедический труд под редакцией С.Д. Пономарева "Расчеты на прочность в машиностроении" (1959), фундаментальный шеститомный справочник под редакцией В.В. Болотина "Вибрации в технике" (1978).

С развитием вычислительной техники появился ряд компьютерных программ с мощной сервисной поддержкой, которые позволяют моделировать рабочий процесс и проектировать вибробезопасную машину. Здесь следует отметить указанные выше работы [1], [2] и последующие разработки этих авторов.

В инженерной практике чаще всего в расчетах используют приемы замены конструкции системой материальных точек с упругими связями и демпферами. Такой приближенный подход не позволяет с достаточной точностью определить спектр частот, так как этот спектр зависит, прежде всего, от упругих связей между элементами, а эти связи определяются лишь приближенно и, что самое главное, неоднозначно.

Поэтому привлечение более надежных и строгих методов определения спектра собственных частот колебаний остается актуальной задачей в расчетной практике.

По мнению авторов данной статьи перспективным методом определения спектра собственных частот колебаний можно считать вариационное уравнение Лагранжа равновесия полного объема:

$$\int_V (divT + \overline{K} - \rho\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2})\cdot\delta\overline{u}dV -$$
$$-\int_S (\overline{n}\cdot T - \overline{F}_n)\cdot\delta\overline{u}dS = 0,$$

где T - тензор напряжений, $\overline{K}$ - вектор объемных сил, ρ - плотность материала, $\overline{u}$ - вектор перемещений, $\delta\overline{u}$ - вариация век-