Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

Сборник задач по математике

для студентов инженерных специальностей
2 частях

Часть 1

Минск 2005

УДК 501 517.9 519.62

Данное издание адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения занятий и практического изучения материала по дисциплине «Математика».

Часть 1 содержит теоретические сведения, набор задач и решение наиболее типичных примеров, изучаемых студентами инженерных специальностей 1-го курса приборостроительного и механико-технологического факультетов.

Составители:
Р.В. Михнова, Л.В. Бокуть, Е.А. Глинская, Н.А. Кондратьева,
Н.К. Прихач, С.В. Стрельцов, А.Н. Мелешко, О.Г. Вишневская.

Рецензенты:
В.Ф. Бубнов, И.Н. Мелешко

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Решение типовых задач

Определители второго и третьего порядков

Детерминантом матрицы $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ называется выражение $\alpha_1\beta_2$-$\alpha_2\beta_1$, которое обозначается $\det A$, $\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ или $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$ и называется определителем второго порядка.

Пример 1. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2, \qquad \begin{vmatrix} \vec{a} & -2 \\ \vec{b} & 1 \end{vmatrix} = \vec{a}\cdot 1 - (-2)\vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

Детерминантом матрицы B третьего порядка называется выражение $\det B$:

$$B=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \det B=\alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1\left(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2\right)-\alpha_2\left(\beta_1\gamma_3-\beta_3\gamma_1\right)+\alpha_3\left(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1\right)$$

Он найден с помощью теоремы о разложении определителя по элементам ряда.

Пример 2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \big((-1)\cdot(-2)-(-3)\cdot 4\big) + \big(2+(-2)-(-3)\cdot(-3)\big) +$$

$$+\big(2\cdot 4-(-1)\cdot(-3)\big) = 2+12-4-9+8-3 = 6$$

Определителем третьего порядка числовой матрицы B называется число

$$\det B = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3+\alpha_2\beta_3\gamma_1+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_3\beta_2\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma_3-\alpha_1\beta_3\gamma_2 .$$

Пример 3. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 7+3\cdot 5\cdot 4+1\cdot 2\cdot 0+1\cdot 0\cdot 4-1\cdot 3\cdot 7+2\cdot 2\cdot 5 = 73$$

Пример 4. Вычислить определитель путём накопления нулей в строке или столбце.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к первому столбцу третий, умноженный на –2, ко второму – третий, умноженный на 5, и к четвёртому – третий, умноженный на –2:

$$D=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 6\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первой строки:

$$D=\left(-1\right)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}.$$

Прибавив к первой строке последнего определителя вторую, умноженную на –2, получим:

$$D=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}.$$

Разложив по элементам третьего столбца, запишем:

$$D=3\left(-1\right)^{2+3}\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3\cdot\left(3-0\right)=-9.$$

Матрицы и операции над ними. Нахождение обратной матрицы

Операции сложения и вычитания вводятся только для матриц одинаковых размеров. Произведение матрицы A на матрицу B вводится только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т.е. если A – матрица размеров $m \times n$, а B – размеров $n \times k$. Произведением AB матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$, элементы которой C_{ij} находятся по формуле

$$C_{ij}=\sum_{S=1}^{n}a_{iS}b_{Sj}\ .$$

Пример 5. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, существуют ли произведения AB и BA, и если существуют, найти их.

Решение. Произведение AB существует, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

$$C_{3\times3} = A_{3\times2} \cdot B_{2\times3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)(-2)+0\cdot3 & (-1)\cdot5+0\cdot0 & (-1)\cdot1+0\cdot1 \\ 2\cdot(-2)+3\cdot3 & 2\cdot5+3\cdot0 & 2\cdot1+3\cdot(-1) \\ 4\cdot(-2)+1\cdot3 & 4\cdot5+1\cdot0 & 4\cdot1+1\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 5 & 10 & -1 \\ -5 & 20 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA также существует, так как число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A.

$$P_{2\times2} = B_{2\times3} \cdot A_{3\times2} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)(-1)+5\cdot2+1\cdot4 & (-2)\cdot0+5\cdot3+1\cdot1 \\ 3\cdot(-1)+0\cdot2+(-1)\cdot4 & 3\cdot0+0\cdot3+(-1)\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица A^{-1} называется обратной квадратной невырожденной матрице A, если выполняется условие $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Пример 6. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A^{-1}, если она существует.

Решение.

$$\det A = 1 \cdot 5 \cdot 10 - 3 \cdot 6 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) \cdot 10 - 1 \cdot 2 \cdot 6 = 0.$$

Следовательно, обратной матрицы не существует.

Пример 7. Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, и если существует, найти её.

Решение. Так как $\det A = 12 \neq 0$, то A^{-1} существует и может быть найдено по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

то $$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6&6&0\\-6&2&4\\0&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Невырожденные системы линейных уравнений. Матричный метод решения. Правило Крамера

Если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы линейных уравнений, отличен от нуля, то система называется невырожденной. Невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле Крамера:

$$x_j=\Delta_j/\Delta,\qquad j=\overline{1,n},$$

где Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ исходной системы заменой j-го столбца столбцом из свободных членов системы.

Решение невырожденной системы линейных уравнений можно записать в матричном виде:

$$X=A^{-1}B,$$

где A^{-1} – матрица, обратная матрице A; B – столбец свободных членов.

Пример 8. Дана система уравнений

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2-2x_3&=6,\\2x_1+3x_2-7x_3&=16,\\5x_1+2x_2+x_3&=16.\end{aligned}\right\}$$

Решить её: а) матричным методом, б) по формулам Крамера.

Решение.

а) $$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -7\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6\\ 16\\ 16\end{pmatrix}$$

$$\det A = 3-35-8+30-2+14=2,$$

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3 & -7\\ 2 & 1\end{vmatrix}=17,\qquad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-37,$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-11,\qquad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=11,\qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -7\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -7\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 16\\ 16\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}102-80-16\\ -222+176+48\\ -66+48+16\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\ 2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

т.е. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$;

б) $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18 - 112 - 64 + 96 - 16 + 84 = 6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 16 - 64 - 210 + 160 - 12 + 122 = 2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 48 + 80 + 24 - 90 - 32 - 32 = -2$$

По формулам Крамера имеем:

$$x_1 = 6/2 = 3, \quad x_2 = 2/2 = 1, \quad x_3 = -2/2 = -1.$$

Вычисление ранга матриц.
Решение произвольных линейных систем.
Однородные линейные системы

Рангом матрицы A (обозначается r_A) называется наибольший порядок r отличных от нуля миноров матрицы A, а базисным минором – любой минор порядка r, отличный от нуля. Если в матрице A имеется отличный от нуля минор порядка k , а все миноры порядка $k + 1$ равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

Для нахождения ранга матрицы A применяют метод окаймляющих миноров. Ранг матрицы, полученной из данной элементарными преобразованиями, равен рангу данной матрицы. Любую матрицу можно привести к виду, когда каждый её ряд будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определит ранг исходной матрицы, так как полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Пример 9. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1.$$

Найден минор второго порядка, отличный от нуля. Вычислим окаймляющие его миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -40 - 3 + 4 - 10 + 1 + 48 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 21 - 8 + 20 + 12 + 7 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 10 - 12 + 12 + 4 + 10 = 0.$$

Так как не существует миноров третьего порядка, отличных от нуля, а окаймляющий минор второго порядка отличный от нуля, то $r_A = 2$.

Пример 10. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & 8 & -11 & 7 & -12 \end{pmatrix}.$$

Решение. Первую строку матрицы умножим на –4 и прибавим ко второй, затем умножим первую строку на –5 и прибавим к третьей строке:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -13 & 6 & -11 \\ 0 & 18 & -26 & 12 & -22 \end{pmatrix}.$$

Затем вторую строку полученной матрицы умножим на –2 и прибавим к третьей: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -13 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$.

Миноров третьего порядка, отличных от нуля, нет. Следовательно, $r_A = 2$.

Пример 11. С помощью метода последовательных исключений Жордана – Гаусса решить вопрос о совместности данной системы и в случае совместности решить ее:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ & 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ & 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ & 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Составим расширенную матрицу B и проведем необходимые элементарные преобразования строк:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} S_2 - 7S_1 \\ S_3 - 5S_1 \\ S_4 - 3S_1 \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} S_2 \text{ и } S_4 \text{ поменяем} \\ \text{местами,} \\ S_4 \cdot (-1). \end{subarray}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_4 + S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Система совместна, так как ранг исходной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен 4. Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0,\\ x_2 + 3x_3 - x_4 &= -5,\\ x_3 - x_4 &= -2,\\ -2x_4 &= -2. \end{aligned}\right\}$$

Двигаясь снизу вверх, последовательно находим:

$$\begin{aligned} &x_4 = 1,\\ &x_3 = -2 + x_4 = -1,\\ &x_2 = -5 + x_4 - 3x_3 = -5 + 1 + 3 = -1,\\ &x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2 + 3 - 4 = 1. \end{aligned}$$

Итак, система совместна, ее решение единственное:

$$(r = n = 4):\quad x_1 = 1,\; x_2 = -1,\; x_3 = -1,\; x_4 = 1.$$

Пример 12. Решить произвольную систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2,\\ &4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3,\\ &5x_1 + 8x_2 - 11x_3 + 7x_4 = -12. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы и найдем r_A и $r_{\tilde{A}}$ с помощью элементарных преобразований:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 5 & 8 & -11 & 7 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 9 & -13 & 6 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Промежуточные действия описаны в рассмотренном примере выше).

Минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, отсюда $r_A = r_{\tilde{A}} = 2$, т.е. система совместна.

Исходная система равносильна следующей:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 9x_2 - 13x_3 + 6x_4 = -11. \end{aligned} \right\}$$

В качестве базисных неизвестных возьмем x_1, x_2. Тогда x_3, x_4 – свободные неизвестные. Перенося их в правую часть, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 = 2 - 3x_3 + x_4, \\ 9x_2 = -11 + 13x_3 - 6x_4. \end{aligned} \right\}$$

Находим решение полученной системы по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2 - x_3 + x_4 & -2 \\ -11 + 13x_3 - 6x_4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(-22 + 26x_3 - 12x_4 + 18 - 27x_3 + 9x_4\right) = \frac{1}{9}\left(-x_3 - 3x_4 - 4\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 2 - x_3 + x_4 \\ 0 & -11 + 13x_3 - 6x_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\left(-11 + 13x_3 - 6x_4\right).$$

Пусть $x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2$, где $C_1,\ C_2 \in R$. Тогда решение имеет вид

$$\left[\frac{1}{9}\left(-C_1 - 3C_2 - 4\right) \quad \frac{1}{9}\left(-11 + 13C_1 - 6C_2\right) \ C_1 \ \ C_2\right]^T, \quad C_1,\ C_2 \in R$$

Таким образом, исходная система имеет бесконечное множество решений.

Пример 13. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений. Записать фундаментальное и общее решение.

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4&=0. \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Так как

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&4\\3&5&6\\4&5&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-1&-6\\0&-3&-18\end{vmatrix}=18-18=0,\qquad \mathrm{rang}A=2,\ \ n=4.$$

Система имеет бесчисленное множество решений.

В качестве базисного минора выберем $M_2=\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}\neq 0.$

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2&=3x_4-4x_3,\\ 3x_1+5x_2&=4x_4-6x_3. \end{aligned}\right\}.$$

В качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2; положим $x_3=C_1,\quad x_4=C_2$ – свободные переменные.

Решим последнюю систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=5-6=-1,$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}3C_2-4C_1&2\\4C_2-6C_1&5\end{vmatrix}=-8C_1+7C_2,$$

$$x_1 = \frac{-8C_1 + 7C_2}{-1} = 8C_1 - 7C_2,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3C_2 - 4C_1 \\ 3 & 4C_2 - 6C_1 \end{vmatrix} = 6C_1 - 5C_2,$$

$$x_2 = \frac{6C_1 - 5C_2}{-1} = -6C_1 + 5C_2.$$

Общее решение:

$$x(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} 8C_1 - 7C_2 \\ -6C_1 + 5C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальное решение:

$$E_1 = x(1,0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = x(0,1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x(C_1, C_2) = C_1E_1 + C_2E_2 = C_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Задания для практических занятий

1.2.1. Вычислить определители второго порядка:

1. $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+1 & ab-ac \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$

1.2.2. Решить уравнения:

1. $\begin{vmatrix} x^2-4x+4 & -1 \\ -2+x & x+2 \end{vmatrix} = 0$. 2. $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

1.2.3. Решить неравенства:

1. $\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} > -1$. 2. $\begin{vmatrix} x^2+3 & x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} > 5$.

1.2.4. Вычислить определители третьего порядка:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 4 & 16 & 8 \\ 7 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & -9 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

1.2.5. Решить уравнения:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$. 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix}$.

1.2.6. Вычислить определители путем накопления нулей в строке или в столбце:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

1.2.7. Вычислить $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

1.2.8. Вычислить $A \cdot B \cdot C$, $B \cdot A \cdot C$, $C \cdot B \cdot A$, если это возможно при:

1. $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

2. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -8 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

1.2.9. Вычислить $2A^2 - 3AB + 2B^2$, если:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

1.2.10. Вычислить $3A^2 - 2AB + 2B$, если:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}.$$

1.2.11. Вычислить $2A^2 - 3A + 14$, если:

$$A=\begin{pmatrix}8 & 9 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

1.2.12. Вычислить $7A^2 - 2AE + 3E$, если:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.2.13. Найти обратную матрицу для матриц и доказать, что $A \cdot A^{-1} = E$:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.2.14. Решить невырожденные системы:

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 4. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x + 2y - z = 12, \\ x + 2y + z = 7, \\ y - z = -1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 7x - 5y + 8z = 9, \\ x + 3y - 5z = 5, \\ 3x + y + z = 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 25, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -22, \\ 7x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$

1.2.15. Найти ранг матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & -8 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -3 & 7 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 10 & -22 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.16. Решить произвольные системы:

1. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3, \\ 4x - 2y - z = 3, \\ 2x + 6y + 9z = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 12x_3 = 0, \\ 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

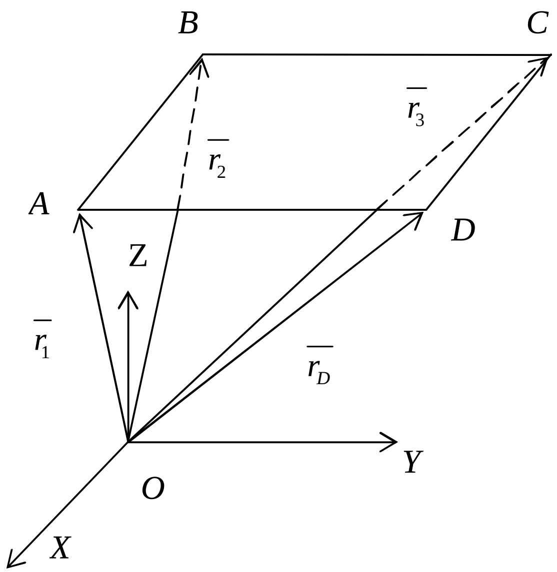
9. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 3z = 2, \\ x - 4y + 7z = 0. \end{cases}$

2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. Решение типовых задач

Операции над векторами. Разложение вектора по базису

Пример 1. Даны радиусы-векторы $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}$ трех последовательных вершин *A*, *B*, *C* параллелограмма *ABCD*. Найти радиус-вектор четвертой вершины *D* (см. рисунок.



Решение. Из векторного треугольника *OCD*: $\overline{r_3} + \overline{CD} = \overline{r_D}$, . $\overline{CD} = \overline{BA}$. .

Из векторного треугольника *OAB*: $\overline{r_1} + \overline{AB} = \overline{r_2} \;\Rightarrow \overline{AB} = \overline{r_2} - \overline{r_1}$; $\overline{BA} = \overline{r_1} - \overline{r_2}$, поэтому $\overline{r_D} = \overline{r_3} + \overline{r_1} - \overline{r_2}$.

Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов

Пример 2. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$, где $\overline{m}, \overline{n}$ – единичные векторы, $\left(\overline{m} \,\hat{,}\, \overline{n} \right) = 60^\circ$.

Решение. Пусть $\overline{d_1}$ и $\overline{d_2}$ - диагонали параллелограмма. Тогда

$$\overline{d_1} = \overline{a} + \overline{b} = 2\overline{m} + \overline{n} + \overline{m} - 2\overline{n} = 3\overline{m} - \overline{n};$$

$$\overline{d_2} = \overline{a} - \overline{b} = 2\overline{m} + \overline{n} - \overline{m} + 2\overline{n} = \overline{m} + 3\overline{n};$$

$$\left|\overline{d_1}\right|^2 = (3\overline{m} - \overline{n}, 3\overline{m} - \overline{n}) = 9\left|\overline{m}\right|^2 - 6(\overline{m}, \overline{n}) + \left|\overline{n}\right|^2 = 9 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cos 60^\circ +$$
$$+1 = 7; \quad \left|\overline{d_1}\right| = \sqrt{7},$$

$$\left|\overline{d_2}\right|^2 = (\overline{m} + 3\overline{n}, \overline{m} + 3\overline{n}) = \left|\overline{m}\right|^2 + 6(\overline{m}, \overline{n}) + 9\left|\overline{n}\right|^2 = 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} +$$
$$+9 \cdot 1 = 13; \quad \left|\overline{d_2}\right| = \sqrt{13}.$$

Пример 3. Радиус-вектор точки *M* составляет с осью *OY* угол в 60°; а с осью *OZ* – 45°. $\left|\overline{OM}\right| = 8$. Найти координаты точки *M*, если её абсцисса отрицательная.

Решение. Координаты единичного вектора $\overline{a^\circ}$, совпадающего по направлению с вектором $\overline{OM}$, – это направляющие косинусы вектора $\overline{OM}$.

$$\overline{a^\circ} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) = (\cos\alpha; \cos 60^\circ; \cos 45^\circ) = \left(\cos\alpha; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Так как $\left|\overline{a^{\circ}}\right| = 1$, то $\cos^2\alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$. Но абсцисса точки M отрицательная. Значит, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; поэтому $\overline{a^{\circ}} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overline{OM} = \left|\overline{OM}\right| \overline{a^{\circ}} = \left(-4; 4; 4\sqrt{2}\right)$, т.е. $M\left(-4; 4; 4\sqrt{2}\right)$.

Векторное и смешанное произведения векторов

Пример 4. Даны точки $A(-2;3;-4)$, $B(3;2;5)$, $C(1;-1;2)$, $D(3;2;-4)$. Вычислить высоту пирамиды, опущенную из вершины D на грань ABC.

Решение.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал-да}} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right|.$$

С другой стороны, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| H$, поэтому

$$\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| H \text{ ,т.е. } H = \frac{\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right|}{\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right|}.$$

Найдем векторы $\overline{AB}(5;-1;9)$; $\overline{AC}(3;-4;6)$; $\overline{AD}(5;-1;0)$:

$$\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & -1 & 0 \end{matrix}\right\| = \left|-30 - 27 + 180 + 30\right| = 153;$$

$$\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -1 & 9 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 30\bar{i} - 3\bar{j} - 17\bar{k};$$

$$\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|=\sqrt{30^2+3^2+17^2}=\sqrt{1198};$$

$$H=\frac{153}{\sqrt{1198}}.$$

Плоскость

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-3,1)$ параллельно векторам $\overline{a_1}\left(-3;2;-1\right)$, $\overline{a_2}\left(1;2;3\right)$.

Решение. Нормальный вектор плоскости $\overline{n}\perp\overline{a_1}$ и $\overline{n}\perp\overline{a_2}$, поэтому

$$\overline{n}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=8\overline{i}+8\overline{j}-8\overline{k}.$$

Ищем уравнение плоскости в виде:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0;$$
$$8\left(x-2\right)+8\left(y+3\right)-8\left(z-1\right)=0,\quad x+y-z+2=0.$$

Прямая на плоскости

Пример 6. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A\left(2,-1\right)$ перпендикулярно к прямой $y=-3x+1$. Найти отрезки, отсекаемые этой прямой на осях координат.

Решение. $y=-3x+1$ или $y+3x-1=0$. Нормальный вектор этой прямой $\overline{n}\left(3,1\right)$ является направляющим вектором для искомой прямой.

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ или $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}$, $\quad x-2=3y+3$, $\quad y=\dfrac{x-5}{3}$; – каноническое уравнение прямой $x=0\Rightarrow y=-\dfrac{5}{3}$. Тогда $y=0\Rightarrow x=5.$ – отрезки, отсекаемые на осях координат.

Прямая в пространстве. Прямая и плоскость

Пример 7. Доказать перпендикулярность прямых

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Направляющий вектор первой прямой $\overline{S_1}(2;3;-6)$.

$$\overline{S_2} = \left[\overline{n_1}, \overline{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -9\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k} \text{ или } \overline{S_2}(3;2;2).$$

Если прямые перпендикулярны, то $\left(\overline{S_1}, \overline{S_2}\right) = 0$; $\left(\overline{S_1}, \overline{S_2}\right) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = 0$.

Кривые второго порядка

Пример 8. Определить вид кривой, найти ее вершины, фокусы, эксцентриситет, построить кривую.

$$8x^2 - 16x - 12y^2 - 6 = 0 .$$

Решение. Преобразуем уравнение кривой:

$$8\left(x^2 - 2x\right) - 12y^2 - 6 = 0, \quad 8\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) - 12y^2 - 6 = 0,$$

$$8(x-1)^2 - 12y^2 = 14,$$

$$\frac{(x-1)^2}{7/4} - \frac{y^2}{7/6} = 1.$$

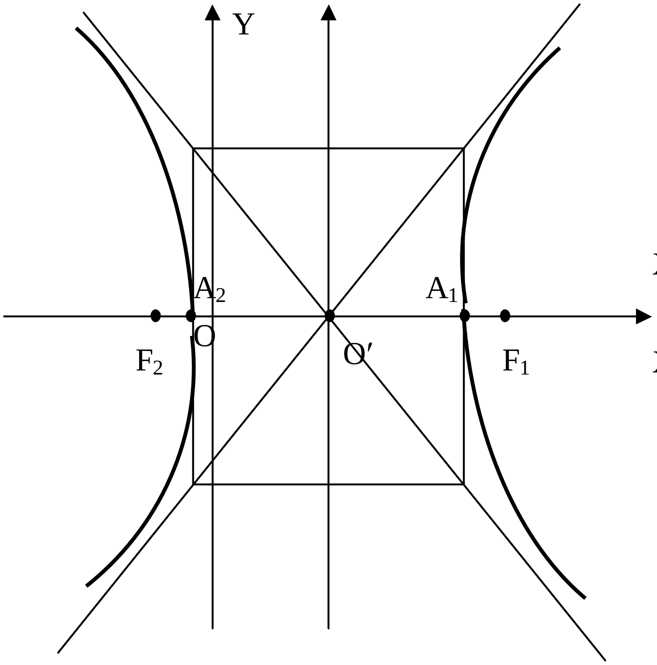
Выполним параллельный перенос осей координат по формулам $\begin{cases} x-1=x', \\ y=y'. \end{cases}$. Тогда $O'(1,0)$ и $\dfrac{x'^2}{7/4}-\dfrac{y'^2}{7/6}=1$ – каноническое уравнение гиперболы в новой системе координат.

Полуоси гиперболы $a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$; $b=\sqrt{\dfrac{7}{6}}$. Вершины гиперболы $A_1\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2};0\right)$; $A_2\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2};0\right)$; $c^2=a^2+b^2=\dfrac{7}{4}+\dfrac{7}{6}=\dfrac{35}{12}$.

Фокусы гиперболы $F_1(c,0)=\left(\sqrt{\dfrac{35}{12}};0\right)$; $F_2(-c,0)=\left(-\sqrt{\dfrac{35}{12}};0\right)$;

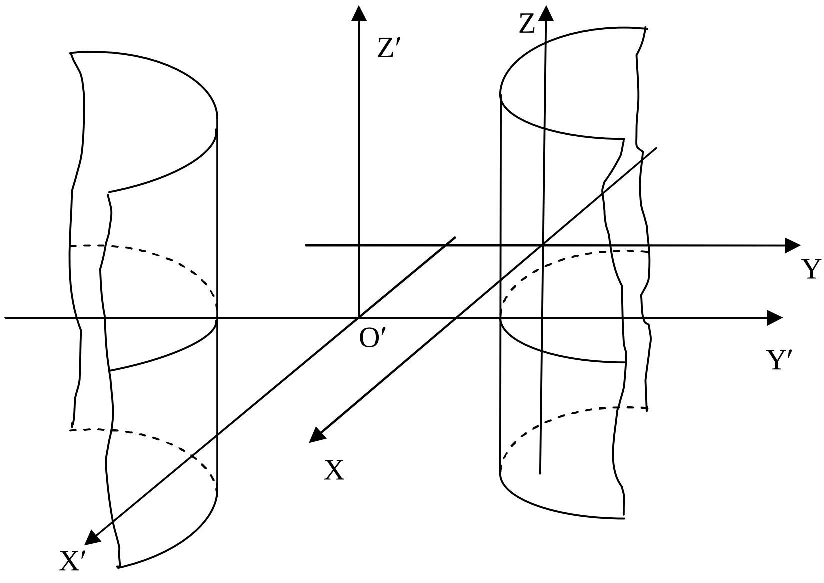
$$E=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{35\cdot 4}{12\cdot 7}}=\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Построим гиперболу (рис. 1).



Пример 9. Назвать и построить поверхность $3(x-1)^2 = 6+2(y+1)^2$.

Решение. Преобразуем уравнение поверхности $3(x-1)^2 - 2(y+1)^2 = 6$ или $\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(y+1)^2}{3} = 1$. Выполним параллельный перенос осей координат по формулам $\begin{cases} x-1 = x', \\ y+1 = y'. \end{cases}$ Тогда новое начало системы координат $O'(1;-1)$. В ней уравнение поверхности имеет вид $\dfrac{X'^2}{2} - \dfrac{Y'^2}{3} = 1$. Это гиперболический цилиндр (рис. 2).



2.2. Задания для практических занятий

2.2.1. Операции над векторами. Разложение вектора по базису

1. Точки K и L являются серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overline{AK} = \overline{K}$ и $\overline{AK} = \overline{e}$ выразить через $\overline{K}$ и $\overline{e}$, векторы $\overline{BC}$ и $\overline{DC}$.

(Ответ: $\overline{BC} = 1/3(4\overline{e} - 2\overline{K})$, $\overline{DC} = 1/3(4\overline{K} - 2\overline{e})$).

2. Даны векторы $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$. Вектор $\overline{OC} = \overline{c}$ – медиана треугольника OAB. Разложить аналитически и геометрически вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а вектор $\overline{a}$ по векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

(Ответ: $\overline{c} = 1/2(\overline{a} + \overline{b})$, $\overline{a} = 2\overline{c} - \overline{b}$.)

3. В равнобедренной трапеции $OACB$ угол BOA = 60?, $OB = BC = CA = 2$, точки M и N – середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overline{AC}, \overline{OM}, \overline{ON}, \overline{MN}$ через единичные векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ направлений $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

(Ответ: $\overline{AC} = 2(\overline{n} - \overline{m})$, $\overline{OM} = 2\overline{n} + \overline{m}$, $\overline{ON} = 3\overline{m} + \overline{n}$,
$\overline{MN} = 2\overline{m} - \overline{n}$.)

4. Даны радиусы векторы $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}$ трех последовательных вершин A, B, C параллелограмма $ABCD$. Найти радиус-вектор четвертой вершины D.

(Ответ: $\overline{r_1} + \overline{r_3} - \overline{r_2}$).

5. Даны векторы $\overline{a}_1 = (3; 1; 2)$, $\overline{a}_2 = (2; 1; 2)$, $\overline{a}_3 = (-1; 2; 5)$, $\overline{d} = (5; 0; -1)$ в некотором базисе. Показать, что век-

торы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ образуют базис, и вычислить координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

(О т в е т : $\overline{d} = 2\overline{a_2} - \overline{a_3}$.) .

6. Даны три вектора: $\overline{a}_1 = (3; -1)$, $\overline{a}_2 = (1; -2)$, $\overline{a}_3 = (-1; 7)$. Найти разложение вектора $p = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a_3}$).

(О т в е т : $p = 2\overline{a}_2 - 3\overline{a_3}$.) .

7. Даны векторы $\overline{a}_1 = (3; -2; 1)$, $\overline{a}_2 = (-1; 1; -2)$, $\overline{a}_3 = (2; 1; -3)$. Найти разложение вектора $\overline{a}$ = (11;-6;5) по базису $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$.

(О т в е т : $\overline{a} = 2\overline{a}_1 - 3\,\overline{a}_2 + \overline{a_3}$.) .

8. На сторонах *OA* и *OB* прямоугольника *OACB* отложены векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$. Точка *M* – середина *BC*, *N* – середина *AC*. Выразить через $\overline{i}$ и $\overline{j}$ векторы $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{BO}$, $\overline{OC}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{MN}$, если $\left|\overline{OA}\right| = 3$, $\left|\overline{OB}\right| = 4$.

(О т в е т : $\overline{OA} = 3\overline{i}$, $\overline{AC} = 4\overline{j}$, $\overline{BO} = -4\overline{j}$, $\overline{OC} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$,
$\overline{OM} = 3/2\overline{i} + 4\overline{j}$, $\overline{ON} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$, $\overline{MN} = 3/2\overline{i} - 2\overline{j}$.

2.2.2. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов

1. Даны точки $M_1(2; 4; -2)$ и $M_2\left(-2; 4; 2\right)$. На прямой M_1M_2 найти точку *M*, делящую отрезок M_1M_2 в отношении λ = 3.

(О т в е т : M (-1;4;1)).

2. Даны точки *A*(3;3;3) и B(-1;5;7). Найти координаты точек *C* и *D*, делящих отрезок *AB* на три равные части.

(О т в е т : *C* (5/3; 11/3; 13/3), *D* (1/3; 13/3; 17/3)).

3. Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами $A(2;3;4)$, $B(3;1;2)$, $C(4;-1;3)$.

(О т в е т : М (3;1;3)).

4. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол φ = 120°. Зная, что $|a| = 3$, $|b| = 4$, вычислить: 1) $(\overline{a}, \overline{b})$; 2) $|\overline{a}|^2$; 3) $|\overline{a}+\overline{b}|^2$; 4) $(3\overline{a}-2\overline{b}, \overline{a}+2\overline{b})$; 5) $|\overline{a}-\overline{b}|^2$; 6) $|3\overline{a}+2\overline{b}|^2$.

(О т в е т : 1) -6; 2) 9; 3) 13; 4) -61; 5) 37; 6) 73).

5. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m}+\overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m}-2\overline{n}$, где $\overline{m}, \overline{n}$ – единичные векторы, $(\overline{m}, \overline{n}) = 60$.

(О т в е т : $\sqrt{7}; \sqrt{13}$).

6. Даны векторы $\vec{a} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ и $\vec{b} = \overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$. Найти $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a}$; $\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}$; $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$.

(О т в е т : $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$; $\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$; $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{4}{9}\sqrt{3}$.).

7. Радиус-вектор точки M составляет с осью OY угол 60°, а с осью OZ – угол 45°, $|\overline{OM}| = 8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательная.

(О т в е т : $M(-4;4;4\sqrt{2})$.)

8. Даны два вектора: $\overline{a}_1 = (3; -1; 5)$, и $\overline{a}_2 = (1; 2; -3)$. Найти координаты вектора $\overline{x}$, перпендикулярного к оси OZ и удовлетворяющего следующим условиям: $(\overline{x}, \overline{a_1}) = 9$, $(\overline{x}, \overline{a_2}) = -4$.

(О т в е т : x = (2;-3;0)).

9. Даны три вектора: $\overline{a} = (2; -3; 1)$, и $\overline{b} = (-3; 1; 2)$, $\overline{c} = (1; 2; 3)$. Вычислить $\Pi\text{р}_{\bar{b}+\bar{c}}\, \overline{a}$.

(О т в е т : $-\dfrac{8}{\sqrt{38}}$.)

2.2.3. Векторное и смешанное произведения векторов

1. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол φ = 60°. Зная, что $|a| = 3$, $|b| = 5$, вычислить:

$$\|[\,\overline{a}, \overline{b}\,]\|; \quad \|[\,\overline{a}+\overline{b}, \overline{a}-\overline{b}\,]\|; \quad \|[3\overline{a}+\overline{b}, \overline{a}-3\overline{b}\,]\|.$$

(О т в е т : $\dfrac{15}{2}\sqrt{3}$; $15\sqrt{3}$; $75\sqrt{3}$.)

2. Даны точки A (2;-1;2), B (1; 2;-1), C (3;2;1). Найти $[\,\overline{AB}, \overline{BC}\,]$, $[\,\overline{BC} - 2\overline{CA}, \overline{CB}\,]$.

(О т в е т : (6;-4;-6), (-12;8;12)).

3. Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = -\overline{j} + \overline{k}$ и $\vec{b} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

(О т в е т : $|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}| = \sqrt{5},\ S = \sqrt{6}.$).

4. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\overline{m}-\overline{n}$, $4\overline{m}-5\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы $(\widehat{\overline{m},\overline{n}})=\dfrac{\pi}{4}$.

$$(\text{О т в е т: } \frac{3}{2}\sqrt{2}.).$$

5. Даны точки A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1), D(2;1;1). Найти площадь треугольника ABC и проверить, лежат ли эти точки в одной плоскости.

$$(\text{О т в е т: } \sqrt{27}; \text{да.}).$$

6. Даны точки A(-2;3;-4), B(3;2;5), C(1;-1;2), D(3;2;-4). Вычислить высоту пирамиды, опущенную из вершины D на грань ABC.

$$(\text{О т в е т: } \frac{153}{\sqrt{1198}}.).$$

7. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 30°; $\left|\overline{a}\right|=6$, $\left|\overline{b}\right|=3$. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Зная, что $|\overline{c}|$ =3, вычислить $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$.

$$(\text{О т в е т: } \pm 27.).$$

2.2.4. Плоскость

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(2;-3;1) параллельно векторам $\overline{a_1}(-3;2;-1)$, $\overline{a_2}(1;2;3)$.

(О т в е т: $x + y - z + 2 = 0$).

2. Найти уравнение плоскости, если точка M(1;0;–3) есть основание перпендикуляра, опущенного из точки N(–1; –1;0) на эту плоскость.

(О т в е т: $2x + y - 3z - 11 = 0$).

3. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1;1)$ и перпендикулярной плоскостям $2x - y + z - 1 = 0$; $x + 2y - z + 1 = 0$.

(Ответ: $x - 3y - 5z + 1 = 0$).

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3; -2)$ параллельно плоскости $3x - y + z - 6 = 0$.

(Ответ: $3x - y + z - 1 = 0$).

5. Найти расстояние точки $K(2;1;0)$ от плоскости, проходящей через точку $M(1;0;2)$, $N(1;2; -1)$, $P(2; -2;1)$.

(Ответ: $\sqrt{\frac{7}{11}}$).

6. Найти угол между плоскостями $x + 2y - 2z + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$.

(Ответ: $\frac{\pi}{4}$).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;2;-2)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей $3x - 2y - z + 1 = 0$, $x - y - z = 0$.

(Ответ: $x + 2y - z - 8 = 0$).

8. Через точку $P(1;2;-1)$ провести плоскость, отсекающую от осей координат равные отрезки.

(Ответ: $x + y + z = 2$; $x - y + z = -2$; $x + y - z = 4$.)

2.2.5. Прямая на плоскости

1. Прямая проходит через точку $M(-1;3)$ и $N(2;5)$. Найти: 1) направляющий вектор этой прямой; 2) нормальный вектор прямой; 3) угловой коэффициент прямой.

(Ответ: 1) (3;2), 2) (2; –3), 3) 2/3).

2. Даны вершины треугольника $A(-1;3)$, $B(3;-2)$, $C(5;3)$. Составить уравнение: 1) медианы, проведенной из вершины B; 2) высоты, опущенной из вершины C на сторону AB; 3) прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC.

(Ответ: 1) $5x + y - 13 = 0$, 2) $4x - 5y - 5 = 0$, 3) $5x - 2y + 11 = 0$.)

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x - 3y + 2 = 0$, $5x + 6y - 4 = 0$ и параллельной прямой $4x + y - 7 = 0$.

(Ответ: $12x + 3y - 2 = 0$.)

4. Найти координаты вершин параллелограмма, если известны уравнения двух его сторон $2x-3y+1=0$, $x+y-2=0$ и точка пересечения диагоналей $M(3;3/2)$.

(Ответ: (1;1), (5;2), (4;3), (2;0)).

5. Найти угол между прямой $2x-3y+6=0$ и прямой, проходящей через точки $M(4;-5)$, $N(-3;2)$.

(Ответ: $\operatorname{arctg}5^\circ$).

6. Составить уравнение сторон треугольника, зная его вершину $A(-6;3)$, уравнения высоты $7x+3y-5=0$ и медианы $9x+y-15=0$, проведенных из одной вершины.

(Ответ: $2x-y-7=0$, $3x-7y+39=0$, $3x+4y+6=0$.).

7. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-1)$ перпендикулярно к прямой $y=-3x+1$. Найти отрезки, отсекаемые этой прямой на осях координат.

(Ответ: $y=\dfrac{x-5}{3}$; 5; –5/3.)

2.2.6. Прямая в пространстве. Прямая и плоскость

1. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

(Ответ: $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} - \dfrac{z-1}{13}$).

2. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;1;3)$ параллельно прямой, проходящей через точки $B(3;–2;0)$; $C(1; –2; –4)$.

(Ответ: $x = -2t + 2;\ \ y = 1;\ \ z = -4t + 3$).

3. Доказать перпендикулярность прямых

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

(Ответ: да).

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямые

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-3} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}.$$

(Ответ: $3y + 2z + 4 = 0$).

5. Найти угол между прямой $x = 2t + 5;\ \ y = -3t - 1;\ \ z = -t$ и плоскостью $2x + y + 4z - 3 = 0$.

(Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{14}$).

6. Найти точку, симметричную точке $A(3;–4;–6)$ относительно плоскости, проходящей через точки $M(–6;1;–5)$; $N(7;–2;–1)$; $P(10;–7;1)$.

(О т в е т : (1;–2;2)).

7. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x-y+z+3=0, \\ x+4z-5=0 \end{cases}$ и плоскости $x+2y-z-10=0$.

(О т в е т : (1;5;1)).

8. Найти проекцию точки $M(4;–3;1)$ на плоскость $x+2y-z-3=0$.

(О т в е т : (5;–1;0)).

9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;–1;–3)$ и точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ и плоскости $2x-3y-5z-3=0$.

(О т в е т : $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{—}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$.) .

2.2.7. Кривые второго порядка

Определить вид кривой, найти ее вершины, фокусы, эксцентриситет, построить кривую:

1. $x^2+2y^2-2x-8y+7=0$.
2. $8x^2-16x-12y^2-16=0$.
3. $4y^2-4x^2+8y-4x-1=0$.
4. $225x^2+45x+225y^2-150y-416=0$.
5. $24x^2-24x-36y^2-24y-13=0$.

Определить вид и параметры кривой, построить ее

6. $4x^2-8x-y+7=0$.
7. $x^2+4x+8y-4=0$.
8. $6y^2-12y-2x+5=0$.
9. $9y^2+12y-3x+7=0$.

Назвать и построить кривую

10. $x^2-2x-3y=0$.
11. $3x^2-6x-2y^2-3=0$.
12. $5y^2+20y-x^2+6x+6=0$.
13. $x^2-6x-4y+\frac{26}{3}=0$.
14. $5x^2+10x+y^2=0$.
15. $9x^2-6x-y-1=0$.
16. $5x^2-5x+3y^2+12y-\frac{7}{4}=0$.
17. $3x^2-2x-y-\frac{14}{3}=0$.
18. $3x^2+18x+4y^2-16y+31=0$.
19. $20x^2-40x+y^2-6y+24=0$.
20. $x^2-6x+y^2+4y+9=0$.

2.2.8. Поверхности второго порядка

Определить вид и параметры поверхности, построить ее методом сечений:

1. $2y^2+3z^2-6z-3x^2+3=0$.
2. $5z^2+3y^2-6y-15x^2-30x+18=0$.
3. $3-x^2+2x-2z^2+4z+y^2=0$.
4. $2y^2+3(z-1)^2-2x^2-8x=10$.
5. $y^2-2x^2+4x-4z^2-2=0$.
6. $(x-1)^2=-z^2-y^2-4y-1$.

7. $x^2 + 2z^2 - 4z = 2y^2 - 10$.

8. $17 - x + y^2 + 8y + 8z^2 = 0$.

9. $3x^2 + 2y^2 - 4y = 6z + 10$.

10. $y^2 - x^2 - z^2 = 10z + 25$.

Назвать и построить поверхности:

11. $3(x-1)^2 = 6 + 2(y+1)^2$.

12. $y^2 + z^2 = \dfrac{x^2}{3} + 1$.

13. $(z+5)^2 + 2y^2 - 1 = 0$.

14. $(z-1)^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.

15. $z^2 - (y-1)^2 + 5 = 0$.

16. $x^2 + (y+2)^2 = 1 - \dfrac{z^2}{3}$

17. $(z-1)^2 - 3y = 0$.

18. $2z = (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{2}$.

19. $3(z-1)^2 - 2(x+1)^2 - 6 = 0$.

20. $x^2 - y^2 - 2z^2 = -1$.

21. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} - 4z = 0$.

22. $4x^2 + 4z^2 - 1 = 0$.

3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1. Решение типовых задач

Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Операции над комплексными числами

Пример 1. Где расположены точки, изображающие комплексное число $z = x + iy$, если $\operatorname{Re} z \geq 3.$?

Решение. Условие задает полуплоскость, расположенную правее прямой $x = 3$, и саму эту прямую.

Пример *2.* $|z-i|<3$.

Решение. Условие $|z-i|<3$ определяет множество точек z, удаленных от точки i на расстояние, меньшее чем 3. Все такие точки z заполняют круг с центром в точке i радиуса 3. Ограничивающая круг окружность исключается.

Пример 3. Представить в тригонометрической и показательной форме $z=2+5i$.

Решение.

$$x=2,\ \ y=5,\ \ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}\,.$$

Точка z принадлежит 1-й четверти. Отсюда $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{5}{2}$.

Показательная форма

$$z=e^{i\varphi}=\sqrt{29}e^{i\operatorname{arctg}\frac{5}{2}}.$$

Тригонометрическая форма

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\ =\sqrt{29}(\cos\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+i\sin\operatorname{arctg}\frac{5}{2}).$$

Пример 4. $z=-2i$.

Решение.

$$x=0,\ \ y=-2,\ \ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2.$$

Для всех чисто мнимых чисел с отрицательной мнимой частью $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$.

Показательная форма

$$z=re^{i\varphi}=2e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Тригонометрическая форма

$$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)==2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Пример 5. Вычислить $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}),\quad k=\overline{0,2},$$

$x=-1,\ \ y=1,\quad r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. (Число $-1+i$ принадлежит 2-й четверти) $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi=\operatorname{arctg}(-1)+\pi=\dfrac{3\pi}{4}$,

$$\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\ \ k=\overline{0,2}.$$

При k = 0 $\quad \eta_0=\sqrt[6]{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

При k = 1

$$\eta_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

При k = 2

$$\eta_2=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3})=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}).$$

Пример 6. Выполнить указанные действия: $\dfrac{3+i}{6-5i}+\dfrac{i^{25}}{61}$.

Решение.

$$\frac{3+i}{6-5i}+\frac{i^{25}}{61}=\frac{(3+i)(6+5i)}{(6-5i)(6+5i)}+\frac{(i^4)^6\cdot i}{61}=\frac{18+6i+15i-5}{6^2-(5i)^2}+\frac{i}{61}=$$

$$=\frac{21i+13}{61}+\frac{i}{61}=\frac{13}{61}+i\frac{22}{61}.$$

Пример 7. Решить уравнение $z^2+9=0$.
Решение.

$$z^2-(-9)=0,$$
$$z^2-(3i)^2=0,$$
$$(z-3i)(z+3i)=0,$$
$$z=3i,\ z=-3i.$$

Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

Пример 8. Дана последовательность с общим членом $x_n=\dfrac{3n+5}{7n}$.
Доказать, что последовательность убывает.
Доказательство.

$$x_{n+1}=\frac{3(n+1)+5}{7(n+1)}=\frac{3n+8}{7(n+1)}.$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{3n+8}{7(n+1)}-\frac{3n+5}{7n}=$$

$$=\frac{(3n+8)n-(3n+5)(n+1)}{7n(n+1)}=\frac{3n^2+8n-(3n^2+5n+3n+5)}{7n(n+1)}=$$

$$=\frac{-5}{7n(n+1)}-\frac{5}{7n(n+1)}<0\ \Rightarrow\ n(n+1)>0$$

$$n \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$$

Итак, при $\forall n \in N \quad n(n+1) > 0$, т.е. последовательность убывающая.

Пример 9. Найти общий член последовательности $1;\frac{1}{4};\frac{1}{9};\frac{1}{16};\ldots$.

Решение.

$$a_n = \frac{1}{n^2}.$$

Пример 10. Найти предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{(2n+3)^2}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{(2n+3)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{4n^2+12n+9} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n^3}}{\frac{4}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{9}{n^3}} = \infty .$$

Пример 11. Указать предел числовой последовательности $\{x_n\}, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3\cdot 2^n}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2^n}}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon): \forall n > n_0 \quad \left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

$$\left|\frac{2^n+1}{3\cdot 2^n} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{2^n+1-2^n}{3\cdot 2^n}\right| = \frac{1}{3\cdot 2^n} < 0,0001,$$

$$3\cdot 2^n > \frac{1}{0,0001},$$

$$3\cdot 2^n > 10000,$$

$$\ln\left(3\cdot 2^n\right) > \ln 10^4,$$

$$\ln 3 + n\ln 2 > 4\ln 10$$

$$n > \frac{4\ln 10 - \ln 3}{\ln 2} = \frac{4\cdot 2,3026 - 1,0986}{0,6931} = \frac{8,1118}{0,6931},$$

$n > 11,7037$, начиная с $n = 12$.

Предел функции в точке. Операции над пределами

Пример 12. Показать, что предел функции $y = \dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}$ в точке $x_0 = 1$ равен $b = 6$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-4x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)\left(x+\frac{1}{5}\right)}{(x-1)} = 5\lim_{x\to 1}\left(x+\frac{1}{5}\right) = 5\cdot\frac{6}{5} = 6.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 6 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0: \quad \forall x: 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon.$$

$$|f(x)-6| = \left|\frac{5x^2-4x-1}{x-1} - 6\right| = \left|\frac{5(x-1)\left(x+\frac{1}{5}\right)-6(x-1)}{x-1}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-1)(5x+1-6)}{x-1}\right| = |5x-5| = 5|x-1| < \varepsilon \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta$$

При $\varepsilon = 0,1 \quad \delta = \dfrac{\varepsilon}{5} = \dfrac{0,1}{5} = 0,02$.

Пример 13. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+1}{x^4-2}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+1}{x^4-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^4}}=0.$$

4

Замечательные пределы

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x\cdot 3x}{(1-\cos 4x)\cdot 3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2 2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{4\sin^2 2x}=\frac{3}{8}.$$

Пример 15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+x-2x}{3+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-2x}{3+x}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-2x}{3+x}\right)^{-\frac{3+x}{2x}\cdot\left(-\frac{2x}{3+x}\right)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2}{3+x}}=e^{-\frac{2}{3}}$$

Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций.

Эквивалентность бесконечно малых функций

Пример 16. Сравнить бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x).$, если $\alpha(x)=\sqrt{9+x}-3,\ \ \beta(x)=x$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}\frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{9+x}+3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}=\frac{1}{6}\neq 0\quad\Rightarrow\quad \alpha(x) \text{ и } \beta(\text{x})\ \ -$$

бесконечно малые функции одного порядка при $x\to 0$.

Пользуясь методом замены бесконечно малых функций эквивалентными, вычислить пределы.

Пример 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\arcsin 7x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\arcsin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{7x}=-\frac{3}{7}.$$

Пример 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\sin 3x\cdot\sin x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{x}}{\sin 3x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-(e^{x}-1)}{\sin 3x\cdot\sin x}=\left|\begin{array}{l} e^{3x}-1\ \sim\ 3x \\ e^{3x}-1\ \sim\ x \\ \sin 3x\ \sim 3x \\ \sin x\ \sim\ x \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x-x}{3x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x^{2}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Непрерывность функций в точке и на отрезке. Точки разрыва и их классификация

Пример 19. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & \text{при } x<0,\\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

Решение.

$$D(f)=R\setminus\{0;3\}.$$

Исследуем точки разрыва $x_1=0,\ x_2=3$.

При $x_1=0$ $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{2x}=-\infty$,

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 0+0}(x+3)=3.$$

Точка $x_1=0$ – точка разрыва второго рода.

При $x_2=3$ $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3-0}(x+3)=6=\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$.

Точка $x_2=3$ – точка устранимого разрыва.

3.2. Задания для практических занятий

3.2.1. Комплексные числа и операции над ними

Где расположены точки, изображающие комплексное число $z = x + iy$?

1. $|z-1|<3$. 2. $\operatorname{Re}2z\ge 3$. 3. $\operatorname{Im}z\ge 2$. 4. $|z-5i|<3$.

5. $|x+7|<7$. 6. $|z+2|>7$. 7. $\operatorname{Re}z^2\le 2$. 8. $\operatorname{Im}z\le 3$.

9. $2<|z-1|<4$. 10. $|z-2+4i|\ge\dfrac{1}{2}$. 11. $1\le|z-3+2i|\le 2$.

Представить в тригонометрической, показательной форме комплексные числа:

1. $-1-i$.   2. $2+7i$.   3. $\sqrt{3}-1$.   4. $-3+i\sqrt{3}$.

5. $-\sqrt{3}-3i$.   6. $2-i\sqrt{2}$.   7. $-\sqrt{5}$.   8. $-5i$.

9. $3+4i$.   10. -64.   11. $-4-4i$.   12. $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вычислить:

1. $\sqrt[6]{-64}$. 2. $\left(-\sqrt{3}+i\right)^4$. 3. $(-2+2i)^4$. 4. $(1+i)^{20}$. 5. $\sqrt[4]{-1}$.

6. [redacted]. 7. $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$. 8. $\sqrt{15+8i}$. 9. $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.

Решить примеры

1. $\left(\left(2+i\right)+\left(7-5i\right)\right):\left(3+i\right)$.   2. $\left(\left(2+i\right)\left(7-5i\right)\right)\left(8+11i\right)$.

3. $\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{i}{3}\right)i^5$.   4. $\frac{2-i}{3+i}\cdot\frac{8-3i}{1-i}$.   5. $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$.

Решить уравнения

1. $z^4+16=0$.   2. $z^6-2z^3+4=0$.   3. $z^2+16=0$.

3.2.2. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

1. Дана последовательность, общий член которой $x_n=\frac{5n+1}{n+2}$. Доказать, что эта последовательность возрастающая.

2. Дана последовательность, общий член которой $x_n=\frac{2n+5}{7n}$. Доказать, что эта последовательность убывающая.

3. Дана последовательность, общий член которой $x_n = -2n - 3$. Для каких ее членов выполняется условие $-30 < x_n < -20$?

4. Выяснить, ограничена ли последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

5. Выяснить, ограничена ли последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$.

6. Найти общий член последовательности.

1. $1, \ \dfrac{1}{8}, \ \dfrac{1}{18}, \ \dfrac{1}{32}, \ \ldots$ 2. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{10}, \dfrac{16}{17}, \ldots$

3. [redacted] 4. $\dfrac{3}{2}, \ \dfrac{5}{3}, \ \dfrac{7}{4}, \ \dfrac{9}{5}, \ldots$

5. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{6}{10}, \dfrac{8}{13}, \ldots$ 6. $\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{5}, \ldots$

7. Найти предел числовой последовательности с общим членом

1. $x_n = \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n^3 + n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 + 4}}$. 2. $x_n = \dfrac{\cos 2n}{5n - 1}$. 3. $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

4. $x_n = \dfrac{1 - 7n + 5n^2 - n^4}{2 - n^2 + 3n^4}$. 5. $x_n = \dfrac{1}{n} \sin 3n$. 6. $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n - 1}$.

7. $x_n = 3 \dfrac{1}{5^n}$. 8. $x_n = \dfrac{\sin(n^2)}{5n + 4}$. 9. $x_n = \dfrac{3n}{9n + 2} + \dfrac{1}{n} \cos 2n$.

10. $x_n = \dfrac{\cos(n^3)}{n^3 + 3}$.

8. Указать предел a числовой последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = 2 - \frac{1}{3^n}$. Пользуясь определением предела последовательности, найти номер члена последовательности, начиная с которого $|x_n - a| < 0{,}01$.

9. Указать предел a числовой последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$. Пользуясь определением предела последовательности, найти номер члена последовательности, начиная с которого $|x_n - a| < 0{,}001$.

10. Указать предел a числовой последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{4^n+1}{3 \cdot 4^n}$. Пользуясь определением предела последовательности, найти номер члена последовательности, начиная с которого $|x_n - a| < 0{,}0001$.

11. Указать предел a числовой последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{6n+15}{5+n}$. Пользуясь определением предела последовательности, найти номер члена последовательности, начиная с которого $|x_n - a| < 0{,}01$.

3.2.3. Предел функции в точке. Операции над пределами

1. Показать, что предел функции $y = 3x - 5$ в точке $x_0 = 2$ равен $b = 1$. Для данного $\varepsilon = 1$ найти такую окрестность b точки $x_0 = 2$, чтобы для всех x, взятых из этой окрестности, выполнялось неравенство $|y - b| < \varepsilon$.

2. Показать, что предел функции $y = \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = 1$ равен $b = 6$. Для данного ε = 0,1 найти такую окрестность b точки $x_0 = 1$, чтобы для всех x, взятых из этой окрестности, выполнялось неравенство: $|y - b| < \varepsilon$.

3. Показать, что предел функции $y = \dfrac{3x^2 + 15x + 42}{x + 7}$ в точке $x_0 = -7$ равен $b = -27$. Для данного ε = $\dfrac{9}{200}$ найти такую окрестность b точки $x_0 = -7$, чтобы для всех x, взятых из этой окрестности, выполнялось неравенство: $|y - b| < \varepsilon$.

3.2.4. Пределы

Вычислить следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + 5x + x^4}{2 + x^3}$. 2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 7x + 15}{8 + 4x^2 + 3x^3}$.

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + 5x + x^4}{2 + x^3}$. 4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5\text{›} + 6}{x^3 - 2o^2 - o + 2}$. 5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - o - 2}{x^3 + 1}$.

6. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - o - 12}{3x^2 - 27o + 60}$. 7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4o^2 + 7o - 6}{x^3 - 2o^2 + o - 2}$.

8. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{o + 2} - 3}{o - 7}$. 9. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2o} - 3}{\sqrt{o} - 2}$. 10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{1 - \sqrt{3 - o}}$.

11. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{2\text{›} + 3} - \sqrt{3\text{›} + 4}}{o + 1}$. 12. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{o - 2} - \dfrac{12}{o^3 - 8} \right)$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{o^2+2}-\sqrt{o^2-5}\right)$. 14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{o-1}-\frac{2}{o^2-1}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(o-\sqrt{o^2+5o-8}\right)$.

3.2.5. Замечательные пределы

Вычислить следующие пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cdot \operatorname{tg}\frac{2x}{9}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{1-\cos 4x}$. 5. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x-3}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}$. 8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\sin x-\sin a}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{2\operatorname{cosec}2x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\operatorname{tg}7x)^{\operatorname{ctg}7x}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5-x}{5+x}\right)^{\frac{1}{x}}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{ctg}2x)^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}x(\ln(x+1)-\ln x)$. 14. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+7)-\ln x)$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-4x}-e^{2x}}{3x}$. 16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^{2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)$. 18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3x^2}-1}{x^2}$.

3.2.6. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентность бесконечно малых функций

При $x \to 0$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми функциями. Сравнить их.

1. $\alpha(x) = 2x^2 + 5x^3 - x^5$, $\beta(x) = 3x^2 - 7x^4$.
2. $\alpha(x) = 3x - 5x^2$, $\beta(x) = x + 2x^2$.
3. $\alpha(x) = \sin mx$, $\beta(x) = \cos x - \cos 2x$
4. $\alpha(x) = 1 - \cos x$, $\beta(x) = \dfrac{x^3}{3 - x}$.
5. $\alpha(x) = \sqrt{3x}$, $\beta(x) = x$.
6. $\alpha(x) = \sqrt{11 + x} - 3$, $\beta(x) = x$.

3.2.7. Замена бесконечно малых функций эквивалентными

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-5x)}{\arcsin 11x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{-x}}{\sin 5x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x - x^2 + x^3}{\operatorname{tg} x + 2\sin^2 x + 5x^4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x} - e^x}{\sin 5x \cdot \sin x}$. 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos^3 5x}{\operatorname{tg}^4 \sqrt{3x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\sin 2x + \arcsin^2 x - \operatorname{arctg}^2 x}{20x + \operatorname{tg}^3 x}$. 7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-4x} - e^{2x}}{\operatorname{arctg} 3x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x^2 - 1 + x^3}{2\operatorname{tg}^2 x + 5\arcsin^4 x}$.

3.2.8. Непрерывность функций в точке и на отрезке. Точки разрыва и их классификация

Исследовать на непрерывность и построить график следующих функций:

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & \text{при} \quad x<0,\\ e^{x} & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{при} \quad x<0,\\ x^{2}+1 & \text{при} \quad 0<x<2,\\ 3-\dfrac{x}{2} & \text{при} \quad x\geq 2.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4+x^{2}} & \text{при} \quad -1\leq x\leq 0,\\ -2-5x & \text{при} \quad 0<x\leq 2.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3x} & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{x^{2}-25}{x-5} & \text{при} \quad x\geq 0.\end{cases}$

5. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3} & \text{при} \quad x\leq 0,\\ 2^{x} & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & \text{при} \quad x<0,\\ x^{2}+1 & \text{при} \quad x\geq 0.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}x^{2}-1 & \text{при} \quad -1\leq x<2,\\ 6-\dfrac{x}{2} & \text{при} \quad x\geq 2.\end{cases}$

8. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$ в точке $x = 1$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке.

10. Возможно ли доопределить функцию $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ в точке $x = 3$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

11. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{a^{x-5}-1}{x-5}$ в точке $x = 5$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке.

12. Возможно ли доопределить функцию $f(x)=\dfrac{|x+3|}{x+3}$ в точке $x = -3$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Решение типовых задач

Пример 1. Под каким углом кривая $y=e^x$ пересекает ось OY?

Решение. Угол между кривой $y=e^x$ и осью OY – это угол между касательной к кривой $y=e^x$ в точке (0,1) и осью OY.

Угол между касательной и осью OX найдем из равенства $\text{tg}\alpha = y'(0)$, т.е. $\text{tg}\alpha=(e^x)'_{x=0}=e^{\circ}=1$; $\text{tg}\alpha=1$; $\alpha=45^{\circ}$ и угол между кривой и осью OY равен 45°.

Пример 2. Найти x'_y, $y=\dfrac{1+3x^5}{1-4x^7}$.

Решение. Найдем:

$$y'_x=\left(\frac{1+3x^5}{1-4x^7}\right)'=\frac{15x^4\left(1-4x^7\right)-\left(1+3x^5\right)\left(-28x^6\right)}{\left(1-4x^7\right)^2}=$$

$$=\frac{24x^{11}+28x^6+15x^4}{\left(1-4x^7\right)^2}.$$

x'_y найдем по формуле

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{\left(1-4x^7\right)^2}{24x^{11}+28x^6+15x^4}.$$

Пример 3. Используя предварительное логарифмирование, найти y', если $y=\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt[x]{\left(x^3-1\right)\sqrt{2x+3}}}$.

Решение.

$$y=\frac{e^{x^2}}{\sqrt[x]{\left(x^3-1\right)\sqrt{2x+3}}}=e^{x^2}\left(x^3-1\right)^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(2x+3\right)^{-\frac{1}{2x}};$$

$$\ln y=\ln e^{x^2}+\ln\left(x^3-1\right)^{-\frac{1}{x}}+\ln\left(2x+3\right)^{-\frac{1}{2x}}=x^2-\frac{1}{x}\ln\left(x^3-1\right)-$$

$$-\frac{1}{2x}\ln\left(2x+3\right);$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=2x+\frac{1}{x^2}\ln\left(x^3-1\right)-\frac{1}{x}\cdot\frac{3x^2}{x^3-1}+\frac{1}{2x^2}\ln\left(2x+3\right)-\frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{2x+3}=$$

$$=2x+\frac{\ln\left(x^3-1\right)}{x^2}-\frac{3x}{x^3-1}+\frac{\ln\left(2x+3\right)}{2x^2}-\frac{1}{x\left(2x+3\right)};$$

$$y' = \frac{e^{x^2}}{\sqrt[x]{\left(x^3-1\right)\sqrt{2x+3}}}\cdot$$

$$\cdot\left(2x+\frac{\ln\left(x^3-1\right)}{x^2}-\frac{3x}{x^3-1}+\frac{\ln\left(2x+3\right)}{2x^2}-\frac{1}{x\left(2x+3\right)}\right);$$

Пример 4. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $2^x+2^y=2^{x+y}$.

Решение. Здесь $y=y(x)$, поэтому

$$2^x\ln 2+2^y\ln 2\cdot y'=2^{x+y}\ln 2\left(1+y'\right);$$

$$2^y y'-2^{x+y}\cdot y'=2^{x+y}-2^x,\ y'=\frac{2^x\left(2^y-1\right)}{2^y\left(1-2^x\right)}.$$

Пример 5. Найти dy, если $y=2^{3x}$.

Решение.

$$dy=y'dx;\quad dy=2^{3x}\ln 2\cdot 3dx=3\ln 2\cdot 2^{3x}dx\ .$$

Пример 6. Вычислить приближенно $\mathrm{arctg}0,97$.

Решение.

$\mathrm{arctg}0,97$ – это значение функции $y=\mathrm{arctg}x$ при $x=0,97$.

Пусть $x_0=1$, тогда $\Delta x=x-x_0=-0,03$. Используем формулу

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

где
$$f\left(x_0\right)=\mathrm{arctg}\,x\Big|_{x_0=1}=\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}=0,785;$$

$$f'\left(x\right)=\left(\mathrm{arctg}x\right)'=\frac{1}{1+x^2};\quad f'\left(x_0\right)=\frac{1}{1+x^2}\Bigg|_{x_0=1}=\frac{1}{2}.$$

Тогда $\mathrm{arctg}0,97\approx 0,785+0,5\cdot\left(-0,03\right)=0,77$.

Пример 7. Найти d^2y, если $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Решение.

$$d^2y=y''dx^2;\quad y'=\left(\frac{x}{x^2-1}\right)'=\frac{x^2-1-x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2};$$

$$y''=\left(-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right)'=-\frac{2x\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2+1\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3};$$

$$d^2y=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}dx^2.$$

Пример 8. Применяя правило Лопиталя, найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{\left(x-1\right)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 9. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{4}{x^2(x-4)}$ и построить ее график.

Решение. 1. Функция определена, если $x^2(x-4)\neq 0$ или $x\neq 0;\quad x\neq 4.$ Следовательно,

$$D(y):(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty).$$

2. Так как *D*(*y*) не является симметричным множеством относительно начала координат, то функция не может быть четной, нечетной и периодической.

3. Найдем точки разрыва функции: *x* = 0 и *x* = 4, так как функция в этих точках не определена. Исследуем характер точек разрыва, найдя односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{4}{x^2(x-4)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{4}{x^2(x-4)}=-\infty\,.$$

Значит, *x* = 0 – точка разрыва второго рода. И ось *OY* является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}\frac{4}{x^2(x-4)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x)=\lim_{x\to 4+0}\frac{4}{x^2(x+4)}=+\infty\,.$$

Значит, *x* = 4 – точка разрыва второго рода и прямая *x* = 4 – вертикальная асимптота.

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Таких точек нет, так как $x \neq 0, \quad y \neq 0$.

5. Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$$y' = \left(\frac{4}{x^2 (x-4)} \right)' = 4\frac{-(2x(x-4)+x^2)}{x^4(x-4)^2} = 4\frac{-3x^2+8x}{x^4(x-4)^2} =$$

$$= 4\frac{8-3x}{x^3(x-4)^2},$$

$$y' = 0 \text{ при } x = \frac{8}{3}.$$

y' не существует при $x = 0$ и $x = 4$, но эти значения не входят в *D(y)*.

$x = \frac{8}{3}$ – точка, подозрительная на экстремум.

Результаты исследования оформим в виде таблицы.

x	(–∞;0)	0	(0,8/3)	8/3	(8/3,4)	4	(4;+∞)
y'	-	не существует	+	0	-	не существует	-
y	↘	не существует	↗	max	↘	не существует	↘

На интервалах $(-\infty;0) \cup \left(\frac{8}{3};4\right) \cup (4;+\infty)$ функция убывает; на $\left(0;\frac{8}{3}\right)$ – возрастает; при $x = \frac{8}{3}$ функция достигает max.

$$y_{\max} = y\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{\frac{64}{6}\left(\frac{8}{3}-4\right)} = -\frac{9}{64}.$$

$$M\left(\frac{8}{3};-\frac{9}{64}\right) \text{ – точка max.}$$

6. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба:

$$y'' = \left(4\frac{8-3x}{x^3(x-4)^2} \right)' =$$

$$= 4\frac{-3x^3(x-4)^2 - (8-3x)\left(3x^2(x-4)^2 + x^3\cdot 2(x-4)\right)}{x^6(x-4)^2} = 16\frac{3x^2-16x+24}{x^4(x-4)}$$

$y''=0$ при $3x^2-16x+24=0$. Но $D<0$, поэтому $3x^2-16x+24>0$, $\forall x$ $y''<0$ при $x<4$, $\Rightarrow$ $(-\infty;0)\cup(0;4)$ – интервалы выпуклости графика функции.

$y''>0$ при $x>4$, $\Rightarrow$ $(4;+\infty)$ – интервал вогнутости функции. Точек перегиба нет.

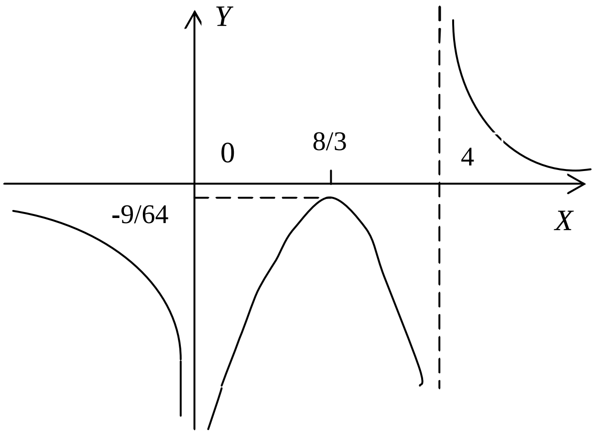
7. Найти асимптоты графика. Вертикальные найдены ранее. Наклонные ищем в виде

$$y = kx+b, \text{ где } k=\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{|x|\to\infty}\frac{4}{x^3(x-4)} = 0; \quad k=0;$$

$$b=\lim_{|x|\to\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2(x-4)} = 0;$$

$y=0$ – горизонтальная асимптота.

По данным исследования строим график функции (см. рисунок).



4.2. Задания для практических занятий

4.2.1. Определить геометрический и механический смысл производной функций.

1. В какой момент времени скорость тела, движущегося прямолинейно по закону $S(t) = 3t^2 - 3t + 2$ окажется равной 45 единицам?

2. Тело массой m движется прямолинейно по закону $S = \dfrac{3}{(2t-1)^2}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна квадрату пройденного пути. Найти коэффициент пропорциональности.

3. По гиперболе $y = -\dfrac{3}{x}$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = 3t^2\sqrt{t}$. Какова скорость изменения ординаты в точке M(3;1)? Время измеряется в секундах, путь – в метрах.

4. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - \dfrac{\sqrt{5}}{2}t^2 - 9t + 1$. Путь S измеряется в метрах, время t – в секундах. Через сколько секунд от начала движения тело будет находиться в покое?

5. Угол φ поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени по закону $\varphi(t) = 10t^3 - 12t^2 + 3t$. Углы измеряются в радианах, время – в секундах. Определить, через сколько секунд от начала движения угловая скорость окажется равной 9 рад/с?

6. Нижний конец вертикально стоящей лестницы длиной 5м начинает отодвигаться от стены с постоянной скоростью 2 м/с. С какой скоростью опускается верхний конец лестницы в момент времени t = 2 с?

7. По параболе $y = 3x^2 - 2x - 1$ движется точка так, что ее абсцисса растет равномерно со скоростью 1 единица в секунду. В какой точке параболы ордината возрастает в два раза быстрее, чем абсцисса?

8. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален кубу времени. Какую часть оборота сделало колесо за 2 с? Определить угловую скорость через 8 с после начала движения.

9. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 10 м/с. С какой скоростью растет объем шара в момент, когда его радиус становится равным 1 м?

10. Через точку (1;0), не лежащую на кривой $y = 2x^4$, провести касательную к этой кривой.

11. К гиперболе $y = -\dfrac{3}{x}$ проведены касательные: одна в точке (–1;3), другая – параллельно прямой $y = \dfrac{x}{3}$. Найти площади треугольников, образованных каждой из этих касательных с осями координат.

12. Под каким углом кривая $y = e^x$ пересекает ось y?

13. Найти углы, под которыми пересекаются прямая $y = 4x$ и парабола $y = 4 - \dfrac{x^2}{2}$.

14. В каких точках кривой $y = x^3 - 2x + 1$ нужно провести касательные, чтобы они были параллельными прямой $y = x + 1$?

15. На кривой $y = x^3 - 2x + 1$ найти точки, в которых касательная перпендикулярна прямой $y = -3x$.

16. При каких значениях независимой переменной касательные к кривым $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x - 1$ и $y = x^3 - 5x + 2$ параллельны?

17. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x^2 + 8$ в точке ее пересечения с параболой $y = 2x^2$.

18. Определить, под каким углом кривая $y = \dfrac{2x - 4}{x^2 + 3}$ пересекает ось абсцисс.

4.2.2. Найти производные:

1. $y = \sqrt{1 - \sqrt{x + 2}} - \dfrac{1}{\mathrm{tg} 3x} + \sqrt[3]{\mathrm{ctg} x}$. 2. $y = 10^{\sin^{10} \frac{1}{4x}}$.

3. $y = \mathrm{arctg}^3 x \sqrt{\arcsin x}$.

4. $y = \dfrac{\mathrm{cth}\left(x^3 - 1\right)}{\sqrt[3]{x^2}}$.

5. $y = \sqrt{xe^x + 4} - \dfrac{1}{\log_3 4x}$.

6. $y = \mathrm{tg} \sqrt[3]{\sin \dfrac{2}{x}}$.

7. $y = \arccos e^x - e^{\arccos x}$.

8. $y = \mathrm{th} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}} + 3\mathrm{ch}^3 x$.

9. $y = \ln^3 (4x - 8) - \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{x}}} + 2^{x^2 - x + 1}$.

10. $y = \mathrm{ctg} \sqrt[3]{\mathrm{tg}^2 \sqrt{x}}$.

11. $y = \ln\left(\mathrm{arctg} \dfrac{1}{x}\right)$.

12. $y = (1 - \mathrm{ch}^3 x)\mathrm{sh} \dfrac{x}{3}$.

13. $y = \sqrt[3]{\ln x} + \sqrt{(x^3 - x^2 + 5)^3} + \dfrac{1}{\log_2 x}$.

14. $y = e^{\sin^2 (\cos 4x)}$.

15. $y = \mathrm{arcctg}(\ln x^2)$.

16. $y = \mathrm{sh} \dfrac{x}{x+2}$.

4.2.3. Найти x'_y, если:

1. $y = \dfrac{1 + 3x^5}{1 - 4x^7}$.

2. $y = \arcsin(x^2 + 2) - e^x$.

3. $y = \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

4. $y = 4^{3x+1} - \sqrt{x}$.

5. $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2 + 5}$.

6. $y = \dfrac{\mathrm{th}^3 3x}{\mathrm{cth} x}$.

4.2.4. Используя предварительное логарифмирование, найти производные следующих функций:

1. $y = \dfrac{e^{x^2}}{\sqrt[x]{(x^3 - 1)\sqrt{2x + 3}}}$.

2. $y = \dfrac{\sin x \sqrt{x}}{\sqrt[3]{\cos x}(x+4)^5}$.

3. $y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$.

4. $y = x^{\sqrt{\cos x}}$.

5. $y = (3x + 5)^4 \sqrt[3]{x} e^{x^2 + x + 1}$.

6. $y = \dfrac{x \arcsin x}{e^{\mathrm{arctgs}} \sqrt[3]{\sin x}}$.

4.2.5. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

1. $2y\ln y = x$. 2. $y = 1 + xe^{y}$. 3. $y = x + \mathrm{arctg}y$.

4. $2^{x} + 2^{y} = 2^{x+y}$. 5. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

6. $y = \cos(x + y)$. 7. $x^{4} + y^{4} = x^{2}y^{2} + 1$.

8. $\begin{cases} x = t(1-\sin t) \\ y = t\cos t \end{cases}$. 9. $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$. 10. $\begin{cases} x = a\cos^{3} 4t \\ y = a\sin^{3} 4t \end{cases}$.

11. $\begin{cases} x = \ln(1+t^{2}) \\ y = t - \mathrm{arctg}t \end{cases}$. 12. $\begin{cases} x = 2\ln \mathrm{ctg}t + 1 \\ y = \mathrm{tg}t + \mathrm{ctg}t \end{cases}$. 13. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = a^{\cos 2t} \end{cases}$.

4.2.6. Найти *dy*, если:

1. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^{2}+1}+x}{\sqrt{x^{2}+1}-x}$. 2. $y = 10^{x\mathrm{tg}x}$. 3. $y = \ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right)$.

4. $y = \ln\mathrm{arctg}\dfrac{1}{1+x}$. 5. $y = 3^{\frac{1}{4x^{2}}} + 7^{\frac{2}{3x}}$. 6. $y = 2^{3x}$

4.2.7. Вычислить приближенно:

1. $\arcsin 0{,}08$. 2. $\mathrm{arctg}0{,}97$. 3. $\sqrt[3]{10}$. 4. $\mathrm{tg}44$.

5. [redacted]. 6. $\sqrt[3]{70}$. 7. $e^{1-x^{2}}$ при $x = 1{,}05$.

4.2.8. Найти производные второго порядка:
$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

1. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \mathrm{arctg} t. \end{cases}$

7. $e^y + xy = e$. 8. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. 9. $e^{x+y} = xy$.

10. $y = x + \ln y$. 11. $y = x + \mathrm{arctg} y$. 12. $x\ln y - y = 1$.

4.2.9. Найти дифференциалы второго порядка d^2y:

1. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$. 2. $y = \dfrac{1}{a + \sqrt{x}}$. 3. $y = \mathrm{arctg} x$.

4. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. 5. $y = \ln\sqrt[3]{1 + x^2}$. 6. $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$.

Найти $y^{(n)}$

7. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. 8. $y = \sin^2 x$. 9. $y = \sin ax + \cos bx$.

10. $y = x\ln x$. 11. $y = \ln(ax + b)$.

4.2.10. Применить правило Бернулли-Лопиталя:

1. Выполнены ли условия теоремы Ролля для функции $f(x) = \mathrm{tg} x$ на отрезке $[0;\pi]$?

2. Для функций $f(x) = 3x^2 + 2$ и $g(x) = x^3 - 1$ проверить выполнение условий теоремы Коши на отрезке [1;2] и найти точку, в которой справедлива соответствующая формула.

3. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа для функции $y = x^3 - x$ на отрезке [–1;2] и найти точку, в которой верна формула Лагранжа.

4. Для функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^2 + 1$ проверить выполнение условий теоремы Коши на отрезке [1;2] и найти точку, в которой справедлива соответствующая формула.

5. Выполнены ли условия теоремы Ролля для функции $y = |x - 5|$ на отрезке [4;6]?

6. Выполнены ли условия теоремы Ферма для функции $f(x) = |x|$ на интервале (–1;1)?

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin 8x \cos 3x}$. 8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$. 9. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\dfrac{1}{x}\ln(3x+5)$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin 3x}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x - \dfrac{1}{x}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2\mathrm{arcctg}x)\ln x$. 14. $\lim\limits_{x\to a}\left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}$. 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\sin^3 2x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{\ln(x+1)}{x-1}\right)$. 17. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{7x^2-1})\mathrm{ctg}^2 4x$. 18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2x-\pi}$.

19. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$. 20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\mathrm{ctg}x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$. 22. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{4}{1-x}}$.

4.2.11. Найти интервалы монотонности функций:

1. $f(x) = x^3 - 12x + 11$. 2. $f(x) = x^2 e^{-x}$. 3. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$.

4. $f(x)=(x-2)^5(2x+1)^4$. 5. [redacted].

6. $f(x)=\dfrac{2x}{\ln x}$.

4.2.12. Исследовать на экстремум функции:

1. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$. 2. $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$. 3. $y=x-\operatorname{arctg}2x$.

4. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$. 5. $y=\dfrac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$.

6. $y=(x-2)^2(x+1)^3$. 7. $y=\dfrac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$. 8. $y=\dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$.

4.2.13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций:

1. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ на $\left[-\dfrac{1}{2};4\right]$.. 2. $y=x^4-2x^2+5$ на $[-2;2]$.

3. $y=\sqrt{100-x^2}$ на $[-6;8]$. 4. $y=x+\sqrt{2}x$ на $[0;4]$.

5. $y=\dfrac{x-1+x^2}{1+x-x^2}$ на $[0;1]$. 6. $y=\sin 2x-x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

7. $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x$ на $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$. 8. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ на $[0;3]$.

4.2.14. Исследовать на выпуклость, вогнутость, точки перегиба функции:

1. $y=e^{-x^2}+2x$. 2. $y=x^5-x^3-2x$. 3. $y=x^5-\dfrac{5}{3}x^3$.

4. $y=x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{x^4}{4}$. 5. $y=\ln(x^2+9)$. 6. $y=\ln(x^2-2x+2)$.

7. $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$. 8. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

4.2.15. Найти асимптоты кривых:

1. [redacted]. 2. [redacted]. 3. [redacted].

4. $y = x - \operatorname{arctg} 2x$. 5. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 16}$. 6. $y = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

7. $y = \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{3}{x-2} - 1$. 8. $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.

4.2.16. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1. $y = \dfrac{3 - x}{x + 2}$. 2. $y = 3(\dfrac{x^4}{2} - x)$. 3. $y = \dfrac{5x^2}{x^2 - 25}$.

4. $y = \dfrac{2x - 1}{(x-1)^2}$. 5. $y = \dfrac{4}{x^2 (x - 4)}$. 6. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$.

7. $y = x + \ln(x^2 - 4)$. 8. $y = \sqrt[3]{x(x+8)^2}$.

4.2.17. Решить задачи:

1. Два коридора шириной 2,4 и 1,6 м пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину лестницы, которую можно перенести (горизонтально) из одного коридора в другой.

2. Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть размеры сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на изгиб? В теории сопротивления материалов установлено, что сопротивление балки на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат ее высоты.

3. Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть размеры сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на сжатие? В теории сопротивления материалов установлено, что сопротивление балки на сжатие пропорционально площади ее поперечного сечения.

4. Сечение туннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Площадь сечения туннеля S. Какова должна быть ширина и высота прямоугольника, чтобы периметр сечения был наименьшим. Найти наименьший периметр сечения туннеля при данной площади $p = \sqrt{25(\pi + 4)}$.

5. Каковы наиболее экономичные размеры цилиндрической напорной башни данной вместимости V?

6. Решеткой длиной 200 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Каковы должны быть размеры площадки?

7. При изготовлении каркаса железобетонной конструкции требуется кусок проволоки длиной a согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь его была наибольшей. Каковы размеры этого прямоугольника?

5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Решение типовых задач

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$.

Решение. Данная функция определена и принимает действительные значения при $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ и $4 - x^2 - y^2 > 0$. Точки плоскости, для которых $x^2 + y^2 \geq 1$ и $x^2 + y^2 < 4$, образуют границы области D: уравнение $x^2 + y^2 \geq 1$ задает внешность окружности с центром в точке $O(0;0)$ и с радиусом 1; а уравнение $x^2 + y^2 < 4$ – внутренность окружности с центром в точке $O(0;0)$ и с радиусом 2. Следовательно, искомая область D есть кольцо, заключенное между двумя данными окружностями. При этом внутренняя окружность может быть включена в область D, так как равенство $x^2 + y^2 - 1 = 0$ возможно, а внешняя окружность в область D не входит.

Пример 2. Найти линии уровня функции $z = \dfrac{1}{4x^2 + y^2}$.

Решение. В соответствии с формулой $f(x, y) = c$ уравнение линии уровня данной функции можно записать в виде

$$\frac{1}{4x^2 + y^2} = c$$

$$\text{или } c\left(4x^2 + y^2\right) = 1 \qquad (c > 0),$$

$$\frac{x^2}{1/(4c)} + \frac{y^2}{1/c} = 1 \quad (c > 0).$$

Линии уровня являются эллипсами.

Пример 3. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 - y^2 + z^2$.

Решение. Уравнение поверхностей уровня можно записать в виде $x^2 - y^2 + z^2 = c$. Исходя из данного уравнения, поверхностями уровня являются: однополостные гиперболоиды при $c > 0$; конус при $c = 0$; двухполостные гиперболоиды при $c < 0$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}}$.

Решение. Преобразовав выражение под знаком предела, получим:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\left(3 + \sqrt{xy + 9}\right)}{(3 - \sqrt{xy + 9})(3 + \sqrt{xy + 9}} =$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\left(3 + \sqrt{xy + 9}\right)}{9 - (xy + 9)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\left(3 + \sqrt{xy + 9}\right)}{-xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(3 + \sqrt{xy + 9}\right) = -6.$$

Пример 5. Найти разрывы функции $z = \dfrac{x^2 + 2y + 4}{y^2 - 2x}$.

Решение. Функция z непрерывна как отношение многочленов во всех точках, где знаменатель не обращается в нуль. Точки разрыва расположены на линии $y^2 - 2x = 0$ или $y^2 = 2x$, т.е. на параболе. При приближении точки $P(x,y)$ к какой-либо точке этой параболы данная функция бесконечно возрастает.

Пример 6. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \cos\left(x^2 - y\right) + xy^2$.

Решение. Считая сначала y постоянным и дифференцируя по x, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\left(x^2 - y\right)2x + y^2.$$

Считая x постоянным и дифференцируя по y, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\left(x^2 - y\right)\left(-1\right) + 2xy = \sin\left(x^2 - y\right) + 2xy.$$

Пример 7. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, если $u = x^{\frac{y}{z}}$.

Решение. Находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1} = \frac{y}{xz}x^{\frac{y}{z}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x.$$

Пример 8. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$., **если** $z = x^3 y^2 + \sin(xy+1)$.

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + y\cos(xy+1); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + x\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(3x^2 y^2 + y\cos(xy+1)\right)'_x = 6xy^2 - y^2 \sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 y^2 + y\cos(xy+1))'_y = 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2x^3 y + x\cos(xy+1))'_x = 6x^2 y + \cos(xy+1) - xy\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2x^3 y + x\cos(xy+1))'_y = 2x^3 - x^2 \sin(xy+1).$$

Пример 9. Найти dz, если $z = x^2 y - y^2 x.$

Решение.

I способ. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 y - y^2 x)'_x = 2xy - y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 y - y^2 x)'_y = x^2 - 2xy.$$

Имеем: $dz = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy.$

II способ. Полный дифференциал можно найти по-другому, используя правила дифференцирования:

$$dz = d(x^2 y - y^2 x) = d(x^2 y) - d(y^2 x) = yd(x^2) + x^2 dy - xd(y^2) -$$
$$y^2 dx = 2xydx + x^2 dy - 2xydy - y^2 dx = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy.$$

Пример 10. Найти $d^2 z$, если $z = 3x^2 y - 2xy + y^2 - 1.$

Решение. Находим первые и вторые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 2x + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (6xy - 2y)'_x = 6y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (6xy - 2y)'_y = 6x - 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3x^2 - 2x + 2y)'_y = 2.$$

Следовательно,

$$d^2 z = 6y dx^2 + 2(6x - 2) dx dy + 2dy^2.$$

Пример 11. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $1{,}02^{3{,}01} = (x + \Delta x)^{y + \Delta y}$, где $x = 1, \quad \Delta x = 0{,}02; \quad y = 3, \quad \Delta y = 0{,}01.$

Найдем z_x' и z_y':

$$z_x' = \left(x^y\right)'_x = y \cdot x^{y-1}, z_y' = \left(x^y\right)'_y = x^y \ln x.$$

Воспользовавшись формулой

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x'(x; y)\Delta x + f_y'(x; y)\Delta y.,$$

получим:

$$1{,}02^{3{,}01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01, \quad \text{т.е.} \quad 1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06.$$

Для сравнения, используя микрокалькулятор, находим:

$$1{,}02^{3.01} \approx 1{,}061418168.$$

Пример 12. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$, если $z = \arcsin\frac{x}{y}$, где $y = \sqrt{1+x^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\arcsin\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Полная производная $\frac{dz}{dx}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^2}\sqrt{1+x^2}}$$

Поскольку $y = \sqrt{1+x^2}$, то $y^2 - x^2 = 1$ и

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 13. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, dz, если $z = \ln(u^2+v^2)$, $u = \sqrt{xy}$; $v = x - y$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2+v^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Используя формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{y}{2\sqrt{xy}}+\frac{2v}{u^2+v^2}1=\frac{2x-y}{x^2-xy+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{x}{2\sqrt{xy}}+\frac{2v}{u^2+v^2}(-1)=\frac{2y-x}{x^2-xy+y^2}.$$

$$dz=\frac{2x-y}{x^2-xy+y^2}dx+\frac{2y-x}{x^2-xy+y^2}dy.$$

Пример 14. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\cos(x-y)+y\sin x=0$.

Решение. По условию имеем:

$$F(x,y)\equiv\cos(x-y)+y\sin x=0.$$

Находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\sin(x-y)+y\cos x; \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\sin(x-y)+\sin x.$$

Применяя формулу $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x^{/}}{F_y^{/}}$, получим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y\cos x-\sin(x-y)}{\sin x+\sin(x-y)}.$$

Пример 15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0, если $z = 2x^2 + y^2$, $M_0(1, -1, 3)$.

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду $2x^2 + y^2 - z = 0$ и, обозначив его левую часть $F(x, y, z)$, найдем частные производные: $F'_x = 4x$; $F'_y = 2y$; $F'_z = -1$. Вычислим их значения в данной точке M_0:

$$F'_x\Big|_{M_0} = 4; \quad F'_y\Big|_{M_0} = -2; \quad F'_z\Big|_{M_0} = -1.$$

Подставив значения частных производных в уравнения

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

$$\text{и } \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)},$$

получим уравнение касательной плоскости:

$$4(x - 1) - 2(y + 1) - (z - 3) = 0 \text{ или } 4x - 2y - z - 3 = 0;$$

уравнение нормали:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 3}{-1}.$$

Пример 16. Найти экстремум функции. $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$.

Решение. Находим частные производные z'_x, z'_y и точки, в которых они равны нулю или не существуют:

$$z'_x = 6xy - 3x^2, \quad z'_y = 3x^2 - 4y^3.$$

Решив систему уравнений $\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0, \end{cases}$ найдем стационарные точки $M_1(6; 3)$; $M_2(0; 0)$.

Находим частные производные второго порядка данной функции:

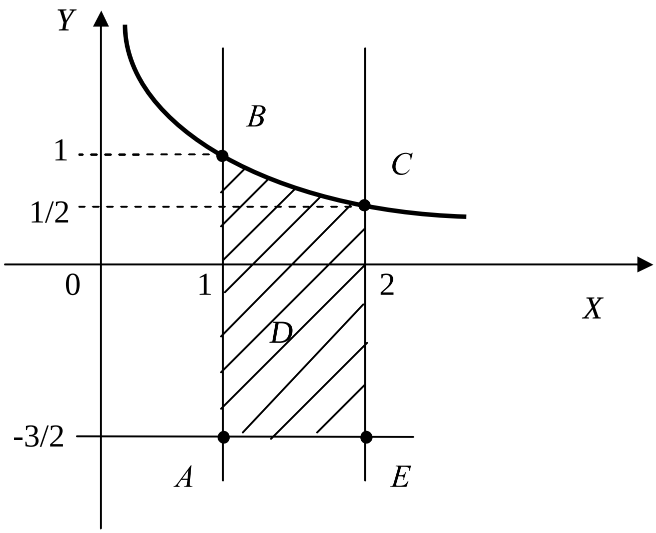
$$z''_{xx} = 6y - 6x; \quad z''_{xy} = 6x; \quad z''_{yy} = -12y^2.$$

В точке $M_1(6;\ 3)$ имеем: $A = -18$, $B = 36$, $C = -108$. Отсюда $AC - B^2 =$ $= -18\cdot(-108) - 36^2 = 648$, т.е. $\Delta > 0$. Так как $A < 0$,то в точке M_1 функция имеет локальный максимум: $z_{\max} = z(6;3) = 27$.

В точке $M_2(0;\ 0)$ имеем: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Значит, $\Delta = 0$.

Проведем дополнительное исследование. Значение функции z в точке M_2 равно нулю: $z(0;\ 0) = 0$. Можно заметить, что $z = -y^4 < 0$ при $x = 0, y \neq 0$; $z = -x^3 > 0$ при $x < 0, y = 0$. Значит, в окрестности точки $M_2(0;\ 0)$ функция z принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке M_2 функция экстремума не имеет.

Пример 17. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y + xy^2 + xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{x}$; $x = 1$, $x = 2$, $y = -1,5$. (см. рисунок).



Решение.

1. Найдем:

$$z'_x = 2xy + y^2 + y,$$
$$z'_y = x^2 + 2xy + x$$

Находим все критические точки:

$$\begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются точки (0; 0); (–1; 0); (0; –1); (–1/3; –1/3). Ни одна из найденных точек не принадлежит области *D*.

2. Исследуем функцию *z* на границе области, состоящей из участков *AB*, *BC*, *CE*, *EA*.

На участке *AB*

$$x = 1,\ \ z = y^2 + 2y,$$

где $y \in \left[-\frac{3}{2};1\right]$; $z'_y = 2y + 2,\ \ 2y + 2 = 0,\ \ y = -1.$

Значения функции $z(-1) = -1,\ z\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4};\ z(1) = 3.$

На участке *BC*

$$y = \frac{1}{x},\ \ z = x + \frac{1}{x} + 1,$$

где $x \in [1;2]$; $z'_x = 1 - \frac{1}{x^2},\ \ 1 - \frac{1}{x^2} = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = -1 \in [1;2].$

Значения функции $z(1) = 3,\ z(2) = 3{,}5.$

На участке *CE*

$$x = 2,\ \ z = 2y^2 + 6y,$$

где $y \in \left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$; $z'_y = 4y + 6,\ \ 4y + 6 = 0,\ \ y = -\frac{3}{2}.$

Значения функции $z\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-4{,}5;\ z\left(\dfrac{1}{2}\right)=3{,}5.$

На участке AE

$$y=-\frac{3}{2},\ \ z=-\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{4}x,$$

где $x\in[1;2];\ \ z'_x=-3x+\dfrac{3}{4},\ \ -3x+\dfrac{3}{4}=0,\ \ x=\dfrac{1}{4}\notin[1;2].$

Значения функции $z(1)=-\dfrac{3}{4},\ z(2)=-4{,}5.$

Сравнивая полученные результаты, имеем:

$$M=3{,}5=z\left(2;\frac{1}{2}\right)=z(C)$$

$$m=-4{,}5=z\left(2;-\frac{3}{2}\right)=z(E)$$

5.2. Задания для практических занятий

5.2.1. Найти область определения функций:

1. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{1-y^2}$.

2. $u=\dfrac{1}{\ln(x^2+y^2-1)}$.

3. $z=\arcsin\dfrac{y^2-1}{x^2}$.

4. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z+1}}$.

5. $z=\ln(y-x^2)$.

6. $u=\sqrt{x^2+y^2-4}$

7. $z=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$.

8. $u=\ln(x^2+y^2-z^2)$.

9. $z=\ln(xy)$.

10. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4z}}$.

5.2.2. Построить линии и поверхности уровня функций:

1. $z = xy$. 2. $z = 2y - x^2$. 3. $z = x^2 - 4x - y$.

4. $z = \dfrac{2y}{3x+5}$. 5. $z = \sqrt{4x^2 - y^2}$. 6. $z = \dfrac{2y}{6-2x}$.

7. $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$. 8. $u = x^2 + y^2 + z^2$. 9. $u = x^2 + y^2 - z^2$.

10. $u = x^2 + y^2 - 4$. 11. $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$. 12. $u = y^2 - x^2$.

5.2.3. Вычислить предел:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$. 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)}$. 3. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} (1 + \dfrac{y}{x})^x$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{8x}$. 5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(3xy)}{5x}$. 6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{2y}{x^2}}$.

5.2.4. Найти разрывы функций:

1. $z = \dfrac{4}{x^2 - y}$. 2. $u = \dfrac{1}{x + y - z + 2}$. 3. $u = \dfrac{z}{x^2 - y^2}$.

4. $z = \dfrac{1}{\cos 2kx}$. 5. $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$. 6. $z = \dfrac{3y + 2}{x - 2y^2}$.

5.2.5. Найти частные производные:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$:

1. $z=\ln(x+\ln y)$. 2. $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$. 3. $z=3^{-\frac{y}{x}}$.

4. $z=\ln\sin\dfrac{x+2}{\sqrt{y}}$. 5. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial z}$:

6. $u=(\sin x)^{yz}$. 7. $u=x^{y^z}$. 8. $u=x^{\frac{y}{z}}$.

9. $u=(xy)^z$. 10. $u=(xy+\dfrac{x}{y})^z$.

5.2.6. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

1. $z=e^{xe^y}$. 2. $z=\ln(x^2+y)$. 3. $z=y^{\ln x}$.

4. $z=\dfrac{\cos(y^2)}{x}$. 5. $z=\ln(x^2+y^2)$. 6. $z=e^{x_y}$.

5.2.7. Найти *dz*:

1. $z=4x^3y^2$. 2. $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

3. $z=\sqrt[3]{x+3y^2}$. 4. $z=\ln(x^2+2y^3)$.

5.2.8. Найти d^2z:

1. $z=\sin(x+y)$. 2. $z=\dfrac{1}{(x^2+y^2)2}$. 3. $z=x\sin^2 y$.

4. $z=e^{xy}$. 5. $z=x^2y^2$. 6. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

5.2.9. Вычислить приближенно:

1. $(1{,}04)^{2{,}02}$, если $z = x^y$.

2. $e^{1{,}15 \cdot 1{,}1}$, если $z = e^{xy}$.

3. $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$, если $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$, если $z = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$.

5. $(2{,}1)^2 - (2{,}1)(1{,}2) + 1{,}2^2$, если $z = x^2 - xy + y^2$

5.2.10. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{d z}{d x}$:

1. $z = \ln(e^{2x} + e^{3y})$, $y = x^3$. 2. $z = \operatorname{arctg}(x^2 y)$, $y = e^{2x}$.

3. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $y = x^2$. 4. $z = x^y$, $y = \sin^3(4x)$.

5. $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}$, $y = x^3$.

5.2.11. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $d z$, $\dfrac{dy}{dx}$:

1. $z = ue^{\frac{u}{v}}$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

2. $z = u^2 v - uv^2$, $u = x\cos y$, $v = x\sin y$.

3. $z = u^2 \ln v$, $u = \dfrac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$.

4. $z = \operatorname{arctg}^{\frac{u}{v}}$, $u = x + y$, $v = x - y$.

5. $z = \arcsin(u - v)$, $u = \cos(x^2 + y^2)$, $v = (x^2 + y^2)$.

6. $xy - \ln y = a$. 7. $ye^x + e^y = 0$. 8. $y^x = x^y$.

9. $e^{x+y} = x^3 y^2 + 8$. 10. $\operatorname{tg} y = xy$.

5.2.12. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$, $f(x, y, z) = 0$ в точке M_0:

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M_0(3, 4, -7)$. 2. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0(1, 1, \dfrac{\pi}{4})$.

3. $z = 8x + xy - x^2 - 5$, $M_0(2, -3, 1)$. 4. $z = e^{x+2y+4}$, $M_0(2, -3, 1)$.

5. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, $M_0(1, 2, -1)$.

6. $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$, $M_0(1, 1, 2)$.

7. $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $M_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$.

8. $z^2 = x^2 + y^2$, $M_0(-4, 3, 5)$.

5.2.13. Найти экстремумы и наибольшее и наименьшее значение функций:

1. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$. 2. $z = e^{2x}(x + y^2)$.

3. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$. 4. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

5. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 - 3y^2)$ в круге $x^2 + y^2 = 4$.

6. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в прямоугольнике $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

7. $z = xy(a - x - y)$ в треугольнике $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le a$.

8. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Решение типовых задач

Интегрирование путем введения новой переменной

Пример 1. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-2}dx$ по формуле

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\varphi'(t)\right]dt,$$

где $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция переменной t.

Решение. Пусть $\sqrt{x-2} = t$. Возводя в квадрат это равенство, найдем x:

$$x = t^2 + 2, \text{ откуда } dx = 2tdt.$$

Подставляя полученное равенство в исходное подынтегральное выражение, находим:

$$\int x\sqrt{x-2}dx = \int\left(t^2+2\right)t2tdt = \int\left(2t^4+4t^2\right)dt = 2\int t^4dt + 4\int t^2dt =$$

$$= 2\frac{t^5}{5} + 4\frac{t^3}{3} + c = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx.$

Решение. Пусть $\sqrt{1+4\sin x} = t$, откуда

$$1+4\sin x = t^2, \quad 4\cos xdx = 2tdt, \quad \cos xdx = \frac{1}{2}tdt.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx = \int \frac{1/2tdt}{t} = \frac{1}{2}\int dt + c = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x} + c.$$

Интегрирование по частям

Если $u = \varphi_1(x)$, $\nu = \varphi_2(x)$ – дифференцируемые функции от *x*, то из формулы для дифференциала произведения двух функций $d(uv) = udv + vdu$ получается формула интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu.$ Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет собой произведение алгебраической и трансцендентной функции. В качестве *u* обычно выбирают функцию, которая упрощается дифференцированием, в качестве *dv* – оставшуюся часть подынтегрального выражения, содержащую *dx*, из которой можно определить *v* путем интегрирования.

Пример 3. Найти $\int x \ln xdx$ методом интегрирования по частям.

Решение. Полагая $\ln x = u, xdx = dv,$ получаем:

$$\frac{1}{x}dx = du, \quad \frac{x^2}{2} = v \, .$$

По формуле интегрирования по частям находим:

$$\int x \ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Пример 4. Найти $\int x^2 \cos xdx$ по формуле $\int udv = uv - \int vdu.$

Решение. Полагая $u = x^2,\ dv = \cos xdx = d(\sin x)$, получаем:

$$du = 2xdx, \quad \nu = \sin x \, .$$

Следовательно,

$$\int x^2 \cos xdx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2xdx = x^2 \sin x - 2\int x \cdot \sin xdx. \quad (6.1)$$

Полученный интеграл снова находится интегрированием по частям. Пусть $x = u,\ dv = \sin xdx = d(-\cos x)$. Определяем:

$$dx = du,\, v = -\cos x$$

$$\int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + c_1 = \sin x - x \cos x + c_1.$$

Подставляя это выражение для интеграла в формулу (6.1), находим:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2(x \cos x - \sin x) + c, \quad \text{ааа} \ c = \text{-}2c_1.$$

Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби

Пример 5. Вычислить $\int \frac{x+5}{x^3 - 5x^2 - x + 5} dx.$

Решение. Интегрирование любой рациональной дроби тесно связано с представлением ее знаменателя в виде произведения линейных и квадратных множителей (некоторые из них могут отсутствовать). Такое представление обычно получают, выполняя группировку слагаемых или находя корни знаменателя. Подынтегральная рациональная дробь является правильной. Ее знаменатель преобразуем следующим образом:

$$x^3 - 5x^2 - x + 5 = \left(x^3 - 5x^2\right) - (x-5) = x^2(x-5) - (x-5) =$$

$$= (x-5)\left(x^2 - 1\right) = (x-5)(x-1)(x+1).$$

Рациональная дробь представляется в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x+5}{(x-5)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+1}.$$

Умножая обе части этого равенства на знаменатель, имеем:

$$\begin{aligned} x + 5 &= A(x-1)(x+1) + B(x-5)(x+1) + D(x-5)(x+1) \ \text{еее} \\ x + 5 &= (A + B + D)x^2 + (-4B - 6D)x + (-A - 5B + 5D). \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x в многочленах, стоящих в левой и правой частях последнего равенства, дает неоднородную систему линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & A+B+D=0; \\ x & -4B-6D=1; \\ x^0 & -A-5B+5D=5. \end{array}\right\}$$

Решая ее одним из методов линейной алгебры (например, по формулам Крамера), найдем:

$$A=5/12, \quad B=-3/4, \quad D=1/3.$$

Таким образом,

$$\frac{x+5}{(x-5)(x-1)(x+1)}=\frac{5/12}{x-5}+\frac{-3/4}{x-1}+\frac{1/3}{x+1}.$$

Интегрируя это равенство, находим:

$$\int\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}dx=\frac{5}{12}\ln|x-5|-\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+c.$$

Примечание: В случае, когда знаменатель рациональной дроби имеет только действительные различные корни, неизвестные постоянные находятся быстрее с помощью способа частных значений, причем выбирать их следует равными корням знаменателя (тогда все слагаемые, кроме одного, обращаются в нуль).

Подставляя поочередно значения $x = 5$, $x = 1$ и $x = -1$ в равенство (6.2), получим:

$$\begin{array}{r|l} x=5 & 10=A(5-1)(5+1)\Rightarrow A=5/12; \\ x=1 & 6=B(1-5)(1+1)\Rightarrow B=-3/4; \\ x=-1 & 4=D(-1-5)(-1-1)\Rightarrow D=1/3. \end{array}$$

Пример 6. $\int \frac{2x+5x^4-x^5}{x^3-5x^2-x+5}dx$.

Решение. Под знаком интеграла находится неправильная рациональная дробь, которую необходимо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен.

$$\begin{array}{l|l} -x^5+5x^4+2x & x^3-5x^2-x+5 \\ \cline{2-2} & -x^2-1 \\ \underline{-x^5+5x^4+x^3-5x^2} & \\ \qquad -x^3+5x^2+2x & \\ \qquad \underline{-x^3+5x^2+x-5} & \\ \qquad\qquad x+5(\text{остаток}) & \end{array}$$

$$\frac{2x+5x^4-x^5}{x^3-5x^2-x+5}=-x^2-1+\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}$$

Здесь $\left(-x^2-1\right)$ – целая часть (многочлен);

$\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}$ – правильная рациональная дробь, интеграл от которой найден уже в предыдущем пункте.

Запишем окончательный результат:

$$\int \frac{2x+5x^4-x^5}{x^3-5x^2-x+5}dx=c-\frac{x^3}{3}-x+\frac{5}{12}\ln|x-5|-\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+1|.$$

Пример 7. Вычислить $\int \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}dx$ от рациональной дроби.

Решение. Разложим подынтегральную функцию на элементарные дроби. Так как знаменатель имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ кратности 2 и простой корень $x_3 = 0$, то разложение примет вид

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{(x+1)^2},$$

откуда

$$x^3+x^2+2=A(x-1)^2(x+1)^2+B_1x(x-1)(x+1)^2+B_2x(x+1)^2+$$
$$+C_1x(x+1)(x-1)^2+C_2x(x-1)^2;$$
$$x^3+x^2+2=x^4\left(A+B_1+C_1\right)+x^3\left(B_1+B_2-C_1+C_2\right)+$$
$$+x^2\left(2B_2-2A-B_1-2C_2-C_1\right)+x\left(B_2-B_1+C_2+C_1\right)+A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим пять уравнений для определения пяти неизвестных:

$$\left.\begin{aligned}&A+B_1+C_1=0;\\&B_1+B_2-C+C_2=1;\\&2B_2-2A-B_1-2C_2-C_1=1;\\&B_2-B_1+C_2+C_1=0;\\&A=2.\end{aligned}\right\}$$

Решая полученную систему, находим:

$$A=2,\quad B_1=-\frac{3}{4},\quad B_2=1,\quad C_1=-\frac{5}{4},\quad C_2=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, подынтегральная функция разлагается на элементарные дроби следующим образом:

$$\frac{x^3+x+2}{x\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2}{x}-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{5}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int\frac{x^3+x+2}{x\left(x^2-1\right)^2}dx=2\int\frac{dx}{x}-\frac{3}{4}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{5}{4}\int\frac{d(x+1)}{x+1}-$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}=2\ln x-\frac{3}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{5}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}+c=$$
$$=\frac{x+3}{2\left(1+x^2\right)}+\ln\frac{x^2}{\sqrt[4]{|x-1|^3|x+1|^5}}+c.$$

Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2-7x+10} = \left| x^2-7x+10 = \left(x^2 - 2\frac{7}{2}x + \frac{49}{4}\right) - \frac{49}{4} + 10 = \right.$$

$$= \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} = \left| \begin{array}{l} t = x - \frac{7}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3/2}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\right| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + c$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \frac{3x-4}{2x^2+2x+5}dx$.

Решение.

$$\int \frac{3x-4}{2x^2+2x+5}dx = \left| \begin{array}{l} 2x^2+2x+5 = 2\left(\left(x^2+2\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\right) = \\ = 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(3x-4)dx}{2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right)} = \left| \begin{array}{l} t = x+\frac{1}{2}, \\ x = t-\frac{1}{2}, \\ dx = dt, \\ 3x-4 = 3\cdot(t-1/2)-4 = \\ = 3t-3/2-4 = 3t-11/2 \end{array} \right| = \int \frac{3t-\frac{11}{2}}{2\left(t^2+\frac{9}{4}\right)}dt =$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{tdt}{t^2+\frac{9}{4}}-\frac{11}{4}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\int\frac{\frac{1}{2}d\left(t^2+\frac{9}{4}\right)}{t^2+\frac{9}{4}}-\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{3/2}\operatorname{arctg}\frac{t}{3/2}=$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left(t^2+\frac{9}{4}\right)-\frac{11}{6}\operatorname{arctg}\frac{2t}{3}+c=\frac{3}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-\frac{11}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+$$
$$+c.$$

Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Пример 10. $\int\sin^4 xdx$.

Решение.

$$\int\sin^4 xdx=\int\left(\sin^2 x\right)^2 dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{4}\int\cos 2xd\left(2x\right)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{4}\int\cos 2xd\left(2x\right)+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8\cdot 4}\int\cos 4xd\left(4x\right)=$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+c==\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

Пример 11. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение. Применим универсальную подстановку $tg\frac{x}{2}=t$, так как подынтегральная функция является рациональной функцией от $\sin x$ е $\cos x$:

$$\sin x=\frac{2t^2}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

Тогда

$$\frac{1}{3+\sin x+\cos x}=\frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{2\left(t^2+t+2\right)},$$

$$\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\frac{dt}{t^2+t+2}.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dt}{3+\sin x+\cos x}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{t^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+c=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+c=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+c.$$

Интегрирование иррациональных выражений

Пример 12. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

Решение. Подынтегральная функция является рациональной относительно $x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x}$, т.е. $R(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x})$. Наименьшее общее кратное знаменателей степеней x равно 6, поэтому применим подстановку $x=t^6$:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)} = \left| \begin{matrix} x = t^6, dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = t^{6/2} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^{6/3} = t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 6t^5 dt}{t^6\left(t^3+t^2\right)} =$$

$$= 6\int \frac{dt}{t(t+1)} = 6\left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1}\right) = 6\left(\ln|t| - \ln|t+1|\right) + c = 6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + c =$$

$$= \left[t = \sqrt[6]{x}\right] = 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + c.$$

Пример 13. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \left| \begin{matrix} x = a\cdot \mathrm{tg}t, dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt, \\ \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\mathrm{tg}^2 t + a^2} = \\ \sqrt{a^2\left(\mathrm{tg}^2 t + 1\right)} = a\sqrt{1/\cos^2 t} = a/\cos t \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\dfrac{a}{\cos^2 t}dt}{a^2 tg^2 t\dfrac{a}{\cos t}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos t\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int (\sin t)^{-2} d(\sin t) = c - \frac{1}{a^2\sin t} = \left| \begin{matrix} \dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{\cos t}{\sin t}\cdot\dfrac{1}{\cos t} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}t}\cdot\dfrac{1}{\cos t} = \\ = \dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= c - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x}.$$

6.2. Задания для практических занятий

6.2.1. Простейшие приемы интегрирования

Найти интегралы:

1. $\int \frac{dx}{25x^2+6}$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+6}}$. 3. $\int \frac{dx}{25x^2-6}$.

4. $\int \frac{dx}{7-36x^2}$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$. 6. $\int \cos(4x+1)dx$.

7. $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. 8. $\int \frac{-3+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. 9. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$.

10. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$. 11. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx$. 12. $\int \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 dx$.

6.2.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Найти интегралы.

1. $\int (3x+7)^{12}dx$. 2. $\int x(3x^2+7)^{12}dx$. 3. $\int \frac{dx}{2x-3}$.

4. $\int \frac{xdx}{2x^2-3}$. 5. $\int \frac{x^2dx}{x^6+4}$. 6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$.

7. $\int \frac{xdx}{x^2+7}$. 8. $\int \frac{e^xdx}{e^{2x}-1}$. 9. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

10. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{16+\cos 5x}}$. 11. $\int \frac{\ln x}{x}dx$. 12. $\int \frac{dx}{x(4+\ln^2 x)}$.

13. $\int e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$. 14. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-2}}$. 15. $\int x^2\cdot\cos(14-x^3)dx$.

6.2.3. Интегрирование по частям

Найти интегралы:

1. $\int x\cdot\cos 2xdx$. 2. $\int\left(x^2-x+1\right)\ln xdx$. 3. $\int\left(x^2-1\right)\sin 4xdx$.

4. $\int x^3\cos 2xdx$. 5. $\int xe^{2x}dx$. 6. $\int\arcsin 3xdx$.

7. $\mathrm{arctg}\,2xdx$. 8. $\int\sqrt[3]{›}\cdot\ln xdx$. 9. $\int\cos(\ln x)dx$.

10. $\int xe^{4x-3}dx$. 11. $\int\frac{\ln x}{x^4}dx$. 12. $\int\frac{xdx}{\sin^2 2x}$.

6.2.4. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби

Интегрирование рациональных дробей

Не вычисляя коэффициентов, разложить дробь на простейшие:

1. $\frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$. 2. $\frac{2x^2-3}{\left(x^3+9x\right)^2\cdot(1-3x)^4}$. 3. $\frac{2x}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}$.

4. $\frac{1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}$. 5. $\frac{3x-5}{x^4-x^2}$.

6.2.5. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Найти интегралы:

1. $\int\frac{3›-1}{›^2-4›+17}dx$. 2. $\int\frac{dx}{3x^2-2x+15}$. 3. $\int\frac{2x+5}{4x^2-4x-2}dx$.

4. $\int\frac{5}{x^2-5x+6}dx$. 5. $\int\frac{2x-1}{5x-3x^2-4}dx$. 6. $\int\frac{x}{2x^2-3x+1}dx$.

7. $\int \frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2}dx$. 8. $\int \frac{x^3+1}{x^2\left(x^2+1\right)}dx$. 9. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

10. $\int \frac{10x+3}{x^3+27}dx$.

6.2.6. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Найти интегралы:

1. $\int \frac{\operatorname{ctg}^6 3x}{\sin^2 3x}dx$. 2. $\int \frac{\operatorname{tg}^7 2x}{\cos^2 2x}dx$. 3. $\int \cos^4 3x \cdot \sin 3x dx$.

4. $\int \frac{\sin 2x}{4+\cos^2 2x}dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^2 x}}$. 6. $\int \frac{\sin \frac{3}{2}x}{5+\cos^2 \frac{3}{2}x}dx$.

7. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^4 2x dx$. 8. $\int \sin^7 3x \cdot \cos^5 \cdot 3x dx$.

9. $\int \sin^{10} 2x \cdot \cos^3 2x dx$. 10. $\int \sqrt[7]{\cos^2 x} \cdot \sin^3 x dx$.

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$. 12. $\int \frac{\cos^3 3x}{\sin 3x}dx$. 13. $\int \operatorname{tg}^5 4x dx$.

14. $\int \operatorname{ctg}^4 2x dx$. 15. $\int \operatorname{tg}^6 3x dx$. 16. $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx$.

17. $\int \sin 3x \cdot \cos 2x \cdot \sin 4x dx$. 18. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x dx$.

19. $\int \sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin x dx$. 20. $\int \frac{dx}{\cos^4 3x}$. 21. $\int \frac{dx}{\sin^4 2x}$.

22. $\int \frac{\sin^4 3x}{\cos^2 3x}dx$. 23. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$. 24. $\int \frac{dx}{\sin^6 \frac{x}{8}}$.

25. $\int \frac{dx}{\sin^3 2x \cdot \cos 2x}$. 26. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x}$.

27. $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x}$. 28. $\int \frac{\sin x dx}{3\cos x + \sin x}$.

29. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + \cos^2 x + 5}$. 30. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \cos^2 x}$.

31. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$. 32. $\int \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx$.

33. $\int \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4} dx$. 34. $\int \sin^4 \frac{x}{7} dx$.

35. $\int \sin^2 4x dx$ 36. $\int \cos^4 3x dx$.

6.2.7. Интегрирование иррациональных выражений

Найти интеграл:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$. 3. $\int \frac{x - 2}{\sqrt{9x^2 + 3x + 1}} dx$.

4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$. 5. $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{8 - x} + \sqrt{8 - x}}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x + 4} + 2\sqrt[4]{5x + 4}}$. 10. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$. 11. $\int \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} dx$.

12. $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{›})^2 dx$. 13. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}$. 14. $\int x \cdot \sqrt{1 + x^4} dx$.

15. $\int \frac{dx}{x^2(1 + x^2)^{3/2}}$. 16. $\int x^3 (1 + x^2)^{1/2} dx$.

7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

7.1. Решения типовых задач

Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Пример 1. Вычислить определённый интеграл по формуле Ньютона–Лейбница $\int\limits_0^{\text{к}} \sin x dx$.

Решение. Формула Ньютона–Лейбница $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi} \sin x \; dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = - \quad (\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2 .$$

Пример 2. Используя замену переменной в определённом интеграле, вычислить $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Пусть $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\; dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t dt =$$

$$=16\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t dt = 16\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2t = 4\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1\text{-}\cos 4\text{t}\right) dt =$$

$$= 2\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} \right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi .$$

Пример 3. Вычислить определённый интеграл по формуле интегрирования по частям для определённого интеграла $\int\limits_1^a x\ln x dx$.

Решение.

$\int\limits_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\, du$, – формула интегрирования по частям.

Пусть

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = x\, dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right].$$

Тогда

$$\int\limits_1^e x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Bigg|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Вычисление площадей плоских фигур

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x,\ y = x$.

Решение. Фигура имеет вид Ф (рис. 1).

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a,\ x = b$ можно найти по формуле

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx.$$

В нашем примере $f_1(x) = x^2 - 2x$, $f_2(x) = x$, $a = 0$, $b = 3$. Находим площадь S фигуры Ф:

$$S=\int_0^3 (x-x^2+2x)dx=\int_0^3 (3x-x^2)dx=3\frac{x^2}{2}\Big|_0^3-\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 9-\frac{1}{3}\cdot 27=\frac{27}{2}-9=\frac{9}{2}.$$

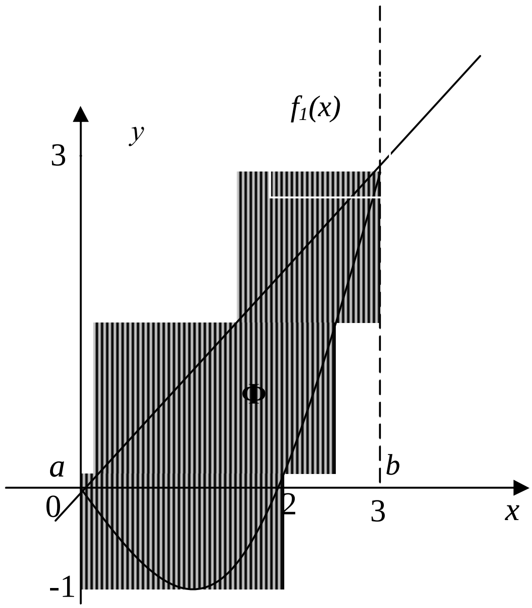


Рис. 1

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x=a\cos t,\ \ y=b\sin t.$

Решение. Фигура имеет вид (рис. 2). Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, прямыми $x=a,\ y=b$ и осью *0x*, то площадь её находится по формуле

$$S=\left|\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\right|,$$

где α и β определяются из равенств $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$ Найдём сначала 1/4 площади *S*. Здесь *x* изменяется от 0 до *a*. Следовательно, *t* изменяется от $\pi/2$ до 0. Находим:

$$\frac{1}{4}S=\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=-ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 tdt=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\pi/2}\left(1-\cos 2tdt\right)=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{\pi ab}{4}$$

Таким образом, $\frac{1}{4}S=\frac{\pi ab}{4}$. Значит $S=\pi ab$.

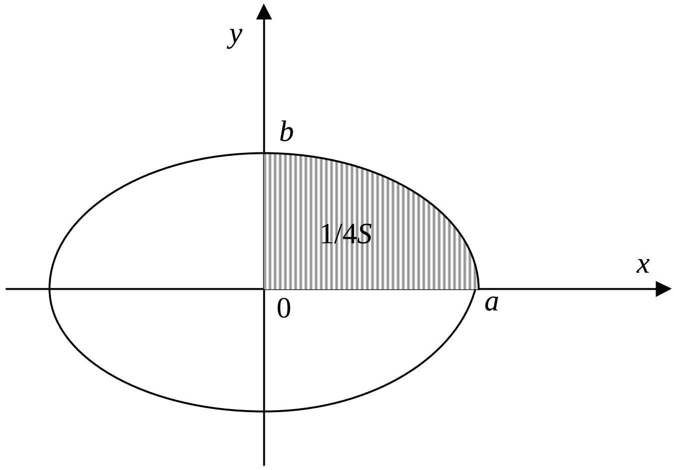


Рис. 2

Пример 6. Найти площадь фигуры, ограниченной «трёхлепестковой розой», $r=a\cos 3\varphi$.

Решение. Фигура имеет вид (рис. 3).

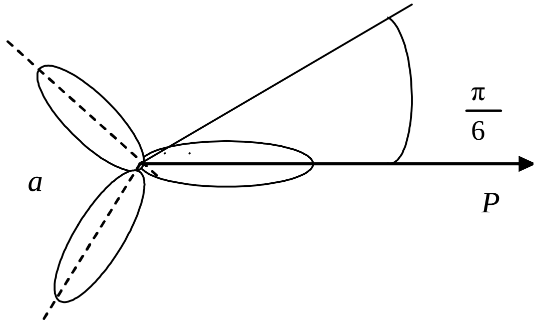


Рис. 3

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами φ = α, $\varphi = \beta$, выражается интегралом $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$. Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т.е. 1/6 часть всей площади фигуры:

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(a\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(1+\cos 6\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}+0\right) = \frac{\pi a^2}{24}$$

$$\text{т.е. } \frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}.$$

Следовательно, $S = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

Вычисление длин дуг кривых, объемов тел

Пример 7. Найти длину окружности радиуса *R* (рис. 4).

Решение. Если кривая $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx.$$

Найдем 1/4 часть длины окружности радиуса R от точки $(0, R)$ до точки $(R, 0)$.

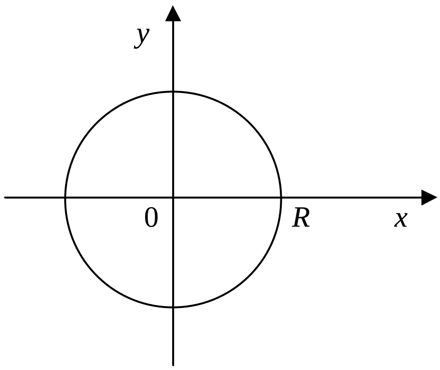


Рис. 4

Уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$. Выразим $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Найдем $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Тогда

$$\frac{1}{4}l=\int_0^R \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\arcsin\frac{x}{R}\bigg|_0^R=R\frac{\pi}{2}.$$

Значит, $l=2\pi R$.

Пример 8. Вычислить длину дуги кривой $x=\dfrac{1}{3}t^3-t$, $y=t^2+2$ от $t=0$ до $t=3$.

Решение. При параметрическом задании кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ t меняется от t_1 до t_2, длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt.$$

Найдем $x_t'=t^2-1,\ y_t'=2t$. Тогда

$$l=\int_0^3\sqrt{\left(t^2-1\right)^2+\left(2t\right)^2}\,dt=\int_0^3\sqrt{t^4-2t^2+1+4t^2}\,dt=\int_0^3\sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt=$$

$$=\int_0^3\sqrt{\left(t^2+1\right)^2}\,dt=\int_0^3\left(t^2+1\right)dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^3+\left.t\right|_0^3=9+3=12.$$

Пример 9. Найти длину дуги кривой $r=\varphi^2$ от $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$.

Решение. Если кривая l в полярных координатах задана уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$ то длина дуги $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')d\varphi}$.

Тогда

$$l=\int_0^\pi\sqrt{\varphi^4+\left(2\varphi\right)^2}\,d\varphi=\int_0^\pi\varphi\sqrt{\varphi^2+4}\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\varphi^2+4\right)^{\frac{1}{2}}d\left(\varphi^2+4\right)=$$

$$=\left.\frac{1}{2}\frac{\left(\varphi^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_0^\pi=\frac{1}{3}\left(\left(\pi^2+4\right)^{\frac{3}{2}}-8\right).$$

Пример 10. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{1}{2}x^2,\ x=0,\ y=2\sqrt{2}$, вокруг оси OY (рис. 5).

Решение. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x=\varphi(y)$ и прямыми $x=0,\ y=a,\ y=b,$ вращается вокруг оси OY, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi\int_a^b x^2 dy = \pi\int_a^b \left(\varphi(y)\right)^2 dy.$$

Тогда

$$V_y = \pi\int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \pi 8.$$

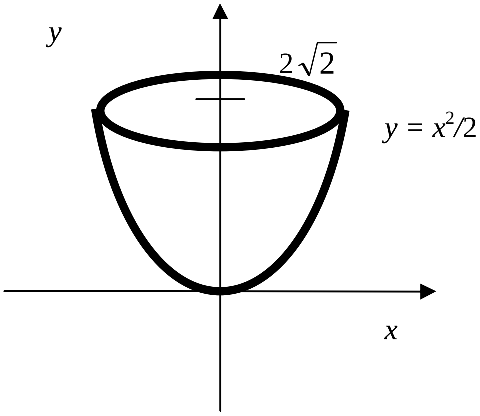


Рис. 5

Вычисление площади поверхности. Решение физических задач

Пример 11. Найти площадь поверхности шара радиуса *R*.

Решение. Если дуга кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ вращается вокруг оси *OX*, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$, вокруг оси *OX*.

Находим S:

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx =$$

$$= 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}dx = 2\pi\int_{-R}^{R}Rdx = 2\pi R\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

Пример 12. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(t_1 \le t \le t_2)$, то площадь поверхности вращения дуги вокруг оси OX вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\cdot\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}dt.$$

Тогда

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}dt = = 2\sqrt{2}\pi\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dt =$$

$$= 8\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = -8\pi\cdot 2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= -16\pi\left(\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\Bigg|_0^{2\pi}\right) = -16\pi\left(-1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi$$

Пример 13. Найти работу, затраченную на выкачивание воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r (рис. 6, 7).

Решение. Объем элементарного слоя воды, находящегося на глубине x и имеющего длину a, ширину $2m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ и толщину dx, равен:

$$dV = a2mdx = 2a\sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

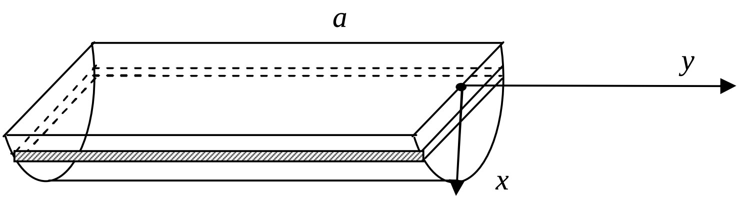


Рис. 6

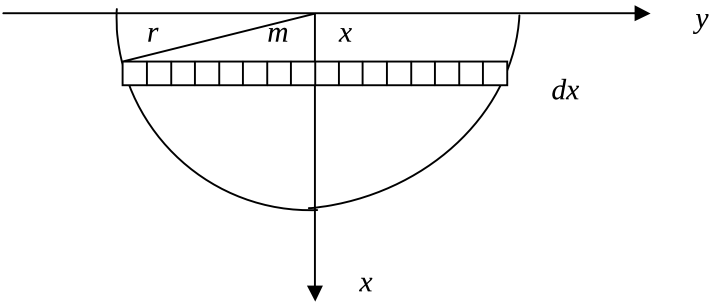


Рис. 7

Элементарная работа, совершаемая для поднятия этого слоя воды на высоту x, равна $dA = 2\rho gax\sqrt{r^2 - x^2}dx$, где ρ – плотность воды. Следовательно,

$$A = 2a\rho g\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}dx = -\frac{2a\rho g}{2}\int_0^r (r^2 - x^2)^{1/2}d(r^2 - x^2) =$$

$$-a\rho g\left.\frac{(r^2 - x^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^r = -\frac{2}{3}a\rho g(0 - r^3) = \frac{2}{3}a\rho gr^3.$$

Пример 14. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x\, dx$. 3. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$

Решение.

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-2}dx = -\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Bigg|_{1}^{b} = -(0-1) = 1$, интеграл сходится.

2. $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \cos x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \sin x \Bigg|_{a}^{0} = 0 - \lim\limits_{a\to-\infty} \sin a$, интеграл расходится, так как при $a \to -\infty$ предел $\lim\limits_{a\to-\infty} \sin a$ не существует.

3. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln x \Bigg|_{1}^{b} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty$ интеграл расходится.

Пример 15. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$.

Решение. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$ $(f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0)$, то интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ и $\int\limits_{a}^{\infty} \varphi(x)\, dx$ одновременно сходятся.

Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\left|\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right| dx$ сходится, так как $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left|\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right|}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x^2}} = 1$$

.

Пример 16. Вычислить $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{x^2}$.

Решение. При $x=0$ функция $y=\dfrac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв;

$\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to0} \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} x^{-2}dx = -\lim\limits_{\varepsilon\to0} \dfrac{1}{x}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{1} = -\left(1-\lim\limits_{\varepsilon\to0}\dfrac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$. Интеграл расходится.

Пример 17. Сходится ли интеграл $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sin x}$?

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ имеет на $[0,\ 1]$ единственный разрыв в точке $x=0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$. Интеграл $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to0} \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to0} \ln x \Bigg|_{0+\varepsilon}^{1} = 0 - \lim\limits_{\varepsilon\to0} \ln\varepsilon = \alpha$ расходится.

И так как $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$, то интеграл $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sin x}$ так же расходится.

7.2. Задания для практических занятий

7.2.1. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Вычислить интеграл:

1. $\int\limits_{2}^{2/\sqrt{2}} xdx\Big/\sqrt{(x^2-2)}$. 2. $\int\limits_{2}^{2/\sqrt{2}} dx/(1-\sin x)$. 3. $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \arcsin x dx$.

4. $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin 2x dx$. 5. $\int\limits_{1}^{3} (\ln x)^2\, dx$. 6. $\int\limits_{0}^{2} x \cdot e^{-x}\, dx$.

7. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$. 8. $\int\limits_{-1}^{1} x \cdot 2^x\, dx$. 9. $\int\limits_{-1}^{1} x\, dx \,/\, \sqrt{5-4x}$.

10. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} xdx\Big/\cos^2 x$. 11. $\int\limits_{1}^{e} \sin(\ln x)\, dx$. 10. $\int\limits_{1}^{3} dx\Big/(x \cdot \sqrt{x^2+9})$.

7.2.2. Вычисление площадей плоских фигур

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = 2x^2,\ y = 1 + x^2,\ x = 3$. 2. $y = \cos x,\ y = -2x,\ x = 0,\ x = 3\pi/2$.

3. $y = 1 + x^2,\ y = 1/x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$. 4. $y = -x^2 + 4,\ y = 2x + 1$.

5. $r = \alpha \sin 2\varphi,\ \varphi = \pi/6,\ \varphi = \pi/3$. 6. $r = \alpha \cos\varphi$. 7. $r = 2 + \cos\varphi$.

8. $r = \alpha \sin 4\varphi$. 9. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^2 \end{cases}$ $(0 \le t \le 9)$.

10. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \sin 2t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

7.2.3. Вычисление длин дуг кривых, объемов тел

Вычислить длину дуги кривой:

1. $y = (2/3)x^{3/2} \quad (0 \le x \le 1)$. 2. $y = \ln(\cos y) \quad (0 \le y \le \pi/3)$.

3. $y = \ln x \quad (\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8})$. 4. $y = \sin^3 \varphi/3$. 5. $r = \alpha \sin^4 \varphi/4$.

6. $r = 4(1-\cos\varphi)$. 7. $r = \cos^3 \varphi/2$. 8. $\begin{cases} x = \sqrt{8t^3}/3 \\ x = t^2 \end{cases} \quad (0 \le t \le 2)$.

9. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi/2)$.

10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* плоской фигуры, ограниченной линиями: $y=1/x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

11. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями: $y=x^3$, $y=1$, $x=0$.

12. Вычислить объем тела, полученного вращением астроиды

$$\begin{cases} x = \alpha\cos^3 t \\ y = \alpha\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi) \text{ вокруг оси } OY.$$

13. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* первой арки циклоиды

$$\begin{cases} x = \alpha(t - \sin t) \\ y = \alpha(1-\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

14. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$$

15. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями: $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$.

7.2.4. Вычисление площади поверхности. Решение физических задач

1. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = e^{-x}$ $(-1 \le x \le 0)$ вокруг оси OX.

2. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OY петли кривой $9\alpha x^2 = (3\alpha - y)^2 y \quad (0 \le y \le 3\alpha)$.

3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой $y = x^3/3$ $(0 \le x \le 1)$.

4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением эллипса $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ вокруг оси OY.

5. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $\begin{cases} x = \alpha\cos t, \\ y = b + \alpha\sin t \end{cases}$ вокруг оси OX.

6. Плоский прямоугольный затвор шлюза, расположенный вертикально, имеет ширину 10 м, а высоту 12 м. Найти силу давления на затвор, если вода доходит до его верхнего края.

7. Вычислить работу, совершаемую при выкачивании жидкости с удельным весом γ из вертикальной цилиндрической бочки с радиусом основания r и высотой h.

8. Вычислить работу, совершаемую при выкачивании жидкости с удельным весом γ из конического сосуда, обращенного вершиной вниз. Радиус основания конуса r, а высота h.

9. Вычислить силу давления воды на вертикальную напорную грань плотины, если известно, что напорный фронт имеет форму равнобочной трапеции с нижним основанием 50 м и верхним основанием 80 м при высоте плотины 20 м.

10. Вычислить силу давления, испытываемого полукругом радиуса r, погруженным в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.

11. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка конической формы, радиус основания которой r, а высота h? Песок поднимают с поверхности земли, удельный вес песка γ.

12. Найти величину давления на поверхность шара, имеющего диаметр 6 м, если шар погружен в воду так, что центр его находится на глубине 10 м от свободной поверхности воды.

7.2.5. Несобственные интегралы

Вычислить несобственные интегралы или установить их сходимость или расходимость:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx/(3x^2+6x+15)$. 2. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$. 3. $\int\limits_{0}^{\infty} dx/\sqrt{x(9x+3)(x-5)}$.

4. $\int\limits_{2}^{\infty} (\ln x/x)\,dx$. 5. $\int\limits_{1}^{\infty} (\operatorname{arctg} x/x^2)\,dx$.

6. $\int\limits_{1}^{\infty} ((x^3+3)/(3x^4+4x^2+1)\,dx$. 7. $\int\limits_{1}^{\infty} (x/(x^2-2x+5))\,dx$.

8. $\int\limits_{0}^{\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx$. 9. $\int\limits_{2}^{\infty} dx/\sqrt{(x^2-2x+5)x^3}$. 10. $\int\limits_{1}^{2} dx/(x\ \ln x)$.

11. $\int\limits_{-1}^{0} (e^{1/x}/x^3)\ dx$. 12. $\int\limits_{0}^{1} dx/(\operatorname{tg}x-x)$. 13. $\int\limits_{1}^{2} x\,dx/\sqrt{x-1}$.

14. $\int\limits_{2}^{4} dx/\sqrt{(x^2-9)^3}$. 15. $\int\limits_{2}^{4} dx/\sqrt{x^2-4}$. 16. $\int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x}\ /e^{\sqrt{x}})\,dx$.

17. $\int\limits_{0}^{\pi/2} ((1-\cos x)/x^4)\,dx$. 18. $\int\limits_{0}^{\pi/3} dx/\sin^2 3x$.

8. ДВОЙНЫЕ, ТРОЙНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

8.1. Решения типовых задач

Двойной интеграл

Пример 1. Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$, в виде повторных интегралов, взятых в различных порядках.

Решение. Двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ может быть записан через повторные интегралы двумя способами:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

Построим область D (рис. 1).

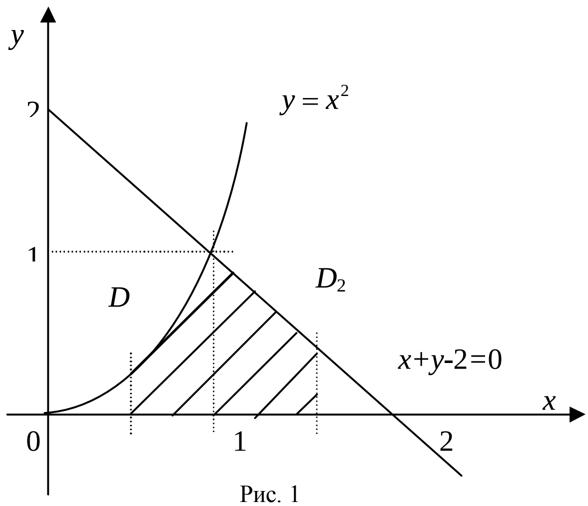


Рис. 1

Чтобы записать наш интеграл первым способом, область D следует разбить на две области: D_1 и D_2. Для области D_1: $a = 0$, $b = 1$, $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = x^2$. Для области D_2: $a = 1$, $b = 2$, $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 2 - x$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$$

Запишем наш интеграл вторым способом. Для области D: $c = 0$, $d = 1$, $\psi_1(y) = \sqrt{y}$, $\psi_2(y) = 2 - y$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, если область D: $y = x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$.

Решение. Построим область D (рис. 2). Для вычисления данного двойного интеграла воспользуемся формулой

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

где $a = 2$, $b = 3$, $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 2x$.

Тогда

$$\iint\limits_D (x+2y)\ dx\ dy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)\ dy = \int\limits_2^3 (xy+y^2)\Big|_x^{2x} dx =$$

$$= \int\limits_2^3 (2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2)\ dx = 4\int\limits_2^3 x^2 dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{4}{3}(27-8) = \frac{4}{3} \cdot 19 = \frac{76}{3}$$

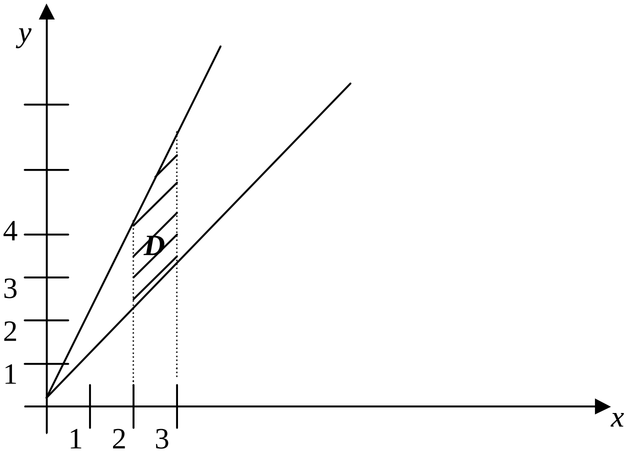


Рис. 2

Пример 3. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dx\,dy,$ где область D – круг $x^2+y^2 \le 9$.

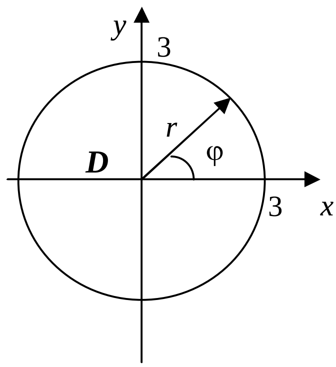


Рис. 3

Решение. Построим область D (рис. 3). Перейдём к полярным координатам, используя формулу

$$\iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr:$$

$$\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{9-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}\,rd\varphi dr =$$

$$= \iint_D \sqrt{9-r^2}\,rd\varphi dr$$

Вычислим данный интеграл по формуле

$$\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

В нашем случае $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $r_1(\varphi) = 0$, $r_2(\varphi) = 3$. Тогда

$$\iint_D \sqrt{9-r^2}\,rd\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r\sqrt{9-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9-r^2)^{1/2} d(9-r^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left.\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^3 = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (0-27)d\varphi = 9\varphi\Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$

Тройной интеграл

Пример 4. Вычислить $\iiint_V (x+z)\;dx\,dy\,dz$, где V ограничено плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $x + y + z = 2$.

Решение. Построим область *V* и ее проекцию на плоскость *x0y* (рис. 4, а, б, где *а* – плоскость; *б* – ее проекция. Воспользуемся формулой

$$\iiint_V f(x,\;\; y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

В нашем случае

$a = 0, b = 1, y_1(x) = 0, y_2(x) = 1 - x, z_1(x, y) = 1, z_2(x, y) = 2 - x - y$.

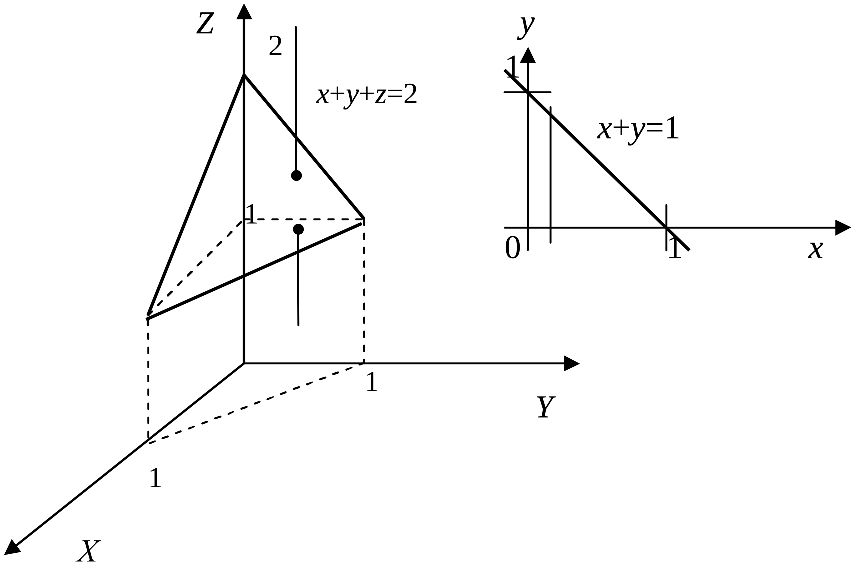


Рис. 4

Тогда

$$\iiint\limits_V (x+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_1^{2-x-y} (x+z)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_1^{2-x-y} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(2x - x^2 - xy - x + \frac{(2-x-y)^2}{2} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x - x^2 - xy + \frac{(2-x-y)^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(xy - x^2 y - x\frac{y^2}{2} - \frac{(2-x-y)^3}{6} - \frac{1}{2} y \right) \Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 dx(x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{x}{2}(1-2x+x^2) - \frac{(2-x-1+x)^3}{6} +$$

$$+ \frac{(2-x)^3}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x) = \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{(2-x)^3}{6} - \frac{2}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} - \frac{(2-x)^4}{24} - \frac{2}{3}x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{16}{24} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}.$$

Пример 5. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить $\iiint\limits_V z dx dy dz$, где V – область, ограниченная верхней частью конуса $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскостью $z = 1$.

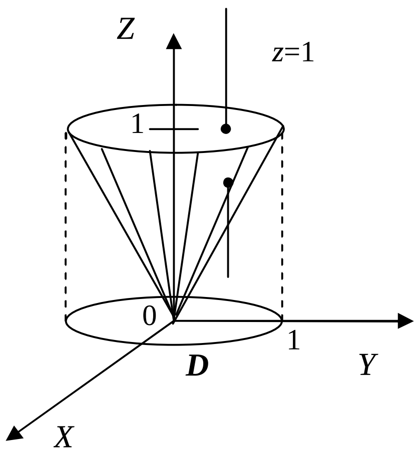


Рис. 5

Решение. Построим область интегрирования V (рис. 5). Запишем данный тройной интеграл в цилиндрических координатах по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi; r\sin\varphi; z) r d\varphi dr dz$$

получим:

$$\iiint\limits_V z dxdydz = \iiint\limits_V z r d\varphi dr dz$$

Вычислим, используя формулу

$$\iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r d\varphi dr dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \int\limits_{z_1(\varphi,\, r)}^{z_2(\varphi,\, r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) dz$$

В нашем случае $\alpha = 0, \beta = 2\pi, r_1(\varphi) = 0, r_2(\varphi) = 1, z_1(\varphi, r) = r,$ $z_2(\varphi, r) = 1$, $z_1^2(\varphi, r) = r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = r^2 \Rightarrow z_1(\varphi, r) = r$ (из уравнения конуса).

Тогда

$$\iiint\limits_V z r d\varphi dr dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \int\limits_r^1 z dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \left.\frac{z^2}{2}\right|_r^1 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\right) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{2}\right) dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left.\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{8}\right)\right|_0^1 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \left.\frac{1}{8}\varphi\right|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 6. Вычислить $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$ где V – шар, определяемый по формуле $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (рис. 6).

Решение. Перейдя к сферическим координатам по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

,

получим:

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \iiint\limits_V r^2 \sin^2\theta\cos^2\theta r^2 \sin\theta drd\varphi d\theta =$$

$$= \iiint\limits_V r^4 \sin^3\theta\cos^2\varphi drd\varphi d\theta$$

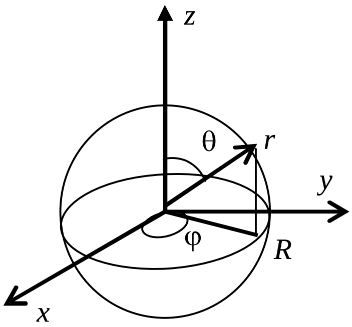


Рис. 6

Вычислим интеграл по формуле

$$\iiint\limits_V f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right) r^2 \sin\theta drd\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} d\theta \int\limits_{r_1(\varphi,\,\theta)}^{r_2(\varphi,\,\theta)} f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right) r^2 \sin\theta dr.$$

В нашем случае $\alpha = 0, \beta = 2\pi, \alpha_1 = 0, \beta_1 = \pi, r_1 = 0, r_2 = R.$ Тогда

$$\iiint\limits_V r^4 \sin^3\theta\cos^2\varphi drd\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{R} r^4 \sin^3\theta\cos^2\varphi dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta\cos^2\varphi \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^5}{5}\cos^2\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta\sin\theta d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^5}{5}\cos^2\varphi \int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)d(\cos\theta) =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^5}{5}\cos^2\varphi \left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^5}{5}\cos^2\varphi \left(\cos\pi - \frac{\cos^3\pi}{3} - \cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right) =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^5}{5}\cos^2\varphi \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= \frac{2}{12}R^5\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

Криволинейные интегралы первого рода

Пример 7. Вычислить $\int\limits_l xy^2 dl$, где l – отрезок прямой между точками O (0; 0) и A (4; 3).

Решение. Если кривая l задана уравнениями $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int\limits_l f(x,y)dl = \int_a^b f\left(x,\varphi(x)\right)\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx \tag{3}$$

Уравнение прямой OA есть $y = \frac{3}{4}x,\ \ 0 \le x \le 4.$ Согласно формуле (3)

$$\int\limits_l xy^2 dl = \int_0^4 x\left(\frac{3}{4}x\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{45}{64}\int_0^4 x^3 dx = 45.$$

Пример 8. Вычислить $\int\limits_l \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, где l – первый виток винтовой линии $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\quad z = bt$.

Решение. Если пространственная кривая задана уравнениями $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ (t_1 \le t \le t_2)$, то

$$\int\limits_l f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\,dt$$

Найдем

$$x^2+y^2+z^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2\,t^2 = a^2+b^2\,t^2.$$

$$\sqrt{\,x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2} = \sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2} = \sqrt{\,a^2+b^2}$$

Тогда

$$\int\limits_l \frac{dl}{x^2+y^2+z^2} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}\,dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\frac{a^2}{b^2}+t^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\,\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}.$$

Криволинейные интегралы второго рода

Пример 9. Вычислить $\int\limits_l y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz$, где l – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;\,0;\,2)$ до $B(3;\,1;\,4)$.

Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через A и B:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2} \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$$

или в параметрической форме $x=2t+1,\ \ y=t,\ \ z=2t+2$. При перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1.

Если l задано функциями $x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$, то

$$\int\limits_l P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+$$

$$+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)dt.$$

Тогда находим:

$$\int\limits_l y^2dx+\left(x^2+z\right)dy+\left(x+y+z^2\right)dz=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2t^2+\left(\ (2t+1)^2+2t+2\right)+\left(2t+1+t+(2t+2)^2\right)2\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2t^2+4t^2+4t+1+2t+2+4t+2+2t+8t^2+16t+8\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^1\left(14t^2+28t+13\right)dt=\frac{95}{3}.$$

Пример 10. Вычислить $\int\limits_{(1;1)}^{(2;3)}(x+3y)dx+(y+3x)dy$.

Решение. Для вычисления интеграла $\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не зависящего от контура интегрирования (т.е. условие $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено), в качестве пути интегрирования следует выбрать ломаную, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), и параллельную осям OX и OY (рис. 7). Найдем:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x+3y\right)=3,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y+3x\right)=3.$$

Данный интеграл не зависит от пути интегрирования. Выбираем в качестве пути интегрирования y = 1 на первом участке и x = 2 на втором участке.

Тогда

$$\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)}\left(x+3y\right)dx+\left(y+3x\right)dy=\int\limits_{1}^{2}\left(x+3\cdot 1\right)dx+\left(1+3x\right)\cdot 0+$$

$$+\int\limits_{1}^{3}\left(2+3y\right)\cdot 0+\left(y+6\right)dy=\int\limits_{1}^{2}\left(x+3\right)dx+\int\limits_{1}^{3}\left(y+6\right)dy=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_1^2+$$

$$+\left(\frac{y^2}{2}+6y\right)\Bigg|_1^3=2+6-\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+18-\frac{1}{2}-6=20\frac{1}{2}.$$

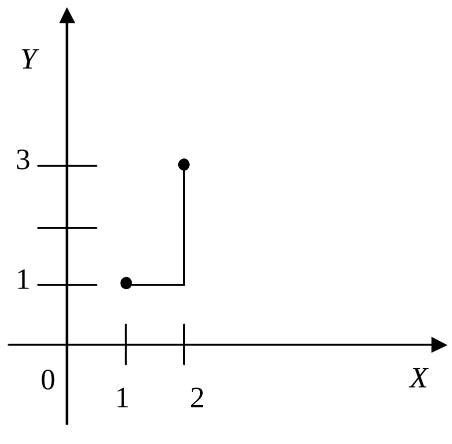


Рис. 7

Поверхностные интегралы первого рода

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(x-3y+2z)d\sigma$, где σ – часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенной в первом октанте (рис. 8, где а – плоскость; б – ее проекция).

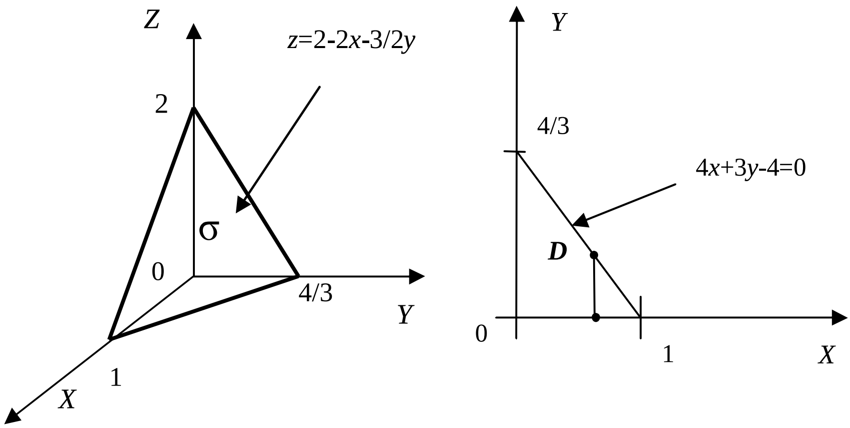


Рис. 8

Решение. Запишем уравнение плоскости в виде $z=2-2x-\dfrac{3}{2}y$.

Воспользуемся формулой

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{D} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

Найдем: $z'_x=-2$, $z'_y=-\dfrac{3}{2}$.

Получим:

$$\iint\limits_{\sigma}(x-3y+2z)\,d\sigma=\iint\limits_{D}\left(x-3y+2\left(2-2x-\frac{3}{2}y\right)\right)\cdot\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}\,dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\iint\limits_{D}(4-3x-6y)\,dxdy=\frac{\sqrt{29}}{2}\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{4/3\,(1-x)}(4-3x-6y)\,dy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 dx\left(4y-3xy-6\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{4}{3}(1-x)}=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1\left(\frac{16}{3}(1-x)-4x(1-x)-\frac{16}{3}(1-x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\left(-\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}+\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+4\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\left(\frac{8}{3}-2+\frac{4}{3}-\frac{16}{9}\right)=\frac{\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{2}{9}=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$

8.2. Задания для практических занятий

8.2.1. Двойной интеграл

Записать двойной интеграл $\iint\limits_D \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,dx\,dy$ в виде повторных, взятых в различных порядках, если область D ограничена кривыми:

1. $y=-\sqrt{9-x^2}$, $x=-1$, $x=3$, $y=0$.

2. $y=x^3$, $y=2-x^2$, $y=0$, $x\ge 0$.

3. $y=\sqrt{x}$, $x^2+y^2=2x$, $y=0$.

4. $y=\sqrt{25-x^2}$, $2x+y=10$, $y=0$, $x=0$.

5. $x=\sqrt{6-y^2}$, $y=x$, $y=\sqrt{3}$.

6. $x=y^2-4$, $x+y=2$.

7. $y=x^2+4x+3$, $x+y=3$, $5y-x+3=0$.

8. Вычислить $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, если D ограничена кривыми $x^2 + y^2 = 4$, $x + y = 2$, $x \geq 0$.

9. Вычислить $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$, если область D определена неравенствами $0 \leq x \leq 2$, $x/2 \leq y \leq \sqrt{x/2}$.

10. Вычислить $\iint\limits_D \cos(x + y) dxdy$, если область D ограничена прямыми $y = x$, $y = \pi$, $x = 0$.

11. Вычислить $\iint\limits_D xe^y dxdy$, если область D ограничена гиперболой $y^2 - x^2 = 1$ и прямыми $x = -1$, $x = 2$, $y \geq 0$.

12. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2} dxdy$, если область D – параллелограмм с вершинами $O(0;\ 0)$; $A(2;\ 2)$, $B(2;\ 10)$; $C(0;\ 8)$.

13. Вычислить $\iint\limits_D dx\,dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, переходя к полярным координатам, если область D ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ и прямыми $y = x$, $y = \sqrt{3} \cdot x$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$.

14. Вычислить $\iint\limits_D x\,dx\,dy (x^2 + y^2)$, переходя к полярным координатам, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2$, параболой $y = x^2$ и осью OX $(x \geq 0)$.

15. Вычислить $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, переходя к полярным координатам, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2x$ и осью OX $(y \geq 0)$.

16. Вычислить $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, переходя к полярным координатам, если область D ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4$ и осью OY $(x \geq 0,\ y \geq 0)$.

17. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, переходя к полярным координатам, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4y$ и прямыми $y=0$, $x=0$ $(x>0)$.

8.2.2. Тройной интеграл

Вычислить $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$:

1. $f(x,y,z)=1/(3x+2y+z+1)^4$, область V ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2. $f(x,y,z)=(x+y^2+z^2)^4$, область V ограничена поверхностями $x=z^2+y^2$, $x=1$, (метод цилиндрических координат).

3. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, если область V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=2y$ (метод сферических координат).

4. $f(x,y,z)=xy/\sqrt{z}$, область V ограничена поверхностями $4z^2=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=1$.

5. $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$, область V ограничена поверхностями $x^2+z^2=4$, $x=0$, $x=3$ (метод цилиндрических координат).

6. $f(x,y,z)=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}$ область V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$ (метод сферических координат).

7. $f(x,y,z)=xyz$, область V ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $f(x,y,z)=y$, область V ограничена поверхностями $y+z=3$, $x^2+y^2=4$, $z=0$ $(x\ge 0,\ y\ge 0)$ (метод цилиндрических координат).

9. $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2$, область V ограничена сферами $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскостью $z=0$ $(z>0)$ (метод сферических координат).

10. $f(x,y,z)=y-1$, область V ограничена поверхностями $x=\sqrt{25-y^2}$, $z=x,\ y=1,\ y=0,\ z=0.$

11. $f(x,y,z)=x^2+y^2$, область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=4,\ z=4-y,\ z=0$ (метод цилиндрических координат).

12. $f(x,y,z)=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$, область V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскостью $z = 0$ ($z > 0$) (метод сферических координат).

13. $f(x,y,z)=x-y$, область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=4,\ z=y^2,\ z=0\ (x\geq 0, y\geq 0,\ z\geq 0)$.

14. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z$, область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2,\ \ x^2+y^2=z\ \ (x\geq 0, y\geq 0)$ (метод цилиндрических координат).

15. $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2$, область V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ (метод сферических координат).

8.2.3. Приложения определенных интегралов к задачам геометрии и механики

1. Найти массу и координаты центра тяжести кругового сектора радиуса α с вершиной в начале координат, заключенного между $y = \alpha$, $y = -x$ ($x \geq 0$), считая плотность постоянной.

2. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостями $z = 0$ и $z = \alpha$, относительно оси OX.

3. Найти статический момент тела, ограниченного плоскостями $x+y+z=\alpha$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, относительно плоскости XOY, если плотность $\mu(x,\ y,\ z)=x$.

4. Найти массу и координаты центра тяжести полушара $x^2+y^2+z^2\leq 1$, $z \geq 0$, если плотность тела в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки до центра шара.

5. Найти момент инерции треугольника, ограниченного прямыми $x+y=\alpha$, $x = \alpha$, $y = \alpha$, относительно оси OX, считая плотность постоянной.

6. Найти статические моменты однородной пластинки, ограниченной кривыми $y=x^2+1$, $y=x+3$, относительно осей координат.

7. Найти массу и координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $y^2=3x$, $y=x$.

8. Найти момент инерции цилиндра, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=R^2$, $z = 0$, $z = 1$, относительно оси OZ, если плотность $\mu(x, y, z)=z$.

9. Найти статические моменты однородного тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z = \alpha$ $(\alpha > 0)$, относительно координатных плоскостей.

10. Найти массу и координаты центра тяжести однородной пластинки, расположенной в 1-й четверти и ограниченной кривыми $y=\sin x$, $y=\cos x$ и осью OY.

11. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного конусом $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z = 2$, относительно плоскости XOY.

12. Найти статический момент пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, относительно плоскости XOY, если плотность в каждой точке тела пропорциональна ординате этой точки.

8.2.4. Криволинейные интегралы первого рода

1. Вычислить $\int\limits_L dl \,/\, (2x+3y)$, если L – отрезок прямой $y=3x+1$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(2;7)$.

2. Вычислить $\int\limits_L x\,y\,dl$, где L – четверть эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, лежащая в первом квадранте (перейти к параметрическим уравнениям эллипса).

3. Вычислить $\int\limits_L \operatorname{arctg}(y/x)\,dl$, где L – часть спирали Архимеда $\rho = 2\varphi$, заключенная внутри круга радиуса R с центром в начале координат.

4. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где L – дуга развертки окружности $x = \alpha(\cos t + \sin t)$, $y = \alpha(\sin t - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

5. Вычислить $\int\limits_L (x + y)\,dl$, где L – первый лепесток лемнискаты Бернулли $r^2 = \alpha^2 \cos 2\varphi$.

6. Вычислить $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dl$, где L – первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

7. Вычислить $\int\limits_{\mathrm{L}} \mathrm{z}^2\,dl\,/\left(x^2 + y^2\right)$, если L – первый виток винтовой линии $x = \alpha\cos x$, $y = \alpha\sin t$, $z = \alpha t$.

8. Вычислить $\int\limits_L y\,dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2\rho y$, отсеченная параболой $x^2 = 2\rho y$.

9. Вычислить $\int\limits_L \left(x/\left(x + 4y\right)\right)dl$, где L – отрезок прямой $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + 3$, заключенный между точками $A(0;3)$, $B(2;7)$.

10. Вычислить $\int\limits_L (x + y)\,dl$, где L – кривая $x = y = R\cdot\cos t/\sqrt{2}$, $z = R\sin t$ от точки $A\left(R/\sqrt{2};\, r/\sqrt{2};\, 0\right)$ до точки $B\,(0;0;R)$.

11. Вычислить $\int\limits_L dl\,/\left(3x + 2y + 1\right)$, где L – отрезок прямой $y = 3x + 2$ от точки $A(0;2)$ до точки $B(2;8)$.

12. Вычислить $\int\limits_L (x + z)\,dl$, где L – дуга кривой $x = t$, $y = \sqrt{3/2}\cdot t^2$, $z = t$ $(0 \le t \le 1)$.

8.2.5. *Криволинейные интегралы второго рода*

Вычислить:

1. $\int\limits_{AB} \left(-x\cos y dx + y\sin x\right) dy$, где AB – отрезок прямой, соединяющий точки $A(0;0)$, $B(\pi, 2\pi)$.

2. $\int\limits_{L} x\,y\,dx + \left(y - x\right) dy$ вдоль линии $y^2 = x$ от точки $O(0;0)$, до точки $B(1;1)$.

3. $\int\limits_{L} \left(x^2 - y^2\right) dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;4)$.

4. $\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2\right) dy$, где L – контур четырехугольника с вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4;4)$, $D(0;4)$, указанными в порядке обхода.

5. $\int\limits_{L} (2\alpha - y)dx - (\alpha - y)dy$, где L – первая арка циклоиды $x = \alpha(t - \sin t)$, $y = \alpha(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. $\int\limits_{L} (\,y - z\,)\,dx + (\,z - x\,)\,dy + (\,x - y\,)\,dz$, где L – виток винтовой линии $x = \alpha\cos t$, $y = \alpha\sin t$, $z = bt$, $y = \alpha\sin t$ $0 \le t \le 2\pi$.

7. $\int\limits_{L} y\,z\,dx + x\,y\,dz + x\,y\,dz$, где L – дуга винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \alpha t / 2\pi$ от точки ее пересечения с плоскостью $z = 0$ до точки пересечения с плоскостью $z = \alpha$.

8. $\int\limits_{L} \left(y\,x^3 + e^y\right) dx + \left(x\,y^3 + x\,e^y - 2\,y\right) dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

9. $\int\limits_{L} (x\,dx - y\,dy)/\left(x^2 + y^2\right)$, где L – эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

10. $\int\limits_{L} (\,x\,y + x + y\,)\,dx + (\,x\,y + x - y\,)\,dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = \alpha x$ в положительном направлении.

11. $\int\limits_L x\,dy$, где L – контур треугольника, образованного осями координат и прямой $3x+2y-6=0$, взятый в положительном направлении.

12. $\int\limits_L (x+y)^2 dx-(x-y)^2 dy$, где L – замкнутый контур, составленный из отрезка прямой между точками $O(0;0)$ и $B(1;1)$ и дуги параболы $y=x^2$, проходимой в положительном направлении.

13. $\int\limits_{(1,2)}^{(2,1)} (y\,dx-x\,dy)/\,y^2$ по пути, не пересекающему ось OX.

14. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} \left(x^4+4y^3\cdot x\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy$.

15. $\int\limits_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$.

8.2.6. Поверхностные интегралы первого рода

Вычислить:

1. $\iint\limits_{\sigma} x^2y^2 d\sigma$, где σ – полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

2. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, где σ – боковая поверхность конуса $x^2/a^2+y^2/a^2-z^2/b^2=0$, $(0\le z\le b)$.

3. $\iint\limits_{\sigma} xyz\,d\sigma$, где σ – часть плоскости $x+y+z=1$, расположенная в первом актанте.

4. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$, где σ – полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

5. $\iint\limits_{\sigma} (z+2x+4/3y)d\sigma$, где σ – часть плоскости $x/2+y/3-z/4=1$, лежащая в первом октанте.

6. $\iint\limits_{\sigma} x\,d\sigma$, где σ – часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, лежащая в первом октанте.

7. $\iint\limits_{\sigma} y\,d\sigma$, где σ – полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

8.2.7. Поверхностные интегралы второго рода

Вычислить:

1. $\iint\limits_{\sigma} z^2\,dxdy$, где σ – полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, внешняя сторона.

2. $\iint\limits_{\sigma} yz\,dxdy$, где σ – внешняя сторона замкнутой поверхности, состоящей из цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=H$.

3. $\iint\limits_{\sigma} y^2\,dxdz$, где σ – полусфера $y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$, внешняя сторона.

4. $\iint\limits_{\sigma} xz\,dxdy+xydxdz+yzdxdz$, где σ – внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

5. $\iint\limits_{\sigma} xy\,dxdz$, где σ – внешняя сторона поверхности, составленной из цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=H$.

6. $\iint\limits_{\sigma} x\,dydz+ydxdz+zdxdy$, где σ – внешняя сторона замкнутой поверхности, составленной из цилиндра $x^2+y^2=2y$ и плоскостей $z=0$ и $z=2$.

7. $\iint\limits_{\sigma} (2x+3y-3z)dxdz$, где σ – внешняя сторона пирамиды, составленной из плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x-3y+2z=0$.

8.2.8. Вычисления при помощи криволинейных и поверхностных интегралов

1. Вычислить длину дуги линии $x = \alpha e^t \cos t$, $y = \alpha e^t \sin t$, $z = \alpha e^t$ от точки $O(0;0;0)$ до $A(\alpha;0;\alpha)$.

2. Вычислить массу участка линии $y = \ln x$ между точками с абсциссами α и b, если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

3. Вычислить длину кардиоиды $\rho = \alpha(1 + \cos\varphi)$.

4. Вычислить длину линии $\rho = \alpha \sin^3 \varphi/3$.

5. Вычислить длину кривой (петли) $9\alpha y^2 = x(x - 3\alpha)^2$.

6. Вычислить массу цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = H$, если плотность цилиндра обратно пропорциональна квадрату расстояния точки поверхности до начала координат.

7. Вычислить площадь поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 4\alpha x$, отсеченного плоскостью $x = 3\alpha$.

8. Вычислить площадь части поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между XOY и поверхностью $z = R + x^2/R$.

9. Вычислить массу поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если плотность обратно пропорциональна кубу расстояния точки поверхности до точки (0;0;1).

9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

9.1. Решение типовых задач

Скалярные поля

Найти линии и поверхности уровня следующих скалярных полей:

Пример 1. Указать линию уровня, проходящую через точку $M_0\left(2;\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, для скалярного поля $u(M) = u(x,y) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25}$.

Решение. Плоскому полю $u(M)=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}$ соответствует семейство линий уровня $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=c, \quad c<0$, где потенциал поля $u(M)$ сохраняет постоянное значение.

Данные линии уравнения есть эллипсы с полуосями $a=4\sqrt{c}$, $b=5\sqrt{c}, \quad c<0$ (рис. 1). Найдём эллипс, проходящий через точку M_0:

$\dfrac{2^2}{16}+\dfrac{\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}{25}=n, \quad \Rightarrow c=1$, т.е. искомая линия уровня – эллипс $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ с центром в начале координат и полуосями $a=4, \; b=5$.

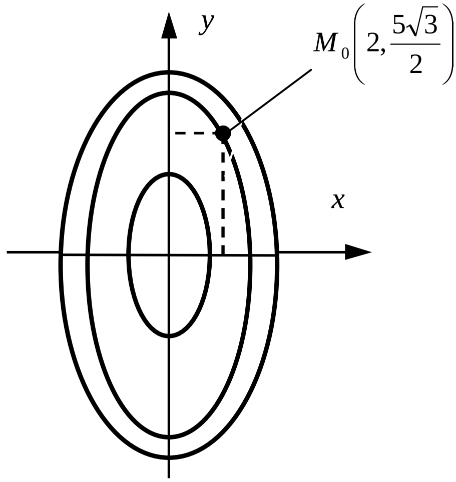


Рис. 1

Пример 2. $u(M)=u(r,\varphi)=\dfrac{1}{r}\sin\varphi, \; r\neq 0$.

Решение. Потенциал $u(M)=\frac{1}{r}\sin\varphi$ определяет поле на всей плоскости, кроме точки $r=0$. Уравнения линий уровня $\frac{\sin\varphi}{r}=c$, $r=\frac{1}{c}\sin\varphi=c^*\sin\varphi$, $c,c^*\neq 0$ в полярной системе координат определяют множество окружностей (рис. 2).

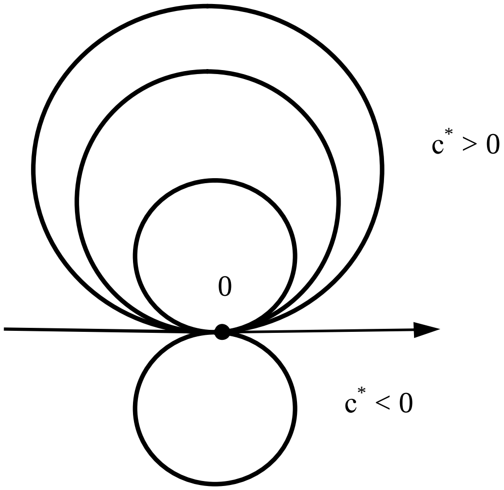


Рис. 2

Пример 3. Указать поверхность уровня для $u(M)=u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$.

Решение. Пространственному полю $u(M)=x^2+y^2-z^2$ соответствует однопараметрическое семейство поверхностей уровня $x^2+y^2-z^2=c$.

При $c>0$ поверхностями уровня являются однополостные гиперболоиды, при $c<0$ – двуполостные гиперболоиды, при $c=0$ – круговой конус с вершиной в начале координат (рис. 3 а, б, в, где а – однополостный гиперболоид; б – двуполостный гиперболоид; в – круговой конус).

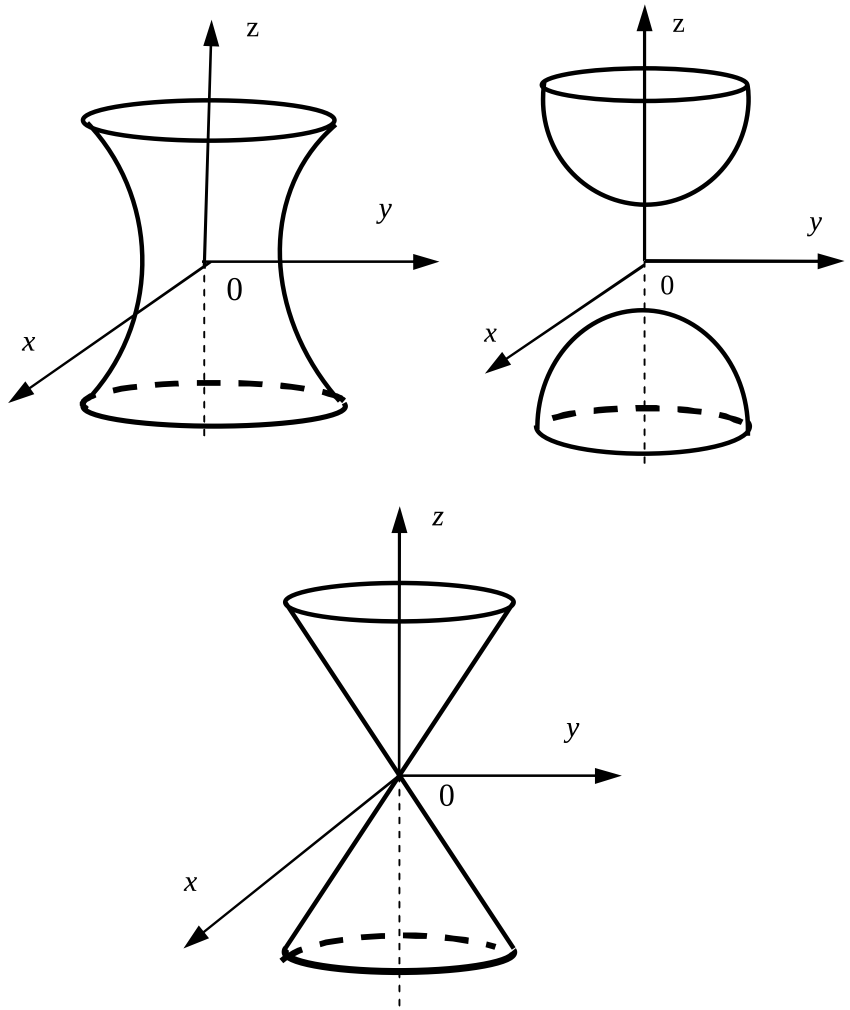


Рис. 3

Производная по направлению, градиент скалярного поля

Пример. 4 Задано скалярное поле $u(M) = u(x, y, z) =$ $= x^2 y - xz^3 + 5$. Вычислить производную $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}$ в направлении $\bar{\ell}(2;3;-6)$ и градиент этого поля в точке $M_0(1;-2;1)$

Решение. Найдём частные производные функции $u(x, y, z)$ в точке M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.(2xy - z^3)\right|_{M_0} = -5; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.x^2\right|_{M_0} = 1;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.-3z^2 x\right|_{M_0} = -3.$$

Учитывая, что $\left|\bar{\ell}\right| = \sqrt{\ell_o^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, найдём направляющие косинусы вектора $\bar{\ell}$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = \frac{3}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{6}{7}.$$

Тогда производная по направлению $\bar{\ell}$ в точке M_0 примет вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}$$

$$\cos\gamma = -5 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{3}{7} - 3 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{11}{7}$$

Поскольку $\left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_{M_0} > 0$, поле в точке M_0 в направлении $\bar{\ell}$ возрастает. Построим вектор-градиент функции u в точке M_0:

$$\overline{\text{grad}}\; u(M_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \bar{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \bar{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \bar{k} = -5\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}.$$

Легко видеть, что $\left|\overline{\text{grad}}\, u\right| > \left(\frac{\partial u}{\partial \ell}\right)_{M_0}$.

Векторные поля

Пример. Найти векторную линию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} - y\overline{j} - 2z\overline{k}$, проходящую через точку $M_0(1;-1;2)$

Решение. Запишем систему дифференциальных уравнений векторных линий

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}, \text{ т.е. } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-2z} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dy}{y}, \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{2z}. \end{cases}$$

Интегрируя уравнения, находим: $\begin{cases} \int \dfrac{dx}{x} = -\int \dfrac{dy}{y} \\ \int \dfrac{dy}{y} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dz}{z} \end{cases}$, $xy = c_1$,. $y^2 = c_2 z$.

Из условия прохождения искомой линии через точку $M_0(1;-1;2)$ определим $c_1 = -1$, $n_2 = \dfrac{1}{2}$. В результате получим систему уравнений $\begin{cases} xy = -1, \\ y^2 = \dfrac{z}{2}. \end{cases}$ которые описывают линию пересечения гиперболического цилиндра $xy = -1$ с параболическим цилиндром $y^2 = \dfrac{z}{2}$.

Поток, дивергенция векторного поля

Пример 6. Найти поток вектора $\overline{a}(1;2;2)$ через часть плоскости $x + y + z = 1$ в пределах первого октанта (рис. 4).

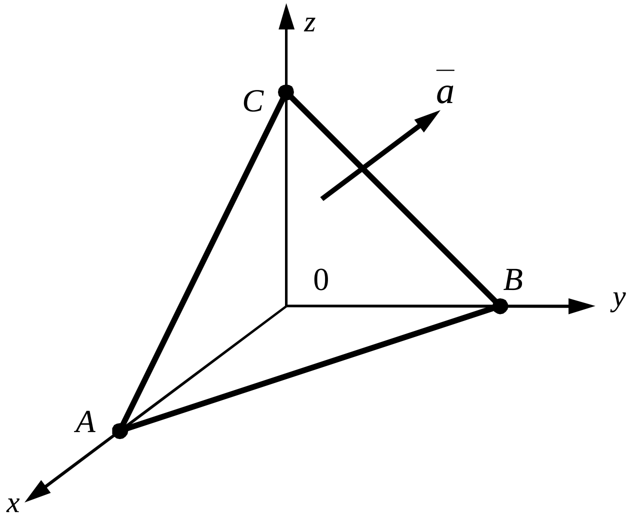


Рис. 4

Решение. Поток вектора $\overline{a}(P,Q,R)$ через поверхность S с единичным вектором нормали $\overline{n}^0$ $\overline{n}_o$

$$\prod=\iint\limits_S\left(\overline{a},\overline{n^0}\right)ds=\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_D\frac{1}{F_z'}(F_x'P\left(x,y,z\right)+$$

$$+F_y'Q\left(x,y,z\right)+F_z'R\left(x,y,z\right))dxdy\ ,$$

где D – проекция поверхности S на плоскость OXY, $F\left(x,y,z\right)=0$ – неявное уравнение поверхности S.

В нашем случае поверхность S, определяемая уравнением $x+y+z=0$, есть треугольник ABC с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, область D есть треугольник ABO, проекция ABC на плоскость OXY.

$$F_x'=F_y'=F_z'=1,$$

$$P\left(x,y,z\right)=-1;\ \ Q\left(x,y,z\right)=2;\ \ R\left(x,y,z\right)=2\ .$$

Тогда $\quad \prod = \iint\limits_D \left(1(-1)+1\cdot 2+1\cdot 2\right)dxdy = 3\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-x} dy\right)dx = \frac{3}{2}$.

Замечание. Данную задачу можно было решать проще, учитывая, что вектор $\overline{a}$ во всех точках имеет неизменяющиеся координаты, скорость потока $\nu = \text{nonst}$ S – плоская поверхность. Тогда нормаль $\overline{n}$ плоскости S есть $\overline{n}(1;1;1)$ $n^0\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, ΔABC – равносторонний со сторонами, равными $\sqrt{2}$, и площадью $S_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и поток П определяется объемом $V = \nu S_\Delta$ несжимаемой жидкости, протекающей через S:

$$\prod = \nu S_\Delta = \left(\overline{a}, \overline{n^0}\right)S_\Delta = \left(-1\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Пример 7. Найти поток векторного поля $\overline{F} = x^2\overline{i} + x\overline{j} + xz\overline{k}$ через верхнюю сторону поверхности σ, являющейся частью параболоида вращения $y = x^2 + z^2$ расположенной в первом октанте между плоскостями $y = 0$ и $y = 1$ (рис. 5).

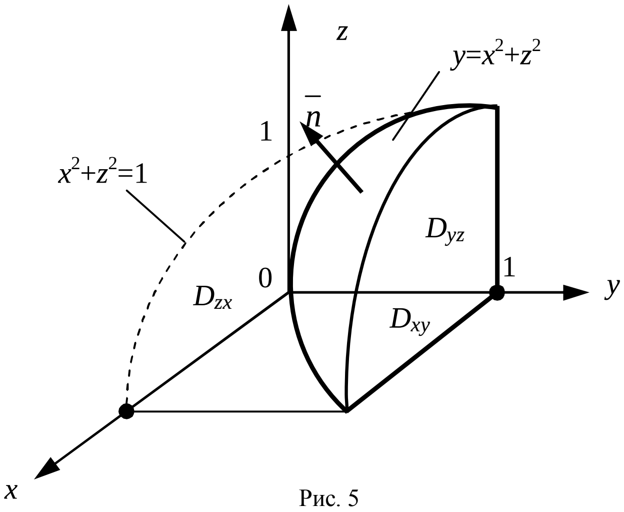


Рис. 5

Решение. Выбор стороны на поверхности σ равносилен выбору нормального вектора $\overline{n^0}$ в любой ее точке, и для верхней стороны σ угол $\left(\widehat{\overline{n^0}, z}\right)$ между вектором $\overline{n^0}$ и осью OZ подчиняется условию $0 \le \left(\widehat{\overline{n^0}, z}\right) \le \frac{\pi}{2}$, отсюда $\cos\left(\widehat{\overline{n^0}, z}\right) \ge 0$. Тогда поток поля $\overline{F}$

$$\prod = \iint_{\sigma} \left(\overline{F}, \overline{n^0}\right) d\sigma = \iint_{\sigma} x^2 dydz + xdzdx + xzdxdy .$$

Переходя в правой части от поверхностных интегралов к двойным по проекциям поверхности σ на координатные плоскости, получим

$$\prod = + \iint_{D_{yz}} \left(y - z^2\right) dydz - \iint_{D_{zx}} xdzdx + \iint_{D_{xy}} x\sqrt{y - x^2}\, dxdy .$$

В первом интеграле $x^2 = y - z^2$, в третьем $z = \sqrt{y - x^2}$ из уравнения параболоида. Знаки перед двойными интегралами определены из условий, что

$$\cos\left(\widehat{\overline{n^0}, x}\right) \ge 0,\ \cos\left(\widehat{\overline{n^0}, y}\right) \le 0,\ \cos\left(\widehat{\overline{n^0}, z}\right) \ge 0 .$$

Вычислим двойные интегралы, учитывая заданные границы поверхности σ:

$$\iint_{D_{yz}} \left(y - z^2\right) dydz = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \left(y - z^2\right) dz = \frac{4}{15},$$

$$-\iint\limits_{D_{zx}} xdzdx = -\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = -\frac{1}{3},$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{y-x^2}dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} x\sqrt{y-x^2}dx = \frac{2}{15}.$$

Подставляя найденные значения двойных интегралов, получим:

$$\prod = \frac{4}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{1}{15}.$$

Замечание (об определении знаков косинусов углов нормального вектора $\overline{n^0}$ с осями координат). Знаки определяются, исходя из наглядных соображений, что можно проверить с помощью формулы $\overline{n^0} = \pm\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}$, определяющей единичный нормальный вектор $\overline{n^0}$ к поверхности $\varphi(x,y,z) = 0$. В данном случае $\varphi(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$. Следовательно $\overline{n^0} = \pm\frac{2x\bar{i} - \bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}$, откуда $\cos\left(\widehat{\overline{n^0}, z}\right) = \left(\overline{n^0}, \bar{k}\right) = \pm\frac{2z}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}$. По условию задачи $z \geq 0$ и $\cos\left(\widehat{\overline{n^0}, z}\right) \geq 0$, поэтому в последней формуле, а значит, и в формуле, определяющей $\overline{n^0}$, следует взять знак «+». Тогда

$$\cos\left(\widehat{\overline{n^0}, x}\right) = \left(\overline{n^0}, \bar{i}\right) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}} \geq 0.$$ Так как по условию $x \geq 0$,

$$\cos\left(\widehat{\overline{n^0}, y}\right) = \left(\overline{n^0}, \bar{j}\right) = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}} < 0.$$

Пример 8. Определить дивергенцию векторного поля
$\bar{a}(M) = \left(2x^2y - 3xz^3 + 5x^3yz\right)\,\bar{i} + \left(4xy^3 + xyz + 8z^2\right)\bar{j} +$
$+\left(6xy^2z^3 - 7xz^2 + 9yz\right)\,\bar{k}$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

Является ли данная точка источником или стоком поля?

Решение. Дивергенция

$$\operatorname{div}\,\bar{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Здесь

$$a_x = 2x^2y - 3xz^3 + 5x^3yz,$$
$$a_y = 4xy^3 + xyz + 8z^2,$$
$$a_z = 6xy^2z^3 - 7xz^2 + 9yz.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\,\bar{a}(M) = \left(4xy - 3z^3 + 15x^2yz\right) + \left(12xy^2 + xz\right) + \left(18xy^2z^2 - 14xz + 9y\right) =$$

$$= 4xy - 3z^2 + 15x^2yz + 12xy^2 - 13xz + 18xy^2z^2 + 9y$$

$$\operatorname{div}\,\bar{a}\Big|_{M_0} = 4 - 3 + 15 + 12 - 13 + 18 + 9 = 42.$$

Так как $\operatorname{div} a(M) = 42 > 0$, то точка M_0 является источником, питающим поток.

Пример 9. Найти дивергенцию градиента скалярного поля $u(M) = xy^2z^3$.

Решение.

$$\overline{\text{grad}}\ u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\bar{k} = y^2z^3\bar{i} + 2xyz^3\bar{j} + 3xy^2z^2\bar{k}$$

$$\text{div}\ \overline{\text{grad}}\ u(M) = \frac{\partial\left(y^2z^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(2xyz^3\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(3xy^2z^2\right)}{\partial z} = 0 + 2xz^3 + 6xy^2z =$$

$$= 2xz\left(z^2 + 3y^2\right).$$

Пример 10. Найти поток векторного поля $\bar{F} = x^2\bar{i} + x\bar{j} + xz\bar{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности σ, расположенной в первом октанте и образованной частями параболоида вращения $y = x^2 + z^2$ и плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 6).

Решение. По формуле Остроградского – Гаусса поток вектора через замкнутую поверхность $\prod = \iint\limits_{\sigma}\left(\bar{F}, \overline{n^0}\right)d\sigma = \iiint\limits_{\sigma}\text{div}FdV$, где $\overline{n^0}$ – внешняя нормаль поверхности σ. Находим:

$$div\bar{F} = \frac{dF_x}{\partial x} + \frac{dF_y}{\partial y} + \frac{dF_z}{\partial z} = 2x + 0 + x = 3x.$$

Учитывая заданные границы замкнутой поверхности σ, получим:

$$\prod = \iiint\limits_{V} 3xdxdydz = 3\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xdx \int_0^{\sqrt{y-x^2}} dz = 3\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x\sqrt{y - x^2}dx = \int_0^1 y^{\frac{3}{2}}dy = \frac{2}{5}.$$

Циркуляция векторного поля

Пример 11. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{F} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$ по контуру треугольника ABC, где $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$ (рис. 6).

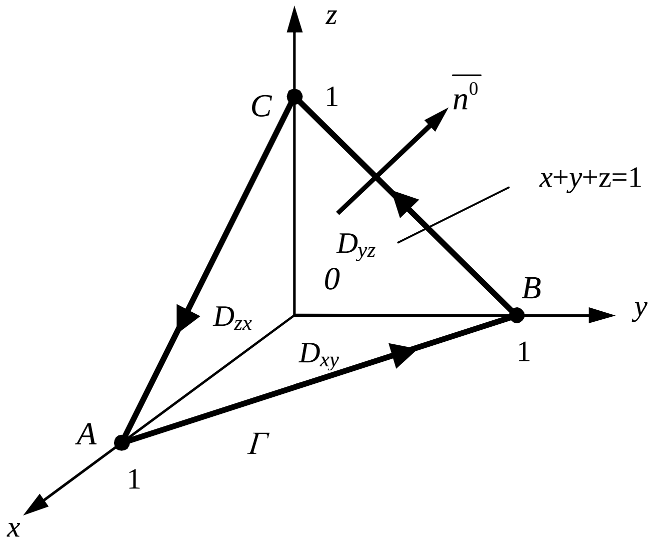


Рис. 6

Решение.
<u>1-й способ.</u>

Используем формулу Стокса $C = \oint\limits_{A} \overline{F} d\overline{r} = \iint\limits_{\sigma} \overline{n^0} rot \overline{F} d\sigma$, где направление обхода контура Г должно быть положительным (указано на рис. 6).

Найдем:

$$\mathrm{rot}\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(5x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(x+3y+z) \right] \overline{i} -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(5x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(x-2z) \right] \overline{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+3y+z) - \frac{\partial}{\partial y}(x-2z) \right] \overline{k} = -7\overline{j} + \overline{k}$$

В качестве поверхности σ возьмем треугольник ABC, который расположен на плоскости $x+y+z=1$, что легко определить с помощью координат точек A, B, C. Берем верхнюю сторону этого треугольника (нормальный вектор $\overline{n^0}$ выходит из выбранной стороны поверхности). Тогда циркуляция

$$C=\iint_{\sigma}\overline{n}\cdot\operatorname{rot}\overline{F}=\iint_{\sigma}\left(\operatorname{rot}\overline{F}\right)_x dydz+\left(\operatorname{rot}\overline{F}\right)_y dzdx+\left(\operatorname{rot}\overline{F}\right)_z dxdy=$$

$$\iint_{\sigma}-7dzdx+dxdy=-7\iint_{D_{zx}}dzdx+\iint_{D_{xy}}dxdy=-7\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dz+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy=-3,$$

Здесь $\left(\operatorname{rot}\overline{F}\right)_x$, $\left(\operatorname{rot}\overline{F}\right)_y$, $\left(\operatorname{rot}\overline{F}\right)_z$ – координаты вектора $\operatorname{rot}\overline{F}$, т.е. его проекции на оси координат,

D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} – проекции треугольник ABC на координатные плоскости.

2-й способ.

Вычислим циркуляцию C поля по определению циркуляции: $C=\oint_A \overline{F}d\overline{r}=\oint_A F_x dx+F_y dy+F_z dz$, где $F_x=x-2z$, $F_y=x+3y+z$, $F_z=5x+y$.

Контур Г состоит из трех отрезков: AB, BC, CA. Тогда $C=C_{AB}+C_{BC}+C_{CA}$.

На отрезке AB:

$$z=0, x+y=1, y=1-x, dy=-dx$$

$$\overline{F}=x\overline{i}+\left(x+3y\right)\overline{j}+\left(5x+y\right)\overline{k}, d\overline{r}=dx\cdot\overline{i}+dy\cdot\overline{j}$$

$$\overline{F}\cdot d\overline{r}=xdx+\left(x+3y\right)dy$$

$$C_{AB}=\int_{AB}\overline{F}\cdot d\overline{r}=\int_{AB}xdx+\left(x+3y\right)dy=\int_1^0\left(x-x-3\left(1-x\right)\right)dx=\frac{3}{2}.$$

На отрезке BC:

$$x=0, y+z=1, z=1-y, dz=-dy$$

$$\overline{F}=-2z\overline{i}+(3y+z)\overline{j}+y\overline{k}, d\overline{r}=dy\cdot\overline{j}+dz\cdot\overline{k}$$

$$C_{BC}=\int\limits_{BC}\overline{F}\cdot d\overline{r}=\int\limits_{BC}(3y+z)dy+ydz=\int\limits_{1}^{0}(3y+1-y-y)dy=-\frac{3}{2}.$$

На отрезке CA:

$$y=0, x+z=1, dz=-dx$$

$$C_{CA}=\int\limits_{CA}\overline{F}\cdot d\overline{r}=\int\limits_{CA}(x-2z)dx+5xdz=\int\limits_{0}^{1}(x-2+2x-5)dx=-3.$$

Отсюда $N=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-3=-3$.

Потенциальные, соленоидальные, гармонические поля

Пример 12. Показать, что поле $\overline{F}=\left(x^2-2yz\right)\overline{i}+\left(y^2-2xz\right)\overline{j}+$ $+\left(z^2-2xy\right)\overline{k}$ является потенциальным. Найти его потенциал.

Решение. Найдем:

$$\operatorname{rot}\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-2yz & y^2-2xz & z^2-2xy\end{vmatrix}=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(z^2-2xy\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(y^2-2xz\right)\right]\overline{i}-$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(z^2-2xy\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2-2yz\right)\right]\overline{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2-2xz\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-2yz\right)\right]\overline{k}=$$

$$=(-2x+2x)\overline{i}-(-2y+2y)\overline{j}+(-2z+2z)\overline{k}=\overline{0}.$$

Так как $\operatorname{rot}\overline{F} = \overline{0}$ – есть нулевой вектор, то поле $\overline{F}$ является потенциальным. Его потенциал находим по формуле

$$u(x,y,z) = \int_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{x_0}^{x} F_x(x,y_0,z_0)dx +$$

$$+\int_{y_0}^{y} F_y(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} F_z(x,y,z)dz = \int_{x_0}^{x}\left(x^2 - 2y_0 z_0\right)dx +$$

$$+\int_{y_0}^{y}\left(y^2 - 2xz_0\right)dy + \int_{z_0}^{z}\left(z^2 - 2xy\right)dz = \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2xy + c$$

где $\quad c = 2x_0 y_0 z_0 - \frac{1}{3}\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right)$

точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка рассматриваемой области.

Пример 13. Показать, что поле $\overline{F} = xy\overline{i} + yz\overline{j} - z\left(y + \frac{z}{2}\right)\overline{k}$ является соленоидальным. Будет ли данное поле гармоническим.

Решение. Векторное поле $\overline{F}$ является соленоидальным, если в каждой точке поля $\operatorname{div}\overline{F} = 0$.

$$\operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-z\left(y + \frac{z}{2}\right)\right) = y + z - y - z = 0,$$

Значит, данное поле соленоидальное.

Векторное поле гармоническое, если оно потенциальное и соленоидальное. Так как

$$\operatorname{rot}\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & -zy-\dfrac{z^2}{2}\end{vmatrix}=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-zy-\frac{z^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}(yz)\right]\bar{i}-$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-zy-\frac{z^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}(xy)\right]\bar{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(yz)-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]\bar{k}=$$

$$=(-z-y)\bar{i}-(0-0)\bar{j}+(0-x)\bar{k}=-(y+z)\bar{i}-x\bar{k}\neq\bar{0}$$

то поле не является потенциальным. Следовательно, оно не гармоническое.

9.2. Задания для практических занятий

9.2.1. Найти линии уровня плоского скалярного поля:

1. $u=x+y$; 2. $u=xy$; 3. $u=\sqrt{x^2+y^2}$; 4. $u=\dfrac{y}{x^2}$.

9.2.2. Найти линию уровня поля, проходящую через точку M_0

1. $u=4x^2+9y^2-8x+18y-21$, $M_0(1;\ 1)$;

2. $u=x^2+4x-3y+10$, $M_0(4;\ 15)$.

9.2.3. Найти поверхности уровня скалярного поля

1. $u=x-y-z$. 2. $u=\dfrac{x^2+y^2}{z}$.

9.2.4. Найти поверхность уровня скалярного поля, проходящую через точку M_0:

1. $u = 3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 13$, M_0(-1; 1; 1);

2. $u = z^2 - 2y^2 - 2z - 4y - 8x + 16$, M_0(3; -1; 1).

9.2.5. Вычислить производную функции:

1. $u = \ln\left(3 - x^2\right) + xy^2 z$ в точке M_1(1; 3; 2) по направлению к точке M_2(0; 5; 0).

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке M_0(3; 4) по направлению: а) вектора $\overline{a}(1;1)$, б) радиус-вектора точки M_0.

9.2.6. Найти градиент скалярного поля:

1. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. 2. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$.

9.2.7. Найти градиент поля в указанной точке M_0; вычислить его величину и направление:

1. $u = x^2 yz + xy^2 z + xyz^2$, M_0(1; 1; 1).

2. $u = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + xy - 2yz + 5xz$, M_0(2; -1; 1).

3. $u = \dfrac{x}{y} + z^2$, M_0(2; 1; -1).

9.2.8. Найти векторные линии векторного поля:

1. $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j}$. 2. $\overline{a} = y^2\overline{i} - x^2\overline{j}$.

3. $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} - z\overline{k}$. 4. $\overline{a} = (z - y)\overline{i} + (x - z)\overline{j} + (y - x)\overline{k}$.

9.2.9. Найти векторные линии поля $\overline{\operatorname{grad} u}$, где $u = x^2 - 2y + z^2$.

9.2.10. Найти дивергенцию векторного поля:

1. $\bar{a} = (x^2 - y^2)\bar{i} + (x^3 + y^3)\bar{j}$.

2. $\bar{a} = xyz\bar{i} + (2x + 3y + z)\bar{j} + (x^2 + z^2)\bar{k}$.

3. $\bar{a} = \overline{\operatorname{grad} u}$, где $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

9.2.11. Вычислить дивергенцию векторного поля в точке M_0:

1. $\bar{a} = (xy + z^2)\bar{i} + (yz + x^2)\bar{j} + (zx + y^2)\bar{k}$, $M_0(1; 3; -5)$.

2. $\bar{a} = x\bar{i} + y^2\bar{j} + z^3\bar{k}$, $M_0(-2; 4; 5)$.

3. $\bar{a} = xy^2\bar{i} + x^2y\bar{j} + z^3\bar{k}$, $M_0(1; -1; 3)$.

9.2.12. Найти ротор векторного поля

1. $\bar{a} = y^2z\bar{i} + xz^2\bar{j} + x^2y\bar{k}$.

2. $\bar{a} = xyz\bar{i} + (2x + 3y - z)\bar{j} + (x^2 + y^2)\bar{k}$.

9.2.13. Найти ротор векторного поля $\bar{a} = xyz\bar{i} + (x + y + z)\bar{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\bar{k}$ в точке $M_0(1; -1; 2)$:

9.2.14. Вычислить поток векторного поля

1. $\bar{a} = 2x\bar{i} + y\bar{j} + 3z\bar{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

2. $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через:

а) боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \le z^2$, $(0 \le z \le h)$;

б) основание этого конуса.

3. $\overline{a} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}$ через:

а) боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \le a^2$, $(0 \le z \le h)$;

б) полную поверхность этого цилиндра.

4. $\overline{a} = x\overline{i} - 2y\overline{j} + z\overline{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную поверхностями $1 - z = x^2 + y^2$, $z = 0$ в направлении внешней нормали.

5. $\overline{a} = 2x\overline{i} + z\overline{k}$ в направлении внешней нормали к поверхности тела, ограниченного поверхностями $z = 3x^2 + 2y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

6. $\overline{a} = (x - y)\overline{i} + (z - y)\overline{j} + (z - x)\overline{k}$ применяя формулу Остроградского – Гаусса:

а) через поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в сторону внешней нормали;

б) через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в сторону внешней нормали.

9.2.15. Даны векторное поле $\overline{a}$ и плоскость p, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее плоскости p; A – контур, ограничивающий σ; $\overline{n}$ – нормаль к σ, направленная вне пирамиды V. Вычислить:

а) поток векторного поля $\overline{a}$ через поверхность σ в направлении нормали $\overline{n}$;

б) циркуляцию векторного поля $\overline{a}$ по замкнутому контуру A по определению и применив теорему Стокса к контуру A и ограниченной им поверхности σ с нормалью $\overline{n}$;

в) поток векторного поля $\overline{a}$ через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно и применив теорему Остроградского – Гаусса. Сделать чертеж.

1. $\overline{a} = (x + z)\overline{i}$, $\quad x + y + z - 2 = 0$.

2. $\overline{a} = (y - x - z)\overline{j}$, $\quad 2x - y + 2z - 2 = 0$.

3. $\overline{a} = (x + 7z)\overline{k}$, $\quad 2x + y + z - 4 = 0$.

9.2.16. Найти циркуляцию векторного поля:

1. $\overline{a} = y\overline{i} - 2z\overline{j} + x\overline{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением однополостного гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $y = x$.

2. $\overline{a} = z\overline{i} - x\overline{j} + y\overline{k}$ вдоль контура A $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$ в положительном направлении обхода относительно орта $\overline{n^0} = \overline{k}$.

3. $\overline{a} = yz\overline{i} + 2xz\overline{j} + y^2\overline{k}$ по линии A пересечения полусферы $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ с цилиндром $x^2 + y^2 = 16$ в положительном направлении обхода относительно орта $\overline{n^0} = \overline{k}$.

4. $\overline{a} = y^2\overline{i} - x^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ по контуру, полученному при пересечении параболоида $x^2 + z^2 = 1 - y$ с координатными плоскостями.

9.2.17. Проверить, является ли векторное поле $\overline{a}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}$ найти его потенциал:

1. $\overline{a} = (6x + 7yz)\overline{i} + (6y + 7xz)\overline{j} + (6z + 7xy)\overline{k}$.

2. $\overline{a} = 2xy\overline{i} + (x^2 - 2yz)\overline{j} - y^2\overline{k}$.

3. $\overline{a} = (8x - 5yz)\overline{i} + (8y + 5xz)\overline{j} + (8z - 5xy)\overline{k}$.

4. $\overline{a} = (3x^2y - y^3)\overline{i} + (x^3 - 3xy^2)\overline{j}$.

5. $\overline{a} = (3x - yz)\overline{i} + (3y - xz)\overline{j} + (3z - xy)\overline{k}$.

10. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1. Решение типовых задач

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными; с однородными функциями

Пример 1. Решить уравнение с разделяющимися переменными:

$$\sqrt{xy}+\sqrt{x})y^{/}-y=0\,.$$

Общее решение. Выразим производную через дифференциалы переменных: $y'=\dfrac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и разложим коэффициент при dy на множители:

$$(\sqrt{y}+1)\sqrt{x}dy-ydx=0\,.$$

Далее разделяем переменные:

$$\frac{\sqrt{y}+1}{y}dy-\frac{1}{\sqrt{x}}dx=0\,.$$

и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int\left(y^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{y}\right)dy-\int x^{-\frac{1}{2}}dx=c$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}}dy+\int\frac{dy}{y}-\int x^{-\frac{1}{2}}dx=c$$

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\ln|y|-\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=c$$

$$2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=c$$

Частное решение.

$$y = y' \cos^2 x \ln y, \quad y(\pi) = 1.$$

Умножаем на $\dfrac{1}{\cos^2 xy} dx$, разделяем переменные $\dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \dfrac{\ln y}{y} dy$.

Интегрируем и находим общий интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\ln y}{y} dy$$

$$\int d(\mathrm{tg}x) = \int \ln y d(\ln y) + c$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{1}{2} \ln^2 y + c$$

Подставляем начальные значения $x = \pi$, $y = 1$, определяем значение c:

$$tg\pi = \frac{1}{2} \ln^2 1 + c, \quad c = 0.$$

Искомый частный интеграл $\ln^2 y - 2\mathrm{tg}x = 0$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка; уравнение Бернулли

Пример 2. Решить ***у***равнение

$$x^2 y^2 y' + xy^3 = 1.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на $x^2 y^2$:

$$y' + \frac{y}{x} = y^{-2} \frac{1}{x^2}.$$

Это уравнение Бернулли.

Заменив функцию y по формуле $y = uv$, имеем:

$$y' = u'v + uv', \qquad u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -\frac{1}{x^2u^2v^2}$$

$$\text{или} \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -\frac{1}{x^2u^2v^2}.$$

Так как одну из вспомогательных функций (u или v) можно взять произвольно, то выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения $v' + \dfrac{v}{x} = 0$. Для отыскания u получим уравнение $u'v = -\dfrac{1}{x^2u^2v^2}$.

Решая первое уравнение, находим v как простейший частный интеграл этого уравнения:

$$\frac{dv}{v} + \frac{dx}{x} = 0, \qquad \ln|v| + \ln|x| = 0,$$

$$\ln|v| = -\ln|x|, \;\; v = \frac{1}{x}.$$

Подставляя v во второе уравнение и решая его, находим u как общий интеграл этого уравнения:

$$\frac{u'}{x} + \frac{1}{u^2}, \qquad u^2du = xdx,$$

$$\frac{u^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c, \qquad u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c}.$$

Искомый общий интеграл данного уравнения есть выражение $y = uv = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2x} + \dfrac{c}{x^3}}$.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Пример 3. Решить уравнение в полных дифференциалах:

$$(2y-3)dx+\left(2x+3y^2\right)dy=0.$$

Решение. Вначале убеждаемся, что данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, т.е. что выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\quad P'_y=(2y-3)'_y=2$, $\quad Q'_y=(2x+3y^2)'_x=2$.

Находим неопределённый интеграл:

$$u(x,y)=\int Pdx=\int(2y-3)dx=2xy-3x+\varphi(y),$$

считая y постоянной величиной. Определяем: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x+\varphi'(y)$, с одной стороны. С другой стороны, находим: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2x+3y^2$.

Приравниваем их: $2x+\varphi'(y)=2x+3y^2$. Находим:

$$\varphi'(y)=3y^2,$$

$$\varphi(y)=\int 3y^2dy=y^3+c.$$

Тогда

$$u(x,y)=2xy-3x+y^3+c, \qquad (1)$$

и общий интеграл уравнения $-u(x,y)=c$. Подставив из (1) значения $u(x,y)$, получим:

$$2xy-3x+y^3=c.$$

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Пример 4. Найти частное решение уравнения высшего порядка, допускающего понижение порядка:

$$yy'' - (y')^2 = y^3.$$

Начальные условия: $y(0) = -\dfrac{1}{2}$, $y'(0) = 0$.

Решение. Данное неполное уравнение 2-го порядка не содержит явно аргумента x.

Пусть $y' = z(y)$, тогда $y'' = z'z$ и данное уравнение преобразуется в уравнение 1-го порядка:

$$yzz' - z^2 = y^3 \quad \text{eee} \quad z' - \frac{z}{y} = \frac{y^2}{z}.$$

Последнее – уравнение Бернулли. Заменяя функцию по формуле $z = uv$, имеем:

$$uv' + vu' - \frac{uv}{y} = \frac{y^2}{uv},$$

$$uv' + v\left(u' - \frac{u}{y}\right) = \frac{y^2}{uv}.$$

Отсюда для нахождения u и v получим два уравнения:

$$u' - \frac{u}{y} = 0 \quad \text{e} \quad uv' = \frac{y^2}{uv}.$$

Из первого уравнения находим u как его простейший частный интеграл:

$$\frac{du}{u} - \frac{dy}{y} = 0, \quad \ln u = \ln y, \quad u = y.$$

Подставляя u во второе уравнение, находим v как его общий интеграл:

$$uv' = \frac{y^2}{yv}, \quad vdv = dy, \quad \frac{v^2}{2} = y + c_1, \quad v = \pm\sqrt{2(y + c_1)}.$$

Зная u и v, находим: $z = uv = \pm y\sqrt{2(y + c_1)}$. Заменяя z через y', получим уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{2(y + c_1)}$.

Прежде чем интегрировать это уравнение, определим значение константы c_1, используя данные значения:

$$y = -\frac{1}{2}, \qquad y' = 0,$$

$$0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(-\frac{1}{2} + c_1\right)}, \qquad c_1 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{dy}{y\sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)}} = \pm dx, \qquad \pm x + c_2 = \int\frac{dy}{y\sqrt{2y + 1}}.$$

Сделаем замену переменной $2y + 1 = t^2$. Тогда $dy = tdt$,

$$\pm x + c_2 = 2\int\frac{dt}{t^2 - 1} = \ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{2y + 1} - 1}{\sqrt{2y + 1} + 1}\right|$$

Используя заданные значения $x = 0,\ y = -\dfrac{1}{2}$, определяем постоянную величину c_2:

$$c_2 = \ln|-1| = 0.$$

Искомый частный интеграл имеет вид $x = \pm\ln\dfrac{\left|1 - \sqrt{2y + 1}\right|}{1 + \sqrt{2y + 1}}$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Пример 5. $y'' + 4y' + 5y = 0$; $y(0) = -3$; $y'(0) = 0$.

Решение. Находим общий интеграл данного уравнения. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. Решим его:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

Общий интеграл уравнения примет вид

$$y = e^{-2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right).$$

Используя начальные условия, определяем значения постоянных c_1 е n_2. Подставив в общий интеграл заданные значения $x = 0$, $y = -3,$ получим:

$$-3 = e^0 \left(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0\right), \quad c_1 = -3.$$

Дифференцируем общий интеграл:

$$y' = e^{-2x}\left(\left(c_2 - 2c_1\right)\cos x - \left(c_1 + 2c_2\right)\sin x\right).$$

Подставив заданные значения $x = 0,$ $y' = 0,$ получим:

$$0 = e^0\left(\left(c_2 - 2c_1\right)\cos 0 - \left(c_1 + 2c_2\right)\sin 0\right)$$
$$c_2 - 2c_1 = 0;\ c_2 = 2c_1;\ c_2 = -6$$

Подставив значения c_1 е n_2 в общий интеграл, получим искомый частный интеграл данного уравнения, удовлетворяющий данным начальным условиям:

$$y = -3e^{-2x}\left(\cos x + 2\sin x\right).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольной постоянной

Пример 6. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Решение. Для нахождения общего решения уравнения воспользуемся методом вариации произвольной постоянной. Так как соответствующее однородное уравнение $\lambda^3 + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0;\ \lambda_{2,3} = \pm i$, то общее решение уравнения ищем в виде

$$y = c_1(x) + c_2(x)\cos x + c_3(x)\sin x.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)\cos x + c_3'(x)\sin x = 0, \\ -c_2'(x)\sin x + c_3'(x)\cos x = 0, \\ -c_2'(x)\cos x - c_3'(x)\sin x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$c_2' = c_3' \frac{\cos x}{\sin x} \qquad c_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$c_3 = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = -\mathrm{tg}x + x + c_3$$

$$c_2' = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$c_2 = -\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{d\cos x}{\cos x} = \ln|\cos x| + c_2$$

$$c_1' - \frac{\sin x}{\cos x}\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x = 0$$

$$c_1' = \sin x + \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$c_1 = \int \sin x dx + \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^2 x} dx = -\cos x - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} d\cos x =$$

$$= -\cos x + \frac{1}{\cos x} + \cos x + c_1 = \frac{1}{\cos x} + c_1$$

Подставив эти значения $n_1(x),\ c_2(x),\ c_3(x)$ в общее решение уравнения, получим:

$$y = \frac{1}{\cos x} + x\ln|\cos x| + \sin x(x - \mathrm{tg} x) + c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, со специальной правой частью

Пример 7. $$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x. \qquad (2)$$

Решение. Соответствующим однородным уравнением будет $y'' - y' = 0$. Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda = 0\ (\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 1. \qquad (3)$$

Поэтому $y = c_1 + c_2 e^x$.

Теперь нужно найти частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения. С этой целью найдем сначала частные решения для каждого из трех уравнений: $y'' - y' = e^x$, $y'' - y' = e^{2x}$, $y'' - y' = x$.

Уравнение $y'' - y' = e^x$ имеет частное решение вида $y_1 = Axe^x$, так как коэффициент при x показательной функции e^x, стоящей в правой части этого уравнения, является корнем характеристического уравнения (3). Решим его:

$$y_1' = A\left(e^x + xe^x\right) = Ae^x\left(1+x\right),$$
$$y_1'' = A\left(e^x\left(1+x\right) + e^x\right) = Ae^x\left(2+x\right)$$

Подставив y_1' и y_1'' в уравнение (2), получим:

$$Ae^x\left(2+x\right) - Ae^x\left(1+x\right) = e^x$$
$$Ae^x = e^x \quad A = 1.$$

Значит, $y_1 = e^x x$.

Уравнение $y'' - y' = e^{2x}$ имеет частное решение вида $y_2 = Be^{2x}$, ибо число 2 не является корнем характеристического уравнения. Найдем:

$$y_2' = 2Be^{2x}; \quad y_2'' = 4Be^{2x}.$$

Подставив y_2' и y_2'' в уравнение (2), получим:

$$4Be^{2x} - 2Be^{2x} = e^{2x},$$
$$2Be^{2x} = e^{2x}, \quad 2B = 1, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Значит, $y_2 = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

Уравнение $y'' - y' = x$ имеет частное решение вида

$$y_3 = x\left(Cx + D\right) = Cx^2 + Dx \qquad (4)$$

Так как число 0 является корнем характеристического уравнения (4), то $y_3' = 2Cx + D$; $y_3'' = 2C$.

Подставив y_3' е y_3'' в уравнение $2C - 2Cx + D = x$, получим:

$$-2C = 1, \quad C = -\frac{1}{2},$$

$$2C + D = 0, \;\; D = -2C, \;\; D = -1 .$$

Следовательно $y_3 = -\left(\frac{1}{2}x + 1\right)x$.

Общее решение уравнения: $y = C_1 + C_2e^x + xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

Решение нормальных систем дифференциальных уравнений

Пример 8. Решить систему $\begin{cases} y' = -y - 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4\text{-}\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Решим его:

$$(-1-\lambda)(4-\lambda) + 6 = 0 ,$$

$$-4 + \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 6 = 0 ,$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 ,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9\text{-}8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} ,$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 1 .$$

Построим *частное решение*, соответствующее корню $\lambda_1 = 2$:

$$y_1 = \gamma_1 e^{2x}, \;\; z_1 = \gamma_2 e^{2x} .$$

Числа γ_1 и γ_2 нужно искать из системы

$$\begin{bmatrix} -1-2 & \text{-}2 \\ 3 & 4\text{-}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -3\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$3\gamma_1 = -2\gamma_2.$$

Числа γ_1, γ_2 можно выбрать произвольно: $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = -3$.

Характеристическому числу $\lambda_1 = 2$ соответствует частное решение:

$$\gamma_1 = 2e^{2x}; \quad z_1 = -3e^{2x}.$$

Теперь построим частное решение, соответствующее корню $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{bmatrix} -1-1 & \text{-}2 \\ 3 & 4\text{-}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0, \end{cases} \qquad \gamma_1 = -\gamma_2, \quad \gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = -1,$$

$$y_2 = e^x, \quad z_2 = -e^{-x}.$$

Общее решение системы следующее:

$$y = 2c_1e^{2x} + c_2e^x,$$

$$z = -3c_1e^{2x} - c_2e^{-x}.$$

Методом исключения решаем задачу Коши для системы

$$x' = y - \cos t, \tag{5}$$

$$y' = -x + \sin t,$$

$$x(0) = 1;\; y(0) = 1$$

Дифференцируем первое уравнение:

$$x'' = y' + \sin t$$

Подставляем y' из второго уравнения системы:

$$x'' = -x + \sin t + \sin t,$$
$$x'' + x = 2\sin t. \tag{6}$$

Получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка со специальной правой частью. Характеристическое уравнение примет вид

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Решим его:

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Общее решение $\bar{x} = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

Частное решение со специальной правой частью:

$$x_0 = t(A\cos t + B\sin t). \tag{7}$$

Находим x_0'' из (7) и подставляем в уравнение (6):

$$x_0 = A(\cos t - t\sin t) + B(\sin t + t\cos t),$$

$$x_0'' = A(-2\sin t - t\cos t) + B(2\cos t - t\sin t),$$

$$A(-2\sin t - t\cos t) + B(2\cos t - t\sin t) + At\cos t + Bt\sin t = 2\sin t,$$

$$t\cos t(-A+A)+t\sin t(-B+B)-2A\sin t+2B\cos t=2\sin t,$$

$$B=0;\quad A=-1$$

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t-t\cos t. \tag{8}$$

Из уравнения (5) выражаем y:

$$y=x'+\cos t. \tag{9}$$

Находим x' из (8) и подставляем в выражение (9):

$$x'=-c_1\sin t+c_2\cos t-\cos t+t\sin t,$$

$$y=-c_1\sin t+c_2\cos t-\cos t+t\sin t+\cos t=-c_1\sin t+c_2\cos t+t\sin t.$$

Итак,

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t-t\cos t,$$

$$y=-c_1\sin t+c_2\cos t+t\sin t.$$

Найдем решение, соответствующее начальным условиям:

$$1=c_1,\qquad c_2=1,$$

$$x=\cos t+\sin t-t\cos t,\qquad y=-\sin t+\cos t+t\sin t.$$

10.2. Задания для практических занятий

10.2.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными; с однородными функциями

Решить уравнения (общее решение):

1. $xyy'=\sqrt{1-y^2}$. 2. $(xy-x)dx+(x-1)(y+1)dy=0$.

3. $1+(1+y')e^y=0$. 4. $xydx+(x^2+1)dy=0$. 5. $xy^2y'+1=y$.

6. $ye^{2x}dx-\left(1+e^{2x}\right)dy=0$. 7. $y'=10^{x+y}$.

8. $x^2(y+1)dx+\left(x^3-1\right)(y-1)dy=0$. 9. $(x+2y)dx-xdy=0$.

10. $2xyy'=y^2-4x^2$. 11. $ydx=\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)dy$.

12. $2x^3y'=y\left(2x^2-y^2\right)$. 13. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

14. $y^2+x^2y'=xyy'$. 15. $(x-y)ydx-x^2dy=0$.

16. $\left(x^2+y^2\right)y'=2xy$.

Найти частное решение дифференциальных уравнений.

17. $y'\left(1+x^2\right)=1+y^2$. 18. $2\left(1-e^x\right)yy'=e^x,\ y(0)=0$.

19. $ydx+\mathrm{ctg}xdy=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$. 20. $2xyy'+y^2=2,\ y(1)=6$.

21. $y'\sin x=y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

22. $\sin y\cos xdx-\cos y\sin xdx=0,\ y(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

10.2.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка; уравнение Бернулли

Найти общее решение:

1. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$. 2. $y'\mathrm{ctg}x-y=2\cos^2 x\,\mathrm{ctg}x$.

3. $y'-\dfrac{2}{x}y=2x^3$. 4. $y'+y\mathrm{tg}x=\sec x$. 5. $x^2y'+xy+1=0$.

6. $y'-y=3x-3$. 7. $y'+y\cos x-\sin x\cos x=0$.

8. $y' + 2y = y^2 e^x$. 9. $y' = y^4 \cos x + y\,\mathrm{tg} x$.

10. $y'' + \dfrac{2}{x} y = -x^4 e^x y^3$. 11. $xy' + 2y - y^2 = 0$.

12. $y' + y - xy^3 = 0$. 13. $y' + \dfrac{y}{x} = -2x^2 y^2$.

14. $xy' - 3 = 0$. 15. $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

10.2.3. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Найти общее решение:

1. $\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2 y + 4y^3\right)dy = 0$. 2. $e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$.

3. $\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right)dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy = 0$.

4. $\left(\cos x + x\cos y + e^y\right)dy + \left(\sin y - y\sin x\right)dx = 0$.

5. $xy^2 dx + \left(x^2 y + e^y\right)dy = 0$. 6. $\left(4 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \dfrac{2y}{x}dy = 0$.

7. $2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$.

8. $3x^2 e^y dx + \left(x^3 e^y - 1\right)dy = 0$. 9. $\left(x^2 y^2 - 1\right)dy + 2xy^3 dx = 0$.

10. $\left(2xy^2 - y\right)dx + \left(y^2 + x + y\right)dy = 0$.

11. $\left(y^2 - 2x - 2\right)dx + 2ydy = 0$. 12. $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$

13. $\left(2y + xy^3\right)dx + \left(x + x^2 y^2\right)dy = 0$. 14. $\left(y^2 - e^{2x}\right)dx - ydy = 0$

10.4.4. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Найти частное решение уравнений:

1. $y'' = xe^x,\ y(0) = y'(0) = 0$. 2. $y'' = 2x\ln x,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$.

3. $xy''' = 1,\ y(1) = 1/4,\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 1$.

4. $y'^{V} = \sin 2x,\ y(\pi/2) = \pi^3/16,\ y'(\pi/2) = 3\pi/8$.

$y''' = (\pi/2) = (3\pi/2),\ y'''(\pi/2) = 7/2$.

5. $y''' = x - \cos 2x,\ y(\pi) = -\pi/4,\ y'(\pi) = \pi^3/6,\ y''(\pi) = \pi^2/2$.

6. $(x^2 + 2x + 2)y'' = 1,\ y(0) = y'(0) = \pi/4$.

Решить уравнения (общее решение):

7. $x^2 y'' = xy' - 2$. 8. $2(y')^2 = (y-1)y''$. 9. $xy'' = y'$.

10. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$. 11. $xy'' = (1 + 2x^2)y'$. 12. $1 + (y')^2 = 2yy''$.

13. $xy'' = y' + x^2$. 14. $yy'' = (y')^2$. 15. $xy'' = 4x - y'$.

16. $y'' = y'e^y$. 17. $x(\ln x)y'' = y'$. 18. $yy'' + y'(1 + y') = 0$.

10.2.5. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Найти частное решение уравнений:

1. $4y'' + 3y' - y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -11/4$.

2. $4y'' - 4y' + y = 0,\ y(1) = \sqrt{e},\ y'(1) = \frac{3}{2}\sqrt{e}$.

3. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

4. $y'' - 2\sqrt{3y} + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 + \sqrt{3}$.

5. $y'' + 4y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

6. $y'' - 6y' + 10y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) 2e^{3\pi},\ y'(\pi) = 0$.

Найти общее решение уравнений:

7. $y^{IV} - 3y''' = 0$.

8. $y''' + 27y = 0$.

9. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$.

10. $y''' - 4y' = 0$.

11. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$.

12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

13. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

14. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

15. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

16. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.

10.2.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных

1. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

2. $y'' - y = \frac{e^x}{(1 + e^x)}$.

3. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

4. $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{(1 + e^x)}$.

5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{(x^2 + 1)}$.

6. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

7. $y'' + 5y = \sqrt{5}\operatorname{ctg}\sqrt{5}x$.

8. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

9. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.

10. $y'' - y = e^{2x}\cos x$.

10.2.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, со специальной правой частью

Определить вид частного решения уравнений:

1. $9y^{IV} - 6y''' + 10y'' = 1 + e^{\frac{x}{3}} \sin x + e^{\frac{x}{2}} \cos x$.

2. $y''' + y = x^2 e^x + xe^{-x} - \sin \sqrt{3}x$.

3. $y^{IV} - 5y'' + 4y = (x+1)e^{2x} + 4 + e^{-x} + \frac{1}{2}\cos 5x$.

4. $y^{IV} - y = \sin x + x^2 \left(e^x + e^{-x}\right)$.

5. $y^{IV} + 4y'' + 4y = 1 + x + x^2 + xe^x \sin 2x + 4\cos 2x$.

6. $y^{IV} - y' = 1 - e^x + 3x^2 \sin 4x$.

7. $y^{IV} + y''' = 3 + x + xe^{-x} \sin \frac{x}{2} + e^{-x} \cos \frac{x}{2}$.

8. $25y''' + 20y'' + 4y' = 3 + x + e^{2x} - 2e^{-x} x \sin x$.

Найти частное решение уравнений:

9. $y'' - y = x^2 + 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

10. $y'' + 4y = \cos x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

11. $y'' - 4y' + y = xe^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

12. $y'' - 3y' + 2y = x^3,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

13. $y'' + 5y' + 6y = -5e^{-2x},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$.

14. $y'' - 4y' + 4y = e^x,\ y(1) = e,\ y'(1) = 0$.

15. $y'' + 4y' - 2y = 8\sin 2x,\ \ y(0) = -16/25,\ \ y'(0) = 0$.

16. $y'' - y' = 2(1 - x),\ \ y(0) = y'(0) = 1$.

Найти общее решение уравнений:

17. $y'' - 3y' + 2y = e^x + x\cos x$. 18. $y'' + y = (x^2 - 1)e^{2x} + \cos x$.

19. $y'' + 4y = x^2 + 4\sin 2x$. 20. $y'' + 2y' + 5y = 4 + e^{-x}\sin 2x$.

21. $y' + y = x + 4x\cos x$. 22. $y'' - 2y' + 10y = 4\sin 3x - 2xe^x$.

10.2.8. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений

Решить систему:

1. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4y - 2x. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = x + z - y, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = y - x + z, \\ z' = x - z. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x' = 8y - x, \\ y' = x + y. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 4y - 2z - 3x, \\ y' = z + x, \\ z' = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z. \end{cases}$

Методом исключения решить задачу Коши для систем:

9. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2, \\ x_2' = 2x_2 - x_1 + 5e^t \sin t, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 + 2e^{3t}, \\ x_2' = x_1 + x_2 + 5e^{-t}, \quad x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = -2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1' = 9x_1 - 8x_2 - 2\cos t, \\ x_2' = 10x_1 - 9x_2 + 3\sin t, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + 3e^{-t}, \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + 4e^{t}, \quad x_1(0) = \dfrac{1}{2}, \quad x_2(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1' = 12x_1 - 11x_2 + t, \\ x_2' = 13x_1 - 12x_2 - t, \quad x_1(0) = -4, \quad x_2(0) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1' = 11x_1 - 10x_2 + t^2, \\ x_2' = 12x_1 - 11x_2 - t^2, \quad x_1(0) = x_2(0) = 3. \end{cases}$

Содержание

Учебное издание

Сборник задач по математике

для студентов инженерных специальностей
2 частях

Ч а с т ь 1

Составители: МИХНОВА Рената Вацлавовна
БОКУТЬ Людмила Валентиновна
ГЛИНСКАЯ Евгения Алексеевна и др.

Редактор Е.И.Кортель
Компьютерная верстка Н.А.Школьниковой

Подписано в печать 2005.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 10,4. Уч.-изд. л. 8,2. Тираж 300. Заказ 227.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0056957 от 01.04.2004.
220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.