УДК 517.39

МЕТОД РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ

Студенты гр. 104210 Чепаченко Ю.И., Савич А.Ю., Шевцов А.Ю.
Канд. техн. наук, доцент Волкович П.Ф.
Белорусский национальный технический университет

В докладе сформулированы условия существования и правила получения интегральных рекуррентных соотношений, получены решения указанных рекуррентных соотношений методом математической индукции и представлены в виде комбинаторных сумм известных функций, в частности:

$$\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2}{\Delta}(2ax+b)\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(n-1)!(2(n-\nu)-3)!!(2k)^{\nu}}{(n-(\nu+1))!(2n-1)!!X^{(2(n-\nu)-1)/2}},$$

где $X = ax^2 + bx + c$, $\Delta = 4ac - b^2$, $k = \dfrac{4a}{\Delta}$, $a, b, c \in R$, $n \in N$;

$$\int X^{(2n+1)/2} dx = \frac{2ax+b}{4a}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n+1)!!(n-\nu)!X^{(2(n-\nu)+1)/2}}{(2n-(2n-1))!!(n+1)!(2k)^{\nu}} + \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!(2k)^{n+1}}\int \frac{dx}{X^{1/2}},$$

где

$$\int \frac{dx}{X^{1/2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a^{1/2}} \ln\left|2(aX)^{1/2} + 2ax + b\right| \text{для } a > 0, \\ \dfrac{1}{a^{1/2}} Arsh\dfrac{2ax+b}{\Delta^{1/2}} \text{для } a > 0, \Delta > 0, \\ \dfrac{1}{a^{1/2}} \ln\left|2ax+b\right| \text{для } a > 0, \Delta = 0, ax+b > 0, \\ -\dfrac{1}{a^{1/2}} \ln\left|2ax+b\right| \text{для } a > 0, \Delta = 0, ax+b < 0, \\ -\dfrac{1}{a^{1/2}} \arcsin\dfrac{2ax+b}{(-\Delta)^{1/2}} \text{для } a < 0, \Delta < 0; \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+\lambda^2\right)^{n}} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(2n-3)!!(n-(\nu+1))!x}{(n-1)!(2n-(2\nu+1))!!\left(2\lambda^2\right)^{\nu}\left(x^2+\lambda^2\right)^{n-\nu}} +$$

$$+\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!\left(2\lambda^2\right)^{n-1}}\frac{1}{\lambda}arctg\frac{x}{\lambda}, \lambda \in R.$$