

В.В. ЛЕГКОСТУП

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОЦЕНКИ ДАЛЬНОСТИ ПО ДОПЛЕРОВСКИМ СМЕЩЕНИЯМ ЧАСТОТЫ

ОАО «АЛЕВКУРП», Минск, Республика Беларусь

В данной работе приведена методика получения основных статистических характеристик оценки дальности до объекта по двум доплеровским смещениям частоты навигационного сигнала. Данная задача возникает при рассмотрении процесса наведения некоторого объекта на цель вдоль гиперболы с помощью бистатической разностно-дальномерной навигационной системы. Несмотря на то, что контур наведения объекта замкнут по разностно-дальномерной информации, в алгоритм выработки команд управления необходимо вводить дальность между объектом и центром навигационной системы с целью стабилизации частотной характеристики контура управления и компенсации динамической ошибки. В данной статье рассмотрены статистические характеристики оценки дальности, получаемой на основании измерений трех значений скорости объекта: собственной скорости движения и двух проекций этой скорости на линии, соединяющие объект с навигационными позициями.

Ключевые слова: разностно-дальномерная навигация, бистатическая система, гипербола положения, измерение доплеровского смещения частоты, измерение дальности.

Введение

В [1–4] рассматривался вопрос наведения беспилотного летательного аппарата (БЛА) на плоскости в целевую точку с помощью разностно-дальномерной бистатической навигационной системы. При этом в рассмотренных в [1] алгоритмах наведения фигурирует величина дальности между БЛА и навигационной системой, как одной из координат эллиптической системы. Данная величина аналогична значению дальности, входящему практически во все алгоритмы наведения БЛА, в особенности контуры наведения зенитных управляемых ракет, аналогичных по своей структуре контуру, полученному в [1]. Использование дальности в составе коэффициента усиления контура наведения стабилизирует полосу рабочих частот контура в условиях постоянного изменения дальности между объектом наведения и целью. Другим важным случаем использования дальности является компенсация динамической ошибки, неминуемо присутствующей в большинстве систем наведения.

В [4] получены выражения для оценки дальности в бистатической навигационной системе посредством измерения трех значений скоростей – собственной скорости движения объекта наведения и двух проекций этой скорости на радиус-векторы, соединяющие объект с двумя

навигационными позициями. Данные проекции вычисляются путем измерения доплеровских сдвигов частоты двух принимаемых навигационных сигналов.

Данная работа посвящена краткому рассмотрению основных статистических характеристик оценки дальности, получаемой посредством измерения собственной скорости движения БЛА и двух ее проекций, что позволит сделать выводы о целесообразности применения на практике данного подхода.

Методика получения оценки эллиптической дальности по измерениям доплеровских сдвигов частоты

Рассмотрим бистатическую разностно-дальномерную навигационную систему (НС), образованную двумя синхронизированными по времени передающими позициями Π_1, Π_2 с известной длиной базы, равной $2c$. С помощью данной НС осуществляется наведение подвижного беспилотного летательного аппарата (БЛА) вдоль некоторой гиперболы. БЛА движется в сторону базы со скоростью V_0 (рисунок 1). Кинематика данного движения описана в [2–3].

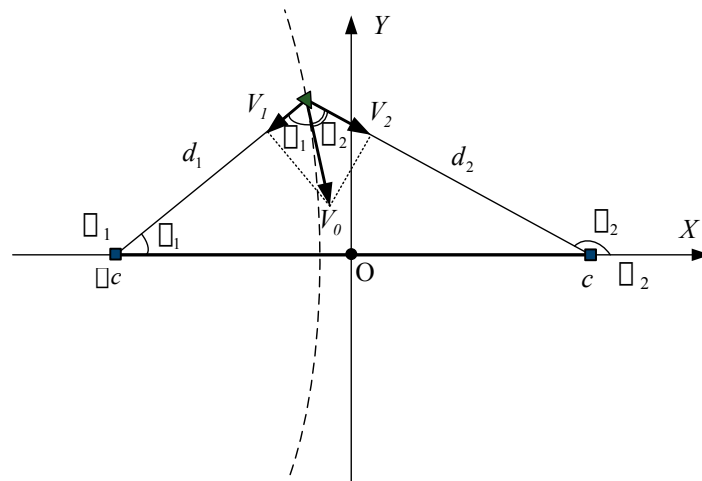


Рисунок 1 – Разностно-дальномерная навигационная система

где c – фокусное расстояние или полубаза; d_1, d_2 – дальности от навигационных позиций до БЛА; φ_1, φ_2 – углы визирования БЛА по отношению к базе; V_1, V_2 – проекции вектора скорости БЛА на линии дальности; α_1, α_2 – углы между вектором скорости БЛА и его проекциями на d_1, d_2 соответственно. Штриховой линией обозначена гипербола положения БЛА.

Движение БЛА рассматривается в эллиптической системе координат, описываемой выражениями [3]

$$\rho = \frac{d_1 + d_2}{2c},$$

$$\tau = \frac{d_1 - d_2}{2c},$$

где ρ – координата, описывающая эллипс положения БЛА (далее – эллиптическая дальность);

τ – координата, описывающая гиперболу положения БЛА.

Таким образом под эллиптической дальностью понимается безразмерная величина, равная сумме дальностей от двух навигационных позиций до БЛА, отнесенная к длине базы или нормированное расстояние от линии базы до БЛА, проложенное вдоль гиперболы положения БЛА.

В процессе полета БЛА осуществляет измерения разности временных задержек τ распространения двух навигационных сигналов до него, излучаемых позициями Π_1, Π_2 , а также собственной скорости V_0 , и двух доплеровских сдвигов частот $\Delta f_1, \Delta f_2$ принимаемых сигналов. Ставится задача оценить координату ρ , описывающую эллиптическую дальность БЛА в данной навигационной системе.

Измеряемые на борту БЛА доплеровские сдвиги частот связаны с проекциями скорости БЛА на радиус-векторы дальностей БП_1 и БП_2 и выражениями

$$\Delta f_1 = \frac{V_1}{\lambda},$$

$$\Delta f_2 = \frac{V_2}{\lambda},$$

где λ – несущая частота навигационного сигнала.

В свою очередь τ зависит от разности дальностей в соответствии с выражением

$$\tau = \frac{d_1 - d_2}{c_0},$$

где c_0 – скорость распространения навигационного сигнала.

Из рисунка 1 видно, что дальность до БЛА связана с углом раскрытия α , под которым наблюдается база Π_1, Π_2 , со стороны БЛА, определяемого суммой двух углов:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (1)$$

где α_1, α_2 – углы между вектором скорости БЛА и его проекциями на векторы БП_1 и БП_2 и соответственно.

В свою очередь, углы α_1, α_2 определяются следующими отношениями:

$$\frac{V_1}{V_0} = \cos \alpha_1, \quad \frac{V_2}{V_0} = \cos \alpha_2. \quad (2)$$

Как указано в [4], угол α связан с координатой ρ следующим соотношением:

$$\hat{\rho} = \frac{\tau \cos \varphi_1 - 1}{\tau - \cos \varphi_1}, \quad (3)$$

где $\cos \varphi_1 = \frac{\tau}{2} \left(1 + \cos \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sgn} \tau \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\tau^2} - \cos \alpha - 1} \right)$ – угол относительно линии базы, под которым наблюдается БЛА с позиции Π_1 .

Получение основных статистических характеристик оцениваемой эллиптической дальности

Как указывалось выше, для оценки параметра ρ БЛА должен производить измерения скоростей $\hat{V}_0, \hat{V}_1, \hat{V}_2$. Будем полагать, что шумы данных оценок стационарны и распределены по закону Гаусса:

$$\hat{V}_0 \sim N(M_{V_0}, \sigma_{V_0}^2);$$

$$\hat{V}_1 \sim N(M_{V_1}, \sigma_{V_1}^2);$$

$$\hat{V}_2 \sim N(M_{V_2}, \sigma_{V_2}^2),$$

где $M_{V_0}, M_{V_1}, M_{V_2}$ – математические ожидания $\hat{V}_0, \hat{V}_1, \hat{V}_2$;

$$\sigma_{V_0}^2, \sigma_{V_1}^2, \sigma_{V_2}^2, \text{ – дисперсии } \hat{V}_0, \hat{V}_1, \hat{V}_2.$$

Для начала определим основные статистические характеристики угла α , задаваемого выражением (1). Как известно [5], математическое ожидание M_α и дисперсия σ_α^2 величины α , являющейся суммой двух случайных величин будут определяться выражениями

$$M_\alpha = M_{\alpha_1} + M_{\alpha_2}, \quad (4)$$

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + 2 \operatorname{cov}_{\alpha_1, \alpha_2}, \quad (5)$$

где $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$ – математические ожидания углов α_1, α_2 ;

$\sigma_{\alpha_1}^2, \sigma_{\alpha_2}^2$ – дисперсии углов α_1, α_2 ;

$\operatorname{cov}_{\alpha_1, \alpha_2}$ – корреляционный момент углов соответственно.

Определим статистические характеристики безразмерных величин \hat{b}_1 и \hat{b}_2 , образуемых следующими отношениями:

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_0};$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\hat{V}_2}{\hat{V}_0}.$$

Плотности распределения вероятностей \hat{b}_1, \hat{b}_2 образуются частными от деления нормально распределенных случайных величин. Рассмотрим сначала плотность распределения вероятности \hat{b}_1 при условии, что делимое и делитель между собой не коррелированы (в последствии данное условие будет снято), описывается выражением [6]

$$p(b_1) = \frac{g_2(b_1) g_1(b_1)}{\sqrt{2\pi} g_1^2(b_1) \sigma_{V_1} \sigma_{V_0}} \left[\Phi \left(\frac{g_2(b_1)}{g_1(b_1)} \right) - \Phi \left(-\frac{g_2(b_1)}{g_1(b_1)} \right) \right] + \frac{1}{\pi g_1^2(b_1) \sigma_{V_1} \sigma_{V_0}} \exp \left(-\frac{g_c}{2} \right), \quad (7)$$

где $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} u^2 \right) du$ – функция стандартного нормального распределения;

$$g_1(b_1) = \sqrt{\frac{1}{\sigma_{V_1}^2} b_1^2 + \frac{1}{\sigma_{V_0}^2}}; \quad g_2(b_1) = \frac{M_{V_1}}{\sigma_{V_1}^2} b_1 + \frac{M_{V_0}}{\sigma_{V_0}^2};$$

$$g_3(b_1) = \exp \left(\frac{g_2^2(b_1) - g_c g_1^2(b_1)}{2g_1^2(b_1)} \right); \quad g_c = \frac{M_{V_1}^2}{\sigma_{V_1}^2} + \frac{M_{V_0}^2}{\sigma_{V_0}^2}.$$

Величина \hat{b}_2 распределена по аналогичному закону.

Если коэффициент вариации δV_0 величины V_0 будет близок к единице или больше ее, то случайные величины \hat{b}_1, \hat{b}_2 будут иметь распределение, близкое к Коши, не имеющее конечных моментов. В данном же случае, будем полагать, что скорость движения управляемого объекта V_0 значительно больше СКО ее оценки, что накладывает как ограничения на минимальную скорость движения

объекта в рабочем диапазоне изменения скорости движения, так и на максимальную величину СКО оценки скорости объекта. В таком случае закон распределения величины \hat{b}_1 можно аппроксимировать нормальным [7] с математическим ожиданием

$$M_{b_1} = \frac{M_{V_1}}{M_{V_0}}$$

и дисперсией

$$\sigma_{b_1}^2 = M_{b_1}^2 (\delta V_1^2 + \delta V_0^2), \quad (8)$$

где $\delta V_0 = \frac{\sigma_{V_0}}{M_{V_0}}$, $\delta V_1 = \frac{\sigma_{V_1}}{M_{V_1}}$ – коэффициенты вариаций для V_0, V_1

соответственно.

Учитывая выражения (2), для получения оценок $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ величины \hat{b}_1, \hat{b}_2 должны быть подвергнуты нелинейному преобразованию функцией арккосинуса. Поэтому необходимо, чтобы они располагались в диапазоне [-1;1]. С этой целью значения величин \hat{b}_1, \hat{b}_2 , выходящие за пределы указанного диапазона отбраковываются, порождая величины \hat{b}_1^*, \hat{b}_2^* , имеющие закон распределения в виде усеченного нормального. Плотность распределения вероятности величины \hat{b}_1^* в соответствии с [8] задается выражением

$$p(b_1^*) = \frac{1}{\sigma_{b_1}} \phi\left(\frac{b_1^* - M_{b_1}}{\sigma_{b_1}}\right) \left[\Phi\left(\frac{1 - M_{b_1}}{\sigma_{b_1}}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - M_{b_1}}{\sigma_{b_1}}\right) \right]^{-1}, \quad (9)$$

где $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ – плотность распределения вероятности стандартной нормальной случайной величины x ;

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right) – \text{ее функция распределения;}$$

$$\operatorname{erf}(x) – \text{функция ошибок.}$$

Математическое ожидание закона распределение (9) имеет вид

$$M_{b_1^*} = M_{b_1} - \sigma_{b_1} \frac{\phi(1) - \phi(-1)}{\Phi(1) - \Phi(-1)}, \quad (10)$$

а дисперсия

$$\sigma_{b_1^*}^2 = \sigma_{b_1}^2 \left[1 - \frac{\phi(1) + \phi(-1)}{\Phi(1) - \Phi(-1)} - \left(\frac{\phi(1) - \phi(-1)}{\Phi(1) - \Phi(-1)} \right)^2 \right] \quad (11)$$

После нелинейного преобразования

$$\alpha_1 = \arccos(b_1^*) \quad (12)$$

плотность распределения вероятности случайной величины α_1 примет вид

$$p(\alpha_1) = \frac{\sin \alpha_1}{\sigma_{b_1^*}} \phi\left(\frac{\cos \alpha_1 - M_{b_1^*}}{\sigma_{b_1^*}}\right) \left[\Phi\left(\frac{1 - M_{b_1^*}}{\sigma_{b_1^*}}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - M_{b_1^*}}{\sigma_{b_1^*}}\right) \right]^{-1}. \quad (13)$$

Аналогично выводу выражения (13) для α_1 , плотность распределения вероятности угла α_2 примет вид

$$p(\alpha_2) = \frac{\sin \alpha_2}{\sigma_{b_2^*}} \phi\left(\frac{\cos \alpha_2 - M_{b_2^*}}{\sigma_{b_2^*}}\right) \left[\Phi\left(\frac{1 - M_{b_2^*}}{\sigma_{b_2^*}}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - M_{b_2^*}}{\sigma_{b_2^*}}\right) \right]^{-1} \quad (14)$$

Математические ожидания $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$ углов $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ определяются выражениями

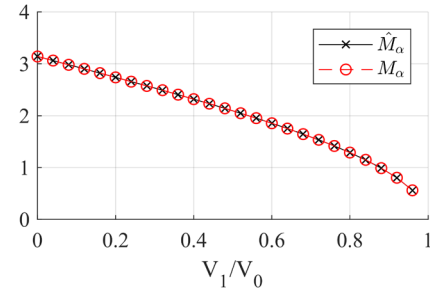
$$\begin{aligned} M_{\alpha_1} &= \arccos(M_{b_1^*}), \\ M_{\alpha_2} &= \arccos(M_{b_2^*}), \end{aligned} \quad (15)$$

а их дисперсии примут следующий вид:

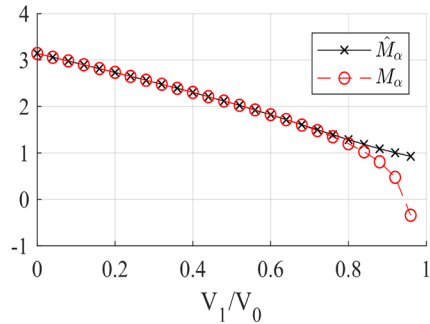
$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_1}^2 &= \frac{\sigma_{b_1^*}^2}{1 - M_{b_1^*}^2}; \\ \sigma_{\alpha_2}^2 &= \frac{\sigma_{b_2^*}^2}{1 - M_{b_2^*}^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

На рисунке 2 приведены выборочное среднее \hat{M}_α угла α , полученное методом Монте-Карло и его математическое ожидание, вычисленное по формуле (4), в зависимости от соотношения измеря-

емых скоростей V_1/V_0 для различных коэффициентов вариации δV_0 . При этом предполагается, что $V_2 = V_1$.



а



б

Рисунок 2 – Зависимость математического ожидания M_α (красным) и выборочного среднего \hat{M}_α (черным) угла α от соотношения скоростей V_1/V_0 для $\delta V_0 = 0.01$ (а), $\delta V_0 = 0.1$ (б).

Приведенные выше статистические моменты (15) и (16) позволяют найти математическое ожидание (4) и дисперсию (5) для случая некоррелированных углов $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$, при котором $\operatorname{cov}_{\alpha_1 \alpha_2} = 0$.

Однако, учитывая тот факт, что в формировании и угла α_r и угла α_2 участвует одна и та же величина V_0 , входящая в знаменатели выражений (6), целесообразно рассмотреть случай корреляции между собой углов $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$. Рассмотрим эту связь в предположении, что плотности распределения вероятностей величин близки к \hat{b}_1, \hat{b}_2 нормальным. Для вывода корреляционного момента $\operatorname{cov}_{\alpha_1 \alpha_2}$ целью повышения наглядности введем функции

$$\begin{aligned} f &= f(V_1, V_0) = \arccos\left(\frac{V_1}{V_0}\right), \\ \tilde{f} &= \tilde{f}(V_2, V_0) = \arccos\left(\frac{V_2}{V_0}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Искомый угол α является суммой функций (17). Корреляционный момент $\operatorname{cov}_{\alpha_1 \alpha_2}$ определяется известным выражением [5]:

$$\operatorname{cov}_{\alpha_1 \alpha_2} = M_{\alpha_1 \alpha_2} + M_{\alpha_1} M_{\alpha_2} \quad (18)$$

где $M_{\alpha_1 \alpha_2}$ – математическое ожидание произведения углов α_1, α_2 .

Для вычисления выражения (18) используем разложение функций (17) в ряд Тейлора в окрестности математических ожиданий $M_{V_0}, M_{V_1}, M_{V_2}$ с сохранением величин до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\approx f + f_{V_1}' (V_1 - M_{V_1}) + f_{V_0}' (V_0 - M_{V_0}) + \frac{1}{2} f_{V_1 V_1}'' (V_1 - M_{V_1})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} f_{V_0 V_0}'' (V_0 - M_{V_0})^2 + \frac{1}{2} f_{V_0 V_1}'' (V_0 - M_{V_0})(V_1 - M_{V_1}); \\ \alpha_2 &\approx \tilde{f} + \tilde{f}_{V_2}' (V_2 - M_{V_2}) + \tilde{f}_{V_0}' (V_0 - M_{V_0}) + \frac{1}{2} \tilde{f}_{V_2 V_2}'' (V_2 - M_{V_2})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{f}_{V_0 V_0}'' (V_0 - M_{V_0})^2 + \frac{1}{2} \tilde{f}_{V_0 V_2}'' (V_0 - M_{V_0})(V_2 - M_{V_2}). \end{aligned} \quad (19)$$

Соответственно приближенные значения математических ожиданий углов (19) равны

$$M_{\alpha_1} \approx f + \frac{1}{2} f_{V_1 V_1}'' \sigma_{V_1}^2 + \frac{1}{2} f_{V_0 V_0}'' \sigma_{V_0}^2; \quad (20)$$

$$M_{\alpha_2} \approx \tilde{f} + \frac{1}{2} \tilde{f}_{V_2 V_2}'' \sigma_{V_2}^2 + \frac{1}{2} \tilde{f}_{V_0 V_0}'' \sigma_{V_0}^2. \quad (20)$$

Произведение углов α_1, α_2 разложим в ряд Тейлора аналогичным образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 \approx & f \tilde{f} + f_{V_1 V_1}' (V_1 - M_{\alpha_1}) + f_{V_2 V_2}' (V_2 - M_{\alpha_2}) + (f_{V_0 V_0}' + \tilde{f}_{V_0 V_0}') (V_0 - M_{\alpha_0}) + \\ & + \frac{1}{2} f_{V_1 V_1}'' \tilde{f} (V_1 - M_{\alpha_1})^2 + \frac{1}{2} \tilde{f}_{V_2 V_2}'' f (V_2 - M_{\alpha_2})^2 + \\ & + \frac{1}{2} (f_{V_0 V_0}'' \tilde{f} + 2 f_{V_0 V_1}' \tilde{f}_{V_1 V_1}' + \tilde{f}_{V_0 V_0}'' f) (V_0 - M_{\alpha_0})^2. \end{aligned}$$

Тогда приближенное значение математического ожидания произведения углов α_1, α_2 примет вид

$$M_{\alpha_1 \alpha_2} \approx f \tilde{f} + \frac{\sigma_{V_1}^2}{2} \tilde{f} f_{V_1 V_1}'' + \frac{\sigma_{V_2}^2}{2} f \tilde{f}_{V_2 V_2}'' + \frac{\sigma_{V_0}^2}{2} (f \tilde{f}_{V_0 V_0}'' + \tilde{f} f_{V_0 V_0}'' + f_{V_0 V_1}' \tilde{f}_{V_1 V_1}'). \quad (21)$$

Соотношение (18) при подстановке (20) и (21) переписывается в виде

$$\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2} = f_{V_0 V_0}' \tilde{f}_{V_0 V_0}' \sigma_{V_0}^2. \quad (22)$$

Учитывая производные $f_{V_0}' = \frac{V_1}{V_0 \sqrt{V_0^2 - V_1^2}}$, $\tilde{f}_{V_0}' = \frac{V_2}{V_0 \sqrt{V_0^2 - V_2^2}}$ и подставляя вместо величин V_0, V_1, V_2 их математические ожидания, получим окончательное выражение для корреляционного момента углов α_1, α_2 :

$$\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{M_{V_1} M_{V_2}}{M_{V_0}^2 \sqrt{M_{V_0}^2 - M_{V_1}^2} \sqrt{M_{V_0}^2 - M_{V_2}^2}} \sigma_{V_0}^2 \quad (23)$$

Зависимость $\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2}$ от угла α приведена на рисунке 3.

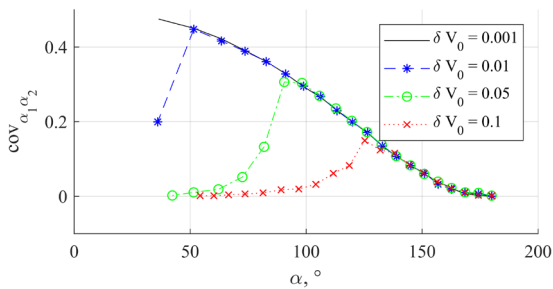


Рисунок 3 – Зависимость корреляционного момента (23) от угла α при различных коэффициентах вариации δV_0 .

Момент корреляции (23) позволяет найти дисперсию угла α для случая коррелированности оценок углов $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$. На рисунке 4 приведены зависимости выборочной дисперсии $\hat{\sigma}_{\alpha}^2$ оценки угла α и теоретической дисперсии σ_{α}^2 от соотношения измеряемых скоростей V_1/V_0 для различных коэффициентов вариации δV_0

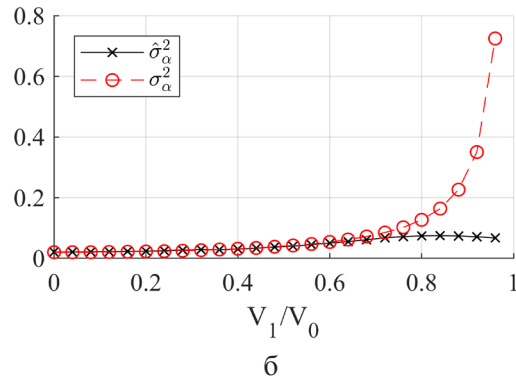
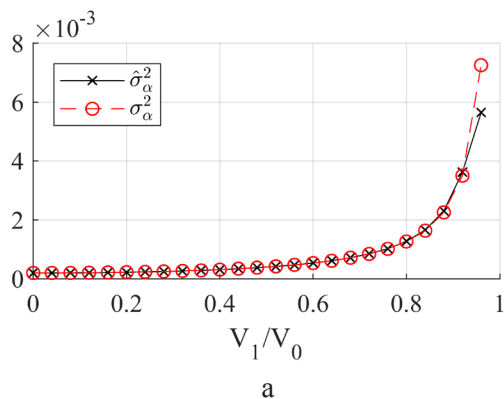


Рисунок 4 – Зависимость выборочной дисперсии $\hat{\sigma}_{\alpha}^2$ (черным) и теоретической дисперсии σ_{α}^2 (красным) угла α от соотношения скоростей для $\delta V_0 = 0.01$ (а), $\delta V_0 = 0.1$ (б).

Используя угол α можно оценить параметр ρ в соответствии с выражением (3). Статистические характеристики величины ρ можно также попытаться найти методом линеаризации ρ как функции от угла α с помощью разложения в ряд Тейлора в окрестности математического ожидания M_{α} с сохранением первых трех членов разложения [5]. Выражение математического ожидания примет вид

$$M_{\rho} \approx \rho(M_{\alpha}) + \frac{1}{2} \rho_{\alpha\alpha}''(M_{\alpha}) \sigma_{\alpha}^2. \quad (24)$$

Дисперсию можно оценить посредством выражения

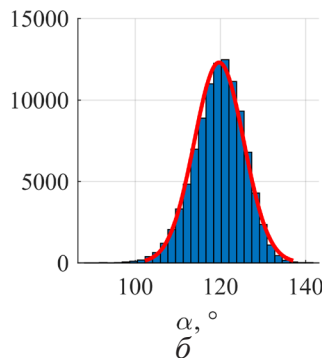
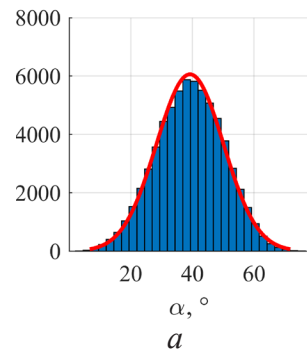
$$\sigma_{\rho}^2 = [\rho_{\alpha}'(M_{\alpha})]^2 \sigma_{\alpha}^2 + \frac{1}{4} [\rho_{\alpha\alpha}''(M_{\alpha})]^2 (\mu_4 - \sigma_{\alpha}^4) + \rho_{\alpha}'(M_{\alpha}) \rho_{\alpha\alpha}''(M_{\alpha}) \mu_3 \quad (25)$$

где μ_3 – третий начальный момент случайной величины α ; μ_4 – четвертый центральный момент случайной величины α .

Если сделать предположение о том, что плотность распределения вероятности имеет гауссовский вид, то выражение (25) упростится:

$$\sigma_{\rho}^2 = [\rho_{\alpha}'(M_{\alpha})]^2 \sigma_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} [\rho_{\alpha\alpha}''(M_{\alpha})]^2 \sigma_{\alpha}^4 \quad (26)$$

На рисунке 5 приведены гистограммы распределения частот для величины α , полученные методом Монте-Карло.



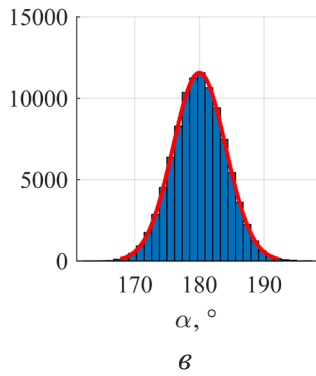


Рисунок 5 – Гистограммы распределения частот (синим) угла и аппроксимация гауссовой кривой (красным) для различных значений \hat{M}_α : $\hat{M}_\alpha = 40^\circ$ (а); $\hat{M}_\alpha = 120^\circ$ (б); $\hat{M}_\alpha = 180^\circ$ (в).

Ввиду громоздкости производных выражения (3) по углу α , входящих в (24) и (25), предлагается перейти к вычислению производных величины ρ^* , аппроксимирующей (3) как функцию $\rho = \rho(\alpha, \tau)$:

$$\rho^* = \rho^*(\alpha, \tau) = k_1 \coth[k_2 \alpha + k_3 \alpha \tau^2] - k_4 \sin(k_5 \alpha), \quad (27)$$

где $k_1 = 1.576$; $k_2 = 0.7848$; $k_3 = 0.5213$; $k_4 = 0.5922$; $k_5 = 0.5445$.

При этом выражения для первых двух производных $\rho^*(\alpha, \tau)$ по углу α выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha}^* &= -\operatorname{csch}\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right]^2 k_1(k_2 + \tau^2 k_3) + k_4 k_5 \cos[\alpha k_5]; \\ \rho_{\alpha\alpha}^* &= 2 \coth\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right] \operatorname{csch}\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right]^2 k_1(k_2 + \tau^2 k_3)^2 - k_4 k_5^2 \sin[\alpha k_5]. \end{aligned} \quad (28)$$

Для поиска аппроксимирующего выражения (27) использовалась множественная регрессия по параметрам α, τ , причем параметр τ варьировался в диапазоне $[0, 0.5]$, а угол α в диапазоне $[40, 180]$ градусов. Оптимальность аппроксимации оценивалась по следующим полученным характеристикам: коэффициент детерминации $R^2 = 0.9999$, сумма квадратов регрессионных остатков $SSE = 2.008$, а их среднеквадратическое отклонение $\sigma_{SSE} = 0.014$. Зависимости $\rho(\alpha, \tau)$ и $\rho^*(\alpha, \tau)$ приведены на рисунке 6.

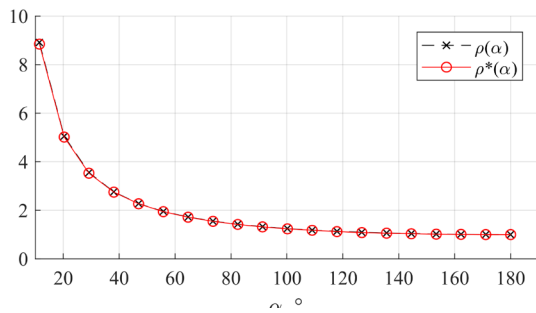


Рисунок 6 – Зависимости $\rho(\alpha)$ (черным) и $\rho^*(\alpha)$ (красным)

Также выражения для математического ожидания (24) и дисперсии (25) можно уточнить, если учесть случайный характер аргумента τ , входящего в (3) и в (27). Тогда математическое ожидание величины $\hat{\rho} = \rho(\hat{\alpha}, \hat{\tau})$ опишется выражением

$$M_\rho \approx \rho(M_\alpha, M_\tau) + \frac{1}{2} \rho_{\alpha\alpha}''(M_\alpha, M_\tau) \sigma_\alpha^2 + \frac{1}{2} \rho_{\tau\tau}''(M_\tau, M_\tau) \sigma_\tau^2 \quad (29)$$

где M_τ – математическое ожидание $\hat{\tau}$,
 σ_τ^2 – дисперсия $\hat{\tau}$.

На рисунке 7 приведены зависимости математического ожидания M_ρ и выборочного среднего \hat{M}_ρ от угла α .

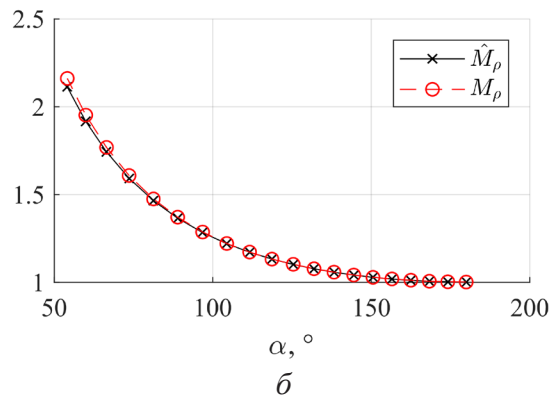
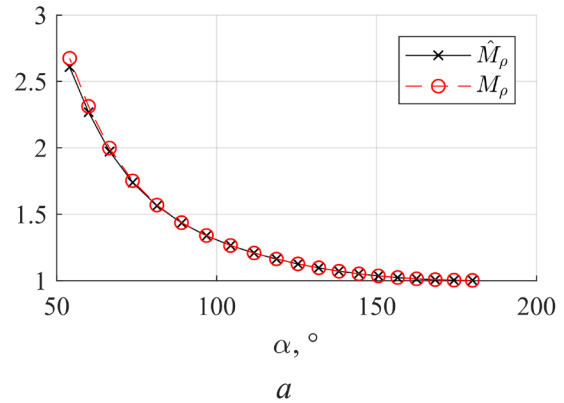


Рисунок 7 – Зависимости выборочного среднего \hat{M}_ρ (черным) и математического ожидания M_ρ (красным) угла α для различных значений $\delta V_0 = 0.01$ (а), $\delta V_0 = 0.1$ (б)

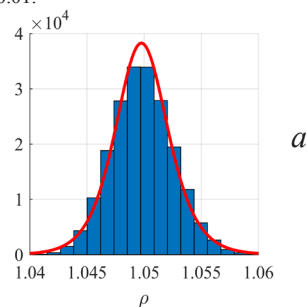
Окончательное выражение для дисперсии величины $\hat{\rho}(\alpha, \tau)$ в случае отсутствия статистической связи между α и τ примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^2 &= [\rho_\alpha'(M_\alpha, M_\tau)]^2 \sigma_\alpha^2 + [\rho_\tau'(M_\tau, M_\tau)]^2 \sigma_\tau^2 + \\ &+ \frac{1}{2} [\rho_{\alpha\alpha}''(M_\alpha, M_\tau)]^2 \sigma_\alpha^4 + \frac{1}{2} [\rho_{\tau\tau}''(M_\tau, M_\tau)]^2 \sigma_\tau^4 + \\ &+ \rho_{\alpha\tau}''(M_\tau, M_\tau) \sigma_\alpha^2 \sigma_\tau^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Используемые в (29) и (30) производные величины $\rho = \rho(\alpha, \tau)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha'(\alpha, \tau) &= -2k_1 k_3 \alpha \tau \operatorname{csch}\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right]^2; \\ \rho_{\alpha\alpha}''(\alpha, \tau) &= 2k_1 k_3 \alpha \operatorname{csch}\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right]^2 (4k_3 \alpha \tau^2 \coth\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right] - 1); \\ \rho_{\alpha\tau}''(\alpha, \tau) &= 2k_1 k_3 \tau \operatorname{csch}\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right]^2 (2\alpha \coth\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right] (k_2 + \tau^2 k_3) - 1). \end{aligned}$$

На рисунках 8 а–г синим цветом приведены гистограммы распределения частот оценки ρ , которые достаточно точно характеризуются распределением Бера (Burr distribution, Burr, (1942)) или Сингх-Маддала (Singh–Maddala distribution, Singh, S.; Maddala, G. (1976)), что отражено на рисунках 8 в виде красной огибающей. Данная статистика проверялась методом хи-квадрат с уровнем значимости $q = 0.01$.



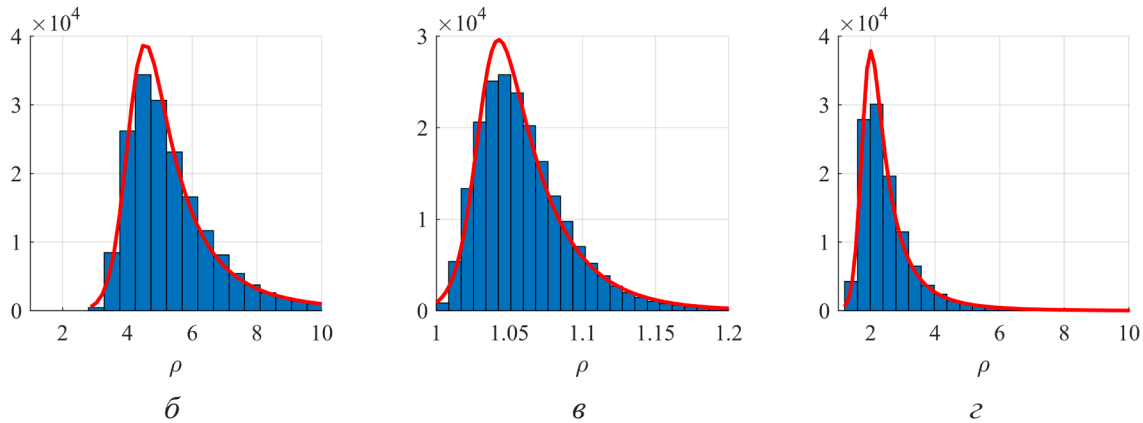


Рисунок 8 – Гистограммы распределения частот оценки ρ (синий) и аппроксимация законом Бера (красный): а, в – для коэффициента вариации $\delta V_0 = 0.01$ (а); б, г – для коэффициента вариации $\delta V_0 = 0.1$ (б);

На рисунке 9 приведены зависимости теоретической дисперсии σ_ρ^2 и выборочной дисперсии $\hat{\sigma}_\rho^2$ от значения дальности ρ .

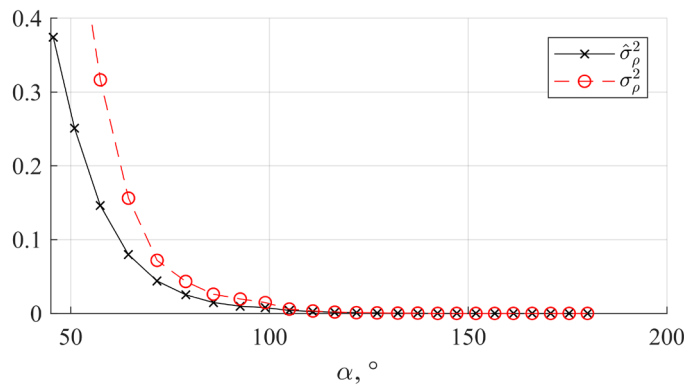


Рисунок 9 – Зависимость выборочной дисперсии $\hat{\sigma}_\rho^2$ (черным) и теоретической дисперсии σ_ρ^2 (красным) от дальности ρ при $\delta V_0 = 0.1$ (б).

Из рисунка 9 видно, что при увеличении дальности ρ быстро возрастает дисперсия ее оценки $\hat{\sigma}_\rho^2$. Более того, рассматривая производную $\rho_\alpha^*(\alpha)$ как функцию чувствительности дальности ρ к изменению угла α можно заметить, что если угол α устремить к нулю, то $\rho_\alpha^*(\alpha)$ устремится к минус бесконечности, что в условиях действующих погрешностей оценки α делает неинформативной оценку дальности ρ при больших ее значениях. Учитывая асимметричность закона распределения величины ρ , можно попытаться получить более точную оценку, используя обобщение нормального закона распределения на случай асимметричного распределения случайной величины ρ и наличия тяжелых хвостов [10].

Заключение

На основании результатов данного исследования можно заключить, что оценка дальности до БЛА в разностно-дальномерной навигационной системе может производиться косвенно по измерениям собственной скорости движения БЛА и двух доплеровских сдвигов частоты принимаемых навигационных сигналов. Полученные выражения для математического ожидания и дисперсии получаемой оценки дальности согласуются с результатами компьютерного

моделирования. Приведенные графики показывают, что увеличение дисперсии измерений скорости приводит к рассогласованию моментов оцениваемой дальности, получаемых аналитически и путем статистического моделирования, что обусловлено главным образом отклонением её плотности распределения вероятности от гауссовской, возникновением асимметричности и эксцесса.

Данный способ оценивания подходит только для случая скоростных объектов при низком уровне шумов измерения собственной скорости объекта, что является одним из ограничений метода. Другим ограничением является неинформативность оценки дальности при значительном удалении БЛА от линии базы навигационной системы (более двух-трех базовых расстояний) в результате появления значительного смещения оценки дальности с ростом расстояния между БЛА и базой НС, а также с ростом ошибки измерения скорости БЛА. Можно попытаться реализовать алгоритмы оценки дальности, используя обобщение нормального закона распределения на случай

Тем не менее, в задаче наведения скоростных БЛА на цель вдоль гиперболы может быть использован рассмотренный способ оценки дальности, если не предъявляются жесткие требования к точности получаемой оценки. Например, если эта оценка является частью коэффициента усиления контура наведения и не приводит к заметному повышению флюктуационной ошибки наведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Легкоступ В.В., Шабан С.А., Маркевич В.Е. Методика синтеза устройства управления по методу аналитического конструирования оптимального регулятора для задачи наведения летательного аппарата вдоль гиперболы. Доклады БГУИР 2022; 20(1).
2. Легкоступ В.В., Маркевич В.В. Уравнения кинематики беспилотного летательного аппарата в эллиптической системе координат при наведении по разностно-дальномерной навигационной информации. «Системный анализ и прикладная информатика». 2021;(1):12-20.

3. **Легкоступ В.В.** Методика определения кинематической связи между управляющими летательным аппаратом ускорениями и его эллиптическими координатами в альтернативном представлении. «Системный анализ и прикладная информатика». 2021;(3):15-24.
4. **Легкоступ В.В., Маркевич В.Э.** Методика определения дальности до объекта в разностно-дальномерной навигационной системе по доплеровским смещениям частоты. «Системный анализ и прикладная информатика». 2021;(4):40-46.
5. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей: учеб. для вузов / **Е. С. Вентцель.** – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 576 с.
6. **Hinkley D.V.** On the Ratio of Two Correlated Normal Random Variables. *Biometrika*, Vol. 56 (3), 1969, pp. 635–639.
7. **Díaz-Francés, Eloísa; Rubio, Francisco J.** On the existence of a normal approximation to the distribution of the ratio of two independent normal random variables. *Statistical Papers*. Springer Science and Business Media LLC. 54 (2): 309–323.
8. **Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N.** Continuous Univariate Distributions, Vol. 1, 2nd Edition. **John Wiley**, New York, 1994.
9. **Burr**, Cumulative Frequency Functions. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 13, No. 2, 1942, pp. 215-232.
10. **Roth M., Ozkan E., Gustafsson F.** A Student's t-filter for heavytailed process and measurement noise, "2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing", Vancouver, BC, 2013, pp. 5770-5774.

REFERENCES

1. **Legkastup V.V. Shaban S.A., Markevich V.E.** Procedure of the synthesis of control device by the method of analytical design of the optimal regulator for the problem of aircraft guidance along a hyperbola. *Doklady BGUIR* 2022; 20(1).
2. **Legkastup V.V., Markevich V.E.** Methodology of determining of the transfer function of engagement kinematics of accelerations of an aircraft and its elliptic coordinates used for the guidance based on time difference of arrival. «System analysis and applied information science». 2021;(1):12-20.
3. **Legkastup V.V.** Methodology of determining of the transfer function of engagement kinematics of accelerations of an aircraft and its elliptic coordinates in alternative representation. «System analysis and applied information science». 2021;(3):15-24.
4. **Legkastup V.V., Markevich V.E.** Method for determining of the distance to the object in the hyperbolic navigation system via doppler frequency offsets. «System analysis and applied information science». 2021;(4):40-46.
5. **Wentzel E. S.** Probability theory: textbook. for universities / **E. S. Wentzel.** - 5th ed. – М.: Higher. school. 1998. – 576 p.
6. **Hinkley D.V.** On the Ratio of Two Correlated Normal Random Variables. *Biometrika*, Vol. 56 (3), 1969, pp. 635–639.
7. **Díaz-Francés, Eloísa; Rubio, Francisco J.** On the existence of a normal approximation to the distribution of the ratio of two independent normal random variables. *Statistical Papers*. Springer Science and Business Media LLC. 54 (2): 309–323.
8. **Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N.** Continuous Univariate Distributions, Vol. 1, 2nd Edition. **John Wiley**, New York, 1994.
9. **Burr**, Cumulative Frequency Functions. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 13, No. 2, 1942, pp. 215-232.
10. **Roth M., Ozkan E., Gustafsson F.** A Student's t-filter for heavytailed process and measurement noise, "2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing", Vancouver, BC, 2013, pp. 5770-5774.

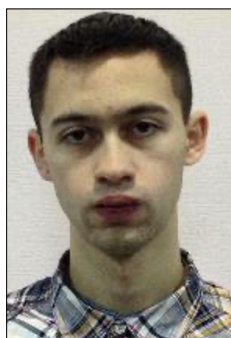
Legkastup V. V.

METHOD FOR DETERMINING OF STATISTICAL CHARACTERISTICS OF EVALUATED DISTANCE OBTAINED FROM MEASUREMENTS OF DOPPLER FREQUENCY OFFSETS

JSC «ALEVKURP» (Minsk, Republic of Belarus)

This paper presents a technique for obtaining of the main statistical characteristics of the distance estimation between the flying object and a hyperbolic navigation system using two Doppler frequency shifts of the navigation signal. This problem arises when the guidance of the object at a target point along a hyperbola using a bistatic hyperbolic navigation system is considered. Despite the fact that the object guidance loop is closed according to the time difference of arrival information, it is necessary to enter the distance between the object and the center of the navigation system into the algorithm for generating control commands in order to stabilize the frequency response of the control loop and eliminate dynamic errors. This article discusses the statistical characteristics of the estimated range based on the measurements of three values of the object's speed: its own speed and two projections of this speed on the lines connecting the object with the navigation positions.

Keywords: hyperbolic navigation, bistatic navigation, position hyperbola, Doppler frequency shift, range measurement, TDoA.



Легкоступ Виктор Валерьевич, магистр технических наук, научный сотрудник ОАО «АЛЕВКУРП», Беларусь, Минская обл., д. Королев Стан, ул. Московская, 1а.
Legkastup Victor Valeryevich, research officer, JSC «ALEVKURP», Minsk, Belarus.

E-mail: legkastupvv@gmail.com