

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра высшей математики №2

**ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ**  
для студентов энергетических специальностей БНТУ  
(III семестр)

Учебно-методическое пособие  
для студентов энергетических специальностей БНТУ

*Электронный учебный материал*

**М и н с к 2 0 1 4**

УДК 517.2(035.5)+517.3(035.5)+517.9(035.5)

**Автор:** *П.Г. Ласый*

**Рецензент:**

*Е.А. Барабанов*, ведущий научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук, доцент

В пособии изложен теоретический материал по курсу математики, читаемом в третьем семестре на энергетическом факультете БНТУ. В нем представлены следующие разделы: „Криволинейные, двойные, поверхностные и тройные интегралы“, „Теория поля“, „Числовые и функциональные ряды. Степенные ряды. Ряды Фурье“, „Теория функций комплексной переменной“. Изложение хорошо проиллюстрировано примерами и графиками, построенными в среде компьютерной алгебры *Mathematica*. Данное пособие может быть полезным как студентам при их подготовке к практическим занятиям и экзамену, так и преподавателям, читающим курс математики на энергетическом факультете БНТУ.

Белорусский национальный технический университет  
Пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел. (017)292-82-73  
E-mail: kafvm2@bntu.by  
<http://www.bntu.by/ef-vm2>  
Регистрационный № БНТУ/ЭФ41-45.2014

© Ласый П.Г., 2014  
© БНТУ, 2014

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ .....   | 4   |
| ГЛАВА X. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ, ДВОЙНЫЕ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ<br>И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ .....   | 5   |
| §1. Криволинейные интегралы, их свойства и вычисление .....   | 5   |
| 1. Криволинейный интеграл скалярной функции (первого рода) .....  | 5   |
| 2. Криволинейный интеграл векторной функции (второго рода) .....  | 11  |
| §2. Двойной интеграл, его свойства и вычисление. Замена переменных в двойном<br>интеграле. Формула Грина. О несобственном двойном интеграле ..... | 15  |
| §3. Поверхностные интегралы, их свойства и вычисление .....   | 31  |
| 1. Поверхностный интеграл скалярной функции (первого рода) .....  | 31  |
| 2. Поверхностный интеграл векторной функции (второго рода) .....  | 35  |
| §4. Тройной интеграл, его свойства и вычисление. Замена переменных<br>в тройном интеграле .....   | 40  |
| §5. Применение криволинейных, двойных, поверхностных и тройных<br>интегралов в механике .....   | 48  |
| ГЛАВА XI. ТЕОРИЯ ПОЛЯ .....   | 53  |
| §1. Скалярное поле и его основные характеристики .....  | 53  |
| §2. Векторное поле и его основные характеристики .....  | 57  |
| §3. Специальные векторные поля и их свойства .....  | 72  |
| ГЛАВА XII. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.<br>СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ .....  | 80  |
| §1. Числовые ряды, их свойства и признаки сходимости .....  | 80  |
| §2. Функциональные ряды. Равномерная сходимость.<br>Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов .....                                     | 90  |
| §3. Степенные ряды и их свойства. Ряды Тейлора и Маклорена.<br>Применение степенных рядов .....   | 95  |
| §4. Ряды Фурье .....  | 108 |
| ГЛАВА XIII. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ .....   | 118 |
| §1. Предел функции комплексной переменной. Непрерывность .....  | 118 |
| §2. Производная функции комплексной переменной,<br>дифференцируемость и дифференциал. Аналитическая функция .....                                 | 121 |
| §3. Элементарные аналитические функции комплексной переменной .....   | 124 |
| §4. Интеграл функции комплексной переменной.<br>Интегральные теорема и формула Коши .....   | 129 |
| §5. Комплексные числовые ряды. Степенные комплексные ряды.<br>Ряд Тейлора аналитической функции .....   | 140 |
| §6. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции .....  | 144 |
| §7. Вычет аналитической функции в особой точке.<br>Применение вычетов к вычислению интегралов .....   | 149 |
| РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА .....  | 153 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие является третьей частью электронного учебника автора по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ. Изложенный в нем материал полностью соответствует программе курса математики, читаемом в третьем семестре на энергетическом факультете.

При написании этого пособия я, не претендуя на безупречность, стремился к полноте и строгости в определениях, формулировках и доказательствах утверждений. Полагаю, что по этой причине учебник не стал перегруженным, так как я старался выбирать короткие и содержательные доказательства, которые позволяют оставаться в пределах отведенных на курс учебных часов. Опущенные здесь громоздкие доказательства некоторых утверждений можно найти в учебниках, список которых помещен в конце данного пособия. Имеющиеся в каждом параграфе не всегда тривиальные примеры и достаточное количество графиков дополняют и поясняют изложение.

Текст лекций подготовлен мной с помощью программы набора и верстки сложных текстов *MiKTeX*. Все имеющиеся в тексте графики являются точными, они построены в среде компьютерной алгебры *Mathematica*.

В тексте имеются многочисленные ссылки на [первую](#) и [вторую](#) части электронного учебника автора.

2014 г.

*П. Ласый*

## ГЛАВА X. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ, ДВОЙНЫЕ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В настоящей главе мы обобщим понятие определенного интеграла функции одной переменной на случай функции двух или трех переменных, заданной на линии, в области или на поверхности и рассмотрим простейшие приложения криволинейных, двойных, поверхностных и тройных интегралов в геометрии и механике. Для определения всех этих интегралов мы будем использовать *метод интегральных сумм*, который успешно применялся нами для определенного интеграла (глава VII, §2).

### §1. Криволинейные интегралы, их свойства и вычисление

В этом параграфе мы введем определение и изучим свойства *криволинейных интегралов* как скалярной, так и векторной функций и хотя, как мы увидим, второй из них и выражается через первый, однако он имеет и самостоятельное значение, поскольку и вычисляется он иначе, и в приложениях используется не меньше.

#### 1. Криволинейный интеграл скалярной функции (первого рода)

Пусть  $L$  – *спрямляемая, т.е. имеющая конечную длину*, линия в пространстве, содержащая свои граничные точки. Рассмотрим заданную на линии  $L$  функцию  $f(M)$ ,  $M \in L$ . Разобьем  $L$  на  $n$  малых частей  $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$  с длинами  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ , выберем произвольно внутри каждой из частей по точке  $M_k \in \Delta L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  и составим *интегральную сумму*

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta l_k. \quad (1)$$

Обозначим через  $\Delta d = \max_{k=\overline{1, n}} \Delta d_k$  – максимум диаметров<sup>1</sup>  $\Delta d_k$  частей  $\Delta L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  линии  $L$ .

**Определение.** *Конечный предел (если он существует) интегральных сумм  $I_n$  при условии, что диаметры всех частей разбиения линии  $L$  стремятся к нулю, не зависящий от способа разбиения и выбора точек внутри частей разбиения, называется криволинейным интегралом скалярной функции  $f(M)$  по линии  $L$  или криволинейным интегралом первого рода.*

Для этого интеграла мы будем использовать обозначение

$$\int_L f(M) dl \quad (2)$$

или в выбранной системе координат  $Oxyz$  пространства

$$\int_L f(x, y, z) dl.$$

Таким образом, по определению

$$\int_L f(M) dl = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta l_k.$$

Функция, для которой криволинейный интеграл (2) существует, называется *интегрируемой по линии  $L$* .

Рассмотрим одну простую *задачу механики*, которая приводит к криволинейному интегралу. Вычислим *массу материальной линии  $L$*  с известной плотностью распределения масс  $\rho(M)$ ,  $M \in L$ , которую мы будем предполагать интегрируемой по  $L$ . Для этого разобьем, как и выше, данную линию на малые части  $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$  с длинами  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$  и выберем внутри каждой из частей по точке  $M_k \in \Delta L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Поскольку масса  $\Delta m_k$  каждой

<sup>1</sup>Диаметром  $d$  ограниченного множества  $D$  на плоскости или в пространстве называется величина, равная верхней грани расстояний между точками данного множества, т.е.  $d = \sup_{M_1, M_2 \in D} \rho(M_1, M_2)$ .

части  $\Delta L_k, k = \overline{1, n}$  приближенно равна  $\Delta m_k \approx \rho(M_k)\Delta l_k$ , то масса  $m$  линии  $L$  выражается приближенным равенством

$$m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^n \rho(M_k)\Delta l_k.$$

Естественно, последнее равенство будет тем точнее, чем мельче будет разбиение линии  $L$  на части. Поэтому положим по определению

$$m = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(M_k)\Delta l_k = \int_L \rho(M)dl.$$

Таким образом, масса материальной линии  $L$  с плотностью  $\rho(M)$ ,  $M \in L$  может быть вычислена по формуле

$$m = \int_L \rho(M)dl.$$

Отметим основные свойства криволинейного интеграла, вытекающие из его определения.

1) Длина  $l$  линии  $L$  выражается через криволинейный интеграл по формуле

$$l = \int_L dl.$$

2) *Линейность.* Если  $f_1(M), f_2(M)$  – интегрируемые по линии  $L$  функции, то интегрируема также и функция  $a_1 f_1(M) + a_2 f_2(M)$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$  и

$$\int_L (a_1 f_1(M) + a_2 f_2(M)) dl = a_1 \int_L f_1(M) dl + a_2 \int_L f_2(M) dl.$$

3) *Аддитивность.* Пусть линия  $L$  разбита на две дуги  $L_1, L_2$  и функция  $f(M)$  интегрируема по каждой из этих дуг. Тогда данная функция интегрируема по линии  $L$  и

$$\int_L f(M) dl = \int_{L_1} f(M) dl + \int_{L_2} f(M) dl.$$

4) Если  $f_1(M), f_2(M)$  – интегрируемые по линии  $L$  функции и при всех  $M \in L$  выполняется неравенство  $f_1(M) \leq f_2(M)$ , то

$$\int_L f_1(M) dl \leq \int_L f_2(M) dl.$$

5) *Теорема о среднем для криволинейного интеграла скалярной функции.*

Если непрерывная функция  $f(M)$  интегрируема по ограниченной и связной линии  $L$ , содержащей свои граничные точки, то существует точка  $M_0 \in L$  такая, что

$$\int_L f(M) dl = f(M_0)l,$$

где  $l$  – длина линии  $L$ .

Для доказательства заметим, прежде всего, что по теореме Вейерштрасса (глава VIII, §1) функция  $f(M)$  ограничена на линии  $L$  и достигает на ней своих нижней и верхней граней, т. е. найдутся точки  $M_1, M_2 \in L$ , для которых

$$f(M_1) = \inf_L f(M), \quad f(M_2) = \sup_L f(M).$$

Таким образом,

$$\inf_L f(M) \leq f(M) \leq \sup_L f(M), \quad M \in L.$$

Отсюда, воспользовавшись свойствами 4), 2) и 1), мы заключаем, что

$$\inf_L f(M)l \leq \int_L f(M)dl \leq \sup_L f(M)l \iff \inf_L f(M) \leq \frac{1}{l} \int_L f(M)dl \leq \sup_L f(M).$$

По теореме Больцано-Коши (глава VIII, §1) существует точка  $M_0 \in L$ , для которой

$$f(M_0) = \frac{1}{l} \int_L f(M)dl \iff \int_L f(M)dl = f(M_0)l.$$

Покажем, что *криволинейный интеграл (2) непрерывной функции по гладкой линии существует* и научимся его вычислять, если известны уравнения линии. Предположим сначала, что *гладкая линия  $L$*  (глава VII, §5, пункт 1) задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta].$$

Разбиению

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

отрезка  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  малых частей с длинами  $\Delta t_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  соответствует разбиение линии  $L$  на малые части  $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$ . Как известно (глава VII, §5, пункт 1), длины  $\Delta l_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  этих частей вычисляются по формулам

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt, k = \overline{1, n}$$

или, учитывая гладкость линии  $L$ , по теореме о среднем для определенного интеграла (глава VII, §1, свойство 6))

$$\Delta l_k = \sqrt{(x'(s_k))^2 + (y'(s_k))^2 + (z'(s_k))^2} \Delta t_k, s_k \in [t_{k-1}, t_k], k = \overline{1, n}.$$

Выбрав произвольно в каждой из частей разбиения по точке  $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \Delta L_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , запишем интегральную сумму

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta l_k = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \sqrt{(x'(s_k))^2 + (y'(s_k))^2 + (z'(s_k))^2} \Delta t_k$$

для *криволинейного интеграла (2)* и интегральную сумму

$$\tilde{I}_n = \sum_{k=1}^n f(x(s_k), y(s_k), z(s_k)) \sqrt{(x'(s_k))^2 + (y'(s_k))^2 + (z'(s_k))^2} \Delta t_k$$

для непрерывной, а, значит, и интегрируемой на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функции

$$f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Ввиду непрерывности, а, значит, и равномерной непрерывности (глава IV, §5, пункт 5) функции  $f(x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  и гладкости линии  $L$  интегральные суммы  $I_n$  и  $\tilde{I}_n$  бесконечно мало отличаются при  $\Delta d \rightarrow 0$ , т. е.

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} I_n = \lim_{\Delta \mu \rightarrow 0} \tilde{I}_n, \Delta \mu = \max_{k=\overline{1, n}} \Delta t_k.$$

Отсюда следует, что поскольку

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} I_n = \int_L f(x, y, z) dl, \lim_{\Delta \mu \rightarrow 0} \tilde{I}_n = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$$

то *криволинейный интеграл сводится к определенному* по формуле

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (3)$$

В частности, для *гладкой* параметрически заданной на плоскости уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$$

линии  $L$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (4)$$

Пользуясь (4), мы можем записать еще две формулы для вычисления криволинейного интеграла по *гладкой* линии на плоскости.

Если линия  $L$  задана *явным уравнением*

$$y = y(x), x \in [a, b],$$

где  $y = y(x)$  – непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[a, b]$  функция, то здесь в качестве параметра мы можем взять аргумент  $x$  и, следовательно,

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (5)$$

Аналогично, если

$$x = x(y), y \in [c, d],$$

то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy.$$

Наконец, если *гладкая кривая*  $L$  задана уравнением

$$r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$$

в *полярных координатах*, то

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, y = r(\varphi) \sin \varphi, \varphi \in [\alpha, \beta]$$

– параметрические уравнения этой линии и, поскольку

$$(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2,$$

то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (6)$$

**Замечание.** Все приведенные выше формулы сохраняют свою силу также и для *кусочно-гладких* линий.

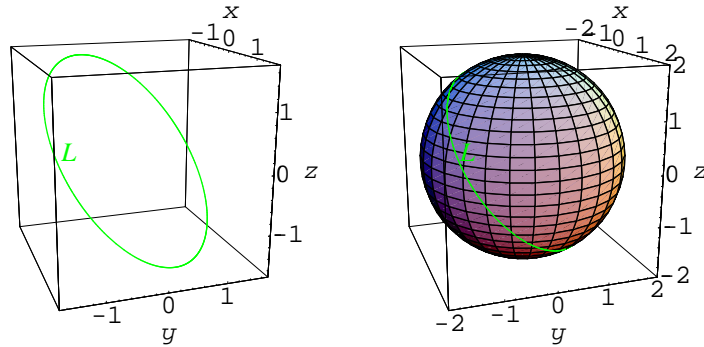
**Пример 1.** Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \sqrt[3]{y^2 + z^2 + yz} dl$$

по окружности  $L$ , находящейся в сечении сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  плоскостью  $x + y + z = 0$ .

*Решение.*





Исключая из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

переменную  $x$ , получим  $y^2 + z^2 + yz = 2$ . Отсюда, принимая во внимание **свойство 1)** криволинейного интеграла, найдем

$$\int_L \sqrt[3]{y^2 + z^2 + yz} dl = \int_L \sqrt[3]{2} dl = \sqrt[3]{2} \int_L dl = 4\sqrt[3]{2}\pi.$$

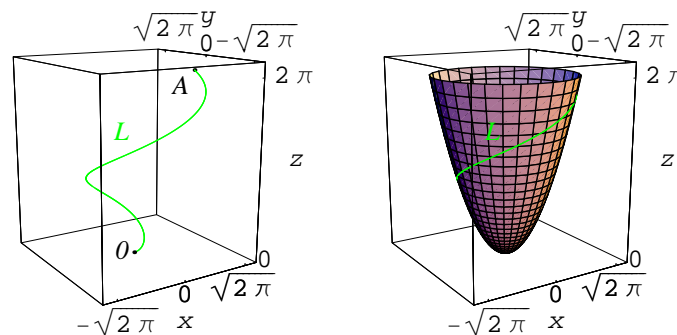
**Пример 2.** Вычислить массу дуги линии  $L$

$$x = \sqrt{t} \cos t, y = \sqrt{t} \sin t, z = t$$

от точки  $O(0, 0, 0)$  до точки  $A(\sqrt{2\pi}, 0, 2\pi)$ , если известна плотность распределения масс

$$\rho(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Решение.* Линия  $L$  представляет собой один виток спирали на параболоиде  $x^2 + y^2 = z$ .



Выше мы установили, что искомая масса выражается криволинейным интегралом

$$m = \int_L \rho(x, y, z) dl = \int_L z\sqrt{x^2 + y^2} dl.$$

Поскольку

$$x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cos t - \sqrt{t} \sin t, y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t + \sqrt{t} \cos t, z'(t) = 1,$$

то

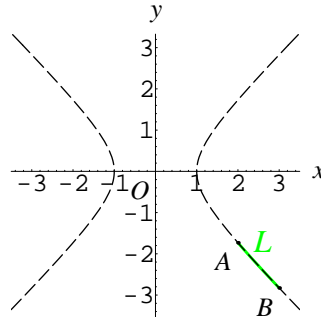
$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = \frac{1}{4t} + t + 1 = \frac{(2t+1)^2}{4t}$$

и, следовательно, по **формуле (3)**

$$m = \int_0^{2\pi} t\sqrt{t} \frac{2t+1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2t^2 + t) dt = \frac{1}{2} \left( 2 \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^2(8\pi+3)}{3}.$$

**Пример 3.** Вычислить интеграл функции  $f(x, y) = xy$  по линии  $L$  на плоскости, заданной уравнением  $y = -\sqrt{x^2 - 1}$  от точки  $A(2, -\sqrt{3})$  до точки  $B(3, -2\sqrt{2})$ .

*Решение.* Данная линия – часть равносторонней гиперболы с уравнением  $x^2 - y^2 = 1$ .



Здесь

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow 1 + (y'(x))^2 = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}.$$

Воспользовавшись формулой (5), получим:

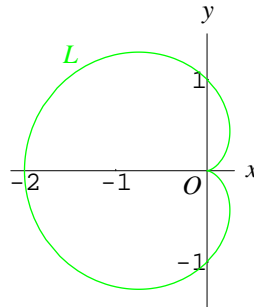
$$\begin{aligned} \int_L xy dl &= - \int_2^3 x \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}} dx = - \int_2^3 x \sqrt{2x^2 - 1} dx = \\ &= -\frac{1}{4} \int_2^3 \sqrt{2x^2 - 1} d(2x^2 - 1) = -\frac{1}{6} (2x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^3 = \frac{1}{6} (7\sqrt{7} - 17\sqrt{17}). \end{aligned}$$

**Пример 4.** Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_L \sqrt{2\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2} dl$$

по линии  $L: r = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ , заданной в полярных координатах.

*Решение.* Данная линия называется кардиоидой.



Для нее

$$r' = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2 = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

и, стало быть, по формуле (6)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 4 \sin^4 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 8 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{8}{3} \sin^3 \frac{\varphi}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{3} (1 - (-1)) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

## 2. Криволинейный интеграл векторной функции (второго рода)

Всюду в этом параграфе мы будем рассматривать *гладкую, содержащую свои граничные точки линию*  $L$  на плоскости или в пространстве. Будем предполагать также, что линия  $L$  не имеет особых точек, т. е. в некотором ее параметрическом представлении

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta] \quad (1)$$

касательный вектор

$$\bar{\tau}(M) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}$$

в любой точке  $M_t(x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  кривой не равен нуль-вектору.

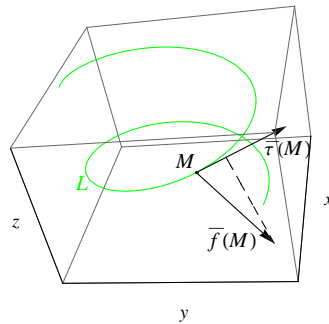
Выберем на данной линии определенную *ориентацию* с помощью непрерывно изменяющегося единичного касательного вектора  $\bar{\tau}_1(M)$ ,  $M \in L$ . Ясно, что на линии существуют две *противоположные* друг другу ориентации.

Пусть в точках линии  $L$  задана *векторная функция*

$$\bar{f}(M) = f_x(M)\bar{i} + f_y(M)\bar{j} + f_z(M)\bar{k}, M \in L.$$

**Определение.** Если существует интеграл проекции векторной функции  $\bar{f}(M)$  на касательный вектор  $\bar{\tau}(M)$  по линии  $L$  с выбранной ориентацией, то он называется *криволинейным интегралом данной векторной функции по данной линии или криволинейным интегралом второго рода*. Таким образом, криволинейный интеграл векторной функции представляет собой величину

$$\int_L \text{Pr}_{\bar{\tau}(M)} \bar{f}(M) dl.$$



Заметим сразу же, что, если *векторная функция*  $\bar{f}(M)$  непрерывна на линии  $L$ , то *криволинейный интеграл существует*. Это следует из предыдущего параграфа, так как в этом случае непрерывна также числовая функция  $\text{Pr}_{\bar{\tau}(M)} \bar{f}(M)$ .

Из определения скалярного произведения ([глава II, §3](#)) следует, что

$$\text{Pr}_{\bar{\tau}(M)} \bar{f}(M) = \bar{f}(M) \cdot \bar{\tau}_1(M),$$

где

$$\bar{\tau}_1(M) = \frac{\bar{\tau}(M)}{|\bar{\tau}(M)|}$$

– единичный касательный вектор к линии  $L$  в точке  $M$  и, стало быть,

$$\int_L \text{Pr}_{\bar{\tau}(M)} \bar{f}(M) dl = \int_L \bar{f}(M) \cdot \bar{\tau}_1(M) dl.$$

Поскольку координатами единичного вектора  $\bar{\tau}_1(M)$  являются направляющие косинусы  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  касательного вектора  $\bar{\tau}(M)$  ([глава II, §2](#)), то криволинейный интеграл векторной функции мы можем записать также в виде

$$\int_L \text{Pr}_{\bar{\tau}(M)} \bar{f}(M) dl = \int_L (f_x(M) \cos \alpha + f_y(M) \cos \beta + f_z(M) \cos \gamma) dl.$$

Рассмотрим одно из простейших приложений криволинейного интеграла векторной функции в физике. Вычислим *работу* по перемещению материальной точки вдоль линии  $L$  в выбранном направлении под действием непрерывной силы  $\vec{F}(M)$ ,  $M \in L$ . Разобьем данную линию на малые части  $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$  с длинами  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$  и выберем внутри каждой из частей по точке  $M_k \in \Delta L_k, k = \overline{1, n}$ . Работа  $\Delta A_k$  по перемещению точки вдоль дуги  $\Delta L_k, k = \overline{1, n}$  приближенно равна  $\Delta A_k \approx \vec{F}(M_k) \cdot \Delta \vec{r}_k$ , где  $\Delta \vec{r}_k = \Delta l_k \vec{\tau}_1(M_k)$  и единичный касательный вектор  $\vec{\tau}_1(M_k)$  ориентирован в соответствии с направлением перемещения по кривой  $L$ . Тогда искомая работа приближенно равна

$$A = \sum_{k=1}^n \Delta A_k \approx \sum_{k=1}^n \vec{F}(M_k) \cdot \Delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}(M_k) \cdot \vec{\tau}_1(M_k) \Delta l_k$$

и равенство это будет тем точнее, чем меньше будут диаметры всех частей разбиения линии  $L$ . В правой части данного приближенного равенства записана интегральная сумма для функции  $\vec{F}(M) \cdot \vec{\tau}_1(M)$ ,  $M \in L$  и, следовательно, в пределе при условии бесконечно малого дробления линии  $L$ , мы получим:

$$A = \int_L \vec{F}(M) \cdot \vec{\tau}_1(M) dl.$$

Таким образом, *работа по перемещению материальной точки вдоль линии  $L$  под действием силы  $\vec{F}(M)$  численно равна криволинейному интегралу вектора силы по данной линии.*

Сформулируем *основные свойства криволинейного интеграла векторной функции*, вытекающие из его определения и соответствующих свойств криволинейного интеграла скалярной функции.

1) *Линейность.* Если  $\vec{f}_1(M), \vec{f}_2(M)$  – интегрируемые по линии  $L$  с выбранной на ней ориентацией векторные функции, то интегрируема также по этой линии и векторная функция  $a_1 \vec{f}_1(M) + a_2 \vec{f}_2(M)$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$  и

$$\int_L \text{Pr}_{\vec{\tau}(M)} (a_1 \vec{f}_1(M) + a_2 \vec{f}_2(M)) dl = a_1 \int_L \text{Pr}_{\vec{\tau}(M)} \vec{f}_1(M) dl + a_2 \int_L \text{Pr}_{\vec{\tau}(M)} \vec{f}_2(M) dl.$$

2) *Аддитивность.* Пусть линия  $L$  с зафиксированной на ней ориентацией разбита на две дуги  $L_1, L_2$  и векторная функция  $\vec{f}(M)$  интегрируема по каждой из этих дуг. Тогда данная векторная функция интегрируема по линии  $L$  и

$$\int_L \text{Pr}_{\vec{\tau}(M)} \vec{f}(M) dl = \int_{L_1} \text{Pr}_{\vec{\tau}(M)} \vec{f}(M) dl + \int_{L_2} \text{Pr}_{\vec{\tau}(M)} \vec{f}(M) dl.$$

3) Обозначим через  $L^+$  линию  $L$  с выбранной на ней ориентацией, а через  $L^-$  – ту же линию с противоположной ориентацией. Тогда, если векторная функция  $\vec{f}(M)$  интегрируема по  $L^+$  ( $L^-$ ), то она интегрируема и по  $L^-$  ( $L^+$ ) и

$$\int_{L^+} \text{Pr}_{\vec{\tau}(M)} \vec{f}(M) dl = - \int_{L^-} \text{Pr}_{\vec{\tau}(M)} \vec{f}(M) dl.$$

4) *Теорема о среднем для криволинейного интеграла векторной функции.*

Если векторная функция  $\vec{f}(M)$  непрерывна на линии  $L$  с зафиксированной на ней ориентацией, то существует точка  $M_0 \in L$  такая, что

$$\int_L \text{Pr}_{\vec{\tau}(M)} \vec{f}(M) dl = \text{Pr}_{\vec{\tau}(M_0)} \vec{f}(M_0) l = \vec{f}(M_0) \cdot \vec{\tau}_1(M_0) l,$$

где  $l$  – длина линии  $L$ .

Сведем криволинейный интеграл векторной функции к определенному интегралу в предположении, что *гладкая линия  $L$  задана параметрическими уравнениями (1), а векторная*

функция  $\bar{f}(M)$  непрерывна на  $L$ . Для удобства обозначим радиус-вектор произвольной точки  $M_t(x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  кривой  $L$  через

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (2)$$

и, значит, (2) – векторное уравнение линии  $L$ . Учитывая, что в этих обозначениях  $\bar{r}(M_t) = \bar{r}'(t)$  и, следовательно,  $\bar{\tau}_1(M_t) = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|}$ , мы, воспользовавшись формулой (3) предыдущего параграфа, получим:

$$\int_L \text{Pr}_{\bar{\tau}(M)} \bar{f}(M) dl = \int_{\alpha}^{\beta} \bar{f}(M_t) \cdot \bar{r}'(t) dt.$$

Определив дифференциал векторной функции  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  в точке  $t$  интервала  $[\alpha, \beta]$  равенством

$$d\bar{r}(t) = \bar{r}'(t) dt,$$

мы можем переписать формулу для вычисления криволинейного интеграла векторной функции в виде

$$\int_L \text{Pr}_{\bar{\tau}(M)} \bar{f}(M) dl = \int_{\alpha}^{\beta} \bar{f}(M_t) \cdot d\bar{r}(t) \quad (3)$$

или, в координатах,

$$\int_L \text{Pr}_{\bar{\tau}(M)} \bar{f}(M) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f_x(x(t), y(t), z(t)) dx(t) + f_y(x(t), y(t), z(t)) dy(t) + f_z(x(t), y(t), z(t)) dz(t). \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) оправдывают еще два обозначения для криволинейного интеграла векторной функции: в векторной форме

$$\int_L \bar{f}(M) \cdot d\bar{r}$$

и в координатах

$$\int_L f_x(x, y, z) dx + f_y(x, y, z) dy + f_z(x, y, z) dz.$$

Очевидно, криволинейный интеграл векторной функции

$$\bar{f}(M) = f_x(M)\bar{i} + f_y(M)\bar{j}$$

по ориентированной линии  $L$  на плоскости, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

вычисляется аналогично (4) по формуле

$$\int_L f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f_x(x(t), y(t)) dx(t) + f_y(x(t), y(t)) dy(t).$$

В частности, если линия задана явно уравнением

$$y = y(x), \quad x \in [a, b] \quad \text{или} \quad x = x(y), \quad y \in [c, d],$$

то

$$\int_L f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \int_a^b f_x(x, y(x)) dx + f_y(x, y(x)) dy(x)$$

или

$$\int_L f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \int_c^d f_x(x(y), y) dx(y) + f_y(x(y), y) dy. \quad (5)$$

Если линия  $L$  замкнута, т. е. в ее параметрическом представлении (2)  $\bar{r}(\alpha) = \bar{r}(\beta)$ , то криволинейный интеграл векторной функции  $\bar{f}(M)$  по данной линии обозначается через<sup>1</sup>

$$\oint_L \text{Pr}_{\bar{r}(M)} \bar{f}(M) dl.$$

**Замечание.** Все найденные выше формулы для вычисления криволинейного интеграла векторной функции справедливы также и для *кусочно-гладких линий*.

**Пример 1.** Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_L \frac{z}{x^2 + y^2} dx - 2x dy + 3y dz$$

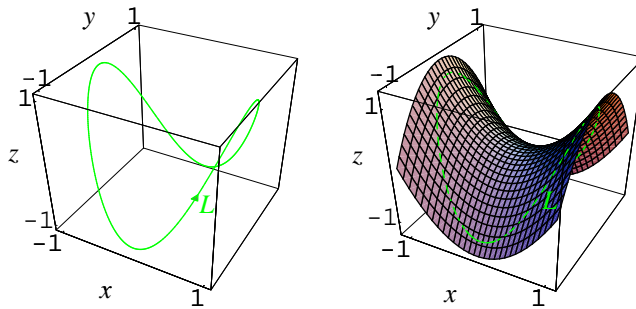
по замкнутой линии  $L$ , заданной параметрическими уравнениями

$$x = \cos t, y = \sin t, z = \cos 2t$$

и ориентированной так, что наблюдая со стороны оси  $Oz$  мы будем видеть обход по данной линии совершающимся против часовой стрелки.

*Решение.* Данная замкнутая кривая располагается на гиперболическом параболоиде, так как при всех  $t \in \mathbf{R}$

$$x^2 - y^2 = z.$$



Для вычисления криволинейного интеграла воспользуемся формулой (4), заметив, что при выбранной ориентации линии параметр  $t$  изменяется в пределах от 0 до  $2\pi$ .

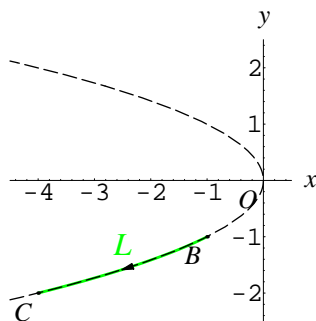
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{\sin^2 t + \cos^2 t} d \cos t - 2 \cos t d \sin t + 3 \sin t d \cos 2t = \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 t - 1) d \cos t - 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - 6 \int_0^{2\pi} \sin t \sin 2t dt = \\ &= \left( \frac{2}{3} \cos^3 t - \cos t \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt - 3 \int_0^{2\pi} (\cos t - \cos 3t) dt = \\ &= - \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} - 3 \left( \sin t - \frac{1}{3} \sin 3t \right) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить работу по перемещению материальной точки вдоль кривой  $L$  на плоскости, заданной уравнением  $y^2 = -x$ , из положения  $B(-1, 1)$  в положение  $C(-4, -2)$  под действием силы

$$\bar{F}(x, y) = \frac{x}{y^4 + 1} \bar{i} - e^{\sqrt{-x}} \bar{j}.$$

*Решение.* Материальная точка перемещается по дуге параболы  $y^2 = -x$ .

<sup>1</sup>Иногда его называют *интегралом по замкнутому контуру*.



Как мы установили выше, искомая работа выражается криволинейным интегралом

$$A = \int_L \frac{x}{y^4 + 1} dx - e^{\sqrt{-x}} dy,$$

для вычисления которого мы применим формулу (5). Здесь  $x = -y^2$  и при перемещении точки по данной линии из  $B$  в  $C$  аргумент  $y$  изменяется в пределах от 1 до  $-2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{-2} \frac{-y^2}{y^4 + 1} d(-y^2) - e^{|y|} dy = \frac{1}{2} \int_1^{-2} \frac{d(y^4 + 1)}{y^4 + 1} + \int_{-2}^0 e^{-y} dy + \int_0^1 e^y dy = \\ &= \frac{1}{2} \ln(y^4 + 1) \Big|_1^{-2} - e^{-y} \Big|_{-2}^0 + e^y \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{17}{2} - 1 + e^2 + e - 1 = \frac{1}{2} \ln \frac{17}{2} + e^2 + e - 2. \end{aligned}$$

## §2. Двойной интеграл, его свойства и вычисление.

### Замена переменных в двойном интеграле. Формула Грина.

#### О несобственном двойном интеграле

Пусть  $D$  – замкнутая, ограниченная область на плоскости, которую мы будем предполагать также *квадрируемой*, т. е. имеющей конечную площадь, и  $f(M)$  – функция двух переменных, заданная в этой области.

Введем определение *интеграла функции  $f(M)$  по области  $D$* . Возьмем произвольное разбиение данной области на малые части  $\Delta D_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  с площадями  $\Delta S_k$  и диаметрами  $\Delta d_k$ . В каждой из частей выберем произвольную точку  $M_k \in \Delta D_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  и составим *интегральную сумму*

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k.$$

**Определение.** Если существует конечный предел интегральных сумм  $I_n$  при условии, что диаметры всех частей  $\Delta D_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  разбиения области  $D$  стремятся к нулю, не зависящий как от способа разбиения, так и от выбора точек  $M_k \in \Delta D_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то он называется *двойным интегралом функции  $f(M)$  по области  $D$*  и обозначается через

$$\iint_D f(M) dS \quad (1)$$

или в системе координат  $Oxy$  на плоскости

$$\iint_D f(x, y) dS.$$

Стало быть, по определению

$$\iint_D f(M) dS = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k, \quad \Delta d = \max_{k=\overline{1, n}} \Delta d_k.$$

Если двойной интеграл (1) существует, то функция  $f(M)$  называется *интегрируемой по области  $D$* .

Точно так же, как и для материальной линии в предыдущем параграфе, мы можем убедиться в том, что *масса плоской материальной пластинки*  $D$  с известной интегрируемой по области  $D$  плотностью  $\rho(M)$ ,  $M \in D$  выражается через двойной интеграл по формуле

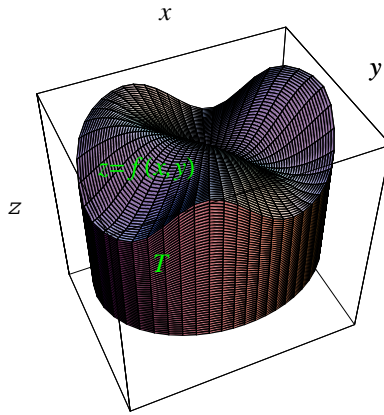
$$m = \iint_D \rho(M) dS. \quad (2)$$

Все приведенные в §1, пункт 1 **свойства криволинейного интеграла** переносятся и на двойной интеграл, если заменить в них слова „линия“ и „длина“ на слова „область“ и „площадь“, соответственно. Например, **свойство 1)** здесь следует сформулировать так:

*площадь  $S$  области  $D$  вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле*

$$S = \iint_D dS.$$

Еще одно приложение двойного интеграла мы получим, если попытаемся вычислить *объем тела*  $T$  в пространстве, ограниченного областью  $D$  в плоскости  $Oxy$ , поверхностью с уравнением  $z = f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  – неотрицательная в области  $D$  и интегрируемая там функция, и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси  $Oz$ , а направляющей служит граница области  $D$ .



Указанному выше разбиению области  $D$  на малые части  $\Delta D_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  соответствует разбиение тела  $T$  на малые части  $\Delta T_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Объем  $\Delta V_k$  каждой такой части приближенно равен объему прямого цилиндра с основанием  $\Delta D_k$  и высотой  $f(M_k)$ , где  $M_k \in \Delta D_k$ , т. е.

$$\Delta V_k \approx f(M_k) \Delta S_k.$$

Тогда объем  $V$  тела  $T$  выражается приближенным равенством

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k$$

и, значит, в пределе при условии, что диаметры всех частей  $\Delta D_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  стремятся к нулю

$$V = \iint_D f(M) dS.$$

Проведенные выше рассуждения могут служить нестрогим обоснованием *существования двойного интеграла непрерывной функции по области  $D$* , так как интуитивно ясно, что в этом случае указанное выше тело  $T$  имеет конечный объем.

Займемся теперь *вычислением двойного интеграла непрерывной функции  $z = f(x, y)$  по простой вдоль одной из координатных осей области*.

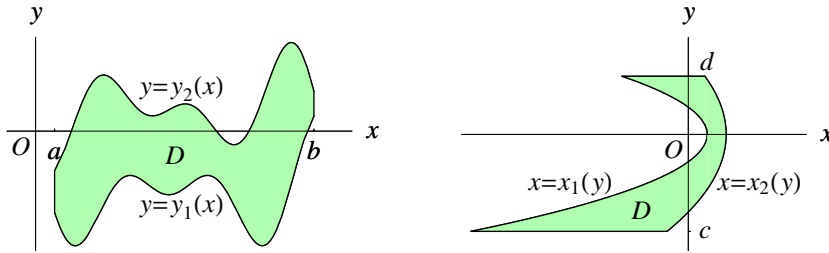
Область  $D$  называется *простой вдоль оси  $Oy$  (соответственно простой вдоль оси  $Ox$ )*, если эта область заключена между графиками непрерывных функций

$$y = y_1(x), y = y_2(x), y_1(x) \leq y_2(x), x \in [a, b]$$



(соответственно между графиками непрерывных функций

$$x = x_1(y), x = x_2(y), x_1(y) \leq x_2(y), y \in [c, d].$$



Часто в дальнейшем мы будем рассматривать также *простые области* на плоскости. Область  $D$  мы будем называть *простой*, если непрерывными линиями ее можно разбить на конечное число простых вдоль координатных осей частей.

Предположим сначала, что область является прямоугольником

$$\Pi = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

со сторонами, параллельными осям координат.

Рассмотрим разбиения

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

и

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d$$

отрезков  $[a, b]$  и  $[c, d]$ , соответственно. Прямые  $x = x_i, i = \overline{0, m-1}$ ;  $y = y_j, j = \overline{0, n-1}$  разбивают прямоугольник  $\Pi$  на  $mn$  прямоугольников

$$\Delta\Pi_{ij} = \{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}\}, i = \overline{0, m-1}, j = \overline{0, n-1}.$$

Составим интегральную сумму

$$I_{mn} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

где  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$  — длины отрезков  $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, m-1}$ ;  $[y_j, y_{j+1}], j = \overline{0, n-1}$ , соответственно. С одной стороны,

$$\lim_{\substack{\Delta\mu \rightarrow 0 \\ \Delta\nu \rightarrow 0}} I_{mn} = \iint_{\Pi} f(x, y) dS, \Delta\mu = \max_{i=0, m-1} \Delta x_i, \Delta\nu = \max_{j=0, n-1} \Delta y_j.$$

С другой, переписав интегральную сумму в виде

$$I_{mn} = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta x_i \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j) \Delta y_j$$

и заметив, что для каждого фиксированного  $i = \overline{0, m-1}$

$$\lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j) \Delta y_j = \int_c^d f(x_i, y) dy$$

мы, воспользовавшись теоремой о повторном пределе (глава VIII, §1, теорема 1), получим:

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dS = \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} \Delta x_i \int_c^d f(x_i, y) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Интеграл в правой части последнего равенства называется *повторным* и обозначается через

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

В этом интеграле сначала вычисляется определенный интеграл по переменной  $y$  при произвольном фиксированном  $x \in [a, b]$  и затем найденная функция интегрируется по переменной  $x$ .

Таким образом, двойной интеграл непрерывной функции по прямоугольнику выражается через повторный по формуле

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dS = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (3)$$

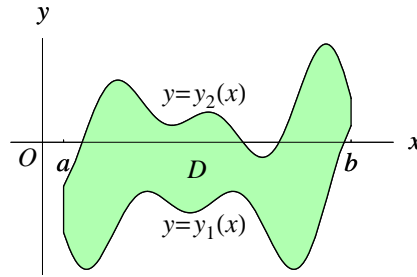
Естественно, в повторном интеграле мы можем поменять порядок интегрирования и, таким образом,

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dS = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Пусть теперь функция  $f(x, y)$  определена в *простой вдоль оси  $Oy$*  области

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

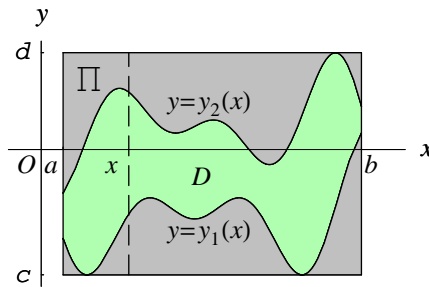
где  $y_1(x), y_2(x)$  – *непрерывные* на отрезке  $[a, b]$  функции.



Очевидно, данная область содержится в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

где  $c = \min_{x \in [a, b]} y_1(x)$ ,  $d = \max_{x \in [a, b]} y_2(x)$ .



Рассмотрим функцию

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \in \Pi \setminus D. \end{cases}$$

С одной стороны,

$$\iint_{\Pi} g(x, y) dS = \iint_D g(x, y) dS + \iint_{\Pi \setminus D} g(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dS + \iint_{\Pi \setminus D} 0 dS = \iint_D f(x, y) dS.$$

С другой, воспользовавшись формулой (3), получим:

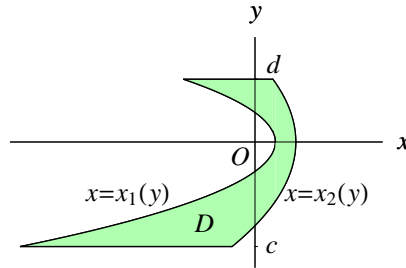
$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} g(x, y) dS &= \int_a^b dx \int_c^d g(x, y) dy = \int_a^b dx \left( \int_c^{y_1(x)} g(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d g(x, y) dy \right) = \\ &= \int_a^b dx \left( \int_c^{y_1(x)} 0 dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d 0 dy \right) = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно, двойной интеграл по простой вдоль координатной оси  $Oy$  области может быть вычислен с помощью повторного по формуле

$$\iint_D f(x, y) dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (4)$$

Аналогично, двойной интеграл по простой вдоль координатной оси  $Ox$  области

$$D = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$$



с непрерывными на отрезке  $[c, d]$  функциями  $x_1(y), x_2(y)$  вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x, y) dS = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (5)$$

Принимая во внимание структуру повторного интеграла, двойной интеграл часто записывают в виде

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

**Замечание 1.** Если область  $D$  является *простой*, то, разбив ее на простые вдоль координатных осей части  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , мы по свойству аддитивности двойного интеграла можем вычислить

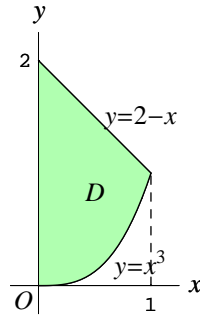
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \dots + \iint_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

**Пример 1.** Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D x^2 \sin \pi y dx dy,$$

где область  $D$  ограничена линиями  $y = x^3, x + y = 2, x = 0$ .

*Решение.* Данная область имеет вид



Эта область является простой вдоль оси  $Oy$ , так как на отрезке  $[0, 1]$  оси  $Ox$  она заключена между графиками функций  $y = x^3$  и  $y = 2 - x$ . Воспользуемся [формулой \(4\)](#):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{x^3}^{2-x} x^2 \sin \pi y dy = \frac{1}{\pi} \int_0^1 x^2 dx \int_{x^3}^{2-x} \sin \pi y d(\pi y) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 x^2 \cos \pi y \Big|_{x^3}^{2-x} dy = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^1 x^2 \cos \pi x^3 dx - \int_0^1 x^2 \cos \pi(x-2) dx \right). \end{aligned}$$

Первый из интегралов в скобках мы найдем подведением под знак дифференциала, а второй – двойным интегрированием по частям.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \cos \pi x^3 dx &= \frac{1}{3\pi} \int_0^1 \cos \pi x^3 d(\pi x^3) = \frac{1}{3\pi} \sin \pi x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3\pi} (\sin \pi - \sin 0) = 0. \\ \int_0^1 x^2 \cos \pi(x-2) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 x^2 d \sin \pi(x-2) = \frac{1}{\pi} \left( x^2 \sin \pi(x-2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin \pi(x-2) dx^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 0 - 2 \int_0^1 x \sin \pi(x-2) dx \right) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 x d \cos \pi(x-2) = \\ &= \frac{2}{\pi^2} \left( x \cos \pi(x-2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \pi(x-2) dx \right) = \frac{2}{\pi^2} \left( -1 - \frac{1}{\pi} \sin \pi(x-2) \Big|_0^1 \right) = -\frac{2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

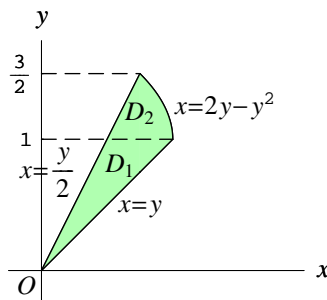
$$I = \frac{1}{\pi} \left( 0 - \left( -\frac{2}{\pi^2} \right) \right) = \frac{2}{\pi^3}.$$

**Пример 2.** Найти массу области  $D$  на плоскости, ограниченной линиями

$$x = 2y - y^2, y = x, y = 2x,$$

если известна плотность  $\rho(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$  в каждой точке области.

*Решение.* Данную область  $D$



прямой  $y = 1$  мы разобьем на две простые вдоль оси  $Ox$  части  $D_1$  и  $D_2$ . По формуле (2)

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy = \iint_{D_1} e^{\frac{x}{y}} dx dy + \iint_{D_2} e^{\frac{x}{y}} dx dy.$$

Интегралы по областям  $D_1$  и  $D_2$  мы вычислим пользуясь формулой (5).

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} e^{\frac{x}{y}} dx dy &= \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^y e^{\frac{x}{y}} dx = \int_0^1 y dy \int_{\frac{y}{2}}^y e^{\frac{x}{y}} d\left(\frac{x}{y}\right) = \int_0^1 y e^{\frac{x}{y}} \Big|_{\frac{y}{2}}^y dy = (e - \sqrt{e}) \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e - \sqrt{e}). \\ \iint_{D_2} e^{\frac{x}{y}} dx dy &= \int_1^{\frac{3}{2}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y-y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = \int_1^{\frac{3}{2}} y dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y-y^2} e^{\frac{x}{y}} d\left(\frac{x}{y}\right) = \int_1^{\frac{3}{2}} y e^{\frac{x}{y}} \Big|_{\frac{y}{2}}^{2y-y^2} dy = \\ &= \int_1^{\frac{3}{2}} y (e^{2-y} - \sqrt{e}) dy = \int_1^{\frac{3}{2}} y e^{2-y} dy - \sqrt{e} \frac{y^2}{2} \Big|_1^{\frac{3}{2}} = - \int_1^{\frac{3}{2}} y de^{2-y} - \frac{5}{8} \sqrt{e} = \\ &= - y e^{2-y} \Big|_1^{\frac{3}{2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} e^{2-y} dy - \frac{5}{8} \sqrt{e} = -\frac{3}{2} \sqrt{e} + e - e^{2-y} \Big|_1^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{8} \sqrt{e} = \\ &= e - \frac{17}{8} \sqrt{e} - \sqrt{e} + e = 2e - \frac{25}{8} \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Окончательно, искомая масса равна

$$m = \frac{1}{2} (e - \sqrt{e}) + 2e - \frac{25}{8} \sqrt{e} = \frac{1}{8} (20e - 29\sqrt{e}).$$

Как и для определенного интеграла, при вычислении двойного интеграла иногда бывает полезной замена переменных, которая может его упростить.

Выясним сначала, как преобразуется площадь малой части плоскости при замене переменных. Проведем для этого пусть и не совсем строгие, но зато достаточно прозрачные геометрические рассуждения.

Пусть область  $D_1$  на плоскости  $O_1x_1y_1$  биективно, т. е. взаимно однозначно, отображается в область  $D$  плоскости  $Oxy$  с помощью преобразования

$$x = x(x_1, y_1), \quad y = y(x_1, y_1) \quad (6)$$

с непрерывно дифференцируемыми в области  $D_1$  функциями  $x(x_1, y_1)$ ,  $y(x_1, y_1)$ , которое является также и невырожденным, т. е. определитель Якоби этого преобразования

$$J(x_1, y_1) = \begin{vmatrix} x'_{x_1}(x_1, y_1) & x'_{y_1}(x_1, y_1) \\ y'_{x_1}(x_1, y_1) & y'_{y_1}(x_1, y_1) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в любой точке области  $D_1$ . Поскольку определитель Якоби является непрерывной функцией, то по теореме Больцано-Коши (глава VIII, §1, теорема 3) он сохраняет знак в области  $D_1$ , т. е.

$$J(x_1, y_1) > 0 \quad (J(x_1, y_1) < 0), \quad \text{если } (x_1, y_1) \in D_1.$$

Возьмем произвольную внутреннюю точку  $A_1(x_1, y_1)$  области  $D_1$ . Ввиду непрерывной дифференцируемости функций  $x = x(x_1, y_1)$ ,  $y = y(x_1, y_1)$  их приращения вблизи точки  $A_1$  представляются с помощью дифференциалов в виде

$$\begin{aligned} \Delta x(A_1, \Delta x_1, \Delta y_1) &= dx(A_1) + o_1(\Delta r_1) = x'_{x_1}(A_1) \Delta x_1 + x'_{y_1}(A_1) \Delta y_1 + o_1(\Delta r_1), \\ \Delta y(A_1, \Delta x_1, \Delta y_1) &= dy(A_1) + o_2(\Delta r_1) = y'_{x_1}(A_1) \Delta x_1 + y'_{y_1}(A_1) \Delta y_1 + o_2(\Delta r_1), \end{aligned}$$

где  $o_1(\Delta r_1), o_2(\Delta r_1)$  – бесконечно малые более высокого порядка, чем  $\Delta r_1 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}$  и, таким образом, при малых  $\Delta x_1$  и  $\Delta y_1$  преобразование (6) мало отличается от линейного

$$\begin{aligned} x(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1) &\approx x(A_1) + x'_{x_1}(A_1)\Delta x_1 + x'_{y_1}(A_1)\Delta y_1, \\ y(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1) &\approx y(A_1) + y'_{x_1}(A_1)\Delta x_1 + y'_{y_1}(A_1)\Delta y_1. \end{aligned} \quad (7)$$

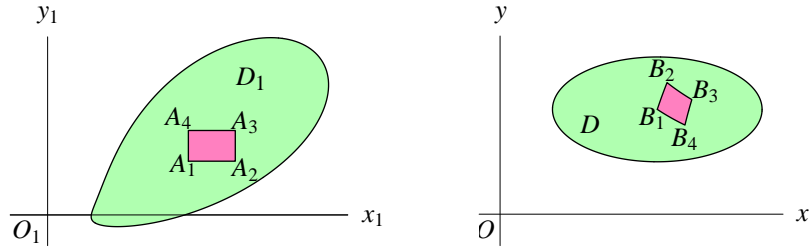
Прямой проверкой несложно убедиться в том, что *линейное преобразование* (7) отображает параллельные прямые также в параллельные прямые и, стало быть, *параллелограмм оно преобразует в параллелограмм*.

Рассмотрим малый прямоугольник  $\Delta\Pi_1$  в области  $D_1$  с вершинами в точках

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_1 + \Delta x_1, y_1), A_3(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1), A_4(x_1, y_1 + \Delta y_1)$$

и площадью  $\Delta S_1 = |\Delta x_1 \Delta y_1|$ . Преобразование (6) отображает  $\Delta\Pi_1$  в криволинейный четырехугольник  $\Delta\Pi$  в области  $D$  с вершинами

$$B_1(x(A_1), y(A_1)), B_2(x(A_2), y(A_2)), B_3(x(A_3), y(A_3)), B_4(x(A_4), y(A_4))).$$



Ввиду малости прямоугольника  $\Delta\Pi_1$  четырехугольник  $B_1B_2B_3B_4$  мало отличается от параллелограмма  $C_1C_2C_3C_4$ , являющегося образом  $\Delta\Pi_1$  при линейном преобразовании (7). Поскольку

$$\begin{aligned} C_1(x(A_1), y(A_1)), C_2(x(A_1) + x'_{x_1}(A_1)\Delta x_1, y(A_1) + y'_{x_1}(A_1)\Delta x_1), \\ C_3(x(A_1) + x'_{x_1}(A_1)\Delta x_1 + x'_{y_1}(A_1)\Delta y_1, y(A_1) + y'_{x_1}(A_1)\Delta x_1 + y'_{y_1}(A_1)\Delta y_1), \\ C_4(x(A_1) + x'_{y_1}(A_1)\Delta y_1, y(A_1) + y'_{y_1}(A_1)\Delta y_1), \end{aligned}$$

то

$$\overline{C_1C_2} (x'_{x_1}(A_1)\Delta x_1, y'_{x_1}(A_1)\Delta x_1), \overline{C_1C_4} (x'_{y_1}(A_1)\Delta y_1, y'_{y_1}(A_1)\Delta y_1)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \overline{C_1C_2} \times \overline{C_1C_4} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x'_{x_1}(A_1)\Delta x_1 & y'_{x_1}(A_1)\Delta x_1 & 0 \\ x'_{y_1}(A_1)\Delta y_1 & y'_{y_1}(A_1)\Delta y_1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x'_{x_1}(A_1)\Delta x_1 & y'_{x_1}(A_1)\Delta x_1 \\ x'_{y_1}(A_1)\Delta y_1 & y'_{y_1}(A_1)\Delta y_1 \end{vmatrix} \bar{k} = J(x_1, y_1)\Delta x_1\Delta y_1\bar{k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что площадь  $\Delta S_{C_1C_2C_3C_4}$  параллелограмма  $C_1C_2C_3C_4$  равна

$$\Delta S_{C_1C_2C_3C_4} = |\overline{C_1C_2} \times \overline{C_1C_4}| = |J(x_1, y_1)\Delta x_1\Delta y_1| = |J(x_1, y_1)|\Delta S_1$$

и потому для площади  $\Delta S$  четырехугольника  $B_1B_2B_3B_4$  имеет место следующее приближенное равенство:

$$\Delta S \approx |J(x_1, y_1)|\Delta S_1. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что *определитель Якоби* представляет собой *коэффициент деформации* бесконечно малого элемента области  $D_1$  в данной точке в результате преобразования (6). А именно, если  $|J(x_1, y_1)| < 1$ , то область  $D_1$  вблизи точки  $A_1(x_1, y_1)$  *сжимается*, а при  $|J(x_1, y_1)| > 1$ , наоборот, *растягивается*.

Рассмотрим теперь *непрерывную* в области  $D$  функцию  $f(x, y)$ . Выполнив *замену переменных* (6), мы получим непрерывную в области  $D_1$  функцию  $f_1(x_1, y_1) = f(x(x_1, y_1), y(x_1, y_1))$  переменных  $x_1, y_1$ . Разобьем область  $D_1$  прямыми

$$x_1 = x_{10} < x_1 = x_{11} < \dots < x_1 = x_{1m}, y_1 = y_{10} < y_1 = y_{11} < \dots < y_1 = y_{1n}$$

параллельными координатным осям на малые части  $\Delta D_{1ij}$  с площадями  $\Delta S_{1ij}$ ,  $i = \overline{0, m-1}$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ . Каждый из прямоугольников  $\Delta D_{1ij}$ , содержащихся в области  $D_1$ , отображается с помощью преобразования (6) в четырехугольник  $\Delta D_{ij}$  в области  $D$ , площадь  $\Delta S_{ij}$  которого связана с площадью соответствующего прямоугольника формулой (8):

$$\Delta S_{ij} \approx |J(x_{1i}, y_{1j})| \Delta S_{1ij}. \quad (9)$$

Обозначим  $x_{ij} = x(x_{1i}, y_{1j})$ ,  $y_{ij} = y(x_{1i}, y_{1j})$  и запишем, используя (9), приближенное равенство

$$\sum_i \sum_j f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta S_{ij} \approx \sum_i \sum_j f_1(x_{1i}, y_{1j}) |J(x_{1i}, y_{1j})| \Delta S_{1ij}, \quad (10)$$

где суммирование в левой и правой частях данного равенства распространяется на все прямоугольники  $\Delta D_{1ij}$ , содержащиеся в области  $D_1$ . Если диагонали всех таких прямоугольников бесконечно малы, то, с одной стороны, левая и правая части равенства (10) сколь угодно мало отличаются друг от друга, а, с другой, левая часть бесконечно мало отличается от двойного интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

а правая – от интеграла

$$\iint_{D_1} f_1(x_1, y_1) |J(x_1, y_1)| dx_1 dy_1.$$

Переходя к пределу в равенстве (10), мы получаем следующую формулу замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = x(x_1, y_1), \\ y = y(x_1, y_1) \end{array} \right| = \iint_{D_1} f(x(x_1, y_1), y(x_1, y_1)) |J(x_1, y_1)| dx_1 dy_1, \quad (11)$$

где

$$J(x_1, y_1) = \left| \begin{array}{cc} x'_{x_1}(x_1, y_1) & x'_{y_1}(x_1, y_1) \\ y'_{x_1}(x_1, y_1) & y'_{y_1}(x_1, y_1) \end{array} \right|$$

– определитель Якоби данного преобразования.

Рассмотрим замену переменных в одном частном случае, а именно, в полярных координатах. Здесь

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ 0 &\leq r < +\infty, \quad -\pi \leq \varphi < \pi. \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразование (12), очевидно, биективно отображает область  $D_1$  плоскости  $O_1 r \varphi$ , не содержащую начала координат, в область  $D$  плоскости  $Oxy$  и декартовы координаты  $x, y$  как функции полярных координат  $r, \varphi$  непрерывно дифференцируемы. Найдем определитель Якоби данного преобразования. Поскольку

$$x'_r = \cos \varphi, \quad x'_\varphi = -r \sin \varphi; \quad y'_r = \sin \varphi, \quad y'_\varphi = r \cos \varphi,$$

то

$$J(r, \varphi) = \left| \begin{array}{cc} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{array} \right| = r.$$

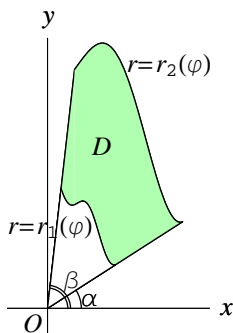
Применяя формулу (11), получим:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ J(r, \varphi) = r \end{array} \right| = \iint_{D_1} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Двойной интеграл в правой части последнего равенства удобно записывается через повторный в случае, когда область  $D$  представляет собой часть сектора

$$r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

где  $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$  – непрерывные на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функции.



Здесь

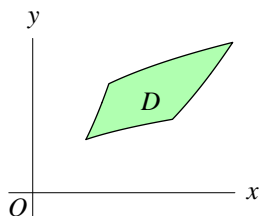
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ J(r, \varphi) = r \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (13)$$

Проиллюстрируем замену переменных примерами.

**Пример 3.** Найти площадь фигуры  $D$  на плоскости, ограниченной линиями

$$y = x^2, 5y = x^2, x = y^3, 6x = y^3.$$

*Решение.*



Искомая площадь находится, как известно, по формуле

$$S = \iint_D dx dy.$$

Вычисление данного двойного интеграла сопряжено с немалыми техническими трудностями, поэтому проведем в нем замену переменных по формулам

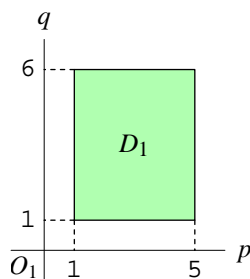
$$p = \frac{x^2}{y}, q = \frac{y^3}{x}. \quad (14)$$

При этой замене ограничивающие область  $D$  линии отображаются в прямые

$$p = 1, p = 5, q = 1, q = 6,$$

соответственно, в плоскости  $O_1pq$  и, таким образом, область  $D$  отображается в прямоугольник

$$D_1 = \{(p, q) \mid 1 \leq p \leq 5, 1 \leq q \leq 6\}.$$



Из уравнений (14) мы однозначно находим

$$x = p^{\frac{3}{5}} q^{\frac{1}{5}}, y = p^{\frac{1}{5}} q^{\frac{2}{5}}.$$



Очевидно, это преобразование биективно и функции  $x$  и  $y$  переменных  $p, q$  непрерывно дифференцируемы в любой области, не содержащей начала координат. Поскольку

$$x'_p = \frac{3}{5} p^{-\frac{2}{5}} q^{\frac{1}{5}}, x'_q = \frac{1}{5} p^{\frac{3}{5}} q^{-\frac{4}{5}}, y'_p = \frac{1}{5} p^{-\frac{4}{5}} q^{\frac{2}{5}}, y'_q = \frac{2}{5} p^{\frac{1}{5}} q^{-\frac{3}{5}},$$

то

$$J(p, q) = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} p^{-\frac{2}{5}} q^{\frac{1}{5}} & \frac{1}{5} p^{\frac{3}{5}} q^{-\frac{4}{5}} \\ \frac{1}{5} p^{-\frac{4}{5}} q^{\frac{2}{5}} & \frac{2}{5} p^{\frac{1}{5}} q^{-\frac{3}{5}} \end{vmatrix} = \frac{1}{5} p^{-\frac{1}{5}} q^{-\frac{2}{5}}.$$

Осталось проинтегрировать, воспользовавшись [формулой \(11\)](#):

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_1} J(p, q) dpdq = \iint_{D_1} \frac{1}{5} p^{-\frac{1}{5}} q^{-\frac{2}{5}} dpdq = \frac{1}{5} \int_1^5 p^{-\frac{1}{5}} dp \int_1^6 q^{-\frac{2}{5}} dq = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} p^{\frac{4}{5}} \Big|_1^5 \cdot \frac{5}{3} q^{\frac{3}{5}} \Big|_1^6 = \frac{5}{12} (\sqrt[5]{625} - 1) (\sqrt[5]{216} - 1). \end{aligned}$$

**Пример 4.** Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (x^2 - y^2) dx dy$$

по области  $D$ , ограниченной линией, заданной уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \quad (\text{лемниската Бернулли}).$$

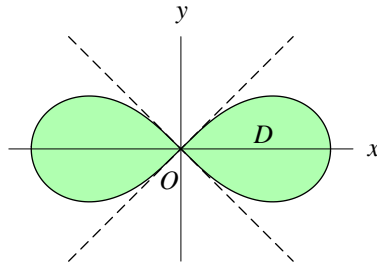
*Решение.* В полярных координатах  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $x^2 - y^2 = r^2 \cos 2\varphi$ , поэтому уравнение лемнискаты имеет вид

$$r^2 = \cos 2\varphi \iff r = \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Поскольку функция  $\cos 2\varphi$  четна, является периодической с периодом  $\pi$  и

$$\cos 2\varphi \geq 0 \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

то лемниската заключена между прямыми  $y = \pm x$  и выглядит следующим образом:



Подынтегральная функция четна по каждой из переменных и область  $D$  симметрична относительно координатных осей, поэтому

$$I = 4 \iint_{D_1} (x^2 - y^2) dx dy,$$

где  $D_1$  – часть области  $D$ , содержащаяся в первой координатной четверти. Воспользуемся формулой (13), заметив, что область  $D_1$  ограничена лучами  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  и лемнискатой:

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} (r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) r dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \cdot r^4 \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi \cdot \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 2\varphi) d \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sin 2\varphi - \frac{1}{3} \sin^3 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Установим теперь зависимость между *криволинейным интегралом векторной функции* по замкнутому контуру на плоскости и *двойным интегралом* по области, ограниченной этим контуром.

Введем сначала определение *односвязной области* и *простой кривой* на плоскости.

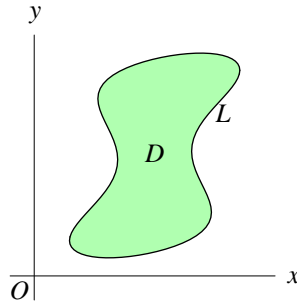
Область (открытая или замкнутая) называется *односвязной*, если любой непрерывный замкнутый контур, содержащийся в этой области, мы не выходя из нее непрерывной деформацией можем стянуть в точку области. Из этого определения следует, что односвязная область не содержит „дыр“.

Непрерывная линия на плоскости называется *простой*, если в ее параметрическом представлении

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

равенство  $\bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_2)$  может выполняться лишь при  $\alpha = \beta$ . Таким образом, простая кривая не имеет самопересечений и петель.

Пусть *замкнутая, ограниченная, односвязная область*  $D$  на плоскости ограничена *простой, кусочно-гладкой линией*  $L$ .



Предположим, что векторная функция

$$\bar{f}(x, y) = f_x(x, y)\bar{i} + f_y(x, y)\bar{j}$$

непрерывна вместе со своими частными производными  $\partial_y f_x(x, y)$ ,  $\partial_x f_y(x, y)$  в области  $D$ . Тогда имеет место следующая *формула Грина*:

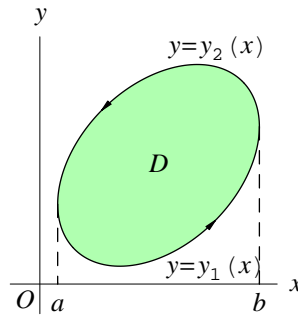
$$\oint_L f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \iint_D (\partial_x f_y(x, y) - \partial_y f_x(x, y))dxdy,$$

где в криволинейном интеграле контур  $L$  *положительно ориентирован*, т.е. при обходе по нему область  $D$  остается слева.

Для упрощения доказательства будем считать область  $D$  *простой* вдоль обеих координатных осей. Поскольку она является простой вдоль оси  $Oy$ , то

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

где  $y_1(x), y_2(x)$  – *непрерывные* на отрезке  $[a, b]$  функции.



Вычислим криволинейный интеграл

$$\oint_L f_x(x, y) dx,$$

учитывая, что линия  $L$  состоит здесь из графиков функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  и, возможно, отрезков прямых  $x = a$  и  $x = b$ .

$$\begin{aligned} \oint_L f_x(x, y) dx &= \int_a^b f_x(x, y_1(x)) dx + \int_a^b f_x(x, y_2(x)) dx = - \int_a^b (f_x(x, y_2(x)) - f_x(x, y_1(x))) dx = \\ &= - \int_a^b f_x(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = - \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \partial_y f_x(x, y) dy \right) dx = - \iint_D \partial_y f_x(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Аналогично, благодаря тому, что область является также простой и вдоль оси  $Ox$ , мы убеждаемся в том, что

$$\oint_L f_y(x, y) dy = \iint_D \partial_x f_y(x, y) dx dy.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \oint_L f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy &= - \iint_D \partial_y f_x(x, y) dx dy + \iint_D \partial_x f_y(x, y) dx dy = \\ &= \iint_D (\partial_x f_y(x, y) - \partial_y f_x(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

**Замечание 2.** Формула Грина является в определенном смысле *аналогом формулы Ньютона-Лейбница*, так как она сводит вычисление двойного интеграла функции двух переменных по замкнутой области на плоскости к вычислению „первообразной“ этой функции на границе области.

В качестве простейшего *геометрического* применения формулы Грина обсудим возможность вычисления с ее помощью *площади области*. Для этого, очевидно, достаточно подобрать координаты векторной функции так, чтобы

$$\partial_x f_y(x, y) - \partial_y f_x(x, y) = 1$$

всюду в области  $D$ . Положим, например,

$$f_x(x, y) = -\frac{1}{2} y, \quad f_y(x, y) = \frac{1}{2} x.$$

Тогда,

$$\iint_D (\partial_x f_y(x, y) - \partial_y f_x(x, y)) dx dy = \iint_D dx dy = S,$$

где  $S$  – площадь области  $D$ , и, значит, по формуле Грина

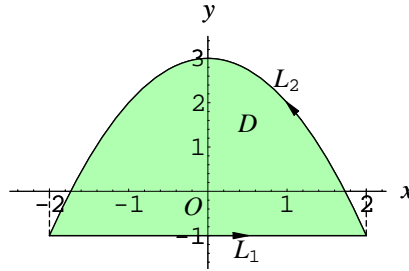
$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx.$$

**Пример 5.** Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L (y^2 - \ln(y+2)) dx + 2xydy$$

по положительно ориентированному замкнутому контуру, состоящему из отрезка прямой  $L_1: y = -1$  и параболы  $L_2: y = 3 - x^2$ , непосредственно и по формуле Грина.

*Решение.* Прямая и парабола пересекаются при  $x = \pm 2$ .



Вычислим сначала интеграл непосредственно, как сумму двух интегралов:

$$\oint_L (y^2 - \ln(y+2)) dx + 2xydy = \int_{L_1} (y^2 - \ln(y+2)) dx + 2xydy + \int_{L_2} (y^2 - \ln(y+2)) dx + 2xydy.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{L_1} (y^2 - \ln(y+2)) dx + 2xydy &= \int_{-2}^2 (1 - \ln 1) dx + 2x(-1)d(-1) = x \Big|_{-2}^2 + 0 = 4, \\ \int_{L_2} (y^2 - \ln(y+2)) dx + 2xydy &= \int_2^{-2} \left( (3-x^2)^2 - \ln(5-x^2) \right) dx + 2x(3-x^2) d(3-x^2) = \\ &= \int_2^{-2} (9 - 6x^2 + x^4 - 4x^2(3-x^2)) dx + \int_2^{-2} \ln(5-x^2) dx = \int_2^{-2} (9 - 18x^2 + 5x^4) dx + \\ &+ x \ln(5-x^2) \Big|_{-2}^2 - \int_{-2}^2 x d \ln(5-x^2) = (9x - 6x^3 + x^5) \Big|_2^{-2} - 2 \int_{-2}^2 \frac{-x^2}{5-x^2} dx = \\ &= -4 - 2 \int_{-2}^2 \frac{(5-x^2) - 5}{5-x^2} dx = -4 - 2 \int_{-2}^2 \left( 1 - \frac{5}{5-x^2} \right) dx = \\ &= -4 - 2 \left( x - \frac{5}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x} \right| \right) \Big|_{-2}^2 = -4 + 4 \left( \sqrt{5} \ln(\sqrt{5}+2) - 2 \right), \end{aligned}$$

то

$$\oint_L (y^2 - \ln(y+2)) dx + 2xydy = 4 - 4 + 4 \left( \sqrt{5} \ln(\sqrt{5}+2) - 2 \right) = 4 \left( \sqrt{5} \ln(\sqrt{5}+2) - 2 \right).$$

Вычислим теперь данный интеграл по формуле Грина. Здесь

$$\partial_x f_y(x, y) = 2y, \partial_y f_x(x, y) = 2y - \frac{1}{y+2} \implies \partial_x f_y(x, y) - \partial_y f_x(x, y) = \frac{1}{y+2}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \oint_L (y^2 - \ln(y+2)) dx + 2xydy &= \iint_D \frac{dxdy}{y+2} = \int_{-2}^2 dx \int_{-1}^{3-x^2} \frac{dy}{y+2} = \\ &= \int_{-2}^2 \ln(y+2) \Big|_{-1}^{3-x^2} dx = \int_{-2}^2 \ln(5-x^2) dx = 4 \left( \sqrt{5} \ln(\sqrt{5}+2) - 2 \right). \end{aligned}$$

(этот последний интеграл мы нашли выше при вычислении криволинейного интеграла по линии  $L_2$ ).

В заключение этого параграфа введем понятие *несобственного двойного интеграла*.

Остановимся на случае *замкнутой неограниченной области  $D$* . Пусть  $D_R$  – замкнутая ограниченная область, содержащаяся в области  $D$  и  $R$  – расстояние от начала координат до наиболее удаленной точки из  $D_R$ . Рассмотрим произвольную совокупность вложенных друг в друга областей  $D_R$ , объединение которых совпадает с областью  $D$ . Очевидно, для такой совокупности  $R \rightarrow +\infty$ .

Пусть в области  $D$  задана *непрерывная* функция  $f(x, y)$ . Интеграл этой функции по любой области  $D_R$  существует.

Если существует конечный предел

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} f(x, y) dxdy, \quad (15)$$

не зависящий от указанной выше совокупности, то он называется *несобственным двойным интегралом* функции  $f(x, y)$  по области  $D$ . Обозначается, естественно, этот несобственный интеграл через

$$\iint_D f(x, y) dxdy.$$

Если предел (15) существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, иначе, т. е. если данный предел не существует или равен бесконечности, – *расходящимся*.

**Пример 6.** Убедиться в том, что несобственный интеграл

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$$

по всей плоскости

$$D = \{(x, y) \mid -\infty \leq x \leq +\infty, -\infty \leq y \leq +\infty\}$$

сходится и вычислить его.

*Решение.* Покажем, что для любой совокупности вложенных областей  $D_R$ , покрывающих плоскость, предел (15) существует и не зависит от выбора совокупности. Поскольку подинтегральная функция неотрицательна и область  $D_R$  содержится в круге

$$K_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

то

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq I(R) = \iint_{K_R} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Вычислим последний интеграл, перейдя к полярным координатам:

$$\begin{aligned} I(R) &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ J(r, \varphi) = r \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \\ &= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R e^{-r^2} d(-r^2) = 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-r^2} \Big|_0^R = \pi \left(1 - e^{-R^2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi (1 - e^{-R^2}) = \pi$$

и, значит,

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy < \pi. \quad (16)$$

Заметим далее, что функция  $I(R)$  стремится к своему пределу возрастая и, следовательно, для любого фиксированного числа  $\varepsilon > 0$  найдется число  $R_\varepsilon$  такое, что при  $R \geq R_\varepsilon$  выполняется неравенство

$$\pi - \varepsilon < I(R) < \pi.$$

Совокупность  $D_R$  покрывает плоскость, поэтому при любом достаточно большом  $R$  область  $D_R$  содержит круг  $K_{R_\varepsilon}$  и, стало быть,

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \geq I(R_\varepsilon) > \pi - \varepsilon,$$

откуда, принимая во внимание неравенство (16), мы заключаем, что

$$\pi - \varepsilon < \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy < \pi.$$

Последнее, ввиду произвольности  $\varepsilon$  и означает, что для любой совокупности вложенных областей  $D_R$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$$

и, таким образом,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi. \quad (17)$$

Вычислим, пользуясь (17), известный в приложениях *интеграл Пуассона*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad (18)$$

Заметим, прежде всего, что  $e^{-x^2} < e^{-x}$  при  $x > 1$  и, поскольку интеграл

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + e^{-1} = 0 + e^{-1} = e^{-1}$$

сходится, то по признаку сравнения ([глава VII, §4, пункт 1](#)) сходится и интеграл

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Ввиду четности подынтегральной функции сходится также и интеграл

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2} dx.$$

Следовательно, интеграл (18) является сходящимся. Найдем его, используя равенство (17) и вычислив двойной интеграл в левой части этого равенства интегрированием по совокупности вложенных прямоугольников

$$\Pi_{ab} = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\} :$$

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \iint_{\Pi_{ab}} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-b}^b e^{-y^2} dy = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b e^{-y^2} dy = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

и, таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (19)$$

В курсе *теории вероятностей* (IV семестр) мы будем использовать интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

значение которого мы получим из (19) с помощью подстановки  $x = \frac{z}{\sqrt{2}}$ . Действительно, в этом случае  $dx = \frac{dz}{\sqrt{2}}$  и, значит,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{\pi}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

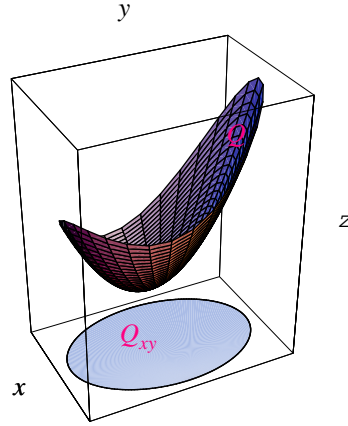
### §3. Поверхностные интегралы, их свойства и вычисление

В этом параграфе мы определим интеграл по поверхности в пространстве, причем, как и для криволинейных интегралов, мы будем различать *поверхностные интегралы скалярных и векторных функций*.

#### 1. Поверхностный интеграл скалярной функции (первого рода)

Введем сначала необходимое для дальнейшего изложения понятие *квадрируемой поверхности*. Это понятие в отличие от области на плоскости не так интуитивно ясно и поэтому нуждается в более точном определении.

Всюду в этом пункте мы для упрощения рассуждений будем рассматривать *гладкую, ограниченную поверхность Q, имеющую однозначную проекцию* на одну из координатных плоскостей. Для определенности будем считать, что Q однозначно проектируется в замкнутую, квадрируемую область  $Q_{xy}$  на плоскости  $Oxy$ .



Уравнение данной поверхности имеет вид

$$z = z(x, y), \quad (1)$$

где  $z(x, y)$  – непрерывно дифференцируемая в области  $Q_{xy}$  функция. Если  $L_{xy}$  – граница области  $Q_{xy}$ , то линия в пространстве

$$L = \{(x, y, z(x, y)) \mid (x, y) \in L_{xy}\}$$

называется *границей* или *краем* поверхности  $Q$ .

Разобьем поверхность на малые части  $\Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Их проекции на плоскость  $Oxy$  разбивают область  $Q_{xy}$  на малые части  $\Delta Q_{xyk}$ ,  $k = \overline{1, n}$  с площадями  $\Delta S_{xyk}$ . Выберем произвольно внутри каждой из частей разбиения поверхности по точке  $M_k \in \Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  и обозначим через  $\Delta \tilde{Q}_k$  часть *касательной плоскости* к данной поверхности в точке  $M_k$ , проекцией которой на плоскость  $Oxy$  служит  $\Delta Q_{xyk}$ . Пусть  $\Delta \tilde{S}_k$  – площадь части  $\Delta \tilde{Q}_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Таким образом, поверхность  $Q$  оказывается покрытой „чешуйками“ многогранной поверхности с площадью  $\sum_{k=1}^n \Delta \tilde{S}_k$ , которую мы можем рассматривать, как приближенное значение площади данной поверхности.

**Определение 1.** Если существует конечный предел площади описанной выше многогранной поверхности при условии, что диаметры всех частей разбиения поверхности  $Q$  стремятся к нулю, не зависящий от способа разбиения и выбора точек внутри частей разбиения, то он и считается площадью поверхности  $Q$ . В этом случае поверхность называется *квадрируемой*.

Предполагая теперь данную поверхность *квадрируемой*, установим зависимость между площадью  $\Delta S_k$  произвольной части  $\Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  разбиения и площадью  $\Delta S_{xyk}$  проекции этой части на координатную плоскость  $Oxy$ . Воспользуемся тем, что угол между касательной плоскостью к поверхности в точке  $M_k(x_k, y_k, z_k) \in \Delta Q_k$  и плоскостью  $Oxy$  равен, очевидно, углу  $\gamma(M_k)$  между вектором нормали этой плоскости и осью  $Oz$ . В [главе VIII, §4](#) мы установили, что нормальный вектор имеет координаты

$$\bar{n}(x_k, y_k) = -z'_x(x_k, y_k)\bar{i} - z'_y(x_k, y_k)\bar{j} + \bar{k}.$$

Площадь  $\Delta \tilde{S}_k$  части  $\Delta \tilde{Q}_k$  касательной к данной поверхности в точке  $M_k$  плоскости и площадь  $\Delta S_{xyk}$  ее проекции на плоскость  $Oxy$  связаны равенством

$$\Delta \tilde{S}_k = \frac{\Delta S_{xyk}}{\cos \gamma(M_k)}$$

и, поскольку

$$\cos \gamma(M_k) = \frac{1}{|\bar{n}(x_k, y_k)|},$$

то

$$\Delta \tilde{S}_k = |\bar{n}(x_k, y_k)| \Delta S_{xyk}.$$



Отсюда, учитывая, что ввиду малости части  $\Delta Q_k$ , ее площадь  $\Delta S_k$  мало отличается от  $\Delta \tilde{S}_k$ , мы заключаем, что имеет место следующее приближенное равенство

$$\Delta S_k \approx |\bar{n}(x_k, y_k)| \Delta S_{xyk}. \quad (2)$$

Теперь мы достаточно подготовлены к тому, чтобы ввести определение *поверхностного интеграла* функции  $f(M)$ , заданной в точках данной *квадрируемой* поверхности  $Q$  и вычислить его. Пусть, как и выше,  $\Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  – разбиение поверхности на малые части с диаметрами  $\Delta d_k$  и площадями  $\Delta S_k$ . Выбрав произвольно внутри каждой из частей по точке  $M_k \in \Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k.$$

**Определение 2.** Если существует конечный предел интегральных сумм  $I_n$  при условии, что диаметры всех частей  $\Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  разбиения поверхности  $Q$  стремятся к нулю, не зависящий от способа разбиения и выбора точек внутри частей разбиения, то он называется *поверхностным интегралом скалярной функции  $f(M)$  по поверхности  $Q$  или поверхностным интегралом первого рода* и обозначается через

$$\iint_Q f(M) dS \quad (3)$$

или в координатах

$$\iint_Q f(x, y, z) dS.$$

Таким образом, по определению

$$\iint_Q f(M) dS = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k, \quad \Delta d = \max_{k=\overline{1, n}} \Delta d_k.$$

Если поверхностный интеграл (3) существует, то функция  $f(M)$  называется *интегрируемой по поверхности  $Q$* .

Если в каждой точке поверхности известна *плотность*  $\rho(M)$ ,  $M \in Q$  и функция  $\rho(M)$  интегрируема по данной поверхности, то ее *масса* вычисляется через поверхностный интеграл по формуле

$$m = \iint_Q \rho(M) dS,$$

в чем можно убедиться точно также, как и для *материальной линии* (§1, пункт 1).

Что касается *свойств*, то они также с очевидными изменениями повторяют соответствующие *свойства криволинейного интеграла* (§1, пункт 1). В частности, *площадь поверхности  $Q$*  равна

$$S = \iint_Q dS. \quad (4)$$

Займемся теперь вычислением поверхностного интеграла, предполагая подынтегральную функцию *непрерывной* на поверхности. С этой целью перепишем приведенную выше интегральную сумму, используя *уравнение поверхности* (1) и *формулу* (2):

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z(x_k, y_k)) |\bar{n}(x_k, y_k)| \Delta S_{xyk},$$

причем данное равенство будет тем точнее, чем мельче будет разбиение поверхности на части. Сумма в правой части данного равенства является интегральной для двойного интеграла функции

$$f(x, y, z(x, y)) |\bar{n}(x, y)|$$

по области  $Q_{xy}$ , являющейся проекцией поверхности  $Q$  на плоскость  $Oxy$ . Переходя к пределу при условии, что диаметры всех частей  $\Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  разбиения поверхности  $Q$  стремятся к нулю, мы получим формулу<sup>1</sup>

$$\iint_Q f(x, y, z) dS = \iint_{Q_{xy}} f(x, y, z(x, y)) |\bar{n}(x, y)| dx dy \quad (5)$$

или, поскольку  $|\bar{n}(x, y)| = \sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2}$ , формулу

$$\iint_Q f(x, y, z) dS = \iint_{Q_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2} dx dy, \quad (6)$$

сводящую *поверхностный интеграл к двойному*.

Из (6), учитывая (4), следует, что *площадь поверхности  $Q$*  может быть вычислена по формуле

$$S = \iint_{Q_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2} dx dy. \quad (7)$$

**Замечание.** Если *поверхность  $Q$  обладает более сложной структурой*, но мы можем разбить ее на части  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , каждая из которых имеет *однозначную проекцию на одну из координатных плоскостей*, то

$$\iint_Q f(x, y, z) dS = \iint_{Q_1} f(x, y, z) dS + \iint_{Q_2} f(x, y, z) dS + \dots + \iint_{Q_n} f(x, y, z) dS.$$

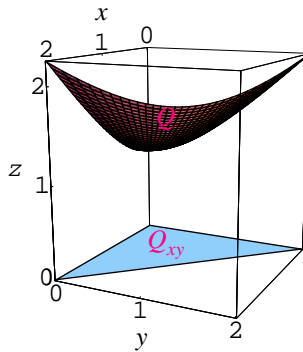
**Пример 1.** *Вычислить массу части  $Q$  поверхности двухполостного гиперболоида с уравнением*

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1,$$

*которая расположена в первом октанте и вырезается из данного гиперболоида плоскостью  $x + y = 2$ . Плотность в каждой точке гиперболоида задается выражением*

$$\rho(x, y, z) = \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

*Решение.* Очевидно, однозначной проекцией поверхности  $Q$  на координатную плоскость  $Oxy$  является треугольник  $Q_{xy}$ , ограниченный осями координат и прямой  $y = 2 - x$ .



Из уравнения гиперболоида

$$z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Воспользуемся *формулой (6)*. Поскольку

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{\frac{1 + 2x^2 + 2y^2}{1 + x^2 + y^2}},$$

<sup>1</sup>Эта формула служит обоснованием существования поверхностного интеграла для непрерывной на поверхности функции.

то

$$\begin{aligned}
m &= \iint_Q \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS = \iint_{Q_{xy}} \frac{xy\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}} \sqrt{\frac{1+2x^2+2y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy = \\
&= \iint_{Q_{xy}} xy dx dy = \int_0^2 x dx \int_0^{2-x} y dy = \int_0^2 x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x(2-x)^2 dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left( 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

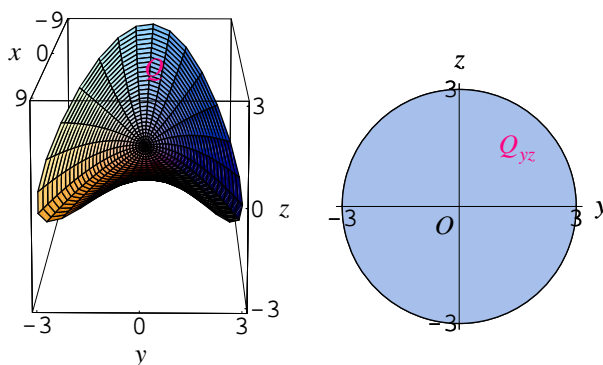
**Пример 2.** Вычислить площадь части  $Q$  гиперболического параболоида

$$x = y^2 - z^2,$$

вырезаемой из него цилиндром

$$y^2 + z^2 = 9.$$

*Решение.* Поверхность  $Q$  однозначно проектируется в круг  $Q_{yz} : y^2 + z^2 \leq 9$  на плоскости  $Oyz$ .



Здесь

$$x'_y = 2y, x'_z = -2z, \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} = \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2},$$

поэтому, применяя [формулу \(7\)](#) и переходя в двойном интеграле к полярным координатам, получим:

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{Q_{yz}} \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz = \iint_{Q_{yz}} \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dy dz = \left. \begin{array}{l} y = r \cos \varphi, \\ z = r \sin \varphi, \\ J(r, \varphi) = r \end{array} \right| = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{8} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} d(1 + 4r^2) = \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1).
\end{aligned}$$

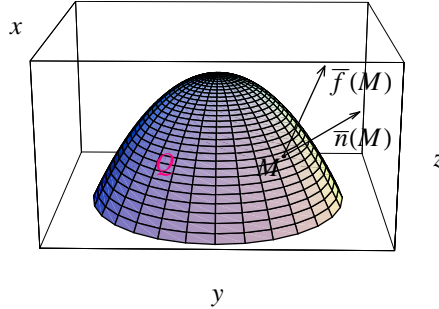
## 2. Поверхностный интеграл векторной функции (второго рода)

Пусть  $Q$  – гладкая, ограниченная поверхность с краем. Мы можем выбрать на ней одну из двух возможных *ориентаций* с помощью непрерывно изменяющегося единичного нормального вектора. Часто вместо выбора ориентации мы будем говорить о выборе какой-нибудь определенной *стороны поверхности*, например, нижней или верхней, внутренней или внешней в зависимости от структуры поверхности.

Рассмотрим заданную на поверхности  $Q$  векторную функцию

$$\bar{f}(M) = f_x(M)\bar{i} + f_y(M)\bar{j} + f_z(M)\bar{k}, M \in Q.$$

Выберем и зафиксируем на данной поверхности определенную ориентацию и пусть  $\bar{n}(M)$ ,  $M \in Q$  – соответствующий нормальный вектор.



**Определение.** Если существует поверхностный интеграл

$$\iint_Q \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS$$

проекции векторной функции  $\bar{f}(M)$  на нормальный вектор  $\bar{n}(M)$  по поверхности  $Q$  с выбранной ориентацией, то он называется поверхностным интегралом данной векторной функции по данной поверхности или поверхностным интегралом второго рода.

Поскольку

$$\text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) = \bar{f}(M) \cdot \bar{n}_1(M),$$

где  $\bar{n}_1(M) = \frac{\bar{n}(M)}{|\bar{n}(M)|}$  – единичный нормальный вектор к данной поверхности, то

$$\iint_Q \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS = \iint_Q \bar{f}(M) \cdot \bar{n}_1(M) dS \quad (1)$$

или через направляющие косинусы нормального вектора

$$\iint_Q \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS = \iint_Q (f_x(M) \cos \alpha + f_y(M) \cos \beta + f_z(M) \cos \gamma) dS.$$

Поверхностный интеграл векторной функции  $\bar{f}(M)$  по замкнутой поверхности  $Q$ , т. е. поверхности, являющейся границей некоторой ограниченной пространственной области, обозначается через

$$\oiint_Q \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS.$$

Рассмотрим одну физическую задачу, в которой поверхностный интеграл векторной функции возникает вполне естественно. Найдем количество идеальной несжимаемой жидкости (поток жидкости), проходящей в единицу времени через поверхность  $Q$  в заданном направлении, если известен непрерывный вектор скорости  $\bar{v}(M)$  в любой точке  $M$  данной поверхности. Для этого разобьем поверхность на малые части  $\Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  с площадями  $\Delta S_k$  и возьмем внутри каждой из частей по точке  $M_k \in \Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Количество жидкости  $\Delta \Pi_k$ , протекающей в единицу времени через малую часть  $\Delta Q_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  поверхности  $Q$  приближенно равно объему прямого цилиндра с площадью основания  $\Delta S_k$  и высотой, равной проекции вектора скорости в точке  $M_k$  на вектор нормали в этой точке, т. е.

$$\Delta \Pi_k \approx \text{Pr}_{\bar{n}(M_k)} \bar{v}(M_k) \Delta S_k.$$

Значит, поток жидкости через всю поверхность приближенно равен

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \Delta \Pi_k \approx \sum_{k=1}^n \text{Pr}_{\bar{n}(M_k)} \bar{v}(M_k) \Delta S_k,$$

откуда следует, что в пределе при условии бесконечно малого дробления поверхности на части

$$\Pi = \iint_Q \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{v}(M) dS.$$

Таким образом, *поток жидкости через гладкую поверхность в заданном направлении равен поверхностному интегралу вектора скорости этой жидкости по данной поверхности.*

*Свойства* поверхностного интеграла векторной функции аналогичны соответствующим *свойствам криволинейного интеграла векторной функции*, перечисленным в §1, пункт 2. В частности, *поверхностный интеграл векторной функции меняет знак на противоположный, если меняется ориентация поверхности.*

Предположим, что *гладкая поверхность*  $Q$  имеет *однозначную проекцию* на одну из координатных плоскостей. Пусть для определенности  $Q_{xy}$  – ее однозначная проекция на координатную плоскость  $Oxy$ . Тогда уравнение данной поверхности мы можем записать в виде

$$z = z(x, y), (x, y) \in Q_{xy},$$

где функция  $z(x, y)$  является непрерывно дифференцируемой в области  $Q_{xy}$ . Считая функцию  $\bar{f}(x, y, z)$  *непрерывной* на поверхности  $Q$ , найдем выражение для поверхностного интеграла векторной функции через двойной. Для этого заметим, что в зависимости от выбора ориентации нормальный вектор  $\bar{n}(x, y)$  к поверхности имеет координаты

$$\bar{n}(x, y) = \pm (-z'_x(x, y)\bar{i} - z'_y(x, y)\bar{j} + \bar{k}), (x, y) \in Q_{xy},$$

где знак „+“ выбирается для верхней стороны поверхности, а знак „-“ – для нижней. Применяя к *интегралу (1) формулу (5)* предыдущего пункта, получим:

$$\begin{aligned} \iint_Q \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS &= \iint_{Q_{xy}} \left( \bar{f}(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{\bar{n}(x, y)}{|\bar{n}(x, y)|} \right) |\bar{n}(x, y)| dx dy = \\ &= \iint_{Q_{xy}} \bar{f}(x, y, z(x, y)) \cdot \bar{n}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Следовательно, *поверхностный интеграл векторной функции по поверхности*  $Q$ , имеющей однозначную проекцию  $Q_{xy}$  на координатную плоскость  $Oxy$ , вычисляется по формуле

$$\iint_Q \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS = \iint_{Q_{xy}} \bar{f}(x, y, z(x, y)) \cdot \bar{n}(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Найдем представление поверхностного интеграла векторной функции в проекциях на координатные плоскости, предполагая, что *гладкая поверхность*  $Q$  имеет *однозначные проекции* на каждую из координатных плоскостей. Поскольку

$$\iint_Q \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS = \iint_Q f_x(M) \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{i} dS + \iint_Q f_y(M) \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{j} dS + \iint_Q f_z(M) \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{k} dS,$$

то, применив к каждому из интегралов в правой части формулу (2) в проекциях на координатные плоскости  $Oyz, Oxz, Oxy$ , соответственно, получим:

$$\begin{aligned} &\iint_Q \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS = \\ &= \pm \iint_{Q_{yz}} f_x(x(y, z), y, z) dy dz \pm \iint_{Q_{xz}} f_y(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{Q_{xy}} f_z(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Каждый из двойных интегралов в правой части формулы (3) берется со знаком „+“, если вектор нормали к выбранной стороне поверхности образует *острый угол* с соответствующей координатной осью, и знаком „-“, если этот угол – *тупой*.

Учитывая структуру правой части полученной формулы, для **поверхностного интеграла векторной функции (1)** часто используется обозначение

$$\iint_Q f_x(x, y, z)dydz + f_y(x, y, z)dx dz + f_z(x, y, z)dx dy.$$

**Замечание.** Если поверхность  $Q$  не имеет однозначной проекции на координатные плоскости, но мы можем разбить ее на части  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , каждая из которых уже однозначно проектируется по крайней мере на одну из координатных плоскостей, то, вычислив поверхностный интеграл векторной функции по каждой из частей с помощью **формул (2) или (3)**, мы получим

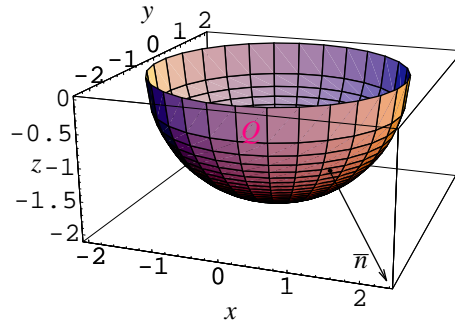
$$\iint_Q \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS = \iint_{Q_1} \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS + \iint_{Q_2} \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS + \dots + \iint_{Q_n} \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{f}(M) dS.$$

**Пример 1.** Вычислить поверхностный интеграл векторной функции

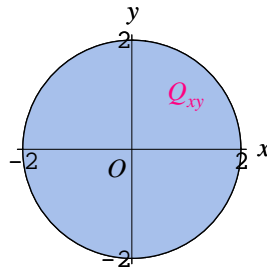
$$\bar{f}(x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z^2\bar{k}$$

по внешней стороне полусферы  $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ .

*Решение.*



Проекцией этой поверхности на координатную плоскость  $Oxy$  является, очевидно, круг радиуса 2 с центром в начале координат.



Поскольку здесь

$$z'_x = -\left(\sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \cdot (4 - x^2 - y^2)'_x = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},$$

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},$$

то нормальный вектор в любой точке внешней стороны данной поверхности имеет координаты

$$\bar{n}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\bar{j} - \bar{k}.$$

Воспользуемся **формулой (2)**, учитывая, что здесь

$$\bar{f}(x, y, z(x, y)) \cdot \bar{n}(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} - (4 - x^2 - y^2).$$

Тогда

$$I = \iint_Q x dy dz + y dx dz + z^2 dx dy = \iint_{Q_{xy}} \left( \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} - (4 - x^2 - y^2) \right) dx dy.$$

В полученном двойном интеграле перейдем к полярным координатам:

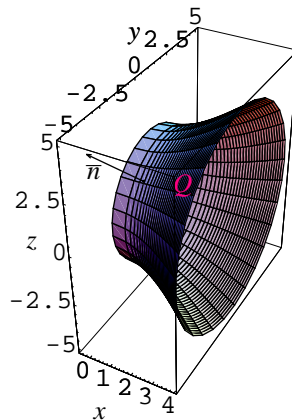
$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ J(r, \varphi) = r \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left( \frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}} - (4 - r^2) \right) r dr = \\ &= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \left( \frac{(4 - r^2) - 4}{\sqrt{4 - r^2}} + (4 - r^2) \right) d(4 - r^2) = \\ &= \pi \int_0^2 \left( \sqrt{4 - r^2} - \frac{4}{\sqrt{4 - r^2}} + (4 - r^2) \right) d(4 - r^2) = \\ &= \left( \frac{2}{3} (4 - r^2)^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{4 - r^2} + \frac{(4 - r^2)^2}{2} \right) \Big|_0^2 \pi = \left( 0 - \left( \frac{2}{3} \cdot 8 - 8 \cdot 2 + 8 \right) \right) \pi = \frac{8}{3} \pi. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint_Q \cos x^2 dy dz + z^2 \cos y dx dz + x^6 \operatorname{arctg}^2 z dx dy$$

по внешней стороне части поверхности  $y^2 + z^2 - x^2 = 9$ , заключенной между плоскостями  $x = 0$  и  $x = 4$ .

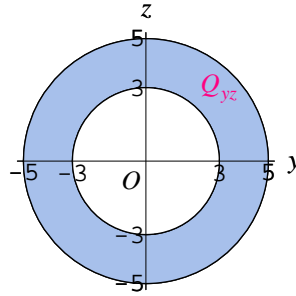
*Решение.* Поверхность  $Q$  представляет собой однополостный гиперболоид вращения вокруг оси  $Ox$ .



Здесь удобно использовать формулу (3). Вычислим данный интеграл как сумму трех интегралов

$$I_1 = \iint_Q \cos x^2 dy dz, \quad I_2 = \iint_Q z^2 \cos y dx dz, \quad I_3 = \iint_Q x^6 \operatorname{arctg}^2 z dx dy.$$

Поверхность  $Q$  однозначно проектируется в кольцо  $Q_{yz}$  на плоскости  $Oyz$ , образованное окружностями  $y^2 + z^2 = 9$  и  $y^2 + z^2 = 25$ .



Поскольку нормальный вектор к внешней стороне поверхности образует тупой угол с осью  $Ox$ , то, учитывая, что из уравнения поверхности  $x^2 = y^2 + z^2 - 9$ , мы можем записать

$$I_1 = - \iint_{Q_{yz}} \cos(y^2 + z^2 - 9) dydz.$$

Вычислим этот двойной интеграл в полярных координатах.

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \begin{array}{l} y = r \cos \varphi, \\ z = r \sin \varphi, \\ J(r, \varphi) = r \end{array} \right| = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 r \cos(r^2 - 9) dr = \\ &= -\frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_3^5 \cos(r^2 - 9) d(r^2 - 9) = -\pi \sin(r^2 - 9) \Big|_3^5 = -\pi \sin 16. \end{aligned}$$

Координатная плоскость  $Oxz$  разбивает поверхность  $Q$  на две симметричные части  $Q_y^+$  и  $Q_y^-$  с уравнениями  $y = \sqrt{x^2 - z^2 + 9}$  и  $y = -\sqrt{x^2 - z^2 + 9}$ , соответственно, имеющие общую проекцию  $Q_{xz}$  на эту плоскость, и нормальный вектор к внешней стороне поверхности  $Q_y^+$  ( $Q_y^-$ ) образует острый (тупой) угол с осью  $Oy$ . Заметим, кроме того, что подынтегральная функция четна по переменной  $y$ . Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_Q z^2 \cos y dx dz = \iint_{Q_y^+} z^2 \cos y dx dz + \iint_{Q_y^-} z^2 \cos y dx dz = \\ &= \iint_{Q_{xz}} z^2 \cos \sqrt{x^2 - z^2 + 9} dx dz - \iint_{Q_{xz}} z^2 \cos \sqrt{x^2 - z^2 + 9} dx dz = 0. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично мы можем убедиться в том, что  $I_3 = 0$ . Следовательно,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\pi \sin 16.$$

**Замечание.** Все найденные выше формулы для вычисления поверхностных интегралов как скалярных, так и векторных функций сохраняют свою силу также и для *кусочно-гладких поверхностей*, т. е. непрерывных поверхностей, которые кусочно-гладкими линиями разбиваются на конечное число гладких частей. Достаточно функцию проинтегрировать по каждой из этих частей и результаты сложить.

#### §4. Тройной интеграл, его свойства и вычисление.

##### Замена переменных в тройном интеграле

Определим, наконец, интеграл функции трех переменных по *пространственной области (телу)*, активно опираясь при изложении на аналогию с двойным интегралом.

Рассмотрим *замкнутое, ограниченное и кубируемое, т. е. имеющее конечный объем, тело  $T$  в пространстве* с заданной в нем функцией трех переменных  $f(M)$ .

Для определения тройного интеграла, как и всех других, мы будем использовать *метод интегральных сумм*. Разобьем тело  $T$  на  $n$  малых частей  $\Delta T_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , объемы и диаметры



которых мы обозначим, соответственно, через  $\Delta V_k$  и  $\Delta d_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Взяв внутри каждой из частей точку  $M_k \in \Delta T_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , составим *интегральную сумму*

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta V_k.$$

**Определение.** *Конечный предел (если он существует) интегральных сумм  $I_n$  при условии, что диаметры всех частей  $\Delta T_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  разбиения тела  $T$  стремятся к нулю, не зависящий от способа разбиения и выбора точек внутри частей разбиения, называется тройным интегралом функции  $f(M)$  по телу  $T$  и обозначается через*

$$\iiint_T f(M) dV \quad (1)$$

или в системе координат  $Oxyz$  в пространстве

$$\iiint_T f(x, y, z) dV.$$

Функцию  $f(M)$  в этом случае мы будем называть *интегрируемой по телу  $T$* .

Таким образом,

$$\iiint_T f(M) dV = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta V_k, \quad \Delta d = \max_{k=1, n} \Delta d_k.$$

Пользуясь методом интегральных сумм, несложно убедиться в том, что с помощью тройного интеграла может быть вычислена *масса материального тела  $T$*  с известной, интегрируемой по  $T$  плотностью  $\rho(M)$ ,  $M \in T$ :

$$m = \iiint_T \rho(M) dV. \quad (2)$$

*Свойства тройного интеграла*, естественно, аналогичны соответствующим свойствам всех интегралов скалярных функций, рассмотренных в предыдущих параграфах данной главы. В частности, *объем тела  $T$*  численно равен тройному интегралу единицы по данному телу, т. е.

$$V = \iiint_T dV.$$

Не имея возможности в данном курсе для строгого обоснования *существования тройного интеграла непрерывной функции  $f(M)$* ,  $M \in T$ , мы привлечем на помощь интуицию. Если функция положительна, то мы можем ее считать плотностью  $\rho(M) = f(M)$ ,  $M \in T$  материального тела  $T$ . Интуитивно ясно, что тело с непрерывной плотностью обладает конечной массой и, стало быть, ввиду (2) интеграл (1) существует. Если функция меняет знак, то мы можем свести ее к положительной, добавив к ней некоторое положительное число, что, ввиду непрерывности, возможно и не отражается на интегрируемости функции.

Перейдем теперь к *вычислению* тройного интеграла *непрерывной функции  $f(M)$* ,  $M \in T$ . По аналогии с двойным интегралом мы можем убедиться в том, что *тройной интеграл по прямоугольному параллелепипеду*

$$\Pi = \{(x, y, z) \mid a_x \leq x \leq b_x, a_y \leq y \leq b_y, a_z \leq z \leq b_z\}$$

с гранями, параллельными координатным плоскостям, сводится к *повторному* по формуле

$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z) dV = \int_{a_x}^{b_x} dx \int_{a_y}^{b_y} dy \int_{a_z}^{b_z} f(x, y, z) dz$$

или, через двойные, по формулам

$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z) dV = \iint_{\Pi_{xy}} dx dy \int_{a_z}^{b_z} f(x, y, z) dz \quad (3)$$

или

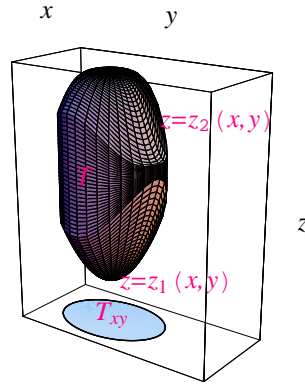
$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z) dV = \int_{a_x}^{b_x} dx \iint_{\Pi_{yz}^{(x)}} f(x, y, z) dy dz, \quad (4)$$

где  $\Pi_{xy}$  – проекция данного параллелепипеда  $\Pi$  на плоскость  $Oxy$ , а  $\Pi_{yz}^{(x)}$  – проекция сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости  $Oyz$  и проходящей через точку  $x$  оси  $Ox$ , на плоскость  $Oyz$ .

Найдем формулу для вычисления тройного интеграла по *простому* вдоль одной из координатных осей телу  $T$ . Для определенности предположим, что тело является *простым вдоль оси Oz*, т. е. оно заключено между двумя поверхностями, имеющими общую проекцию на координатную плоскость  $Oxy$ :

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in T_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

где функции  $z_1(x, y)$ ,  $z_2(x, y)$  непрерывны в замкнутой простой области  $T_{xy}$  на плоскости  $Oxy$ .



Разместив тело  $T$  внутри некоторого параллелепипеда  $\Pi$  с гранями, параллельными координатным плоскостям и определив функцию

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in T; \\ 0, & (x, y, z) \in \Pi \setminus T, \end{cases}$$

мы, воспользовавшись (3), точно также, как и для двойного интеграла получим:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{T_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (5)$$

где  $T_{xy}$  – проекция тела  $T$  на плоскость  $Oxy$ . Если, кроме того, проекция  $T_{xy}$  является *простой* вдоль одной из координатных осей областью (для определенности вдоль оси  $Oy$ )

$$T_{xy} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

с непрерывными на отрезке  $[a, b]$  функциями  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , то

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Структура повторного интеграла в правой части последней формулы позволяет использовать для тройного интеграла обозначение

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz.$$

Аналогично, считая, что проекция тела  $T$  на ось  $Ox$  заполняет отрезок  $[a, b]$ , мы, применяя формулу (4), найдем

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \iint_{T_{yz}^{(x)}} f(x, y, z) dy dz. \quad (6)$$

В этой формуле  $T_{yz}^{(x)}$  – проекция сечения тела  $T$  плоскостью, параллельной плоскости  $Oyz$  и проходящей через точку  $x$  оси  $Ox$ , на плоскость  $Oyz$ .

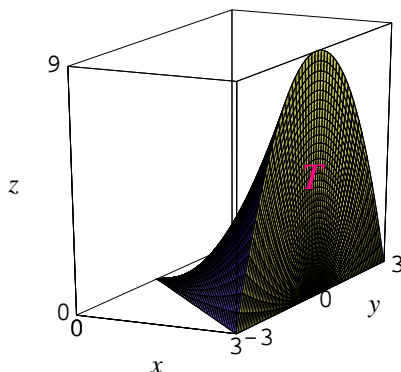
**Замечание.** Если тело  $T$  имеет более сложную структуру, то следует попытаться разбить его на простые вдоль координатных осей части и воспользоваться *свойством аддитивности* тройного интеграла.

**Пример 1.** Вычислить тройной интеграл

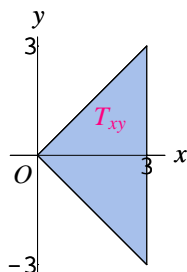
$$I = \iiint_T (x + 2z) dx dy dz$$

по телу  $T$ , ограниченному поверхностями  $z = x^2 - y^2$ ,  $x = 3$ ,  $z = 0$ .

*Решение.* Первая из ограничивающих поверхностей представляет собой гиперболический параболоид, вторая – плоскость, перпендикулярная оси  $Ox$ , третья – координатная плоскость  $Oxy$ .



Тело является простым относительно оси  $Oz$ , его проекцией на координатную плоскость  $Oxy$  служит треугольник, ограниченный прямыми  $y = \pm x$ ,  $x = 3$ .



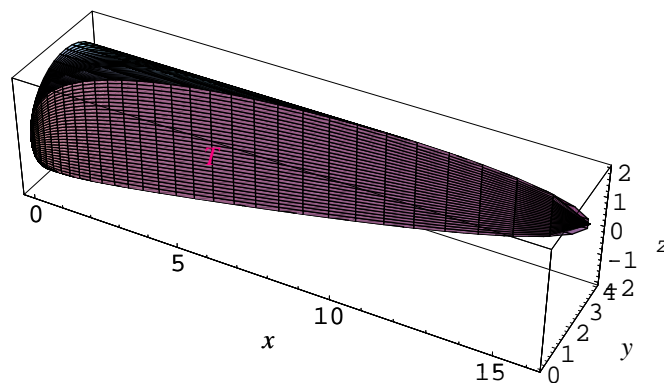
Воспользуемся **формулой (5)**:

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{T_{xy}} dx dy \int_0^{x^2-y^2} (x+2z) dz = \iint_{T_{xy}} (xz+z^2) \Big|_0^{x^2-y^2} dx dy = \iint_{T_{xy}} (x^3 - xy^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4) dx dy = \\
 &= \int_0^3 dx \int_{-x}^x (x^3 - xy^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4) dy = \int_0^3 \left( x^3y - \frac{xy^3}{3} + x^4y - \frac{2x^2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-x}^x dx = \\
 &= \frac{4}{15} \int_0^3 (5x^4 + 4x^5) dx = \frac{4}{15} \left( x^5 + \frac{2x^6}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{972}{5}.
 \end{aligned}$$

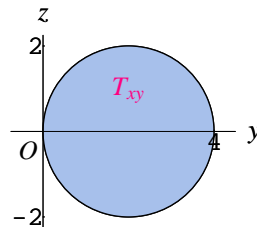
**Пример 2.** Найти объем тела  $T$ , ограниченного поверхностями

$$x = y^2, \quad y^2 + z^2 - 4y = 0, \quad x = 0.$$

*Решение.* Данное тело ограничивают два цилиндра и координатная плоскость  $Oyz$ .



Тело  $T$  является простым вдоль оси  $Ox$  и проецируется в круг  $T_{yz} : y^2 + z^2 - 4y \leq 0$  на плоскости  $Oyz$ .



Применяя и здесь **формулу (5)**, получим:

$$V = \iiint_T dx dy dz = \iint_{T_{yz}} dy dz \int_0^{y^2} dx = \iint_{T_{yz}} y^2 dy dz.$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

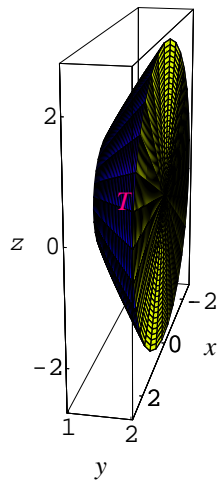
$$y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi.$$

Тогда, учитывая, что в полярных координатах уравнение окружности, ограничивающей круг  $T_{yz}$ , имеет вид  $r = 4 \cos \varphi$ , найдем:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} r \cdot r^2 \cos^2 \varphi dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{4 \cos \varphi} \cos^2 \varphi d\varphi = 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = \\ &= 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi)^3 d\varphi = 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3 \cos 2\varphi + 3 \cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi) d\varphi = \\ &= 8 \left( \left( \varphi + \frac{3}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2\varphi) d \sin 2\varphi \right) = \\ &= 8 \left( \pi + \frac{3}{2} \left( \varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left( \sin 2\varphi - \frac{\sin^3 2\varphi}{3} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 20\pi. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Найти массу материального тела  $T$ , представляющего собой часть двухполостного гиперболоида  $x^2 - 2y^2 + z^2 = -1$ , отсеченная плоскостями  $y = 1$  и  $y = 2$ , если известна плотность тела  $\rho(x, y, z) = y$ .

*Решение.*



Масса тела вычисляется по формуле (2), а для вычисления тройного интеграла нам здесь удобно использовать формулу (6), учитывая, что в сечении данного тела плоскостью, параллельной плоскости  $Oxz$  и проходящей через точку  $y$  оси  $Oy$ , находится круг  $T_{xz}^{(y)}$  радиуса  $\sqrt{2y^2 - 1}$ .

$$m = \iiint_T y dx dy dz = \int_1^2 y dy \iint_{T_{xz}^{(y)}} dx dz = \int_1^2 y \pi (2y^2 - 1) dy = \pi \left( \frac{y^4}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 6\pi.$$

Обсудим теперь возможность замены переменных в тройном интеграле. Предположим, что тело  $T_1$  пространства  $O_1x_1y_1z_1$  биективно отображается в тело  $T$  пространства  $Oxyz$  с помощью невырожденного преобразования

$$x = x(x_1, y_1, z_1), \quad y = y(x_1, y_1, z_1), \quad z = z(x_1, y_1, z_1), \quad (7)$$

где функции  $x(x_1, y_1, z_1)$ ,  $y(x_1, y_1, z_1)$ ,  $z(x_1, y_1, z_1)$  непрерывно дифференцируемы в  $T_1$  и определитель Якоби этого преобразования

$$J(x_1, y_1, z_1) = \begin{vmatrix} x'_{x_1}(x_1, y_1, z_1) & x'_{y_1}(x_1, y_1, z_1) & x'_{z_1}(x_1, y_1, z_1) \\ y'_{x_1}(x_1, y_1, z_1) & y'_{y_1}(x_1, y_1, z_1) & y'_{z_1}(x_1, y_1, z_1) \\ z'_{x_1}(x_1, y_1, z_1) & z'_{y_1}(x_1, y_1, z_1) & z'_{z_1}(x_1, y_1, z_1) \end{vmatrix} \quad (8)$$

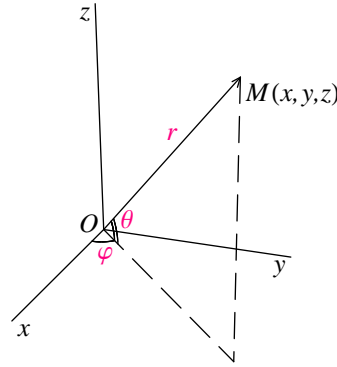
отличен от нуля в любой точке тела  $T_1$ .

Совершенно аналогично как и для двойного интеграла (§2, формула (11)), можно убедиться в том, что, выполнив в тройном интеграле непрерывной функции  $f(x, y, z)$  по телу  $T$  замену переменных по формулам (7), мы получим:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T_1} f(x(x_1, y_1, z_1), y(x_1, y_1, z_1), z(x_1, y_1, z_1)) |J(x_1, y_1, z_1)| dx_1 dy_1 dz_1. \quad (9)$$

Заметим также, что, как и для преобразования на плоскости, геометрический смысл определителя Якоби (8) заключается в том, что он представляет собой коэффициент деформации бесконечно малого элемента тела  $T_1$  в данной точке в результате преобразования (7).

Найдем представление тройного интеграла в сферических координатах.



Точку  $M(x, y, z)$  в пространстве мы можем зафиксировать также, если известно расстояние  $r$  от этой точки до начала координат и два угла:  $\varphi$  – угол, который образует проекция радиус-вектора точки  $M$  на координатную плоскость  $Oxy$  с положительным направлением оси  $Ox$  (долгота) и угол  $\theta$  между радиусом-вектором данной точки и плоскостью  $Oxy$  (широта).

Тройку чисел  $r, \varphi, \theta$  и называют сферическими координатами точки  $M$ . Чтобы соответствие между декартовыми и сферическими координатами точки было взаимно однозначным, мы будем отсчитывать долготу в пределах полного угла, например, от  $-\pi$  до  $\pi$ , а широту – в пределах от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ .

Из чертежа следует, что декартовы и сферические координаты точки  $M$  связаны равенствами

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta, \\ 0 &\leq r < +\infty, \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как

$$\begin{aligned} x'_r &= \cos \varphi \cos \theta, \quad x'_\varphi = -r \sin \varphi \cos \theta, \quad x'_\theta = -r \cos \varphi \sin \theta; \\ y'_r &= \sin \varphi \cos \theta, \quad y'_\varphi = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y'_\theta = -r \sin \varphi \sin \theta; \\ z'_r &= \sin \theta, \quad z'_\varphi = 0, \quad z'_\theta = r \cos \theta, \end{aligned}$$

то определитель Якоби преобразования (10) равен

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} = r^2 \cos \theta. \quad (11)$$

Пусть преобразование (10) отображает тело  $T_1$  пространства  $Or\varphi\theta$  в тело  $T$  пространства  $Oxyz$  и  $f(x, y, z)$  – непрерывная в  $T$  функция. Тогда, применяя формулы (9) – (11), представим *тройной интеграл в сферических координатах*:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T_1} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta. \quad (12)$$

Если тело  $T_1$  задано неравенствами

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta, \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi), r_1(\varphi, \theta) \leq r \leq r_2(\varphi, \theta),$$

где  $\theta_1(\varphi)$ ,  $\theta_2(\varphi)$ ,  $r_1(\varphi, \theta)$ ,  $r_2(\varphi, \theta)$  – непрерывные функции своих аргументов, то тройной интеграл в правой части (12) мы можем записать через *повторный*

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \cos \theta d\theta \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) r^2 dr. \quad (13)$$

**Пример 4.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_T x^2 dx dy dz$$

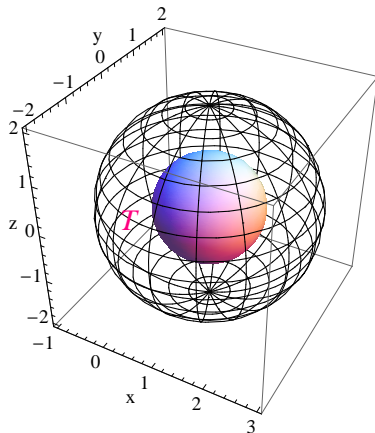
по шаровому слою  $T$ , заключенному между сферами

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0.$$

*Решение.* Переписав уравнения сфер в виде

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1, (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

мы замечаем, что они имеют общий центр  $O_1(1, 0, 0)$  и радиусы 1 и 2, соответственно.



Для удобства дальнейших вычислений сместим начало системы координат в точку  $O_1$ , т. е. выполним линейное преобразование по формулам

$$x_1 = x - 1, y = y, z = z.$$

Очевидно, это преобразование не меняет объемов, поэтому

$$I = \iiint_{T_1} (1 + x_1)^2 dx_1 dy dz = \iiint_{T_1} dx_1 dy dz + 2 \iiint_{T_1} x_1 dx_1 dy dz + \iiint_{T_1} x_1^2 dx_1 dy dz, \quad (14)$$

где  $T_1$  – тот же шаровой слой, только с центром в начале новой системы координат.

Первый из интегралов в правой части равен объему слоя и, значит,

$$I_1 = \iiint_{T_1} dx_1 dy dz = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{28}{3}\pi.$$

Во втором интеграле выполним зеркальное относительно координатной плоскости  $Oyz$  преобразование

$$x_1 = -x_2, y = y, z = z,$$

в результате которого мы придем к интегралу

$$- \iiint_{T_2} x_2 dx_2 dy dz,$$

который отличается от исходного только знаком и, следовательно,

$$I_2 = \iiint_{T_1} x_1 dx_1 dy dz = -I_2 \implies I_2 = 0.$$

Наконец, в третьем интеграле в правой части (14) мы перейдем к сферическим координатам (10) и, воспользовавшись (13) и тем, что для слоя  $T_1$

$$-\pi \leq \varphi < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq r \leq 2,$$

получим:

$$\begin{aligned} I_3 &= \iiint_{T_1} x_1^2 dx_1 dy dz = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_1^2 r^4 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d \sin \theta \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{31}{10} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \left( \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{124}{15} \pi. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$I = I_1 + 2I_2 + I_3 = \frac{28}{3}\pi + 0 + \frac{124}{15}\pi = \frac{88}{5}\pi.$$

## §5. Применение криволинейных, двойных, поверхностных и тройных интегралов в механике

В предыдущих параграфах мы установили, что по известной плотности мы можем вычислить *массу материальной фигуры* на плоскости или в пространстве с помощью соответствующего интеграла. Используем аналогичные рассуждения для того, чтобы найти *статические моменты* материальной фигуры относительно осей координат (на плоскости) или координатных плоскостей (в пространстве), что позволит найти координаты *центра тяжести* этой фигуры. С помощью интегралов мы также найдем *моменты инерции* фигуры относительно начала координат, осей координат и координатных плоскостей (для фигуры в пространстве).

Во избежание повторений мы проведем рассуждения для *гладкой или кусочно-гладкой материальной линии*  $L$  на плоскости или в пространстве с известной *непрерывной плотностью*  $\rho(M)$ ,  $M \in L$ . Для остальных фигур во всех формулах, приведенных ниже, следует заменить криволинейный интеграл на соответствующий данной фигуре интеграл.

Сначала напомним необходимые определения из механики. *Статическим моментом* относительно оси  $Ox$  ( $Oy$ ) материальной точки  $M_0(x_0, y_0)$  на плоскости, в которой сосредоточена масса  $m$ , называется величина

$$m_x = my_0 \quad (m_y = mx_0).$$

Таким образом, с точностью до знака статический момент представляет собой произведение массы точки на расстояние до соответствующей оси.

*Статические моменты системы материальных точек* определяются как алгебраические суммы соответствующих статических моментов всех точек системы.



Найдем *статические моменты* относительно координатных осей материальной линии  $L$  на плоскости. Разобьем линию на малые части  $\Delta L_k, k = \overline{1, n}$ , обозначим через  $\Delta l_k, k = \overline{1, n}$  длины этих частей и выберем произвольно внутри каждой из частей по точке  $M_k(x_k, y_k) \in \Delta L_k, k = \overline{1, n}$ . Тогда мы приближенно можем рассматривать линию как систему материальных точек  $M_k, k = \overline{1, n}$  с массами  $\rho(M_k)\Delta l_k, k = \overline{1, n}$ , соответственно, и, следовательно, статические моменты данной линии относительно осей координат приближенно равны

$$m_x \approx \sum_{k=1}^n y_k \rho(M_k) \Delta l_k, \quad m_y \approx \sum_{k=1}^n x_k \rho(M_k) \Delta l_k.$$

Правые части этих приближенных равенств – интегральные суммы для функций  $y\rho(x, y)$  и  $x\rho(x, y)$ , соответственно. Следовательно, в пределе, когда длины всех частей разбиения стремятся к нулю, мы получим формулы для вычисления *статических моментов* материальной линии на плоскости относительно осей координат:

$$m_x = \int_L y\rho(x, y)dl, \quad m_y = \int_L x\rho(x, y)dl. \quad (1)$$

*Центр тяжести* данной линии по определению представляет собой точку  $C(x_c, y_c)$ , обладающую тем свойством, что, если сосредоточить в ней массу  $m$  линии, то ее статические моменты относительно координатных осей будут равны соответствующим статическим моментам  $m_x$  и  $m_y$  линии. Стало быть,

$$m_x = my_c, \quad m_y = mx_c$$

и, значит, *координаты центра тяжести линии на плоскости* вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{m_y}{m}, \quad y_c = \frac{m_x}{m}$$

или, принимая во внимание формулы (1) и тот факт, что масса линии равна криволинейному интегралу плотности по ней

$$x_c = \frac{\int_L x\rho(x, y)dl}{\int_L \rho(x, y)dl}, \quad y_c = \frac{\int_L y\rho(x, y)dl}{\int_L \rho(x, y)dl}. \quad (2)$$

В пространстве мы будем исходить из того, что *статические моменты* материальной точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  с массой  $m$  относительно координатных плоскостей  $Oyz, Oxz, Oxy$  представляют собой величины

$$m_{yz} = mx_0, \quad m_{xz} = my_0, \quad m_{xy} = mz_0,$$

соответственно. Проведя теперь для материальной линии  $L$  в пространстве точно такие же рассуждения, как и выше для кривой на плоскости, мы придем к следующим формулам для вычисления *статических моментов* этой линии:

$$m_{yz} = \int_L x\rho(x, y, z)dl, \quad m_{xz} = \int_L y\rho(x, y, z)dl, \quad m_{xy} = \int_L z\rho(x, y, z)dl. \quad (3)$$

*Центр тяжести* линии в пространстве – материальная точка  $C(x_c, y_c, z_c)$ , имеющая массу  $m$  данной линии и общие с ней статические моменты относительно координатных плоскостей. Следовательно,

$$m_{yz} = mx_c, \quad m_{xz} = my_c, \quad m_{xy} = mz_c$$

и, значит,

$$x_c = \frac{m_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{m_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{m_{xy}}{m}$$

или

$$x_c = \frac{\int_L x\rho(x, y, z)dl}{\int_L \rho(x, y, z)dl}, \quad y_c = \frac{\int_L y\rho(x, y, z)dl}{\int_L \rho(x, y, z)dl}, \quad z_c = \frac{\int_L z\rho(x, y, z)dl}{\int_L \rho(x, y, z)dl}. \quad (4)$$

Теперь о *моментах инерции* материальной линии.

*Моментом инерции* материальной точки  $M_0(x_0, y_0)$  на плоскости с массой  $m$  относительно начала координат или координатной оси называется число, равное произведению массы точки на квадрат расстояния от точки до начала координат или соответствующей оси. Таким образом, по определению

$$I_O = m(x_0^2 + y_0^2), I_x = my_0^2, I_y = mx_0^2.$$

Для материальной точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  массы  $m$  в пространстве ее *моменты инерции* относительно начала координат, осей координат и координатных плоскостей определяются аналогично по формулам

$$I_O = m(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2), I_x = m(y_0^2 + z_0^2), I_y = m(x_0^2 + z_0^2), I_z = m(x_0^2 + y_0^2), \\ I_{yz} = mx_0^2, I_{xz} = my_0^2, I_{xy} = mz_0^2.$$

Для *системы материальных точек моменты инерции* находятся как суммы соответствующих моментов инерции всех точек данной системы.

Используя метод интегральных сумм и данные определения, мы, как и выше при нахождении статических моментов, получим формулы

$$I_O = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y) dl, I_x = \int_L y^2 \rho(x, y) dl, I_y = \int_L x^2 \rho(x, y) dl \quad (5)$$

для вычисления *моментов инерции материальной линии  $L$  на плоскости* и формулы

$$I_O = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl, \\ I_x = \int_L (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl, I_y = \int_L (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl, I_z = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dl, \quad (6) \\ I_{yz} = \int_L x^2 \rho(x, y, z) dl, I_{xz} = \int_L y^2 \rho(x, y, z) dl, I_{xy} = \int_L z^2 \rho(x, y, z) dl,$$

позволяющие вычислить *моменты инерции материальной линии в пространстве*.

**Замечание 1.** Статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции материальной области на плоскости, материальной поверхности и материального тела в пространстве вычисляются совершенно аналогично по соответствующим формулам (1) – (6), если заметить в них криволинейные интегралы на, соответственно, двойные, поверхностные и тройные интегралы.

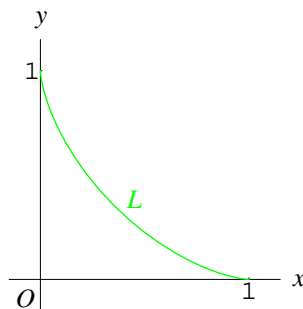
**Замечание 2.** Если материальная фигура и ее плотность обладают *симметрией* относительно какой-нибудь оси или плоскости, то центр тяжести этой фигуры расположен на оси или в плоскости симметрии. Это, в частности, имеет место для *однородной* фигуры, у которой плотность постоянна.

**Пример 1.** Найти координаты центра тяжести однородной дуги астроды

$$L : x = \cos^3 t, y = \sin^3 t,$$

расположенной в первой четверти.

*Решение.*



Данная материальная линия однородна (будем для удобства считать  $\rho(x, y) \equiv 1$ ) и симметрична относительно прямой  $y = x$ , поэтому центр тяжести лежит на этой прямой.

Найдем массу линии и один из ее статических моментов относительно координатных осей. Поскольку

$$x'(t) = -3 \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3 \sin^2 t \cos t, \quad (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9 \sin^2 t \cos^2 t,$$

то по формуле (4), §1, пункт 1

$$m = \int_L \rho(x, y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin t \cos t dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d \sin t = \frac{3}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Применяя далее первую из формул (1) настоящего параграфа, получим:

$$m_x = \int_L y \rho(x, y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot 3 \sin t \cos t dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d \sin t = \frac{3}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно,

$$x_c = y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{2}{5},$$

т. е.  $C\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$  – центр тяжести данной линии.

**Пример 2.** Вычислить момент инерции материального тела  $T$  с плотностью

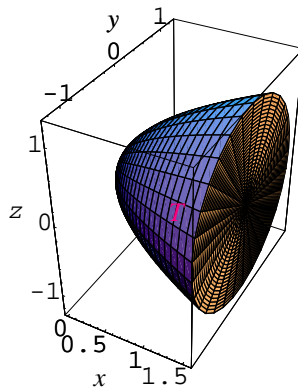
$$\rho(x, y, z) = \cos x,$$

ограниченного поверхностями

$$x = y^2 + z^2, \quad x = \frac{\pi}{2},$$

относительно его оси симметрии.

*Решение.* Тело ограничивают параболоид вращения вокруг оси  $Ox$  и плоскость ей перпендикулярная.



Воспользуемся второй из формул (6) применительно к телу в пространстве:

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T (y^2 + z^2) \cos x dx dy dz.$$

Тройной интеграл в правой части мы вычислим по формуле (6) предыдущего параграфа, учитывая, что сечением  $T_{yz}^{(x)}$  тела плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$  при фиксированном  $x$  является круг радиуса  $\sqrt{x}$ .

$$I_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \iint_{T_{yz}^{(x)}} (y^2 + z^2) dy dz.$$

В двойном интеграле мы перейдем к полярным координатам  $y = r \cos \varphi, z = r \sin \varphi$  и затем дважды проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{x}} r^3 dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{x}} \cos x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d \sin x = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx^2 \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos x \right) = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} + 2 \left( x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right) \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} - 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{8} (\pi^2 - 8).
 \end{aligned}$$

## ГЛАВА XI. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В этой главе мы изучим основные характеристики как *скалярного*, так и *векторного поля*, т. е. области на плоскости или в пространстве, свойства которой определяются, соответственно, некоторой *скалярной* или *векторной функцией*, заданной в этой области. *Теория поля* находит широкое применение в различных прикладных задачах, например, при изучении электромагнитных, тепловых, гравитационных полей.

### §1. Скалярное поле и его основные характеристики

**Определение.** *Скалярным полем называется область  $D$  на плоскости или в пространстве, в которой задана непрерывная числовая функция  $u = u(M), M \in D$ .*

Поскольку свойства скалярного поля полностью определяются функцией  $u(M)$ , то мы часто будем отождествлять его с функцией и говорить „скалярное поле  $u = u(M), M \in D$ .“

Основными характеристиками скалярного поля являются *линии (поверхности) уровня*, *производная по направлению* и *градиент*. Изучим их в указанном порядке.

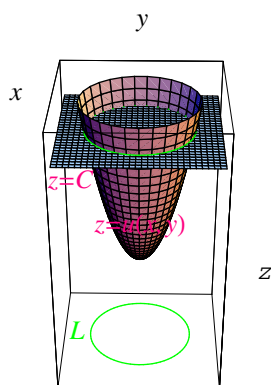
**Определение 1.** *Линией (поверхностью) уровня скалярного поля  $u = u(M), M \in D$  на плоскости (в пространстве) называется линия (поверхность) с уравнением*

$$u(M) = C, M \in D,$$

где  $C$  – фиксированное действительное число из области значений функции  $u = u(M)$ .

Очевидно, различные линии (поверхности) уровня не пересекаются и целиком заполняют данное поле, т. е. через каждую его точку проходит ровно одна линия (поверхность) уровня.

Приведем *геометрическую иллюстрацию* линий уровня скалярного поля  $u(x, y), (x, y) \in D$  на плоскости. Для этого поля уравнение  $z = u(x, y), (x, y) \in D$  определяет некоторую поверхность  $Q$  в пространстве и, следовательно, линия уровня  $u(x, y) = C$  представляет собой проекцию на плоскость  $Oxy$  кривой, по которой плоскость  $z = C$  пересекает поверхность  $Q$ .



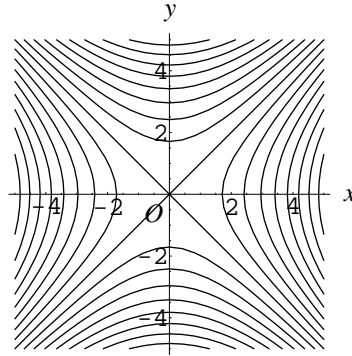
**Пример 1.** *Найти и изобразить на плоскости линии уровня скалярного поля*

$$u = x^2 - y^2.$$

*Решение.* Линиями уровня здесь являются *равносторонние гиперболы* с уравнениями

$$x^2 - y^2 = C, C \neq 0,$$

разделенные биссектрисами  $y = \pm x$  координатных углов ( $C = 0$ ).



**Пример 2.** Определить и изобразить в пространстве поверхности уровня скалярного поля

$$u = \frac{1}{x^2 - y^2 + z^2}.$$

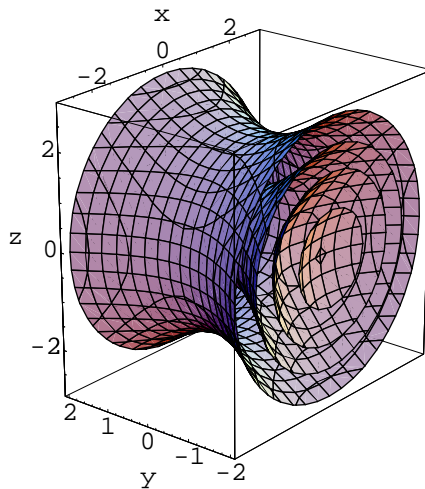
*Решение.* При  $C < 0$  поверхности уровня

$$\frac{1}{x^2 - y^2 + z^2} = C \iff \frac{x^2}{(1/\sqrt{-C})^2} - \frac{y^2}{(1/\sqrt{-C})^2} + \frac{z^2}{(1/\sqrt{-C})^2} = -1$$

представляют собой вложенные друг в друга *двухполостные гиперболоиды вращения* с общей осью  $Oy$ . Аналогично, если  $C > 0$ , то поверхности уровня имеют уравнения

$$\frac{1}{x^2 - y^2 + z^2} = C \iff \frac{x^2}{(1/\sqrt{C})^2} - \frac{y^2}{(1/\sqrt{C})^2} + \frac{z^2}{(1/\sqrt{C})^2} = 1$$

и, значит, они являются вложенными друг в друга *однополостными гиперболоидами вращения* с осью  $Oy$ .

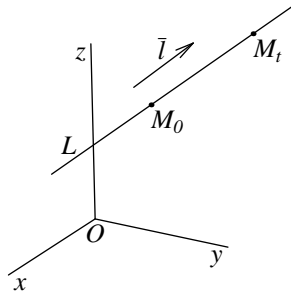


Частные производные скалярного поля как функции двух или трех переменных характеризуют скорость его изменения вдоль координатных осей. Введем определение *производной по направлению* скалярного поля, которая представляет собой *скорость изменения поля* в данной точке в заданном направлении.

Пусть  $u(M)$ ,  $M(x, y, z) \in D$  – скалярное поле в пространстве,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – фиксированная точка поля,  $\vec{l}(l_x, l_y, l_z)$  – ненулевой вектор в пространстве. Обозначим через

$$M_t(x(t), y(t), z(t)), x(t) = x_0 + l_x t, y(t) = y_0 + l_y t, z(t) = z_0 + l_z t, t \geq 0$$

точку на прямой  $L$ , проходящей через  $M_0$  параллельно вектору  $\vec{l}$ .



**Определение 2.** Если существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{u(M_t) - u(M_0)}{|M_0 M_t|},$$

то он называется производной скалярного поля  $u(M)$  в точке  $M_0$  по направлению вектора  $\bar{l}$ . Обозначается производная по направлению через

$$u'_l(M_0) \text{ или } \partial_{\bar{l}} u(M_0) \text{ или } \frac{\partial u}{\partial \bar{l}}(M_0).$$

Найдем удобное для вычисления выражение производной по направлению, предполагая скалярное поле дифференцируемым в точке  $M_0$ . Заметив, что  $M_0 M_t = t\bar{l}$  и, следовательно,  $|M_0 M_t| = |\bar{l}|t$ , мы можем записать определение производной по направлению в виде

$$u'_l(M_0) = \frac{1}{|\bar{l}|} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{u(M_t) - u(M_0)}{t}.$$

Предел в правой части равен производной в нуле композиции функций

$$\varphi(t) = u(M_t) = u(x(t), y(t), z(t)),$$

которая ввиду дифференцируемости поля в точке  $M_0$  существует (глава VIII, §2). По правилу дифференцирования композиции функции многих переменных, найденному там же

$$\varphi'(0) = u'_x(M_0)x'(0) + u'_y(M_0)y'(0) + u'_z(M_0)z'(0)$$

и, поскольку  $x'(0) = l_x$ ,  $y'(0) = l_y$ ,  $z'(0) = l_z$ , то

$$\varphi'(0) = u'_x(M_0)l_x + u'_y(M_0)l_y + u'_z(M_0)l_z.$$

Поэтому

$$u'_l(M_0) = \frac{1}{|\bar{l}|} \varphi'(0) = \frac{1}{|\bar{l}|} (u'_x(M_0)l_x + u'_y(M_0)l_y + u'_z(M_0)l_z)$$

или, учитывая, что величины

$$\frac{l_x}{|\bar{l}|} = \cos \alpha, \quad \frac{l_y}{|\bar{l}|} = \cos \beta, \quad \frac{l_z}{|\bar{l}|} = \cos \gamma$$

– направляющие косинусы вектора  $\bar{l}$ , т. е. координаты единичного вектора  $\bar{l}_1$  данного направления, мы окончательно получаем

$$u'_l(M_0) = u'_x(M_0) \cos \alpha + u'_y(M_0) \cos \beta + u'_z(M_0) \cos \gamma. \quad (1)$$

Из этой формулы сразу же следует, что, во-первых, величина производной по направлению не зависит от длины вектора, а определяется лишь его направлением, и, во-вторых, производная по направлению меняет знак, если направление меняется на противоположное.

Поскольку производная по направлению линейно выражается через частные производные скалярного поля, то на нее автоматически переносятся все правила дифференцирования алгебраических операций над функциями одной переменной, приведенные в главе V, §1.

Найдем теперь *направление максимального возрастания поля*  $u(M)$  в точке  $M_0$ . Для этого перепишем формулу (1) с помощью скалярного произведения в виде

$$u'_l(M_0) = \bar{a} \cdot \bar{l}_1 = |\bar{a}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{l}_1}),$$

где  $\bar{a} (u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0))$ ,  $\bar{l}_1(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ . Отсюда немедленно следует, что производная по направлению будет максимальной, когда  $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{l}_1}) = 1$  и, значит, в качестве искомого направления мы можем взять вектор  $\bar{l} = \bar{a}$ .

**Определение 3.** *Градиентом скалярного поля  $u(M)$  в точке  $M_0$  называется вектор  $\text{grad } u(M_0)$ , координатами которого являются частные производные этого поля в данной точке, т. е.*

$$\text{grad } u(M_0) = u'_x(M_0)\bar{i} + u'_y(M_0)\bar{j} + u'_z(M_0)\bar{k}. \quad (2)$$

Как мы установили выше, *градиент – направление максимального возрастания скалярного поля в данной точке, а его длина*

$$|\text{grad } u(M_0)| = u'_{\text{grad } u(M_0)}(M_0)$$

– *скорость этого возрастания.*

Используя градиент (2), мы можем записать формулу (1) для вычисления производной по направлению в виде

$$u'_l(M_0) = \text{grad } u(M_0) \cdot \bar{l}_1 = \text{Pr}_{\bar{l}_1} \text{grad } u(M_0). \quad (3)$$

**Замечание 1.** Часто в теории поля для компактной записи некоторых векторных операций используется *оператор Гамильтона (набла)*, который представляет собой символический вектор

$$\nabla = \partial_x \bar{i} + \partial_y \bar{j} + \partial_z \bar{k},$$

координатами которого являются символы частного дифференцирования по переменным  $x, y$  и  $z$ , соответственно. С помощью оператора Гамильтона мы можем переписать приведенные выше формулы (2) и (3) для градиента и производной по направлению в виде

$$\text{grad } u(M_0) = \nabla u(M_0)$$

и

$$u'_l(M_0) = \nabla u(M_0) \cdot \bar{l}_1,$$

соответственно.

*Правила дифференцирования функций одной переменной переносятся также и на градиент.* А именно, если  $u_1(M), u_2(M)$  – два дифференцируемых в области  $D$  поля, то

$$\begin{aligned} \text{grad } (c_1 u_1(M) + c_2 u_2(M)) &= c_1 \text{grad } u_1(M) + c_2 \text{grad } u_2(M), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}; \\ \text{grad } (u_1(M) u_2(M)) &= u_2(M) \text{grad } u_1(M) + u_1(M) \text{grad } u_2(M); \\ \text{grad } \left( \frac{u_1(M)}{u_2(M)} \right) &= \frac{u_2(M) \text{grad } u_1(M) - u_1(M) \text{grad } u_2(M)}{(u_2(M))^2}, \quad u_2(M) \neq 0, M \in D. \end{aligned}$$

Выясним, как направлен градиент по отношению к поверхностям уровня *дифференцируемого поля*  $u(M), M \in D$ . Пусть  $u(M) = C$  – поверхность уровня, проходящая через точку  $M_0 \in D$ . В [главе VIII, §4](#) мы установили, что нормальным вектором этой поверхности в точке  $M_0$  является вектор  $\bar{n} (u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0))$ , который совпадает с градиентом поля в данной точке. Таким образом, *градиент скалярного поля ортогонален к поверхности уровня этого поля.*

**Пример 3.** *Найти производную скалярного поля  $u = e^{\frac{y}{z}} \sqrt{x+1}$  в точке  $M_0(3, 0, -1)$  в направлении вектора  $\bar{l} = \overline{M_1 M_2}$ , где  $M_1(2, -1, -3), M_2(1, -3, -1)$ .*



*Решение.* Найдем частные производные скалярного поля и их значения в точке  $M_0$ :

$$\begin{aligned}u'_x &= \left( e^{\frac{y}{z}} \sqrt{x+1} \right)'_x = \frac{e^{\frac{y}{z}}}{2\sqrt{x+1}}, u'_x(M_0) = \frac{1}{4}, \\u'_y &= \left( e^{\frac{y}{z}} \sqrt{x+1} \right)'_y = e^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{1}{z} \sqrt{x+1} = \frac{e^{\frac{y}{z}} \sqrt{x+1}}{z}, u'_y(M_0) = -2, \\u'_z &= \left( e^{\frac{y}{z}} \sqrt{x+1} \right)'_z = e^{\frac{y}{z}} \left( -\frac{y}{z^2} \right) \sqrt{x+1} = -\frac{ye^{\frac{y}{z}} \sqrt{x+1}}{z^2}, u'_z(M_0) = 0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\text{grad } u(M_0) \left( \frac{1}{4}, -2, 0 \right).$$

Далее, поскольку  $\bar{l}(-1, -2, 2)$  и, значит,  $|\bar{l}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ , то

$$\bar{l}_1 \left( -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Осталось воспользоваться формулой (3):

$$u'_l(M_0) = \frac{1}{4} \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) + (-2) \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{4}.$$

**Замечание 2.** Для скалярного поля на плоскости производная по направлению и градиент определяются совершенно аналогично и обладают точно такими же свойствами.

**Пример 4.** Убедиться в ортогональности линий уровня скалярных полей на плоскости

$$u_1(x, y) = \varphi_1(x^2 y^3) \text{ и } u_2(x, y) = \varphi_2(3x^2 - 2y^2),$$

где  $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$  – дифференцируемые на всей числовой прямой функции.

*Решение.* Угол между линиями уровня данных полей в их общей точке равен углу между касательными векторами, который, очевидно, равен углу между нормальными векторами. Поскольку, как мы убедились выше, нормальными векторами служат градиенты полей, то для решения задачи достаточно показать, что градиенты этих полей ортогональны.

Здесь

$$\begin{aligned}\partial_x u_1 &= \varphi'_1(x^2 y^3) \cdot 2xy^3, \partial_y u_1 = \varphi'_1(x^2 y^3) \cdot 3x^2 y^2; \\ \partial_x u_2 &= \varphi'_2(3x^2 - 2y^2) \cdot 6x, \partial_y u_2 = \varphi'_2(3x^2 - 2y^2) \cdot (-4y).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{grad } u_1 = \varphi'_1(x^2 y^3) (2xy^3 \bar{i} + 3x^2 y^2 \bar{j}), \text{ grad } u_2 = \varphi'_2(3x^2 - 2y^2) (6x \bar{i} - 4y \bar{j})$$

и, следовательно,

$$\text{grad } u_1 \cdot \text{grad } u_2 = \varphi'_1(x^2 y^3) \varphi'_2(3x^2 - 2y^2) (12x^2 y^3 - 12x^2 y^3) = 0,$$

в чем и требовалось убедиться.

## §2. Векторное поле и его основные характеристики

В некоторых прикладных задачах свойства области на плоскости или в пространстве определяются не скалярной, а *векторной функцией*, заданной в этой области, и тогда мы вправе говорить о *векторном поле*.

**Определение.** Область  $D$  на плоскости или в пространстве вместе с заданной в ней непрерывной векторной функцией  $\bar{a} = \bar{a}(M), M \in D$  называется *векторным полем*.

Как и для скалярного поля часто в дальнейшем мы будем отождествлять векторное поле с векторной функцией, характеризующей его свойства.

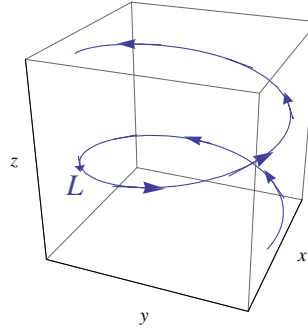
Приступим теперь к изучению основных характеристик векторного поля, к числу которых относятся *векторные линии, поток, дивергенция, циркуляция и ротор*.

Пусть

$$\bar{a}(M) = a_x(M) \bar{i} + a_y(M) \bar{j} + a_z(M) \bar{k}, M(x, y, z) \in D \quad (1)$$

– векторное поле в пространстве.

**Определение 1.** Векторной линией векторного поля называется гладкая кривая, в каждой точке которой касательный вектор коллинеарен вектору поля в этой точке.



Найдем дифференциальные уравнения векторных линий для поля (1) без особых точек, т. е. в любой точке поля  $\bar{a}(M) \neq \bar{0}$ . Пусть  $L$  – одна из них и

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in (\alpha, \beta)$$

– ее параметрические уравнения. Поскольку при любом  $t \in (\alpha, \beta)$  вектор

$$\bar{\tau}(x'(t), y'(t), z'(t))$$

является касательным к  $L$  в точке  $M(x(t), y(t), z(t))$  и, следовательно,  $\bar{\tau} \parallel \bar{a}(M)$ , то

$$\frac{x'(t)}{a_x(M)} = \frac{y'(t)}{a_y(M)} = \frac{z'(t)}{a_z(M)} \iff \frac{dx(t)}{a_x(x(t), y(t), z(t))} = \frac{dy(t)}{a_y(x(t), y(t), z(t))} = \frac{dz(t)}{a_z(x(t), y(t), z(t))}.$$

Таким образом, любая векторная линия векторного поля (1) является решением системы дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)} \quad (2)$$

или в равносильной ей нормальной форме

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_x(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = a_y(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = a_z(x, y, z). \end{cases} \quad (3)$$

Верно, очевидно, и обратное, а именно, любое решение системы (2) или (3) представляет собой векторную линию поля (1).

Ясно, что для векторного поля

$$\bar{a}(M) = a_x(M)\bar{i} + a_y(M)\bar{j}, \quad M(x, y) \in D$$

на плоскости векторные линии являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{a_x(x, y)} = \frac{dy}{a_y(x, y)} \quad (4)$$

или системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_x(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = a_y(x, y). \end{cases}$$

Если координаты векторного поля  $\bar{a}(M)$ ,  $M \in D$  удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решения задачи Коши (например, они являются непрерывно дифференцируемыми), то поле  $D$  целиком состоит из векторных линий, т. е. через каждую его точку проходит единственная векторная линия.

**Пример 1.** Найти векторные линии векторного поля

$$\bar{a} = \frac{x}{y} \bar{i} + (\ln y - \ln x) \bar{j}$$

на плоскости.

*Решение.* Дифференциальное уравнение (4) здесь принимает вид

$$\frac{dx}{x/y} = \frac{dy}{\ln y - \ln x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}. \quad (5)$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка является однородным (глава IX, §1, пункт 2). Проведем в нем подстановку

$$y = xz,$$

где  $z = z(x)$  – новая неизвестная функция аргумента  $x$ . Поскольку

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx},$$

то уравнение (5) сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$z + x \frac{dz}{dx} = z \ln z,$$

откуда

$$\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x}$$

и, значит,

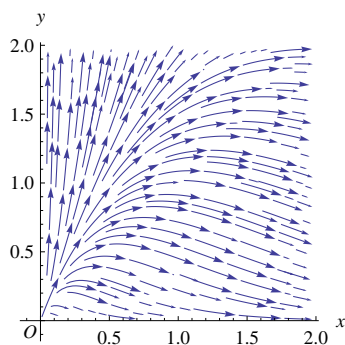
$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x} \iff \int \frac{d(\ln z - 1)}{\ln z - 1} = \ln |Cx| \iff \ln |\ln z - 1| = \ln |Cx|,$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Следовательно,

$$\ln z - 1 = Cx \iff z = e^{1+Cx}$$

и после обратной подстановки мы получаем уравнения векторных линий данного поля:

$$y = xe^{1+Cx}, x > 0, C \in \mathbf{R}.$$



На графике стрелками указаны направления, вдоль которых векторное поле „скользит“, по векторным линиям.

**Пример 2.** Найти векторные линии поля

$$\bar{a} = (x - y) \bar{i} + (x + y) \bar{j} + z \bar{k}$$

в пространстве.

*Решение.* Запишем и проинтегрируем систему дифференциальных уравнений (3) для данного векторного поля:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \\ \frac{dz}{dt} = z. \end{cases} \quad (6)$$

Систему из первых двух дифференциальных уравнений, не зависящую от  $z$ , мы проинтегрируем методом исключения неизвестных функций, изложенным в главе IX, §5. Продифференцировав обе части первого из уравнений системы, мы получим

$$x'' = x' - y',$$

откуда, учитывая второе уравнение и равенство  $y = x - x'$ , мы приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x'' - 2x' + 2x = 0 \quad (7)$$

(глава IX, §4, пункт 1). Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

имеет пару комплексно сопряженных корней  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ , которой соответствует пара

$$x_1(t) = e^t \cos t, x_2(t) = e^t \sin t$$

линейно независимых решений уравнения (7) и, стало быть, его общим решением является функция

$$x = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Поскольку

$$x' = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^t (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = x + e^t (-C_1 \sin t + C_2 \cos t),$$

то

$$y = x - x' = e^t (C_1 \sin t - C_2 \cos t).$$

Последняя из неизвестных функций системы (6) находится из ее последнего уравнения, в котором разделяются переменные:

$$\frac{dz}{z} = dt \iff \int \frac{dz}{z} = \int dt \iff \ln |z| = t + \ln |C_3| \iff z = C_3 e^t.$$

Таким образом, векторные линии данного поля имеют параметрические уравнения

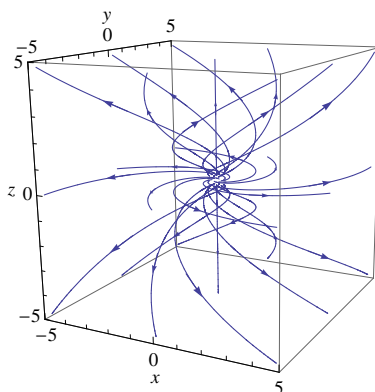
$$x = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t), y = e^t (C_1 \sin t - C_2 \cos t), z = C_3 e^t, C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}.$$

Они являются *коническими винтовыми линиями*, так как

$$x^2 + y^2 = (C_1^2 + C_2^2) e^{2t}, z^2 = C_3^2 e^{2t}$$

и, значит,

$$\frac{x^2 + y^2}{C_1^2 + C_2^2} - \frac{z^2}{C_3^2} = 0.$$



Займемся теперь *поток*ом и *дивергенцией* векторного поля  $D$  – характеристиками, отражающими его *интенсивность*.

Пусть  $Q \subset D$  – *кусочно-гладкая, ограниченная поверхность с краем*. Выберем на ней *определенную сторону* с помощью непрерывно изменяющегося нормального вектора  $\bar{n}(M)$ ,  $M \in Q$ .

**Определение 2.** *Потоком векторного поля (1) через поверхность  $Q$  в выбранном направлении называется величина  $\Pi(\bar{a}, Q)$ , численно равная поверхностному интегралу векторной функции  $\bar{a}(M)$  по данной поверхности, т. е.*

$$\Pi(\bar{a}, Q) = \iint_Q \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{a}(M) dS = \iint_Q a_x(x, y, z) dydz + a_y(x, y, z) dx dz + a_z(x, y, z) dx dy.$$

Поток векторного поля через *замкнутую поверхность*  $Q$  обозначается через

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q)$$

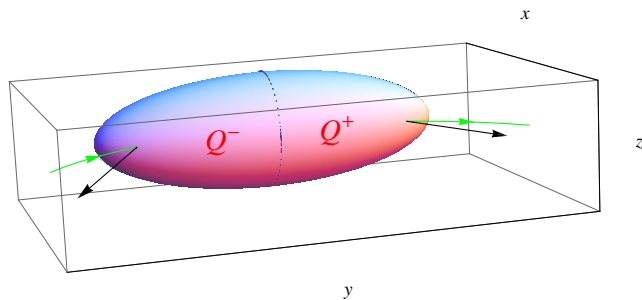
и, таким образом,

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q) = \oiint_Q \text{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{a}(M) dS.$$

Примером физического характера может служить, рассмотренный в [главе X, §3, пункт 2](#), *поток вектора скорости идеальной несжимаемой жидкости* через гладкую поверхность в заданном направлении, равный количеству жидкости, протекающей через эту поверхность в единицу времени.

Замкнутое тело  $T$  в пространстве называется *простым*, если любую замкнутую непрерывную поверхность  $Q_1 \subset T$ , являющуюся границей тела  $T_1 \subset T$ , мы можем, не выходя из  $T$ , непрерывной деформацией стянуть в точку данного тела. Иначе говоря, простое тело лишено „дыр“ и „пустот“.

Пусть  $T \subset D$  – простое тело и  $Q$  – ограничивающая его кусочно-гладкая поверхность. Рассмотрим поток векторного поля (1) через *внешнюю сторону поверхности*  $Q$ . Обозначим через  $Q^+$  ( $Q^-$ ) – часть данной поверхности, в каждой точке которой векторная линия пересекает поверхность под острым (тупым) углом.



Поток векторного поля через поверхность  $Q$  равен

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q) = \Pi(\bar{a}, Q^-) + \Pi(\bar{a}, Q^+).$$

Величины

$$\Pi(\bar{a}, Q^-) < 0 \text{ и } \Pi(\bar{a}, Q^+) > 0$$

представляют собой, соответственно, *входящий* в тело  $T$  и *исходящий* из него потоки. Если окажется, что

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q) > 0,$$

то исходящий поток превышает входящий и, значит в поле имеются *источники*. Наоборот, если

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q) < 0,$$

то входящий поток больше исходящего и, стало быть, данное поле содержит *стоки*.

Определим теперь величину, характеризующую *интенсивность поля* в каждой его точке. Это позволит нам, в частности, определить *положение источников и стоков* поля.

Зафиксируем точку  $M(x, y, z) \in D$  и обозначим через  $\Delta Q$  замкнутую кусочно-гладкую поверхность, ограничивающую простое тело  $\Delta T$  малого диаметра  $\Delta d$  с объемом  $\Delta V$ , содержащее внутри точку  $M$ .

**Определение 3.** Если существует конечный предел отношения потока векторного поля (1) через внешнюю сторону поверхности  $\Delta Q$  к объему  $\Delta V$  тела  $\Delta T$  при условии, что его диаметр  $\Delta d$  стремится к нулю, не зависящий от выбора тела  $\Delta T$ , то он называется *дивергенцией (расходимостью)* данного поля в точке  $M$  и обозначается через  $\operatorname{div} \bar{a}(M)$ .

Таким образом, по определению,

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q)}{\Delta V}.$$

Отсюда следует, что при малом диаметре тела  $\Delta T$

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) \approx \frac{\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q)}{\Delta V}$$

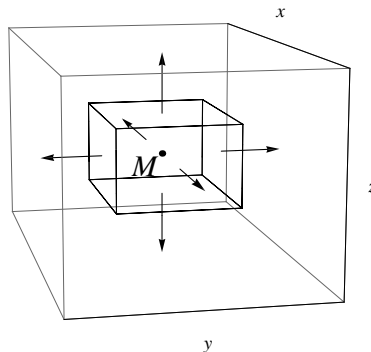
и, значит,

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q) \approx \operatorname{div} \bar{a}(M) \Delta V.$$

Последние формулы позволяют провести здесь определенную параллель с массой, а именно, мы можем сказать, что *дивергенция представляет собой плотность потока векторного поля в данной точке*.

Найдем выражение для дивергенции, предполагая, что векторное поле (1) является *непрерывно дифференцируемым* в некоторой окрестности точки  $M$ .

В качестве малого тела  $\Delta T$  мы возьмем сначала прямоугольный параллелепипед с центром в точке  $M$  и ребрами  $2\Delta x, 2\Delta y, 2\Delta z$ , параллельными координатным осям  $Ox, Oy, Oz$ , соответственно, где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – малые положительные числа.



Противоположные грани параллелепипеда, параллельные плоскости  $Oyz$  и расположенные в плоскостях, проходящих через точки  $x - \Delta x$  и  $x + \Delta x$  оси  $Ox$ , мы обозначим через  $\Delta Q_x^-$  и  $\Delta Q_x^+$ , соответственно. Аналогично,  $\Delta Q_y^-, \Delta Q_y^+$  и  $\Delta Q_z^-, \Delta Q_z^+$  – две пары противоположных граней, параллельных координатным плоскостям  $Oxz$  и  $Oxy$ , соответственно. Тогда поток векторного поля через внешнюю сторону поверхности параллелепипеда равен

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q) = \Pi_x + \Pi_y + \Pi_z,$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \iint_{\Delta Q_x^+} a_x(x, y, z) dydz + \iint_{\Delta Q_x^-} a_x(x, y, z) dydz, \\ \Pi_y &= \iint_{\Delta Q_y^+} a_y(x, y, z) dx dz + \iint_{\Delta Q_y^-} a_y(x, y, z) dx dz, \\ \Pi_z &= \iint_{\Delta Q_z^+} a_z(x, y, z) dx dy + \iint_{\Delta Q_z^-} a_z(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

– потоки вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , соответственно. Первый из них, обозначив через  $\Delta Q_x$  общую для граней  $\Delta Q_x^-$  и  $\Delta Q_x^+$  проекцию на плоскость  $Oyz$ , мы выразим через двойной интеграл

$$\Pi_x = \iint_{\Delta Q_x} (a_x(x + \Delta x, y, z) - a_x(x - \Delta x, y, z)) dydz,$$

к которому применим теорему о среднем:

$$\Pi_x = (a_x(x + \Delta x, y_1, z_1) - a_x(x - \Delta x, y_1, z_1)) S(\Delta Q_x) = 4\Delta y \Delta z (a_x(x + \Delta x, y_1, z_1) - a_x(x - \Delta x, y_1, z_1)),$$

где  $(y_1, z_1) \in \Delta Q_x$ . Поскольку по [теореме Лагранжа](#)

$$a_x(x + \Delta x, y_1, z_1) - a_x(x - \Delta x, y_1, z_1) = 2\Delta x \cdot \partial_x a_x(x_1, y_1, z_1), \quad x_1 \in (x - \Delta x, x + \Delta x),$$

то, окончательно,

$$\Pi_x = 8\Delta x \Delta y \Delta z \cdot \partial_x a_x(M_1) = \partial_x a_x(M_1) \Delta V, \quad M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Delta T$$

и  $\Delta V = 8\Delta x \Delta y \Delta z$  – объем тела  $\Delta T$ . Аналогично,

$$\Pi_y = \partial_y a_y(M_2) \Delta V, \quad M_2 \in \Delta T; \quad \Pi_z = \partial_z a_z(M_3) \Delta V, \quad M_3 \in \Delta T$$

и, стало быть,

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q) = (\partial_x a_x(M_1) + \partial_y a_y(M_2) + \partial_z a_z(M_3)) \Delta V.$$

Отсюда, учитывая непрерывную дифференцируемость координат векторного поля и тот факт, что

$$M_1 \rightarrow M, M_2 \rightarrow M, M_3 \rightarrow M \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0,$$

мы находим:

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q)}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} (\partial_x a_x(M_1) + \partial_y a_y(M_2) + \partial_z a_z(M_3)) = \partial_x a_x(M) + \partial_y a_y(M) + \partial_z a_z(M).$$

Это же предельное соотношение сохраняется и для любого тела  $\Delta T$  бесконечно малого диаметра, содержащего точку  $M$  и ограниченного кусочно-гладкой поверхностью  $\Delta Q$ , так как для него отношение

$$\frac{\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q)}{\Delta V}$$

бесконечно мало отличается от такого же отношения для достаточно малого параллелепипеда.

Таким образом, *дивергенция векторного поля* (1) вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \partial_x a_x(M) + \partial_y a_y(M) + \partial_z a_z(M).$$

Дивергенцию поля мы можем записать также с помощью оператора Гамильтона в виде скалярного произведения

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \nabla \cdot \bar{a}(M).$$

Связывает поток и дивергенцию

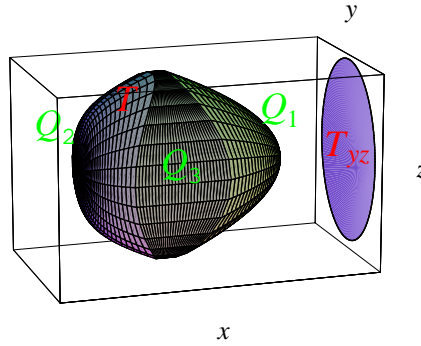
**Теорема Гаусса.** Поток непрерывно дифференцируемого векторного поля (1) через внешнюю сторону кусочно-гладкой поверхности  $Q$ , являющейся границей простого тела  $T \subset D$ , равен тройному интегралу дивергенции поля по телу  $T$ , т.е.

$$\mathring{\Pi}(\bar{a}, Q) = \iiint_T \operatorname{div} \bar{a}(M) dV \quad (\text{формула Гаусса}).$$

Доказательство по существу ничем не отличается от доказательства формулы Грина (глава X, §2). Мы проведем его для простого вдоль каждой из координатных осей тела  $T$ .

Поскольку данное тело является простым вдоль оси  $Ox$ , то оно заключено между поверхностями  $Q_1 : x = x_1(y, z)$ ,  $Q_2 : x = x_2(y, z)$ , имеющими однозначную проекцию  $T_{yz}$  на координатную плоскость  $Oyz$ , и, возможно, цилиндрической поверхностью  $Q_3$ , образующая которой параллельна оси  $Ox$ , а направляющей является граница области  $T_{yz}$ , т.е.

$$T = \{(x, y, z) \mid x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), (y, z) \in T_{yz}\}.$$



Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_T \partial_x a_x(M) dV &= \iint_{T_{yz}} dydz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} \partial_x a_x(x, y, z) dx = \iint_{T_{yz}} a_x(x, y, z) \Big|_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} dydz = \\ &= \iint_{T_{yz}} (a_x(x_2(y, z), y, z) - a_x(x_1(y, z), y, z)) dydz. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \mathring{\Pi}(a_x \bar{i}, Q) &= \oiint_Q \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} a_x(M) \bar{i} dS = \\ &= \iint_{Q_1} a_x(M) \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{i} dS + \iint_{Q_2} a_x(M) \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{i} dS + \iint_{Q_3} a_x(M) \operatorname{Pr}_{\bar{n}(M)} \bar{i} dS = \\ &= - \iint_{T_{yz}} a_x(x_1(y, z), y, z) dydz + \iint_{T_{yz}} a_x(x_2(y, z), y, z) dydz + 0 = \\ &= \iint_{T_{yz}} (a_x(x_2(y, z), y, z) - a_x(x_1(y, z), y, z)) dydz, \end{aligned}$$

мы получаем

$$\mathring{\Pi}(a_x \bar{i}, Q) = \iiint_T \partial_x a_x(M) dV.$$



Аналогично,

$$\mathring{\Pi}(a_y \bar{j}, Q) = \iiint_T \partial_y a_y(M) dV, \quad \mathring{\Pi}(a_z \bar{k}, Q) = \iiint_T \partial_z a_z(M) dV$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \mathring{\Pi}(\bar{a}, Q) &= \mathring{\Pi}(a_x \bar{i}, Q) + \mathring{\Pi}(a_y \bar{j}, Q) + \mathring{\Pi}(a_z \bar{k}, Q) = \\ &= \iiint_T (\partial_x a_x(M) + \partial_y a_y(M) + \partial_z a_z(M)) dV = \iiint_T \operatorname{div} \bar{a}(M) dV. \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Формула Гаусса, как и формула Грина, является *аналогом формулы Ньютона-Лейбница*, так как она позволяет свести вычисление тройного интеграла функции трех переменных по замкнутому телу в пространстве к вычислению „первообразной“ этой функции на границе тела.

Если в точке  $M$  непрерывно дифференцируемого векторного поля (1)

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) > 0,$$

то ввиду непрерывности дивергенции, она будет положительной и в любой точке некоторого малого тела  $\Delta T$  с границей  $\Delta Q$ , содержащего точку  $M$ . Тогда по формуле Гаусса

$$\mathring{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q) = \iiint_{\Delta T} \operatorname{div} \bar{a}(M) dV > 0$$

и, стало быть, точка  $M$  является *источником* поля.

Аналогично, в случае

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) < 0$$

точка  $M$  служит *стоком*.

**Пример 3.** Найти поток векторного поля

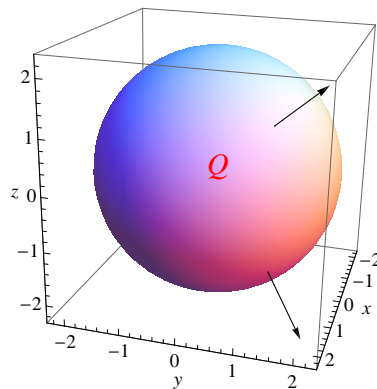
$$\bar{a} = x^3 \bar{i} + (y^3 - x^2) \bar{j} + (z^3 + 2x^2 y^4) \bar{k}$$

через внешнюю сторону сферы

$$Q : x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

непосредственно и по формуле Гаусса.

*Решение.*



Сначала вычислим поток как поверхностный интеграл

$$\mathring{\Pi}(\bar{a}, Q) = \oiint_Q x^3 dydz + (y^3 - x^2) dx dz + (z^3 + 2x^2 y^4) dx dy.$$

Полусферы  $Q_x^+ : x = \sqrt{5 - y^2 - z^2}$ ,  $Q_x^- : x = -\sqrt{5 - y^2 - z^2}$  имеют общую проекцию  $Q_{yz}$  на плоскость  $Oyz$ , являющуюся кругом радиуса  $\sqrt{5}$  с центром в начале координат. Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \iint_Q x^3 dydz = \iint_{Q_x^+} x^3 dydz + \iint_{Q_x^-} x^3 dydz = \\ &= \iint_{Q_{yz}} \sqrt{5 - y^2 - z^2}^3 dydz - \iint_{Q_{yz}} -\sqrt{5 - y^2 - z^2}^3 dydz = 2 \iint_{Q_{yz}} \sqrt{5 - y^2 - z^2}^3 dydz. \end{aligned}$$

В полученном двойном интеграле перейдем к полярным координатам  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$ . Тогда

$$\Pi_x = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} r \sqrt{5 - r^2}^3 dr = -\varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - r^2}^3 d(5 - r^2) = -2\pi \cdot \frac{2}{5} (5 - r^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\sqrt{5}} = 20\sqrt{5}\pi.$$

Далее,

$$\Pi_y = \iint_Q (y^3 - x^2) dx dz = \iint_Q y^3 dx dz - \iint_Q x^2 dx dz.$$

Первый из этих поверхностных интегралов равен, очевидно,  $\Pi_x$ , а второй – нулю, так как в нем подынтегральная функция не зависит от переменной  $y$ , а поверхность  $Q$  симметрична относительно координатной плоскости  $Oxz$ . Таким образом,

$$\Pi_y = 20\sqrt{5}\pi.$$

Аналогично мы убеждаемся в том, что

$$\Pi_z = \iint_Q (z^3 + 2x^2 y^4) dx dy = 20\sqrt{5}\pi$$

и, следовательно,

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q) = \Pi_x + \Pi_y + \Pi_z = 60\sqrt{5}\pi.$$

Вычислим теперь этот поток по формуле Гаусса. Поскольку

$$\partial_x a_x = \partial_x x^3 = 3x^2, \partial_y a_y = \partial_y (y^3 - x^2) = 3y^2, \partial_z a_z = \partial_z (z^3 + 2x^2 y^4) = 3z^2,$$

то

$$\operatorname{div} \bar{a} = \partial_x a_x + \partial_y a_y + \partial_z a_z = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

и, значит,

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q) = \iiint_T 3(x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

Переходя в этом тройном интеграле к сферическим координатам

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \cos \theta, z = r \sin \theta, J(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \theta,$$

мы получим

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q) = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\sqrt{5}} r^4 dr = 3\varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^{\sqrt{5}} = 60\sqrt{5}\pi.$$

Изучим теперь две связанные друг с другом характеристики векторного поля – *циркуляцию* и *ротор*, которые позволяют судить о *вращательной способности* поля.

Пусть  $L$  – *замкнутая, кусочно-гладкая линия (контур)*, расположенная в векторном поле (1). Выберем на линии *определенную ориентацию* с помощью непрерывно изменяющегося касательного вектора.

**Определение 4.** Циркуляцией векторного поля (1) по замкнутому контуру  $L$  в выбранном направлении называется величина, обозначаемая через  $C(\bar{a}, L)$  и равная криволинейному интегралу векторной функции  $\bar{a}(M)$  по линии  $L$ , т.е.

$$C(\bar{a}, L) = \oint_L \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} = \oint_L a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz.$$

Как мы убедились в главе X, §1, пункт 2, циркуляция силового поля представляет собой работу по перемещению материальной точки вдоль замкнутого контура.

В качестве другого примера рассмотрим поле скоростей  $\bar{v}$  движущейся идеальной несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho$ .

Пусть  $L$  – абсолютно проницаемый для жидкости замкнутый контур (трубка) бесконечно малого постоянного поперечного сечения с площадью  $\Delta S$ , находящийся в жидкости. Предположим, что в определенный момент времени произошло мгновенное отвердевание стенок трубки. В зависимости от структуры поля скоростей жидкость будет циркулировать по трубке в одном из двух возможных направлений.

Разобьем трубку на малые части  $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$  с длинами  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$  и выберем внутри каждой из частей по точке  $M_k \in \Delta L_k, k = \overline{1, n}$ . Для любого  $k = \overline{1, n}$  величина

$$\rho \Delta S \Delta l_k \text{Pr}_{\bar{\tau}} \bar{v}(M_k),$$

где  $\bar{\tau}$  – касательный вектор к контуру в точке  $M_k$ , направленный в сторону движения жидкости, приближенно равна импульсу объема жидкости, находящейся в части трубки  $\Delta L_k$ . Тогда сумма

$$\sum_{k=1}^n \rho \Delta S \Delta l_k \text{Pr}_{\bar{\tau}} \bar{v}(M_k)$$

приближенно равна импульсу  $p$  жидкости в трубке. Переходя к пределу при условии, что все длины  $\Delta l_k, k = \overline{1, n}$  стремятся к нулю, мы получаем

$$p = \oint_L \rho \Delta S \text{Pr}_{\bar{\tau}} \bar{v}(M) dl = \rho \Delta S \cdot C(\bar{v}, L).$$

Таким образом, импульс движущейся по замкнутому контуру жидкости пропорционален циркуляции вектора скорости.

В §2 предыдущей главы мы установили, что циркуляция векторного поля на плоскости выражается через двойной интеграл по области, ограниченной контуром, с помощью формулы Грина. Нижеследующая теорема обобщает эту формулу на поле в пространстве.

**Теорема Стокса.** Пусть границей односвязной<sup>1</sup>, кусочно-гладкой поверхности  $Q$  конечного диаметра, находящейся в непрерывно дифференцируемом векторном поле (1), является замкнутая, кусочно-гладкая линия  $L$  без самопересечений. Тогда циркуляция этого поля по контуру  $L$  равна потоку векторного поля

$$\bar{b}(M) = (\partial_y a_z(M) - \partial_z a_y(M))\bar{i} + (\partial_z a_x(M) - \partial_x a_z(M))\bar{j} + (\partial_x a_y(M) - \partial_y a_x(M))\bar{k} \quad (8)$$

через поверхность  $Q$ , т.е.

$$C(\bar{a}, L) = \Pi(\bar{b}, Q),$$

причем ориентации линии  $L$  и поверхности  $Q$  согласованы таким образом, что, находясь на выбранной стороне поверхности, мы наблюдаем обход по линии совершающимся против часовой стрелки.

**Доказательство.** Для упрощения рассуждений предположим, что поверхность  $Q$  является гладкой и имеет однозначные проекции на координатные плоскости.

Пусть  $Q_{xy}$  – проекция  $Q$  на плоскость  $Oxy$  и  $L_{xy}$  – ограничивающая  $Q_{xy}$  замкнутая линия. Тогда уравнение поверхности  $Q$  мы можем записать в виде

$$z = z(x, y), (x, y) \in Q_{xy},$$

<sup>1</sup>Односвязная поверхность определяется точно также, как и односвязная область на плоскости (глава X, §2).

где  $z(x, y)$  – непрерывно дифференцируемая в области  $Q_{xy}$  функция. Будем также считать для определенности, что вектор нормали к выбранной стороне поверхности образует острый угол с осью  $Oz$  и, значит, он равен

$$\bar{n} = -\partial_x z(x, y)\bar{i} - \partial_y z(x, y)\bar{j} + \bar{k}.$$

Ввиду односвязности поверхности  $Q$  ее проекция  $Q_{xy}$  будет односвязной областью на плоскости. Применим к интегралу

$$I_x = \oint_L a_x(x, y, z)dx = \oint_{L_{xy}} a_x(x, y, z(x, y))dx$$

формулу Грина:

$$I_x = -\iint_{Q_{xy}} (a_x(x, y, z(x, y)))'_y dx dy = -\iint_{Q_{xy}} (\partial_y a_x(x, y, z(x, y)) + \partial_z a_x(x, y, z(x, y))\partial_y z(x, y)) dx dy.$$

Переписав правую часть полученного равенства в виде

$$\iint_{Q_{xy}} (0 \cdot (-\partial_x z(x, y)) + \partial_z a_x(x, y, z(x, y))(-\partial_y z(x, y)) - \partial_y a_x(x, y, z(x, y)) \cdot 1) dx dy = \iint_{Q_{xy}} \bar{c} \cdot \bar{n} dx dy,$$

где  $\bar{c} = \partial_z a_x(x, y, z(x, y))\bar{j} - \partial_y a_x(x, y, z(x, y))\bar{k}$ , мы замечаем, что  $I_x$  представляет собой поверхностный интеграл

$$I_x = \iint_Q \partial_z a_x(x, y, z) dx dz - \partial_y a_x(x, y, z) dx dy.$$

Аналогично

$$I_y = \oint_L a_y(x, y, z) dy = \iint_Q \partial_x a_y(x, y, z) dx dy - \partial_z a_y(x, y, z) dy dz,$$

$$I_z = \oint_L a_z(x, y, z) dz = \iint_Q \partial_y a_z(x, y, z) dy dz - \partial_x a_z(x, y, z) dx dz.$$

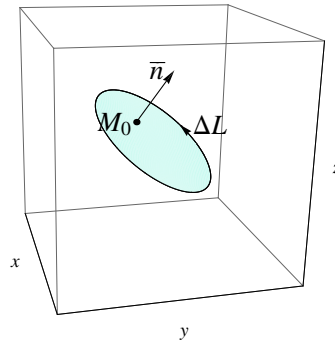
и, следовательно,

$$C(\bar{a}, L) = I_x + I_y + I_z = \iint_Q (\partial_y a_z(x, y, z) - \partial_z a_y(x, y, z)) dy dz +$$

$$+(\partial_z a_x(x, y, z) - \partial_x a_z(x, y, z)) dx dz + (\partial_x a_y(x, y, z) - \partial_y a_x(x, y, z)) dx dy = \Pi(\bar{b}, Q),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Определим *векторную характеристику* вращательной способности векторного поля в точке. Пусть  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – фиксированная точка непрерывно дифференцируемого векторного поля (1) и  $\bar{n}$  – ненулевой вектор в пространстве. Возьмем в плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной вектору  $\bar{n}$ , кусочно-гладкий контур  $\Delta L$  малого диаметра  $\Delta d$ , содержащий внутри себя точку  $M_0$  и ориентированный так, что при наблюдении со стороны вектора  $\bar{n}$  обход по контуру совершается против часовой стрелки. Обозначим через  $\Delta Q$  – часть плоскости  $\Pi$ , ограниченной контуром  $\Delta L$ , а через  $\Delta S$  – площадь поверхности  $\Delta Q$ .



**Определение 5.** Ротором (вихрем) векторного поля (1) в точке  $M_0$  называется вектор

$$\text{rot } \bar{a}(M_0),$$

проекция которого на произвольный вектор  $\bar{n}$  равна

$$\text{Pr}_{\bar{n}} \text{rot } \bar{a}(M_0) = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{C(\bar{a}, \Delta L)}{\Delta S},$$

причем предел в правой части этого равенства предполагается, естественно, существующим и не зависящим от выбора контура  $\Delta L$ .

Поскольку величина

$$\frac{C(\bar{a}, \Delta L)}{\Delta S}$$

представляет собой циркуляцию векторного поля, рассчитанную на единицу площади поверхности, ограниченной контуром  $\Delta L$ , то ротор мы можем рассматривать как *вектор плотности циркуляции* поля в данной точке.

Найдем координаты ротора. Для этого заметим, что по теореме Стокса

$$C(\bar{a}, \Delta L) = \Pi(\bar{b}, \Delta Q) = \iint_{\Delta Q} \text{Pr}_{\bar{n}} \bar{b}(M) dS,$$

где  $\bar{b} = \bar{b}(M)$  – вектор (8). По теореме о среднем для поверхностного интеграла

$$\iint_{\Delta Q} \text{Pr}_{\bar{n}} \bar{b}(M) dS = \text{Pr}_{\bar{n}} \bar{b}(M_1) \Delta S, \quad M_1 \in \Delta Q$$

и, значит,

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{C(\bar{a}, \Delta L)}{\Delta S} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \text{Pr}_{\bar{n}} \bar{b}(M_1) = \text{Pr}_{\bar{n}} \bar{b}(M_0),$$

поскольку  $M_1 \rightarrow M_0$  при  $\Delta d \rightarrow 0$  и векторная функция  $\bar{b}(M)$  непрерывна.

Таким образом, для любого вектора  $\bar{n}$

$$\text{Pr}_{\bar{n}} \text{rot } \bar{a}(M_0) = \text{Pr}_{\bar{n}} \bar{b}(M_0),$$

что возможно только в случае, когда

$$\text{rot } \bar{a}(M_0) = \bar{b}(M_0). \quad (9)$$

Структура вектора (8) позволяет записать ротор как векторное произведение оператора Гамильтона  $\nabla$  и векторного поля  $\bar{a}(M)$ , т. е. в виде

$$\text{rot } \bar{a}(M) = \nabla \times \bar{a}(M),$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{a}(M) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x(M) & a_y(M) & a_z(M) \end{vmatrix} = \\ &= (\partial_y a_z(M) - \partial_z a_y(M)) \bar{i} + (\partial_z a_x(M) - \partial_x a_z(M)) \bar{j} + (\partial_x a_y(M) - \partial_y a_x(M)) \bar{k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Определитель удобно раскрывать по первой строке, причем везде под произведением символа дифференцирования на координату векторного поля следует понимать операцию частного дифференцирования этой координаты по соответствующей переменной.

Пользуясь (9), мы можем переформулировать *теорему Стокса* следующим образом:

$$C(\bar{a}, L) = \Pi(\text{rot } \bar{a}, Q) \quad (\text{формула Стокса}),$$

т. е. циркуляция векторного поля по контуру  $L$  равна потоку ротора этого поля через поверхность  $Q$ , границей которой служит  $L$ .

**Замечание 2.** Формула Стокса дает возможность свести вычисление поверхностного интеграла векторной функции по поверхности в пространстве к вычислению „первообразной“ этой функции на границе поверхности и в этом смысле она является аналогом формулы Ньютона-Лейбница.

Проиллюстрируем понятие ротора на примере произвольного движения твердого тела в пространстве. Зафиксируем в нем точку  $O$ , которую мы будем считать началом системы координат, и пусть  $M(x, y, z)$  – произвольная точка тела. Из кинематики известно, что в любой фиксированный момент времени вектор скорости точки  $M$  равен

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

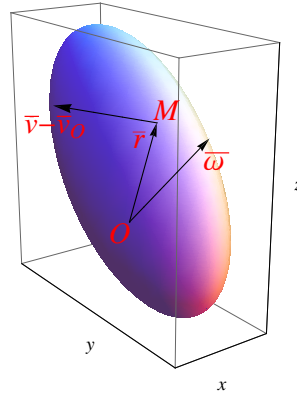
где

$$\bar{v}_O = v_{Ox}\bar{i} + v_{Oy}\bar{j} + v_{Oz}\bar{k}$$

– вектор скорости поступательного движения тела,

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}$$

– вектор угловой скорости,  $\bar{r} = \overline{OM}$  – радиус-вектор точки  $M$ .



Учитывая, что

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (v_{Ox} + \omega_y z - \omega_z y)\bar{i} + (v_{Oy} + \omega_z x - \omega_x z)\bar{j} + (v_{Oz} + \omega_x y - \omega_y x)\bar{k},$$

мы после несложных вычислений по формуле (10) найдем:

$$\text{rot } \bar{v} = 2\bar{\omega}.$$

Таким образом, ротор поля скоростей точек тела равен удвоенной угловой скорости, с чем связано и само название вихря.

**Пример 4.** Найти циркуляцию векторного поля

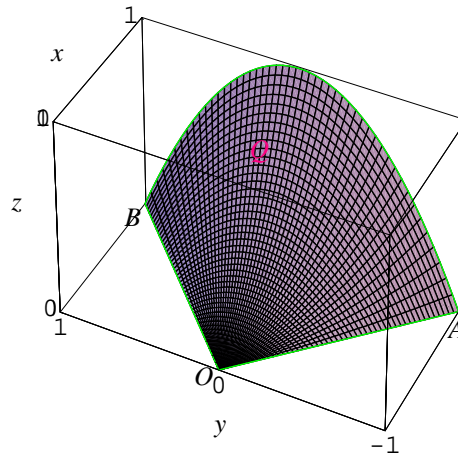
$$\bar{a} = y\bar{i} - z^2\bar{j} + x^3\bar{k}$$

по контуру  $L$ , вырезаемому на гиперболическом параболоиде  $z = x^2 - y^2$  плоскостями  $x=1$  и  $z=0$  и ориентированному в соответствии с положительным направлением оси  $Oz$ , непосредственно и по формуле Стокса.

*Решение.* Вычислим сначала циркуляцию непосредственно, т. е. как криволинейный интеграл

$$C(\bar{a}, L) = \oint_L ydx - z^2dy + x^3dz.$$

Контур  $L$  ограничивает часть  $Q$  седловидной поверхности и состоит из отрезка  $OA$ , дуги параболы  $\widehat{AB}$  и отрезка  $BO$ .



Отрезок  $OA$  имеет уравнения  $z = 0, y = -x, x \in [0, 1]$ . Поэтому

$$I_1 = \int_{OA} ydx - z^2dy + x^3dz = \int_0^1 (-x)dx - 0d(-x) + x^3d0 = -\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - 0 + 0 = -\frac{1}{2}.$$

Для дуги  $\widehat{AB}$   $x = 1, z = 1 - y^2, y \in [-1, 1]$  и, значит,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\widehat{AB}} ydx - z^2dy + x^3dz = \int_{-1}^1 yd1 - (1 - y^2)^2 dy + 1^3d(1 - y^2) = \\ &= 0 - \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy + (1 - y^2)\Big|_{-1}^1 = -\left(y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-1}^1 + 0 = -\frac{16}{15}. \end{aligned}$$

Наконец для отрезка  $BO$ , который задан уравнениями  $z = 0, y = x, x \in [1, 0]$

$$I_3 = \int_{BO} ydx - z^2dy + x^3dz = \int_1^0 xdx - 0dx + x^3d0 = \frac{x^2}{2}\Big|_1^0 - 0 + 0 = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$C(\bar{a}, L) = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{2} - \frac{16}{15} - \frac{1}{2} = -\frac{31}{15}.$$

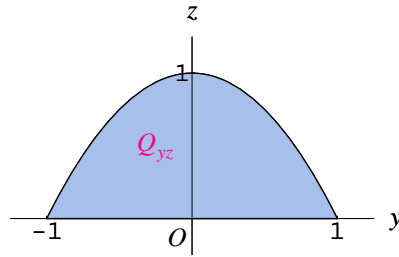
Проведем теперь вычисление циркуляции по формуле Стокса. Поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -z^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ -z^2 & x^3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_z \\ y & x^3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & -z^2 \end{vmatrix} \bar{k} = \\ &= (\partial_y x^3 - \partial_z (-z^2)) \bar{i} - (\partial_x x^3 - \partial_z y) \bar{j} + (\partial_x (-z^2) - \partial_y y) \bar{k} = 2z\bar{i} - 3x^2\bar{j} - \bar{k}, \end{aligned}$$

то

$$\Pi(\operatorname{rot} \bar{a}, Q) = \iint_Q 2zdydz - 3x^2dxdz - dx dy.$$

Поверхность  $Q$  имеет однозначную проекцию  $Q_{yz}$  на плоскость  $Oyz$ , ограниченную линиями  $z = 0, z = 1 - y^2$ .



Учитывая, что нормальный вектор к верхней стороне поверхности образует тупой угол с осью  $Ox$ , получим:

$$I_x = \iint_Q 2z dy dz = - \iint_{Q_{yz}} 2z dy dz = - \int_{-1}^1 dy \int_0^{1-y^2} 2z dz = - \int_{-1}^1 z^2 \Big|_0^{1-y^2} dy = - \int_{-1}^1 (1-y^2)^2 dy = -\frac{16}{15}.$$

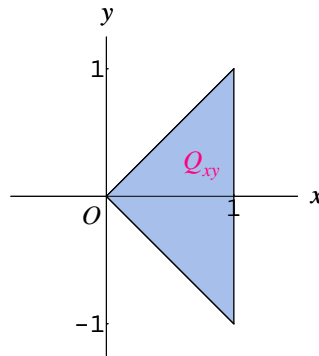
(последний интеграл мы нашли выше при вычислении  $I_2$ ).

В интеграле

$$I_y = \iint_Q -3x^2 dx dz$$

подынтегральная функция не зависит от переменной  $y$ , поэтому, ввиду того, что поверхность  $Q$  симметрична относительно плоскости  $Oxz$ , мы можем утверждать, что  $I_y = 0$ .

Проекцией  $Q_{xy}$  поверхности  $Q$  на координатную плоскость  $Oxy$  является треугольник, ограниченный прямыми  $y = \pm x$ ,  $x = 1$ .



Коль скоро здесь нормальный вектор образует острый угол с осью  $Oz$ , то

$$I_z = \iint_Q -dx dy = - \iint_{Q_{xy}} dx dy = -S(Q_{xy}) = -1.$$

Таким образом,

$$C(\bar{a}, L) = \Pi(\text{rot } \bar{a}, Q) = I_x + I_y + I_z = -\frac{16}{15} + 0 - 1 = -\frac{31}{15}.$$

### §3. Специальные векторные поля и их свойства

В этом параграфе мы изучим несколько векторных полей частного вида, которые встречаются в приложениях.

Пусть

$$\bar{a}(M) = a_x(M)\bar{i} + a_y(M)\bar{j} + a_z(M)\bar{k}, \quad M(x, y, z) \in D \quad (1)$$

– непрерывное векторное поле в области  $D$  пространства.



а) *Потенциальное векторное поле.*

**Определение 1.** Векторное поле (1) называется *потенциальным*, если для него существует непрерывно дифференцируемая функция  $u = u(M)$ ,  $M \in D$  (потенциал или первообразная), градиент которой в любой точке совпадает с вектором поля, т.е.

$$\operatorname{grad} u(M) = \bar{a}(M), M \in D$$

или, что равносильно,

$$u'_x(M) = a_x(M), u'_y(M) = a_y(M), u'_z(M) = a_z(M), M \in D$$

и, значит,

$$du(M) = \bar{a}(M) \cdot d\bar{r}, M \in D, \quad (2)$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки  $M$ .

Заметим сразу, что как и первообразная, потенциал поля определяется с точностью до постоянной. Действительно, если  $u_1(M)$  и  $u_2(M)$  – два потенциала поля, то для функции  $v(M) = u_2(M) - u_1(M)$

$$dv(M) = du_2(M) - du_1(M) = \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} - \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} = 0, M \in D.$$

Следовательно,

$$v(M) = C \iff u_2(M) = u_1(M) + C.$$

Пусть  $M_1$  и  $M_2$  – произвольные точки потенциального поля. Покажем, что *криволинейный интеграл* этого векторного поля по любой кусочно-гладкой кривой  $L$ , соединяющей точки  $M_1$  и  $M_2$  не зависит от  $L$ . Действительно, если

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$$

– параметрические уравнения линии  $L$ , то, обозначив через  $M_t(x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  точку на линии, мы, принимая во внимание (2), получим

$$\int_L \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} = \int_L du(M) = \int_{t_1}^{t_2} du(M_t) = u(M_t) \Big|_{t_1}^{t_2} = u(M_2) - u(M_1) \quad (3)$$

и, следовательно, данный криволинейный интеграл определяется только значениями потенциала в начальной и конечной точках линии  $L$ .

Учитывая формулу (3), криволинейный интеграл потенциального векторного поля по линии, соединяющей точки  $M_1$  и  $M_2$  обозначается по аналогии с определенным интегралом через

$$\int_{M_1}^{M_2} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r}.$$

Из этой же формулы, зафиксировав точку поля  $M_0$  и обозначив  $u(M_0) = C$ , мы найдем выражение для потенциала в любой точке поля

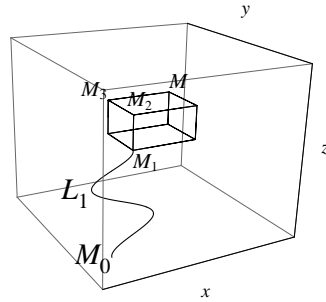
$$u(M) = \int_{M_0}^M \bar{a} \cdot d\bar{r} + C, M \in D.$$

Докажем, что *условие независимости криволинейного интеграла* от пути интегрирования является и *достаточным* для потенциальности векторного поля. Для этого убедимся в том, что функция

$$u(M) = \int_{M_0}^M \bar{a} \cdot d\bar{r}, M \in D, \quad (4)$$

где  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – фиксированная, а  $M(x, y, z)$  – произвольная точка поля, является потенциалом *векторного поля* (1).

Поскольку область является открытым множеством, то в достаточно малой окрестности точки  $M$  найдется точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , для которой отрезок  $M_1M$  является диагональю прямоугольного параллелепипеда со сторонами, параллельными осям координат. Область является также линейно связным множеством, поэтому существует линия  $L_1 \subset D$ , связывающая точки  $M_0$  и  $M_1$ .



Возьмем теперь в качестве контура, соединяющего точки  $M_0$  и  $M$  линию  $L = L_1 \cup M_1M_2M_3M$ , составленную из  $L_1$  и ломаной  $M_1M_2M_3M$ . Тогда

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_L \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{L_1} \bar{a} \cdot d\bar{r} + \int_{M_1M_2M_3M} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \\ &= \int_{L_1} \bar{a} \cdot d\bar{r} + \int_{x_1}^x a_x(s, y, z) ds + \int_{y_1}^y a_y(x_1, s, z) ds + \int_{z_1}^z a_z(x_1, y_1, s) ds \end{aligned}$$

и, значит,

$$u'_x(M) = 0 + \left( \int_{x_1}^x a_x(s, y, z) ds \right)'_x + 0 + 0 = a_x(x, y, z) = a_x(M).$$

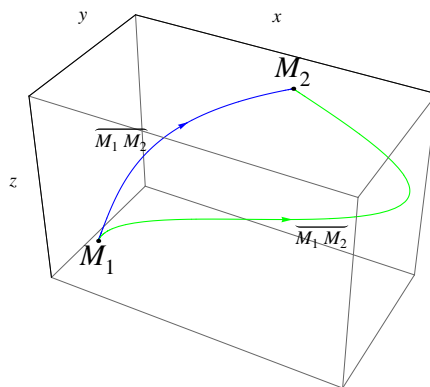
Аналогично, выбирая другие ломаные, составленные из ребер параллелепипеда, мы найдем

$$u'_y(M) = a_y(M), u'_z(M) = a_z(M)$$

и, стало быть, **функция (4) – потенциал** векторного поля (1).

Условие независимости криволинейного интеграла векторного поля от линии интегрирования равносильно равенству нулю циркуляции этого поля по любому замкнутому контуру.

В самом деле, выбрав на кусочно-гладком, замкнутом контуре  $L$ , находящемся в поле, точки  $M_1$  и  $M_2$ , мы можем представить его как объединение двух дуг  $L = \overline{M_1M_2} \cup \widehat{M_2M_1}$



и, следовательно,

$$C(\bar{a}, L) = \oint_L \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{\overline{M_1M_2}} \bar{a} \cdot d\bar{r} + \int_{\widehat{M_2M_1}} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{\overline{M_1M_2}} \bar{a} \cdot d\bar{r} - \int_{\widehat{M_1M_2}} \bar{a} \cdot d\bar{r}.$$

Поэтому, если криволинейный интеграл поля не зависит от пути интегрирования, то

$$\int_{\widehat{M_1 M_2}} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{\widehat{M_1 M_2}} \bar{a} \cdot d\bar{r}$$

и, значит,

$$C(\bar{a}, L) = 0.$$

Обратно, если циркуляция поля по любому замкнутому контуру равна нулю, то

$$0 = C(\bar{a}, L) = \int_{\widehat{M_1 M_2}} \bar{a} \cdot d\bar{r} - \int_{\widehat{M_1 M_2}} \bar{a} \cdot d\bar{r} \iff \int_{\widehat{M_1 M_2}} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{\widehat{M_1 M_2}} \bar{a} \cdot d\bar{r},$$

т. е. криволинейный интеграл векторного поля не зависит от пути интегрирования.

Таким образом, мы можем сказать, что поле (1) потенциально тогда и только тогда, когда его циркуляция по любому кусочно-гладкому, замкнутому контуру, находящемуся в этом поле, равна нулю.

Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, равно как и равенство нулю циркуляции, является трудно проверяемым. Найдем удобный критерий потенциальности непрерывно дифференцируемого векторного поля.

Область  $D$  в пространстве называется односвязной, если для любого замкнутого, кусочно-гладкого контура  $L \subset D$  существует кусочно-гладкая, односвязная поверхность  $Q \subset D$ , краем которой является  $L$ .

**Теорема 1.** Непрерывно дифференцируемое векторное поле (1) является потенциальным в односвязной области  $D$  в том и только в том случае, когда оно безвихревое, т. е.

$$\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \bar{0}, M \in D.$$

**Доказательство.** Предположим сначала, что поле (1) является потенциальным. Для его потенциала  $u(M)$

$$\partial_x u(M) = a_x(M), \partial_y u(M) = a_y(M), \partial_z u(M) = a_z(M), M \in D$$

и, значит, ввиду непрерывной дифференцируемости поля, функция  $u(M)$  дважды непрерывно дифференцируема. Отсюда следует, что при нахождении смешанных частных производных этой функции результат дифференцирования не зависит от порядка, в котором выполняется дифференцирование, т. е.

$$\partial_{xy} u(M) = \partial_{yx} u(M), \partial_{xz} u(M) = \partial_{zx} u(M), \partial_{yz} u(M) = \partial_{zy} u(M), M \in D.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a}(M) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x(M) & a_y(M) & a_z(M) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x u(M) & \partial_y u(M) & \partial_z u(M) \end{vmatrix} = \\ &= (\partial_{yz} u(M) - \partial_{zy} u(M))\bar{i} - (\partial_{xz} u(M) - \partial_{zx} u(M))\bar{j} + (\partial_{xy} u(M) - \partial_{yx} u(M))\bar{k} = \bar{0}, M \in D. \end{aligned}$$

Обратно, пусть поле является безвихревым. Тогда по теореме Стокса, доказанной в предыдущем параграфе, для любого кусочно-гладкого, замкнутого контура  $L \subset D$ , служащего краем кусочно-гладкой, односвязной поверхности  $Q \subset D$

$$C(\bar{a}, L) = \Pi(\operatorname{rot} \bar{a}, Q) = \Pi(\bar{0}, Q) = 0.$$

Следовательно, данное векторное поле потенциально и его потенциалом является функция (4).

**Замечание.** Если область  $D$  является прямоугольным параллелепипедом со сторонами, параллельными осям координат, то при вычислении криволинейного интеграла по формуле (4) в качестве линии интегрирования удобно выбрать ломаную, звенья которой параллельны

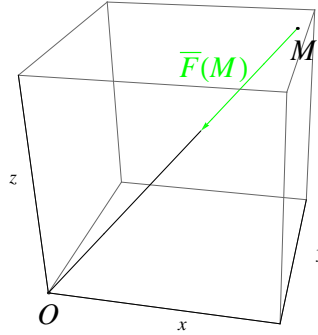
осям координат. В частности, если перемещаться последовательно параллельно осям  $Oz$ ,  $Oy$  и  $Ox$ , соответственно, то для вычисления потенциала мы получим следующую формулу

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x a_x(s, y, z) ds + \int_{y_0}^y a_y(x_0, s, z) ds + \int_{z_0}^z a_z(x_0, y_0, s) ds. \quad (5)$$

Классическим примером потенциального векторного поля является *гравитационное поле*. В соответствии с законом всемирного тяготения материальная точка единичной массы, находящаяся в начале координат, воздействует на другую точку  $M(x, y, z)$  единичной массы с силой  $\bar{F}(M)$ , равной по величине

$$|\bar{F}(M)| = \frac{\gamma}{r^2},$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – длина радиуса-вектора  $\bar{r} = \overline{OM}$  точки  $M$ .



Поскольку сила притяжения действует вдоль радиуса-вектора в направлении от точки  $M$  к началу координат, то

$$\bar{F}(M) = -\frac{\gamma}{r^3} \bar{r} = -\frac{\gamma}{r^3} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}). \quad (6)$$

Рассмотрим векторное поле

$$\bar{a} = \frac{1}{r^3} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}).$$

Для него

$$\partial_x a_y = \partial_x \left( \frac{y}{r^3} \right) = y(-3)r^{-4}(r)'_x = -\frac{3y}{r^4} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{3xy}{r^5}$$

и, значит, благодаря симметрии

$$\partial_y a_x = \partial_x a_y = -\frac{3xy}{r^5}, \quad \partial_x a_z = \partial_z a_x = -\frac{3xz}{r^5}, \quad \partial_y a_z = \partial_z a_y = -\frac{3yz}{r^5}.$$

Поэтому

$$\text{rot } \bar{a} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y)\bar{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\bar{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\bar{k} = \bar{0},$$

следовательно,

$$\text{rot } \bar{F}(M) = -\gamma \text{rot } \bar{a} = \bar{0}$$

и, таким образом, гравитационное поле (6) является потенциальным.

Найдем, пользуясь формулой (5), потенциал гравитационного поля. В качестве стартовой возьмем точку  $M_0(1, 1, 1)$ . Тогда

$$u = -\gamma \left( \int_1^x \frac{s}{\sqrt{(s^2 + y^2 + z^2)^3}} ds + \int_1^y \frac{s}{\sqrt{(1 + s^2 + z^2)^3}} ds + \int_1^z \frac{s}{\sqrt{(2 + s^2)^3}} ds \right).$$

Отсюда, учитывая, что при  $a \in \mathbf{R}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(a + x^2)^3}} dx = \frac{1}{2} \int (a + x^2)^{-3/2} d(a + x^2) = \frac{1}{2} (-2) (a + x^2)^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{a + x^2}} + C,$$

мы получим

$$u = \gamma \left( \frac{1}{\sqrt{s^2 + y^2 + z^2}} \Big|_1^x + \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 + z^2}} \Big|_1^y + \frac{1}{\sqrt{2 + s^2}} \Big|_1^z \right) = \gamma \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Таким образом, потенциалом гравитационного поля является функция

$$u = \frac{\gamma}{r} + C, C \in \mathbf{R}.$$

Если непрерывно дифференцируемое векторное поле задано на плоскости

$$\bar{a}(M) = a_x(M)\bar{i} + a_y(M)\bar{j}, M(x, y) \in D, \quad (7)$$

то его ротором служит вектор

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{a}(M) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x(M) & a_y(M) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (\partial_y 0 - \partial_z a_y(M))\bar{i} + (\partial_z a_x(M) - \partial_x 0)\bar{j} + (\partial_x a_y(M) - \partial_y a_x(M))\bar{k} = (\partial_x a_y(M) - \partial_y a_x(M))\bar{k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{rot } \bar{a}(M) = \bar{0} \iff \partial_x a_y(M) = \partial_y a_x(M), M \in D$$

и, значит, векторное поле (7) на плоскости является потенциальным тогда и только тогда, когда во всех его точках выполняется равенство

$$\partial_x a_y(M) = \partial_y a_x(M).$$

Из формулы (5) следует, что в этом случае потенциал поля (7) может быть найден по формуле

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x a_x(s, y) ds + \int_{y_0}^y a_y(x_0, s) ds.$$

### б) Соленоидное векторное поле.

**Определение 2.** Векторное поле (1) называется соленоидным, если его поток через выбранную сторону любой замкнутой, кусочно-гладкой поверхности  $Q \subset D$ , ограничивающей простое тело  $T \subset D$  равен нулю, т.е.

$$\mathring{\Pi}(\bar{a}, Q) = 0. \quad (8)$$

Обозначив через  $Q^+$  (соответственно,  $Q^-$ ) – часть поверхности  $Q$ , в каждой точке которой векторные линии пересекают поверхность под острым (соответственно, тупым) углом. Тогда для соленоидного векторного поля

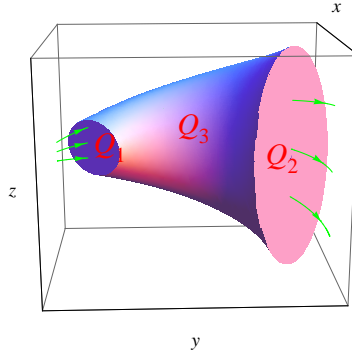
$$\mathring{\Pi}(\bar{a}, Q) = \Pi(\bar{a}, Q^+) + \Pi(\bar{a}, Q^-) = 0$$

и, значит,

$$\Pi(\bar{a}, Q^+) = -\Pi(\bar{a}, Q^-).$$

Таким образом, в соленоидном векторном поле входящий через замкнутую поверхность поток равен исходящему и, стало быть, в нем отсутствуют источники и стоки.

Рассмотрим гладкую векторную трубку в непрерывно дифференцируемом соленоидном векторном поле, т.е. область с гладкой поверхностью, сплошь состоящую из векторных линий поля. Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  – два непересекающихся поперечных сечения трубки, представляющие собой кусочно-гладкие поверхности, которые векторные линии пересекают в единственной точке не касаясь, а  $Q_3$  – боковая поверхность трубки между сечениями.



Поскольку поток данного поля через боковую поверхность векторной трубки равен, очевидно, нулю, то для замкнутой поверхности  $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q) = \overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q_1) + \overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q_2) + \overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q_3) = \overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q_1) + \overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q_2) = 0.$$

Следовательно, *поток соленоидного векторного поля через любое поперечное сечение векторной трубки в выбранном направлении сохраняет постоянную величину*. По этой причине соленоидное векторное поле называют иначе *трубчатым*.

Для непрерывно дифференцируемого векторного поля существует более удобный, чем (8) способ проверки его на соленоидность.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле (1) было соленоидным, необходимо и достаточно, чтобы в любой его точке отсутствовала дивергенция, т.е.*

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = 0, M \in D.$$

В самом деле, если поле соленоидное, то для любой кусочно-гладкой поверхности  $\Delta Q$ , ограничивающей простое тело  $\Delta T$  малого диаметра  $\Delta d$  с объемом  $\Delta V$ , содержащее внутри фиксированную точку  $M \in D$

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q) = 0.$$

Тогда по определению дивергенции

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, \Delta Q)}{\Delta V} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta V} = 0.$$

Обратно, если в любой точке поля дивергенция равна нулю, то для любого замкнутого простого тела  $T \subset D$  с границей  $Q$  по [теореме Гаусса \(§2\)](#)

$$\overset{\circ}{\Pi}(\bar{a}, Q) = \iiint_T \operatorname{div} \bar{a}(M) dV = 0,$$

т.е. поле  $\bar{a}$  соленоидное.

Покажем, что *гравитационное поле (6) является также и соленоидным*. В самом деле, для него

$$\partial_x F_x = -\gamma \left( \frac{x}{r^3} \right)'_x = -\gamma \frac{r^3 - x \cdot 3r^2 r'_x}{r^6} = -\gamma \frac{r - 3x \cdot \frac{x}{r}}{r^4} = -\gamma \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

и, значит, ввиду симметрии

$$\partial_y F_y = -\gamma \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \partial_z F_z = -\gamma \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \bar{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = -\gamma \left( \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right) = -\gamma \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

**с) Гармоническое векторное поле.**

**Определение 3.** *Векторное поле (1) называется гармоническим, если оно является как потенциальным, так и соленоидным.*

Пусть  $u(M)$  – потенциал непрерывно дифференцируемого гармонического векторного поля (1). Тогда

$$\text{grad } u(M) = \bar{a}(M), M \in D.$$

Поскольку поле (1) также и соленоидное, то

$$\text{div grad } u(M) = \text{div } \bar{a}(M) = 0, M \in D$$

или, учитывая, что

$$\text{div grad } u = \partial_x(\partial_x u) + \partial_y(\partial_y u) + \partial_z(\partial_z u) = \partial_{xx}u + \partial_{yy}u + \partial_{zz}u,$$

мы можем записать

$$\partial_{xx}u + \partial_{yy}u + \partial_{zz}u = 0. \quad (9)$$

Таким образом, потенциал гармонического поля является решением уравнения в частных производных (9), которое называется *уравнением Лапласа*. Это уравнение мы можем представить в более компактной форме

$$\Delta u = 0,$$

если использовать символ

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}.$$

Любое решение уравнения Лапласа называется *гармонической функцией*. Следовательно, потенциал гармонического векторного поля является гармонической функцией.

Верно также и обратное утверждение, а именно, поле градиентов гармонической функции является гармоническим векторным полем.

Действительно, если  $u = u(M), M \in D$  – решение уравнения Лапласа, то поле

$$\bar{a}(M) = \text{grad } u(M), M \in D$$

является потенциальным по определению. Кроме того,

$$\text{div } \bar{a}(M) = \text{div grad } u(M) = \Delta u(M) = 0, M \in D$$

и, значит, это поле также и соленоидное.

Выше мы убедились в том, что гравитационное поле является потенциальным и соленоидным и, стало быть, *пространство, в котором мы живем, – гармоническое*.

## ГЛАВА XII. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ

В этой главе, распространив суммирование на бесконечное количество слагаемых, мы придем к такому важному, как в самой математике, так и в ее приложениях понятию, как *ряды*.

### §1. Числовые ряды, их свойства и признаки сходимости

Пусть  $a_n, n \in \mathbf{N}$  – последовательность действительных чисел.

**Определение 1.** *Числовым рядом называется формальная сумма*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

*бесконечного количества слагаемых, которая коротко обозначается через*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

Числа, составляющие ряд, называются его *слагаемыми*. Соответственно,  $a_n, n \in \mathbf{N}$  – *общее слагаемое* ряда.

Приведенное определение ряда нельзя использовать, поскольку мы еще не знаем, что следует понимать под *суммой ряда*. Рассмотрим последовательность его *частичных сумм*

$$A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, \dots, A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \dots$$

**Определение 2.** *Ряд (1) считается сходящимся (расходящимся), если сходится (расходится) последовательность его частичных сумм. Для сходящегося ряда предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \quad (2)$$

*называется суммой ряда.*

Для суммы ряда сохраняется обозначение (1).

**Пример 1.** *Выяснить, при каких действительных  $x$  сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad (3)$$

*составленный из элементов геометрической прогрессии, и найти его сумму.*

*Решение.* Если  $x = 1$ , то, очевидно,  $A_n = n, n \in \mathbf{N}$  и, значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty,$$

т. е. ряд (3) расходится.

При  $x \neq 1$

$$A_n = \sum_{k=1}^n x^{k-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}, n \in \mathbf{N}.$$

Поэтому, если  $|x| < 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x},$$

так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

и, следовательно, ряд (3) сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1 - x}. \quad (4)$$

Если же  $|x| > 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$$



и, стало быть, ряд (3) расходится, поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \infty.$$

Осталось рассмотреть случай  $x = -1$ . Здесь мы имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

для которого частичные суммы  $A_n$  составляют последовательность

$$1, 0, 1, 0, \dots,$$

которая предела не имеет, так как ее подпоследовательности  $A_{2n-1} = 1, A_{2n} = 0, n \in \mathbf{N}$  имеют, очевидно, не равные друг другу пределы 1 и 0, соответственно. Таким образом, при  $x = -1$  ряд (3) расходится.

Следовательно, *ряд геометрической прогрессии (3)* сходится только тогда, когда ее знаменатель по абсолютной величине меньше 1 и сумма этого ряда находится по *формуле (4)*.

Сформулируем простейшие *свойства ряда*, которые следуют из определения его сходимости.

1) *Отбрасывание или добавление конечного числа слагаемых ряда не влияет на характер его сходимости. Эта операция может отразиться только на сумме сходящегося ряда.*

2) *Если ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*сходятся, то сходится также ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

*и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Формально ряд (1) мы можем представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad n \in \mathbf{N} \quad (5)$$

где ряд

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

называется *n-ым остатком* данного ряда. Очевидно, *n-ый остаток* ряда представляет собой *погрешность*, которую мы допускаем, заменив сумму сходящегося ряда *n-ой* частичной суммой.

**Теорема 1.** *Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы его n-ый остаток был бесконечно малым при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Действительно, если ряд (1) сходится, то остаток  $R_n$  как ряд по свойству 1) также сходится при любом натуральном  $n$  и ввиду (5)

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - A_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k - A_n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

Обратно, если остаток бесконечно мал, то как ряд он сходится для каждого натурального  $n$ , а тогда по свойству 1) рядов сходится и ряд (1).

Выясним, какому условию удовлетворяет общее слагаемое сходящегося числового ряда.

**Теорема 2 (необходимый признак сходимости).** Если числовой ряд (1) сходится, то его общее слагаемое бесконечно мало, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (6)$$

В самом деле, коль скоро ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$$

и, значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n - \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1} = A - A = 0.$$

Условие (6) не является, вообще говоря, достаточным для сходимости ряда. Подтверждением сказанному служит

**Пример 2.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

*Решение.* Для этого ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 0$$

и, значит, необходимое условие сходимости (6) выполняется. Тем не менее здесь

$$A_n = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

т.е. данный ряд расходится.

Найдем, пользуясь теоремой 2, одно полезное

**Следствие.** Если предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

общего слагаемого ряда (1) не равен нулю или не существует, то ряд расходится.

Действительно, если бы он сходился, то по теореме 2 выполнялось бы условие (6), что противоречит предположению.

**Пример 3.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{n}.$$

*Решение.* Поскольку  $\sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{n} = \pi \neq 0$$

и, значит, данный ряд расходится.

Найдем зависимость между рядом (1) и несобственным интегралом (глава VII, §4, пункт 1) кусочно-постоянной функции на бесконечном промежутке. Рассмотрим на промежутке  $[1, +\infty)$  функцию

$$a(x) = a_n, x \in [n, n+1), n \in \mathbf{N}. \quad (7)$$

**Теорема 3.** Числовой ряд (1) и несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} a(x)dx \quad (8)$$

сходятся или расходятся одновременно, причем в случае их сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_1^{+\infty} a(x)dx.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $n$  целую часть произвольного числа  $b \geq 1$ . Очевидно,  $0 \leq b - n < 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_1^b a(x)dx &= \int_1^2 a(x)dx + \int_2^3 a(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n a(x)dx + \int_n^b a(x)dx = \\ &= \int_1^2 a_1 dx + \int_2^3 a_2 dx + \dots + \int_{n-1}^n a_{n-1} dx + \int_n^b a_n dx = a_1 x \Big|_1^2 + a_2 x \Big|_2^3 + \dots + a_{n-1} x \Big|_{n-1}^n + a_n x \Big|_n^b = \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n(b - n) = A_{n-1} + a_n(b - n), \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_1^b a(x)dx = A_{n-1} + a_n(b - n). \quad (9)$$

Поэтому, если ряд (1) сходится, то, учитывая (6), мы получим

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} (A_{n-1} + a_n(b - n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1} + 0 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b a(x)dx = \int_1^{+\infty} a(x)dx. \end{aligned}$$

Обратно, если несобственный интеграл (8) сходится, то, выбирая в (9)  $b = n$ , мы найдем

$$\int_1^{+\infty} a(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n a(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Стало быть, сходимость ряда (1) равносильна сходимости несобственного интеграла (8). Отсюда сразу же следует, что, если один из них расходится, то расходится и другой, так как предположив обратное, мы немедленно приходим к противоречию.

Займемся теперь достаточными признаками сходимости для числовых рядов с неотрицательными слагаемыми.

**Теорема 4 (интегральный признак).** Если  $f(x)$  – кусочно-непрерывная, неотрицательная и невозрастающая на полуоси  $[1, +\infty)$  функция, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad (10)$$

и несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \quad (11)$$

сходятся или расходятся одновременно.

Для доказательства свяжем с рядом (10) две кусочно-постоянные функции

$$f_1(x) = f(n+1), f_2(x) = f(n), x \in [n, n+1), n \in \mathbf{N}.$$

По [теореме 3](#) ряд (10) и каждый из несобственных интегралов

$$\int_1^{+\infty} f_1(x)dx, \int_1^{+\infty} f_2(x)dx \quad (12)$$

сходятся или расходятся одновременно. Поскольку

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), x \in [1, +\infty),$$

то по признаку [сравнения для несобственных интегралов](#) ([глава VII, §4, пункт 1](#)) интегралы (12), а, значит, и ряд (10) сходятся или расходятся одновременно с интегралом (11).

**Пример 4.** Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (13)$$

в зависимости от действительного параметра  $\alpha$ .

*Решение.* При  $\alpha \leq 0$  ряд *расходится*, так как, очевидно, для него не выполняется [необходимое условие сходимости](#) (6). При  $\alpha > 0$  применим [интегральный признак](#). Как известно ([глава VII, §4, пункт 1, пример 1](#)), несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится только при  $\alpha > 1$ . Таким образом, ряд (13) *сходится* при  $\alpha > 1$ , а при всех остальных значениях  $\alpha$  он *расходится*.

**Замечание 1.** Ряд (13) часто называют *обобщенным гармоническим*. Название связано с тем, что его частным случаем при  $\alpha = 1$  является *расходящийся гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

**Теорема 5 (признак сравнения).** Пусть для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (14)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (15)$$

с неотрицательными слагаемыми при всех  $n \in \mathbf{N}$  выполняется неравенство

$$a_n \leq b_n. \quad (16)$$

Тогда ряд (14) *сходится*, если *сходящимся* является ряд (15). Если же ряд (14) *расходится*, то *расходится* также и ряд (15).

*Доказательство.* Пусть  $a(x)$  и  $b(x)$  – [функции](#) (7) для рядов (14) и (15), соответственно. Поскольку ввиду (16)

$$a(x) \leq b(x), x \in [1, +\infty)$$

и по [теореме 3](#) ряды (14) и (15) сходятся или расходятся одновременно с несобственными интегралами  $\int_1^{+\infty} a(x)dx$  и  $\int_1^{+\infty} b(x)dx$ , соответственно, то утверждение данной теоремы немедленно следует из упоминавшегося выше признака сравнения для несобственных интегралов.

**Замечание 2.** Сославшись на [свойство 1](#)) числовых рядов, мы можем утверждать, что признак сравнения справедлив также и в случае, когда неравенство (16) выполняется не при всех натуральных  $n$ , а только начиная с некоторого номера  $n_0$ .

**Пример 5.** Исследовать на сходимость ряды

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n^{100}}{\sqrt[3]{2^n + 1}}.$$

*Решение.* а) Рассмотрим функцию  $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$ . Она убывает, так как ее производная равна  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$  и, значит,  $f'(x) < 0$  при  $x > 4$ . Отсюда

$$f(x) < 0 \iff \ln x < \sqrt{x}$$

при  $x \geq 4$ , поскольку  $f(4) = \ln 4 - 2 < 0$ . Следовательно, при всех натуральных  $n \geq 4$

$$\ln n < \sqrt{n} \iff \ln^2 n < n \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln^2 n}.$$

Выше мы выяснили, что гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, поэтому по признаку сравнения *расходящимся является и ряд а).*

б) Поскольку  $2 + \sin n^{100} \leq 3$ ,  $\sqrt[3]{2^n + 1} > 2^{\frac{n}{3}}$  при всех натуральных  $n$ , то

$$\frac{2 + \sin n^{100}}{\sqrt[3]{2^n + 1}} < \frac{3}{2^{\frac{n}{3}}}, n \in \mathbf{N}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^n$$

является сходящимся (пример 1,  $0 < x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < 1$ ). Следовательно, сходится также ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{\frac{n}{3}}},$$

а вместе с ним по признаку сравнения и ряд б).

Для практического использования иногда бывает более удобной другая – предельная форма признака сравнения.

**Теорема 6 (признак сравнения в предельной форме).** Если для рядов (14) и (15) с положительными слагаемыми существует предел

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

и  $0 < L < +\infty$ , то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Для доказательства выберем положительное число  $\varepsilon$  столь малым, чтобы и число  $L - \varepsilon$  было положительным. По определению предела последовательности, начиная с некоторого номера  $n_\varepsilon$  будет выполняться неравенство

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$$

или, что равносильно,

$$(L - \varepsilon)b_n < a_n < (L + \varepsilon)b_n, n > n_\varepsilon.$$

Отсюда по признаку сравнения и следует утверждение теоремы. В самом деле, если ряд (14) сходится, то сходится также и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (L - \varepsilon)b_n,$$

а тогда по свойству 2) рядов сходящимся будет ряд (15). Обратно, если ряд (15) сходится, то сходится также ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (L + \varepsilon)b_n,$$

а вместе с ним и ряд (14).

Аналогично проверяется, что, если один из рядов (14) или (15) расходится, то расходящимся будет и другой.

**Замечание 3.** Если общее слагаемое ряда имеет *степенной рост* на бесконечности, то для исследования на сходимость его следует сравнивать с **обобщенным гармоническим рядом (13)**.

**Пример 6.** Исследовать на сходимость ряды

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ln \frac{\sqrt[3]{n} + 2}{\sqrt[3]{n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} + n}{2n^2 + 5n + 8}.$$

*Решение.* а) Поскольку при  $n \rightarrow \infty$

$$1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} = 2 \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{2n}, \quad \ln \frac{\sqrt[3]{n} + 2}{\sqrt[3]{n}} = \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{2}{\sqrt[3]{n}},$$

то

$$\left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ln \frac{\sqrt[3]{n} + 2}{\sqrt[3]{n}} \sim \frac{1}{2n} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

будучи обобщенным гармоническим с  $\alpha = \frac{4}{3} > 1$ , сходится, то по предельному признаку сравнения *сходится* также и ряд а).

б) Здесь

$$2^{-n} + n \sim n, \quad 2n^2 + 5n + 8 \sim 2n^2$$

при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому

$$\frac{2^{-n} + n}{2n^2 + 5n + 8} \sim \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Поскольку гармонический ряд расходится, то расходится также ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n},$$

а вместе с ним по предельному признаку сравнения *расходящимся является* и ряд б).

Рассмотрим теперь два признака сходимости для рядов с положительными слагаемыми, имеющих *показательный рост* на бесконечности или, иначе говоря, сходящимися или расходящимися со скоростью *геометрической прогрессии*.

**Теорема 7 (признак Даламбера).** Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{17}$$

с положительными слагаемыми существует предел (возможно бесконечный)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Тогда при  $L < 1$  ряд *сходится*, а при  $L > 1$  — *расходится*.

**Доказательство.** В случае  $L < 1$  выберем  $\varepsilon_1 > 0$  столь малым, чтобы  $x_1 = L + \varepsilon_1 < 1$ . По определению предела найдется номер  $n_1$ , начиная с которого

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < x_1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_{n_1+1} &< a_{n_1} x_1, \\ a_{n_1+2} &< a_{n_1+1} x_1 < a_{n_1} x_1^2, \\ &\dots \\ a_{n_1+k} &< a_{n_1+k-1} x_1 < a_{n_1} x_1^k, \\ &\dots \end{aligned}$$

и, значит,

$$a_{n_1+k} < a_{n_1} x_1^k, k \in \mathbf{N}.$$

Поскольку здесь ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_1} x_1^k$$

сходится, то по признаку сравнения сходится также ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_1+k},$$

а вместе с ним и ряд (17).

Аналогично, если  $L > 1$ , то выберем  $\varepsilon_2 > 0$  настолько малым, чтобы  $x_2 = L - \varepsilon_2 > 1$ . Тогда, как и выше, отыщется номер  $n_2$  такой, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > x_2, n \geq n_2,$$

откуда

$$a_{n_2+k} > a_{n_2} x_2^k, k \in \mathbf{N}.$$

В этом случае ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_2} x_2^k$$

расходится, а тогда по признаку сравнения расходится и ряд (17).

**Пример 7.** Исследовать на сходимость ряды

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^{-n}}{n^5 + 2n^3 + 3n + 4}.$$

*Решение.* а) Здесь

$$a_n = \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2(n+1))!},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n!)^2 (n+1)^2}{(2n)!(2n+1)2(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1 \end{aligned}$$

и, следовательно, по признаку Даламбера ряд а) сходится.

б) Поскольку при  $n \rightarrow \infty$

$$2^n + 5^{-n} \sim 2^n, \quad n^5 + 2n^3 + 3n + 4 \sim n^5,$$

то

$$\frac{2^n + 5^{-n}}{n^5 + 2n^3 + 3n + 4} \sim \frac{2^n}{n^5}$$

и, значит, по признаку сравнения ряд б) сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5},$$

для которого

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5} = 2 \cdot 1 = 2 > 1.$$

Стало быть, по признаку Даламбера ряд б) расходится.

**Теорема 8 (признак Коши).** Если для ряда (17) с положительными слагаемыми существует предел (возможно бесконечный)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n},$$

то при  $L < 1$  ряд сходится, а при  $L > 1$  – расходится.

Справедливость этого утверждения проверяется с помощью рассуждений, совершенно аналогичных тем, которые мы использовали выше при доказательстве признака Даламбера.

**Пример 8.** Исследовать на сходимость ряды

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \frac{1}{n} \right)^{n^3}; \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}.$$

*Решение.* а) Воспользуемся признаком Коши:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \cos \frac{1}{n} \right)^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

Здесь возникла неопределенность вида  $1^\infty$ , которую мы раскроем, используя число  $e$  и учитывая, что  $\sin \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n}$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \right)^{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2n}}} \right)^{-2n^2 \sin^2 \frac{1}{2n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n^2 \left( \frac{1}{2n} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \end{aligned}$$

и, следовательно, ряд а) сходится.

б) Здесь по признаку Коши

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{\ln n}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}.$$

При вычислении предела

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$$

возникает неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ , которую мы раскроем с помощью **правила Лопиталья** (глава V, §4):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln^2 x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln^2 n}{n}} = e^0 = 1$$

и, значит,

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty.$$

Таким образом, ряд б) расходится.

**Замечание 4.** Если при использовании признака Даламбера или Коши *соответствующий предел  $L$  окажется равным единице*, то ничего определенного о сходимости ряда мы в этом случае сказать не можем – ряд может как сходиться, так и расходиться. Примером может служить **обобщенный гармонический ряд** (13), для которого при любом  $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\alpha \frac{\ln n}{n}}} = \frac{1}{e^{\alpha \cdot 0}} = 1,$$

а сходится этот ряд, как мы выяснили в **примере 4**, только при  $\alpha > 1$ .



Исследование сходимости *числового ряда общего вида*, т.е. ряда, знак слагаемых которого может меняться, сильно усложняется, так как здесь мы уже не можем использовать признаки сходимости для рядов с положительными слагаемыми. Однако для одного частного случая таких рядов – *знакопередающего ряда* – существует удобный достаточный признак сходимости.

Числовой ряд называется *знакопередающим*, если знак каждого следующего слагаемого ряда меняется на противоположный. Знакопередающий ряд мы в дальнейшем будем записывать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \quad (18)$$

где элементы последовательности  $a_n, n \in \mathbf{N}$  имеют *фиксированный знак*. Для определенности будем считать их *положительными*.

**Теорема 9 (признак Лейбница).** *Знакопередающийся ряд (18) сходится, если*

$$a_n > a_{n+1}, n \in \mathbf{N} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (19)$$

*Иначе говоря, для сходимости знакопередающегося ряда достаточно, чтобы последовательность абсолютных величин слагаемых ряда была убывающей и бесконечно малой.*

Для доказательства рассмотрим последовательность  $A_n, n \in \mathbf{N}$  частичных сумм ряда (18). Учитывая первое из условий (19), мы можем записать неравенства

$$\begin{aligned} A_2 &< A_3 < A_1, \\ A_2 &< A_4 < A_3, \\ &\dots \\ A_{2k} &< A_{2k+1} < A_{2k-1}, \\ A_{2k} &< A_{2k+2} < A_{2k+1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

а тогда и *систему вложенных отрезков*

$$[A_2, A_1] \supset [A_2, A_3] \supset \dots \supset [A_{2k}, A_{2k-1}] \supset [A_{2k}, A_{2k+1}] \supset \dots,$$

которая в соответствии с *принципом вложенных отрезков (глава IV, §2)* имеет общую точку, которую мы обозначим через  $A$ . Длины вложенных отрезков образуют последовательность  $a_n, n \geq 2$ , которая ввиду второго из условий (19) является бесконечно малой. По определению предела последовательности для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $n_\varepsilon$ , начиная с которого  $a_n < \varepsilon$ . Следовательно,

$$|A_n - A| < a_n < \varepsilon, n > n_\varepsilon,$$

что означает сходимость последовательности  $A_n, n \in \mathbf{N}$ , а, значит, и знакопередающегося ряда (18).

**Пример 9.** *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln \ln n}{\ln n}.$$

*Решение.* Проверим условия (19) для этого знакопередающегося ряда. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{\ln \ln x}{\ln x}.$$

Для нее

$$f'(x) = \frac{(\ln \ln x)' \ln x - \ln \ln x (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{1 - \ln \ln x}{x \ln^2 x},$$

поэтому  $f'(x) < 0$  при  $x > e^e$  и, значит, последовательность

$$a_n = f(n) = \frac{\ln \ln n}{\ln n}$$

убывает при  $n > 15$ .

Кроме того, по правилу Лопиталья

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \ln x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Таким образом, оба условия (19) выполняются и, стало быть, данный ряд сходится по признаку Лейбница.

**Замечание 5.** Из доказательства признака Лейбница следует, что при любом натуральном  $n$

$$|A_n - A| < a_{n+1}$$

и, значит, погрешность, которую мы допускаем, заменив сумму знакопередающегося ряда его частичной суммой, не превышает абсолютной величины первого из отброшенных слагаемых. Таким образом, при заданной точности вычислений  $\varepsilon$  суммы ряда (18) при условиях (19), суммирование следует проводить до первого слагаемого, которое по абсолютной величине не будет превосходить  $\varepsilon$ .

В заключение этого параграфа введем, как и для несобственных интегралов в главе VII, §4, понятие абсолютной сходимости числового ряда.

Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его слагаемых, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (20)$$

Точно также, как и для несобственных интегралов (глава VII, §4, пункт 1) мы можем проверить, что из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость. Обратное в общем случае неверно, в чем мы можем убедиться с помощью следующего простого примера.

**Пример 10.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}. \quad (21)$$

в зависимости от действительного параметра  $\alpha$ .

*Решение.* Здесь ряд (20) совпадает с обобщенным гармоническим рядом (13), который сходится только при  $\alpha > 1$  и, значит, для таких значений  $\alpha$  ряд (21) сходится абсолютно. Если  $0 < \alpha \leq 1$ , то ряд (21) сходится, так как для него, очевидно, выполняются оба условия (19) признака Лейбница, а вот абсолютной сходимости в этом случае нет. Наконец, при  $\alpha \leq 0$  ряд (21) расходится, поскольку для него не выполняется необходимое условие сходимости (6).

Если ряд (1) сходится, а ряд (20) расходится, т. е. нет абсолютной сходимости, то данный ряд называется условно сходящимся. Таким образом, ряд (21) условно сходится при  $0 < \alpha \leq 1$ .

## §2. Функциональные ряды. Равномерная сходимость.

### Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Пусть  $a_n(x)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  – последовательность функций, каждая из которых определена на некотором множестве  $X \subseteq \mathbf{R}$ .

**Определение 1.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad (1)$$

рассматриваемый при каждом фиксированном  $x \in X$ , называется функциональным рядом. Совокупность чисел  $x \in D \subseteq X$ , для каждого из которых ряд (1) сходится, называется множеством сходимости данного функционального ряда.

Всюду в дальнейшем в этом параграфе через

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x), \quad n \in \mathbf{N}, x \in X$$

мы будем обозначать *частичную сумму* функционального ряда (1), а через

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), x \in D$$

– его *сумму*.

Примерами функциональных рядов являются *ряд геометрической прогрессии*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

и *обобщенный гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Как мы выяснили в §1, множеством сходимости первого из них является интервал  $(-1, 1)$ , а второго – полуось  $(1, +\infty)$ .

Чтобы иметь возможность уверенно оперировать функциональными рядами введем понятие *равномерной сходимости*.

**Определение 2.** *Функциональный ряд (1) называется равномерно сходящимся на множестве  $D \subseteq X$ , если, во-первых, он сходится в любой точке этого множества и, во-вторых, ряд достигает своей суммы равномерно по всем  $x \in D$ , т.е. для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует номер  $n_\varepsilon$  такой, что неравенство*

$$|A(x) - A_n(x)| < \varepsilon \quad (2)$$

выполняется при любом  $n > n_\varepsilon$  для всех  $x \in D$ .

**Пример 1.** *Убедиться в том, что множеством сходимости функционального ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad (3)$$

является полуось  $(0, +\infty)$ , а на полуоси  $[a, +\infty)$  при любом  $a > 0$  данный ряд сходится равномерно.

*Решение.* Переписав ряд (3) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n,$$

мы замечаем, что он является *рядом геометрической прогрессии* (§1, пример 1) и, следовательно, он сходится при

$$e^{-x} < 1 \iff x \in (0, +\infty).$$

Покажем, что сходимость на этом множестве *не является равномерной*. Для нашего ряда

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kx} = \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}, \quad A(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}},$$

поэтому

$$|A(x) - A_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{1 - e^{-x}}$$

и, следовательно, на последовательности  $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A(x_n) - A_n(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} = +\infty.$$

Отсюда следует, что *неравенство (2)* не может выполняться для всех значений  $x \in (0, +\infty)$  ни при каком  $\varepsilon > 0$ , а это и означает, что равномерной сходимости на множестве  $(0, +\infty)$  нет.

Зафиксируем теперь  $a > 0$ . На полуоси  $[a, +\infty)$

$$e^{-nx} \leq e^{-na}, \quad 1 - e^{-x} \geq 1 - e^{-a},$$

поэтому

$$|A(x) - A_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{1 - e^{-a}}. \quad (4)$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-na}}{1 - e^{-a}} = 0,$$

то для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  отыщется номер  $n_\varepsilon$  такой, что

$$\frac{e^{-na}}{1 - e^{-a}} < \varepsilon$$

при  $n > n_\varepsilon$ , откуда ввиду неравенства (4) следует, что

$$|A(x) - A_n(x)| < \varepsilon, n > n_\varepsilon, x \in [a, +\infty),$$

т. е. *ряд (3) сходится равномерно* на множестве  $[a, +\infty)$ .

Докажем удобный *признак равномерной сходимости* функционального ряда.

**Теорема (признак Вейерштрасса).** Если для *функционального ряда (1)*, в котором все функции  $a_n(x)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  определены на некотором множестве  $D \subseteq X$ , существует сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (5)$$

с положительными слагаемыми такой, что

$$|a_n(x)| \leq b_n, n \in \mathbf{N}, x \in D, \quad (6)$$

то ряд (1) *сходится абсолютно и равномерно* на множестве  $D$ .

Действительно, по *признаку сравнения* для числовых рядов (§1, теорема 5) сходящимся является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|, x \in D$$

и, таким образом, *функциональный ряд (1) сходится абсолютно* на множестве  $D$ . Осталось проверить его *равномерную сходимост*ь на этом множестве. Для этого оценим по абсолютной величине, используя неравенство (6), разность между суммой ряда (1) и его частичной суммой:

$$|A(x) - A_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k, n \in \mathbf{N}, x \in D. \quad (7)$$

Величина  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$  представляет собой  $n$ -ый остаток ряда (5), который по *теореме 1, §1* является бесконечно малым при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  существует номер  $n_\varepsilon$ , начиная с которого  $R_n < \varepsilon$ . Отсюда, благодаря (7),

$$|A(x) - A_n(x)| < \varepsilon, n > n_\varepsilon, x \in D,$$

что и означает равномерную сходимость функционального ряда (1) на множестве  $D$ .

**Пример 2.** Найти множество равномерной сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3(2xn + 3n^{10} \sin x)}{\sqrt[4]{1 - 2n + 16n^4 \sqrt{n}}}.$$

*Решение.* Очевидно,

$$\left| \frac{\cos^3(2xn + 3n^{10} \sin x)}{\sqrt[4]{1 - 2n + 16n^4 \sqrt{n}}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2n + 16n^4 \sqrt{n}}}, n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}.$$

Поскольку при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2n + 16n^4 \sqrt{n}}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{16n^4 \sqrt{n}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8},$$

как **обобщенный гармонический** с показателем  $\alpha = \frac{9}{8} > 1$ , сходится, то по **предельному признаку сравнения** (§1, теорема 6) сходящимся является также ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1-2n+16n^4\sqrt{n}}},$$

а тогда по **признаку Вейерштрасса** данный функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси.

Установим теперь **основные свойства** равномерно сходящихся на отрезке числовой оси функциональных рядов.

1) *Сумма равномерно сходящегося на отрезке  $[c, d]$  функционального ряда (1), составленного из непрерывных функций, также непрерывна на данном отрезке.*

Пусть  $x_0$  – произвольная точка отрезка  $[c, d]$ . По определению непрерывности мы должны убедиться в том, что для суммы ряда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = A(x_0). \quad (8)$$

При любом натуральном  $n$

$$\begin{aligned} |A(x) - A(x_0)| &= \left| \sum_{k=1}^n (a_k(x) - a_k(x_0)) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x_0) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_k(x) - a_k(x_0)| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x_0) \right|. \end{aligned} \quad (9)$$

Зафиксируем произвольное положительное число  $\varepsilon$ . Поскольку ряд (1) равномерно сходится, то при достаточно больших  $n$  при всех  $x \in [c, d]$  выполняется неравенство

$$|A(x) - A_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть  $n_0$  – одно из таких чисел и, значит,

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in [c, d]. \quad (10)$$

Кроме того, ввиду непрерывности функций  $a_n(x)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  найдется число  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что

$$\sum_{k=1}^{n_0} |a_k(x) - a_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (11)$$

для всех  $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ . Из неравенства (9) при  $n = n_0$  и неравенств (10) и (11) следует, что

$$|A(x) - A(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon),$$

что и означает (8), т. е. непрерывность суммы ряда (1) в любой точке отрезка  $[c, d]$ .

2) *Если функциональный ряд (1) непрерывных на отрезке  $[c, d]$  функций сходится равномерно на этом отрезке, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x a_n(z) dz$ ,  $x \in [c, d]$  также равномерно сходится на  $[c, d]$*

и

$$\int_c^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x a_n(z) dz. \quad (12)$$

Таким образом, равномерно сходящийся на отрезке  $[c, d]$  функциональный ряд допускает почленное интегрирование по любому отрезку, содержащемуся в  $[c, d]$ .

В самом деле, по предыдущему свойству сумма ряда непрерывна, а, значит, и интегрируема на отрезке  $[c, d]$ . Далее, ввиду равномерной сходимости данного функционального ряда для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  существует номер  $n_\varepsilon$  такой, что

$$|A(x) - A_n(x)| < \frac{\varepsilon}{d-c}, \quad n > n_\varepsilon, \quad x \in [c, d].$$

Отсюда, благодаря свойствам 1), 3) и 4) определенного интеграла (глава VII, §1),

$$\begin{aligned} & \left| \int_c^x A(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_c^x a_k(z) dz \right| = \left| \int_c^x (A(z) - A_n(z)) dz \right| \leq \\ & \leq \int_c^x |A(z) - A_n(z)| dz \leq \int_c^x \frac{\varepsilon}{d-c} dz = \frac{\varepsilon}{d-c} z \Big|_c^x = \varepsilon \frac{x-c}{d-c}, \quad n > n_\varepsilon, \quad x \in [c, d] \end{aligned}$$

и, поскольку

$$0 \leq \frac{x-c}{d-c} \leq 1, \quad x \in [c, d],$$

то

$$\left| \int_c^x A(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_c^x a_k(z) dz \right| \leq \varepsilon, \quad n > n_\varepsilon, \quad x \in [c, d],$$

что и доказывает равномерную сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x a_n(z) dz, x \in [c, d]$  и формулу интегрирования (12).

3) Пусть сходящийся на отрезке  $[c, d]$  функциональный ряд (1) составлен из непрерывно дифференцируемых на этом отрезке функций и ряд из производных  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$  сходится равномерно на данном отрезке. Тогда исходный ряд также равномерно сходится на отрезке  $[c, d]$ , его сумма непрерывно дифференцируема и

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x), \quad x \in [c, d]. \quad (13)$$

Действительно, по свойству 1) сумма  $B(x)$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$  является непрерывной, а потому и интегрируемой функцией на отрезке  $[c, d]$ . По предыдущему свойству

$$\int_c^x B(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x a'_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \Big|_c^x = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(c)), \quad x \in [c, d], \quad (14)$$

причем ряд в правой части сходится равномерно на отрезке  $[c, d]$ . Отсюда, ввиду сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(c)$ , следует равномерная сходимость ряда (1). Поскольку, благодаря (14),

$$A(x) = A(c) + \int_c^x B(z) dz, \quad x \in [c, d],$$

то по свойству интеграла с переменным верхним пределом (глава VII, §1, свойство 7))

$$A'(x) = B(x), \quad x \in [c, d],$$

т. е. сумма функционального ряда (1) непрерывно дифференцируема на отрезке  $[c, d]$  и имеет место формула дифференцирования (13).

**Замечание.** Из свойств 1) – 3) следует, что над равномерно сходящимися функциональными рядами мы можем выполнять те же операции, что и над обыкновенными конечными суммами функций.

### §3. Степенные ряды и их свойства. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов

Пусть  $x_0$  – фиксированное действительное число.

**Определение.** Степенным рядом с центром в точке  $x_0$  называется функциональный ряд, составленный из целых неотрицательных степеней линейного выражения  $x - x_0$  с действительными коэффициентами, т.е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \quad (1)$$

Степенной ряд с центром в нуле имеет, очевидно, вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2)$$

Поскольку подстановкой  $z = x - x_0$  степенной ряд (1) с центром в точке  $x_0$  сводится к такому же ряду с центром в нуле, то всюду в дальнейшем при изучении свойств степенных рядов мы для удобства будем вести рассуждения для ряда (2).

Выясним структуру множества сходимости степенного ряда.

**Теорема Абеля.** Если степенной ряд (2) сходится в некоторой точке  $x_1 \neq 0$ , то он сходится абсолютно в симметричном относительно нуля интервале  $(-|x_1|, |x_1|)$ , а на любом отрезке  $[-b, b]$ ,  $0 < b < |x_1|$  этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$  сходится, то по необходимому признаку сходимости последовательность  $a_n x_1^n$  бесконечно мала, и, значит (глава IV, §3, пункт 2, свойство 3)), она является ограниченной, т.е. существует положительная константа  $M$  такая, что при всех целых неотрицательных  $n$

$$|a_n x_1^n| < M.$$

Так как при тех же  $n$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n, \quad (3)$$

то при  $x \in (-|x_1|, |x_1|)$

$$\left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$$

и, значит, ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

сходится, а вместе с ним по признаку сравнения (§1, теорема 5) сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|,$$

т.е. ряд (2) сходится абсолютно при  $x \in (-|x_1|, |x_1|)$ .

Если же  $x \in [-b, b]$ ,  $0 < b < |x_1|$ , то как следует из (3)

$$|a_n x^n| \leq M \left( \frac{b}{|x_1|} \right)^n, \quad 0 \leq n \in \mathbf{Z},$$

откуда, учитывая, что ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{b}{|x_1|} \right)^n$$

сходится, поскольку

$$\frac{b}{|x_1|} < 1,$$

мы по **признаку Вейерштрасса (§2)** заключаем, что ряд (2) сходится абсолютно и равномерно на отрезке  $[-b, b]$ .

**Следствие.** *Расходящийся в некоторой точке  $x_2 \neq 0$  степенной ряд (2) расходится и при всех  $x$ , расположенных вне отрезка  $[-|x_2|, |x_2|]$ .*

В самом деле, если бы он сходился в какой-нибудь точке  $x_1$ , такой, что  $|x_1| > |x_2|$ , то по теореме Абеля он сходил бы и при всех  $x$  из интервала  $(-|x_1|, |x_1|)$ , а, значит, и в точке  $x_2$ , что противоречит условию.

Обозначим множество сходимости степенного ряда (2) через  $D$ . Это множество, очевидно, непустое, так как при  $x = 0$  ряд сходится. Пусть

$$R = \sup D \geq 0.$$

Число  $R$  называется *радиусом сходимости степенного ряда*.

Рассмотрим *три случая*, которые здесь возможны.

1)  $R = 0$ . В этом случае  $D = \{0\}$ , так как иначе нашлась бы точка  $x_1 < 0$ , в которой ряд (2) сходил бы, а тогда по теореме Абеля он сходил бы и в интервале  $(x_1, -x_1)$  и, значит, было бы  $R > 0$ , что противоречит условию.

2)  $0 < R < +\infty$ . По определению верхней грани множества для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется положительное число  $x_1 \in D$  такое, что  $R - \varepsilon < x_1 \leq R$  и, стало быть, по теореме Абеля ряд (2) сходится абсолютно в интервале  $(-x_1, x_1)$ . Отсюда следует, что поскольку число  $\varepsilon$  мы можем выбирать произвольно малым, то данный степенной ряд абсолютно сходится в интервале  $(-R, R)$ . В любой точке  $x > R$  ряд (2) расходится, а тогда как утверждает следствие из теоремы Абеля, он расходится и при всех  $x < -R$ . Таким образом, в этом случае *степенной ряд (2) абсолютно сходится внутри симметричного относительно нуля промежутка с граничными точками  $\pm R$ , вне этого промежутка он расходится, а в граничных точках ряд может как сходиться, так и расходиться*.

3)  $R = +\infty$ . Здесь ряд (2) сходится при сколь угодно больших значениях  $x$  и, значит, по теореме Абеля он *абсолютно сходится на всей числовой оси*.

Внутри промежутка сходимости ряд (2) сходится абсолютно, поэтому *для нахождения радиуса сходимости мы можем применить один из признаков сходимости для рядов с неотрицательными слагаемыми*. Если коэффициенты ряда имеют показательный рост на бесконечности, то с этой целью целесообразно использовать **признаки Даламбера** или **Коши (§1)**. Пусть, например, существует предел (конечный или бесконечный)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (4)$$

Тогда, применив признак Даламбера для исследования степенного ряда (2) на абсолютную сходимость, мы получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Поэтому, если  $L = 0$ , то степенной ряд (2) сходится абсолютно при всех действительных  $x$ , т. е. в этом случае  $R = +\infty$ . Если  $0 < L < +\infty$ , то степенной ряд абсолютно сходится при  $L|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{L}$  и, стало быть,  $R = \frac{1}{L}$ . Наконец, если  $L = +\infty$ , то ряд (2), очевидно, сходится только при  $x = 0$  и, значит, здесь  $R = 0$ .

Таким образом, если предел (4) существует, то радиус сходимости степенного ряда (2) вычисляется по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (5)$$



Аналогично, применяя признак Коши, мы получим еще одну формулу

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (6)$$

**Замечание 1.** Очевидно, множеством сходимости **степенного ряда общего вида (1)** является промежуток, симметричный относительно центра  $x_0$  ряда, с граничными точками  $x_0 \pm R$ , где радиус сходимости  $R$  также может быть вычислен по формулам (5) или (6). В граничных точках  $x = x_0 \pm R$  мы получим ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pm R)^n,$$

каждый из которых может как сходиться, так и расходиться. В вырожденном случае множеством сходимости является центр ряда  $x_0$  или вся числовая ось.

**Замечание 2.** На практике для нахождения промежутка сходимости вместо использования формул (5) или (6) более удобно непосредственно применять признаки Даламбера или Коши к ряду, составленному из абсолютных величин данного степенного ряда, как это было сделано выше при доказательстве формулы (5).

**Пример 1.** Найти множества сходимости степенных рядов

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}(x-5)^n}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^5 x^n}{(2n+1)^n}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}(x+10)^n}{(n+2)!}.$$

*Решение.* а) Воспользуемся **признаком Даламбера**:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{3^{n+2}(x-5)^{n+1}}{(n+5)\sqrt[3]{\ln(n+7)}}}{(-1)^n \frac{3^{n+1}(x-5)^n}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}}{(n+5)\sqrt[3]{\ln(n+7)}} |x-5| = \\ &= 3|x-5| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n+5} \sqrt[3]{\frac{\ln(n+6)}{\ln(n+7)}}. \end{aligned}$$

По **правилу Лопиталя (глава V, §4)**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+6)}{\ln(x+7)} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x+6))'}{(\ln(x+7))'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/(x+6)}{1/(x+7)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+7/x}{1+6/x} = 1,$$

поэтому

$$L_1 = 3|x-5| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4/n}{1+5/n} \sqrt[3]{1} = 3|x-5|$$

и, значит, ряд а) абсолютно сходится, если

$$L_1 = 3|x-5| < 1 \iff |x-5| < \frac{1}{3} \iff \frac{14}{3} < x < \frac{16}{3}.$$

Здесь, очевидно,  $R = \frac{1}{3}$ .

Исследуем данный ряд на сходимости в граничных точках. При  $x = \frac{14}{3}$  мы имеем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1} \left(\frac{14}{3} - 5\right)^n}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}}, \quad (7)$$

для исследования которого на сходимости мы применим последовательно **предельный признак сравнения** и **интегральный признак (§1)**. Поскольку, как и выше,  $\ln(n+6) \sim \ln(n+4)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\frac{1}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}} \sim \frac{1}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+4)}}, \quad n \rightarrow \infty$$

и, коль скоро несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)\sqrt[3]{\ln(x+4)}} &= \int_0^{+\infty} (\ln(x+4))^{-\frac{1}{3}} d \ln(x+4) = \frac{3}{2} (\ln(x+4))^{\frac{2}{3}} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \frac{3}{2} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+4))^{\frac{2}{3}} - (\ln 4)^{\frac{2}{3}} \right) = +\infty \end{aligned}$$

расходится, то *расходится* также и ряд (7).

При  $x = \frac{16}{3}$  мы получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}},$$

который *сходится* по **признаку Лейбница** (§1), так как последовательность

$$\frac{3}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}}$$

убывает и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(n+4)\sqrt[3]{\ln(n+6)}} = 0.$$

Таким образом, окончательно, множеством сходимости данного степенного ряда является промежуток

$$\left( \frac{14}{3}, \frac{16}{3} \right].$$

б) Здесь удобно применить **признак Коши**:

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(n+2)^5 x^n}{(2n+1)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^{\frac{5}{n}}}{2n+1} |x|.$$

Так как по **правилу Лопиталья**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x+2))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+2} = 0,$$

то

$$L_2 = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{\ln(n+2)}{n}} \right)^5 \cdot \frac{1}{2n+1} = |x| \cdot 1 \cdot 0 = 0 < 1$$

и, значит, исследуемый степенной ряд абсолютно сходится при всех действительных  $x$ .

с) В этом случае мы также используем **признак Даламбера**:

$$\begin{aligned} L_3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{2(n+1)}(x+10)^{n+1}}{(n+3)!}}{\frac{n^{2n}(x+10)^n}{(n+2)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{2n}} \cdot \frac{(n+2)!}{(n+3)!} \cdot |x+10| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2n}(n+1)^2}{n^{2n}} \cdot \frac{(n+2)!}{(n+2)!(n+3)} \cdot |x+10| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^2 \cdot \frac{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2}{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} \cdot |x+10|. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^2 = e^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2}{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = +\infty,$$

то

$$L_3 = \begin{cases} 0, & x = -10; \\ +\infty, & x \neq -10 \end{cases}$$

и, следовательно, данный степенной ряд сходится только при  $x = -10$ .

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, \quad (8)$$

полученный дифференцированием слагаемых ряда (2). Покажем, что эти ряды имеют общий радиус сходимости. Для этого проведем рассуждения, подобные тем, которые мы использовали выше при доказательстве теоремы Абеля.

Если ряд (2) сходится в некоторой точке  $x_1 \neq 0$ , то из неравенства (3) следует, что

$$|na_n x^{n-1}| \leq \frac{M}{|x_1|} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}$$

и, поскольку при  $x \in (-|x_1|, |x_1|)$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}$$

сходится, в чем нетрудно убедиться с помощью признака Даламбера, то по признаку сравнения (§1) в том же интервале абсолютно сходится и ряд (8).

Если же степенной ряд (2) расходится в точке  $x_2 \neq 0$ , то ряд (8) расходится при всех  $x$  таких, что  $|x| > |x_2|$ . В самом деле, если бы он сходилась в некоторой точке  $x_1$ , для которой  $|x_1| > |x_2|$ , то по теореме Абеля он сходилась бы абсолютно и для всех  $x$  из интервала  $(-|x_1|, |x_1|)$  и, значит, ввиду неравенства

$$|a_n x^n| \leq |na_n x^{n-1}|, \quad n \in \mathbf{N}$$

ряд (2) также абсолютно сходилась бы в том же интервале, содержащем точку  $x_2$ , что противоречит условию.

Совершенно аналогично мы можем убедиться в том, что степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (9)$$

полученный интегрированием слагаемых ряда (2), имеет такой же радиус сходимости.

Из доказанного, учитывая, что степенные ряды (2), (8), (9) равномерно сходятся внутри общего интервала сходимости, мы со ссылкой на свойства 2), 3) равномерно сходящихся функциональных рядов (§2) можем утверждать, что ряд (2) внутри промежутка сходимости мы имеем право почленно дифференцировать и интегрировать произвольное число раз. Это же справедливо, естественно, и для степенного ряда (1).

Рассмотрим теперь очень важные в приложениях ряды Тейлора и Маклорена.

Пусть функция  $f(x)$  определена и дифференцируема произвольное число раз в некотором интервале  $(a, b)$ , содержащем точку  $x_0$ . Тогда в этом интервале при любом натуральном  $n$  функция представляется по формуле Тейлора (глава V, §5, пункт 1) в виде

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (10)$$

где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

– полином Тейлора в точке  $x_0$ ,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x) \quad (11)$$

– остаток формулы Тейлора.

Рассмотрим степенной ряд<sup>1</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (12)$$

<sup>1</sup>Здесь мы для удобства считаем, что  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ ,  $0! = 1$ .

который называется *рядом Тейлора функции*  $f(x)$  в точке  $x_0$ . В частности, если  $x_0 = 0$ , то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (13)$$

называется *рядом Маклорена функции*  $f(x)$ .

Выясним, при каком условии *функция представляется своим рядом Тейлора* в интервале  $(a, b)$ , т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in (a, b).$$

**Теорема 2.** *Функция  $f(x)$  разлагается в свой ряд Тейлора в интервале  $(a, b)$  тогда и только тогда, когда в любой точке интервала остаток формулы Тейлора этой функции бесконечно мал, т. е.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (a, b). \quad (14)$$

Из формулы Тейлора (10) следует, что

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \quad x \in (a, b).$$

Отсюда, учитывая, что полином Тейлора  $P_n(x)$  является, очевидно,  $n$ -ой частичной суммой ряда Тейлора мы предельным переходом при  $n \rightarrow \infty$  и получаем утверждение теоремы.

**Замечание 3.** Из *теоремы Абеля* мы заключаем, что при выполнении условия (14) ряд Тейлора (12), будучи степенным, *сходится абсолютно к функции  $f(x)$  в интервале  $(a, b)$ , а на любом отрезке  $[a_1, b_1]$ ,  $a < a_1 \leq b_1 < b$  сходимость будет еще и равномерной.*

Установим теперь одно *достаточное условие*, при котором функция разлагается в ряд Тейлора в интервале.

**Теорема 3.** *Если все производные функции  $f(x)$  равномерно ограничены в интервале  $(a, b)$ , т. е. для некоторого положительного числа  $M$*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M, \quad n \in \mathbf{N}, x \in (a, b), \quad (15)$$

*то  $f(x)$  представляется в интервале  $(a, b)$  своим рядом Тейлора.*

Для доказательства покажем сначала, что для любого положительного числа  $c$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0. \quad (16)$$

Зафиксируем число  $q \in (0, 1)$  и обозначим через  $n_0$  первое из натуральных чисел  $n$ , для которых  $c/n \leq q$ . Такое число, очевидно, существует. Тогда при всех  $n > n_0$  справедливо неравенство

$$\frac{c^n}{n!} < \frac{c^{n_0}}{n_0!} q^{n-n_0}. \quad (17)$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-n_0} = 0,$$

то для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует натуральное число  $n_\varepsilon$ , такое, что

$$\frac{c^{n_0}}{n_0!} q^{n-n_0} < \varepsilon, \quad n > n_\varepsilon,$$

откуда, ввиду (17)

$$\frac{c^n}{n!} < \varepsilon, \quad n > n_\varepsilon,$$

что и означает (16).

Проверим теперь выполнение условия (14). Воспользовавшись (11) и равномерной ограниченностью производных (15), получим

$$\left| R_n(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in (a, b),$$

откуда, учитывая (16), и следует (14), а, значит, по **теореме 2** функция  $f(x)$  разлагается в ряд Тейлора в интервале  $(a, b)$ .

Покажем, что ни в никакой иной степенной ряд, кроме ряда Тейлора, функция разлагаться не может.

**Теорема 4.** Если в интервале  $(a, b)$ , содержащем точку  $x_0$  функция  $f(x)$  представляется степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (18)$$

то для всех целых неотрицательных  $n$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

т.е. степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

является рядом Тейлора данной функции.

Действительно, из равенства (18) при  $x = x_0$  мы находим  $a_0 = f(x_0)$ . Выше мы отметили, что степенной ряд внутри интервала сходимости можно дифференцировать произвольное число раз. Будем последовательно почленно дифференцировать (18), подставляя в каждое из полученных равенств точку  $x_0$ :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1} \implies a_1 = f'(x_0),$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \implies a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \dots (k-n+1)a_k(x - x_0)^{k-n} \implies a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

Из доказанной теоремы следует, что для разложения данной функции в ряд Тейлора достаточно разложить ее каким-нибудь образом в соответствующий степенной ряд.

В главе V (§5, пункт 2, формулы (1) – (6)) мы нашли разложения некоторых элементарных функций по формуле Маклорена. Найдем, пользуясь ими, разложения тех же функций в ряд Маклорена (13).

Для функции  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ряд Маклорена имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

и поскольку все производные  $f^{(n)}(x) = e^x$ ,  $n \in \mathbf{N}$  равномерно ограничены в любом конечном интервале действительной оси, то по **теореме 3**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Совершенно аналогично мы получим разложения

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Найдем, далее, интервал сходимости ряда Маклорена

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

функции  $(1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $x > -1$ . Радиус сходимости этого ряда мы найдем по формуле (5):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{\alpha}{n}} = 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится (абсолютно) в интервале  $(-1, 1)$ . Обозначим его сумму через  $y(x)$  и покажем, что эта функция в интервале  $(-1, 1)$  является решением линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка

$$(1+x)y' = \alpha y. \quad (19)$$

В самом деле, поскольку степенной ряд мы имеем право дифференцировать внутри интервала сходимости, то

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} n x^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} (1+x)y'(x) &= y'(x) + xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{n!} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{n!} x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{n!} x^{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \left( \frac{\alpha-n}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \right) x^n = \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n = \alpha y(x), \quad x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

в чем и требовалось убедиться. Как показывает непосредственная проверка, функция  $(1+x)^\alpha$  также удовлетворяет дифференциальному уравнению (19). Учитывая, далее, что значения функций  $y(x)$  и  $(1+x)^\alpha$  при  $x = 0$  совпадают (равны 1), мы по теореме существования и единственности решения задачи Коши (глава IX, §1) заключаем, что  $y(x) = (1+x)^\alpha$  и, таким образом,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

В частности, при  $\alpha = -1$  мы получаем уже знакомый нам ряд геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1). \quad (20)$$

Проинтегрируем почленно это равенство:

$$\int_0^x \frac{ds}{1+s} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Покажем, что полученное представление имеет место и при  $x = 1$ . Для этого воспользуемся найденным в §5 главы V разложением функции  $1/(1+x)$  по формуле Маклорена при  $x > -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+c)^{n+2}} x^{n+1}, \quad c \in (0, x).$$

Отсюда после почленного интегрирования мы находим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}} s^n ds$$

и, значит, при  $x = 1$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}} s^n ds.$$

Поскольку  $1+c \geq 1$  при  $0 \leq s \leq 1$ , то

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}} s^n ds \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}} s^n \right| ds \leq \int_0^1 s^n ds = \frac{s^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$  и, стало быть,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Таким образом, справедливо разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]. \quad (21)$$

Заменив здесь  $x$  на  $-x$ , получим

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-1, 1). \quad (22)$$

Вычитая почленно из равенства (21) равенство (22), найдем

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in (-1, 1). \quad (23)$$

В отличие от формул (21) и (22), которые позволяют вычислять с помощью степенных рядов логарифмы чисел из промежутка  $(0, 2]$ , формула (23) дает возможность вычисления логарифмов любых положительных чисел, поскольку множеством значений функции  $\frac{1+x}{1-x}$  в интервале  $(-1, 1)$  является полуось  $(0, +\infty)$ .

Заменим в разложении (20)  $x$  на  $x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1)$$

и проинтегрируем почленно полученное равенство:

$$\int_0^x \frac{ds}{1+s^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Точно также, как и в (21) можно доказать, что найденное разложение справедливо и при  $x = \pm 1$ . Таким образом, окончательно,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

В частности, при  $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Для удобства в использовании сведем все найденные выше разложения в таблицу.

**Таблица разложений некоторых элементарных функций в ряд Маклорена**

- 1)  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbf{R};$
- 2)  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in \mathbf{R};$
- 3)  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbf{R};$
- 4)  $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots =$   
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \alpha \in \mathbf{R}, x \in (-1, 1);$
- 5)  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1);$
- 6)  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1];$
- 7)  $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, x \in (-1, 1);$
- 8)  $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1, 1].$

Пользуясь этой таблицей, мы можем получить разложения и других элементарных функций в ряд Маклорена или Тейлора.

**Пример 2.** Найти разложения в ряд Маклорена функций  $\operatorname{sh} x$  и  $\operatorname{ch} x$ .

*Решение.* Воспользуемся первым из табличных разложений, заменив в нем  $x$  на  $-x$ :

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbf{R}.$$

Тогда

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbf{R}.$$

**Пример 3.** Найти разложения в ряд Тейлора функций

$$\text{a) } \cos^2 x, x_0 = \frac{\pi}{4}; \text{ b) } \frac{1}{x^2 + x - 2}, x_0 = -1.$$

*Решение.* а) Поскольку

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sin \left( \frac{\pi}{2} - 2x \right) \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sin 2 \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right),$$



то, применив второе из табличных разложений, получим

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2(x - \frac{\pi}{4}))^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n-1} \right), x \in \mathbf{R}.$$

b) Так как

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right),$$

то найдем сначала разложения в ряд Тейлора по степеням  $x+1$  каждой из дробей в скобках, воспользовавшись пятым из табличных разложений. Для первой из дробей

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2-(x+1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{x+1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}.$$

Найдем интервал сходимости полученного ряда:

$$-1 < \frac{x+1}{2} < 1 \iff -2 < x+1 < 2 \iff -3 < x < 1.$$

Для второй дроби

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+(x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n, x \in (-2, 0).$$

Тогда для данной функции

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \left( -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) (x+1)^n,$$

$x \in (-2, 0)$ .

**Замечание 4.** Наряду со **степенным рядом (1)** переменной  $x$  мы можем рассматривать и **степенные ряды большего числа переменных**. В частности, **степенным рядом двух переменных  $x$  и  $y$  с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$**  называется функциональный ряд вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} (x-x_0)^m (y-y_0)^n, \quad (24)$$

где  $a_{mn}$  — действительные числа. Для такого степенного ряда справедлив **аналог теоремы Абеля**, из которого следует, что его **множество сходимости симметрично относительно точки  $M_0$**  и в каждой внутренней точке этого множества ряд (24) сходится абсолютно.

Если функция  $f(x, y)$  двух переменных определена и бесконечно дифференцируема в некоторой области  $D$  на плоскости, содержащей точку  $M_0(x_0, y_0)$ , то при определенных условиях она в этой области разлагается в степенной ряд (24), который необходимо является ее **рядом Тейлора**, т. е.

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(M_0)}{n!},$$

где все дифференциалы  $d^n f(M_0)$  рассчитываются для приращений  $x-x_0$  и  $y-y_0$  соответствующих переменных в точке  $M_0$ .

Рассмотрим теперь **основные приложения** степенных рядов.

1) **Приближенное вычисление значений функции.**

Пусть в интервале  $(a, b)$  функция  $f(x)$  представляется своим рядом Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, x \in (a, b) \quad (25)$$

в точке  $x_0 \in (a, b)$ . Поскольку при каждом фиксированном  $x \in (a, b)$  остаток ряда Тейлора бесконечно мал при  $n \rightarrow \infty$ , то для того, чтобы при заданной точности  $\varepsilon > 0$  вычислить значение функции  $f(x)$ , достаточно выбрать  $n$  таким, чтобы остаток ряда

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

был меньше  $\varepsilon$  по абсолютной величине. Тогда

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

с точностью  $\varepsilon$ . Если при данном  $x$  ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям признака Лейбница (§1, теорема 9), то, как отмечалось там же, суммирование при вычислении  $f(x)$  следует проводить до первого слагаемого, которое по абсолютной величине не будет превосходить  $\varepsilon$ .

**Пример 4.** Вычислить а)  $\operatorname{sh} 1$ ; б)  $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

*Решение.* а) Поскольку (пример 2)

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbf{R},$$

то

$$\operatorname{sh} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}.$$

Заметим, далее, что  $(2n-1)! > 10^{n-1}$  при  $n \geq 3$  и, значит,

$$\frac{1}{(2n-1)!} < \frac{1}{10^{n-1}}, \quad n \geq 3.$$

Тогда при  $n \geq 2$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k-1}} = \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{1}{10^{n-1}}$$

и, так как  $\frac{1}{10^{n-1}} < 10^{-6}$  при  $n > 7$ , то

$$\left| \operatorname{sh} 1 - \sum_{n=1}^8 \frac{1}{(2n-1)!} \right| = \sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} 1 \approx \sum_{n=1}^8 \frac{1}{(2n-1)!} = 1,175201$$

с заданной точностью  $\varepsilon$ .

б) Воспользуемся найденным в примере 3 разложением функции  $\cos^2 x$  в ряд Тейлора в точке  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ :

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^{2n-1} \right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Отсюда при  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$  мы имеем

$$\cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \right).$$

Знакочередующийся ряд в правой части данного равенства удовлетворяет условиям признака Лейбница, поэтому, как мы отмечали выше, вычисления достаточно проводить до первого

слагаемого, которое по абсолютной величине окажется меньше  $\varepsilon$ . Поскольку  $\frac{1}{2 \cdot 11!} < 10^{-6}$ , то

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^5 \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\right) = 0,079264$$

с точностью  $\varepsilon$ .

2) *Приближенное вычисление определенного интеграла.*

Предположим, что функция  $f(x)$  разлагается в интервале  $(a, b)$  в ряд Тейлора (25) в точке  $x_0 \in (a, b)$ . Вычислим приближенно с точностью  $\varepsilon > 0$  интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx, \quad x_1 \in (a, b).$$

Поскольку степенной ряд внутри интервала сходимости мы имеем право почленно интегрировать, то

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)n!} (x_1 - x_0)^{n+1}.$$

Далее мы поступаем точно также, как и выше при вычислении приближенного значения функции, т. е. *заменяем числовой ряд* в правой части полученного равенства *подходящей частичной суммой*, для которой соответствующий остаток по абсолютной величине будет меньше заданной точности вычисления  $\varepsilon$ .

**Пример 5.** Вычислить с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$  значение функции<sup>1</sup>

$$F(t) = \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

в точке  $t = 1$ .

*Решение.* Как отмечалось в главе VI, §2, пункт 2 интеграл  $F(t)$  не выражается через элементарные функции. Воспользовавшись *первым из табличных разложений*, мы можем записать

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Тогда

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}$$

и, стало быть,

$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! (2n+1)}.$$

Знакопередающийся ряд в правой части удовлетворяет *условиям признака Лейбница*, поэтому

$$F(1) \approx \sum_{n=0}^6 \frac{(-1)^n}{2^n n! (2n+1)} = 0,855624$$

с погрешностью  $\varepsilon$ , поскольку  $\frac{1}{2^7 7! 15} < 10^{-6}$ .

3) *Решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.*

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

<sup>1</sup>С точностью до константы функция  $F(t)$  совпадает с *функцией ошибок*  $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ , которая широко используется в теории вероятностей и математической статистике.

где правая часть  $f(x, y)$  дифференциального уравнения в некоторой области  $D \ni M_0(x_0, y_0)$  представляется **степенным рядом** (24).

Из общей теории дифференциальных уравнений известно, что решение поставленной задачи Коши существует, единственно и может быть найдено также в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (x - x_0)^n, \quad (26)$$

сходящегося в некотором интервале, содержащем точку  $x_0$ .

Неизвестные коэффициенты ряда могут быть найдены двумя способами. Во-первых, подставляя решение (26) в исходное дифференциальное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях выражения  $x - x_0$  в обеих частях получившегося равенства, мы получим алгебраические уравнения относительно неизвестных коэффициентов  $y_n$ , из которых они и определяются. Второй способ нахождения коэффициентов основан на том, что ряд в правой части равенства (26) является рядом Тейлора искомого решения в точке  $x_0$  и, значит,

$$y_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Производные  $y^{(n)}(x_0)$  мы можем последовательно найти почленным дифференцированием обеих частей данного дифференциального уравнения с подстановкой в полученное на каждом шаге равенство значения  $x_0$  и ранее найденных значений производных в точке  $x_0$ .

Заметим, что в общем случае не всегда удастся найти все коэффициенты разложения (26). Обрывая процесс на каком-нибудь шаге, мы получим приближенное решение поставленной задачи Коши.

**Пример 6.** Найти первые пять отличных от нуля слагаемых разложения решения задачи Коши

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(1) = 1$$

в степенной ряд.

*Решение.* Как следует из (26), искомое решение имеет вид:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4 + \dots \quad (27)$$

Неизвестные коэффициенты мы будем искать вторым из предложенных выше способов. Подстановка значения  $x = 1$  в дифференциальное уравнение дает нам

$$y'(1) = 1^2 + (y(1))^2 = 1 + 1 = 2.$$

Дифференцируя почленно данное дифференциальное уравнение и подставляя в полученное равенство  $x = 1$ , получим:

$$y'' = 2x + 2yy' \implies y''(1) = 2 \cdot 1 + 2y(1)y'(1) = 2 + 4 = 6.$$

Аналогично,

$$y''' = 2 + 2((y')^2 + yy'') \implies y'''(1) = 2 + 2((y'(1))^2 + y(1)y''(1)) = 2 + 2 \cdot 10 = 22;$$

$$y^{IV} = 2(3y'y'' + yy''') \implies y^{IV}(1) = 2(3y'(1)y''(1) + y(1)y'''(1)) = 2 \cdot 58 = 116.$$

Подставив найденные значения производных в (27), получим окончательно

$$y(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{11}{3}(x-1)^3 + \frac{29}{6}(x-1)^4 + \dots$$

#### §4. Ряды Фурье

Ряды Фурье (ряды тригонометрических функций) имеют исключительно важное значение как в самой математике, так и в ее многочисленных приложениях. Это связано с тем, что *ряды Фурье представляют периодические функции*, а периодические процессы часто встречаются в природе и многих областях человеческой деятельности. Например, решения многих задач математической физики, теоретической механики, теоретической электротехники, электросвязи

представляются в виде рядов Фурье. Некоторые из этих задач мы в свое время рассмотрим при изучении основных уравнений математической физики.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые простые факты, касающиеся интегралов периодических, а также четных и нечетных функций.

Напомним, функция  $f(x)$  определенная на всей действительной оси называется *периодической с периодом*  $T > 0$ , если для всех действительных чисел  $x$  выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x).$$

Для краткости мы такую функцию будем называть  *$T$ -периодической*.

Данную  $T$ -периодическую функцию мы всегда будем рассматривать на промежутке длиной в период, причем для симметрии чаще всего на промежутке  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

**Теорема 1.** Если  $T$ -периодическая функция  $f(x)$  кусочно-непрерывна (глава VII, §1) на отрезке длиной в период, то, во-первых, для любых действительных чисел  $a$  и  $b$

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

и, во-вторых, для всякого действительного  $a$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что благодаря кусочной непрерывности функции  $f(x)$  все приведенные выше интегралы существуют.

Для доказательства первого равенства проведем в интеграле его левой части линейную подстановку  $x = z + T$ . Тогда, учитывая, что отрезок  $[a + T, b + T]$  отображается в отрезок  $[a, b]$ ,  $dx = dz$  и функция  $f(x)$  является  $T$ -периодической, мы получим

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(z + T)dz = \int_a^b f(z)dz.$$

Докажем второе равенство. Так как благодаря первому равенству

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx,$$

то

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = \\ &= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \end{aligned}$$

в чем и требовалось убедиться.

Функция  $f(x)$ , определенная на всей действительной оси, называется *четной* (*нечетной*), если

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

**Теорема 2.** Для четной кусочно-непрерывной на любом конечном отрезке числовой оси функции  $f(x)$  при любом действительном  $a$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Для нечетной функции  $f(x)$  с тем же свойством

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Для доказательства этого геометрически очевидного факта заметим, что

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \left| x = -z, dx = -dz \right| = - \int_a^0 f(-x)dx = \int_0^a f(-x)dx.$$

Тогда для четной функции

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx,$$

а для нечетной –

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx,$$

мы и получаем приведенные выше формулы.

Зафиксируем положительное число  $T$  и рассмотрим счетную систему  $T$ -периодических тригонометрических функций

$$1, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \dots, \cos n\omega x, \sin n\omega x, \dots, \quad (1)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Составим теперь ряд из тригонометрических функций (1) с действительными коэффициентами

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x). \quad (2)$$

Если этот ряд сходится на промежутке  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , то его сумма  $S(x)$  представляет собой  $T$ -периодическую функцию, поскольку такой период имеет каждая из тригонометрических функций, составляющих данный ряд.

Поставим теперь обратную задачу, а именно, *при каких условиях заданная  $T$ -периодическая функция  $f(x)$  представляется тригонометрическим рядом (2) и как при этом вычисляются коэффициенты  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbf{N}$  этого ряда.*

Займемся сначала коэффициентами. Для этого заметим прежде всего, что

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega x dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x dx = 0, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin m\omega x \cos n\omega x dx = 0, \quad m, n \in \mathbf{N}; \quad (3)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin m\omega x \sin n\omega x dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos m\omega x \cos n\omega x dx = 0, \quad m, n \in \mathbf{N}, \quad m \neq n.$$

Справедливость всех этих равенств легко проверяется. Докажем, например, второе из них. Если  $m \neq n$ , то

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin m\omega x \cos n\omega x dx &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sin(m-n)\omega x + \sin(m+n)\omega x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{(m-n)\omega} \cos(m-n)\omega x + \frac{1}{(m+n)\omega} \cos(m+n)\omega x \right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Если же  $m = n$ , то

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega x \cos n\omega x dx = \frac{1}{n\omega} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega x d \sin n\omega x = \frac{1}{2n\omega} \sin^2 n\omega x \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0.$$

Пусть  $T$ -периодическая функция  $f(x)$  представляется тригонометрическим рядом (2), т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \quad x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad (4)$$

и она по своим свойствам допускает почленное интегрирование по отрезку  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  ряда в правой части данного равенства, а также рядов, полученных из него умножением на функции  $\cos m\omega x$ ,  $\sin m\omega x$ ,  $m \in \mathbf{N}$  (как мы установили в §2 данной главы это будет иметь место, например, если ряд (2) сходится на отрезке  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  равномерно). Выполним интегрирование в равенстве (4), учитывая первое из равенств (3):

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x dx + b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega x dx \right) = \frac{a_0}{2} T.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx.$$

Умножим, далее, обе части равенства (4) на функцию  $\cos m\omega x$ ,  $m \in \mathbf{N}$  и проведем затем интегрирование, принимая во внимание равенства (3):

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos m\omega x dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos m\omega x dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos m\omega x \cos n\omega x dx + \right. \\ &\left. + b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega x \cos m\omega x dx \right) = a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 m\omega x dx = \frac{a_m}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1 + \cos 2m\omega x) dx = \frac{a_m}{2} T. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos m\omega x dx.$$

Аналогичные вычисления приводят к формуле

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin m\omega x dx, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Таким образом, нами доказана следующая

**Теорема 3.** Если  $T$ -периодическая функция  $f(x)$  разлагается в промежутке  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  в тригонометрический ряд (2) и этот ряд, а также ряды, полученные из него умножением на функции  $\cos m\omega x$ ,  $\sin m\omega x$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , допускают почленное интегрирование по указанному промежутку, то коэффициенты ряда вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x dx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (5)$$

Тригонометрический ряд (2), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5), называется рядом Фурье функции  $f(x)$ .

Из проведенных выше рассуждений следует, что представление функции, удовлетворяющей условиям теоремы 3, тригонометрическим рядом (2) единственно, причем он является рядом Фурье данной функции.

Сформулируем теперь условия, при которых периодическая функция представляется своим рядом Фурье. Исследование сходимости ряда Фурье весьма сложно и связано с кропотливым исследованием его частичной суммы. Мы приведем все нижеследующие утверждения без доказательства, введя предварительно необходимые определения.

Функция  $f(x)$ , определенная на отрезке  $[a, b]$ , называется кусочно-монотонной, если данный отрезок можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция является монотонной.

**Теорема 4 (признак Дирихле).** Если  $T$ -периодическая функция  $f(x)$  кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна на отрезке  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , то ее ряд Фурье в любой точке  $x \in \mathbf{R}$  сходится к сумме

$$\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)),$$

т.е. в каждой точке непрерывности сумма ряда Фурье равна значению функции в этой точке, а в каждой точке разрыва – среднему арифметическому левостороннего и правостороннего предельных значений функции. На любом отрезке непрерывности функции  $f(x)$  ряд Фурье сходится к ней равномерно.

Аналогичное утверждение имеет место и для кусочно-дифференцируемых функций.

Функция  $f(x)$ , определенная на отрезке  $[a, b]$ , называется кусочно-дифференцируемой, если данный отрезок мы можем разбить на конечное число промежутков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах имеет не только конечные предельные значения, но и односторонние производные, при условии замены на этих концах значений функции указанными предельными значениями.

**Теорема 5.** Ряд Фурье  $T$ -периодической, кусочно-дифференцируемой на отрезке  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  функции  $f(x)$  сходится при любом действительном  $x \in \mathbf{R}$  к сумме

$$\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)).$$

На любом отрезке числовой оси, где функция  $f(x)$  дифференцируема и ее производная  $f'(x)$  ограничена, ряд Фурье сходится к данной функции равномерно.

Из этих теорем, в частности, следует, что ряд Фурье позволяет получить единое аналитическое представление для „склеенных“ функций, имеющих на разных промежутках различные аналитические выражения.

Частным случаем, встречающимся в приложениях, являются  $2\pi$ -периодические функции. Если  $2\pi$ -периодическая функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям одной из сформулированных



выше теорем, то в любой точке непрерывности функции

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

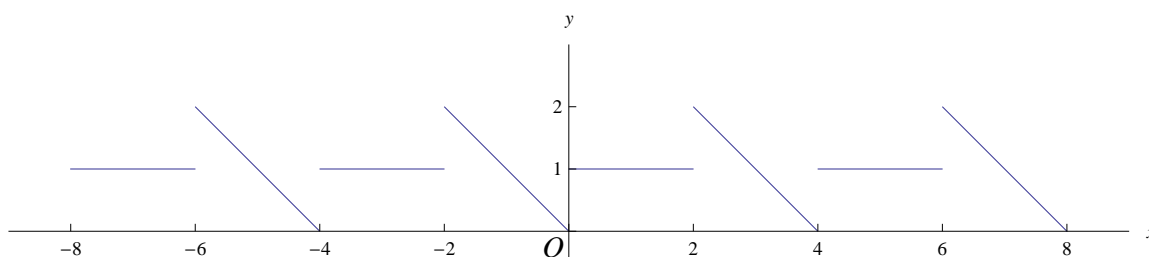
В каждой точке разрыва функции

$$\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

**Пример 1.** Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-2, 0), \\ 1, & x \in [0, 2). \end{cases}$$

*Решение.* График этой 4-периодической функции имеет вид:



Данная функция, очевидно, кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна, поэтому по [признаку Дирихле](#) она разлагается в ряд Фурье. Найдем коэффициенты ряда по [формулам \(5\)](#), разбивая каждый из интегралов на сумму двух по соответствующим отрезкам.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^2 1 dx \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + x \Big|_0^2 \right) = 2.$$

При нахождении коэффициентов  $a_n, b_n, n \in \mathbf{N}$  мы будем использовать метод интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 -x \cos \frac{\pi n}{2} x dx + \int_0^2 1 \cos \frac{\pi n}{2} x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{\pi n} \int_{-2}^0 x d \sin \frac{\pi n}{2} x + \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} x \Big|_0^2 \right) = -\frac{1}{\pi n} \left( x \sin \frac{\pi n}{2} x \Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 \sin \frac{\pi n}{2} x dx \right) = \\ &= -\frac{2}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n}{2} x \Big|_{-2}^0 = -\frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2 (2m-1)^2}, & \text{если } n = 2m-1; \\ 0, & \text{если } n = 2m, m \in \mathbf{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 -x \sin \frac{\pi n}{2} x dx + \int_0^2 1 \sin \frac{\pi n}{2} x dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi n} \int_{-2}^0 x d \cos \frac{\pi n}{2} x - \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} x \Big|_0^2 \right) = \frac{1}{\pi n} \left( x \cos \frac{\pi n}{2} x \Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 \cos \frac{\pi n}{2} x dx - (-1)^n + 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi n} \left( 2 \cdot (-1)^n - \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} x \Big|_{-2}^0 - (-1)^n + 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi n} ((-1)^n + 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2m - 1; \\ \frac{1}{\pi m}, & \text{если } n = 2m, m \in \mathbf{N}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Осталось записать [разложение \(4\)](#) данной функции в ряд Фурье:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2} \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x + \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \right)$$

во всех точках непрерывности. В точках разрыва  $x = \pm 2$  сумма ряда Фурье равна

$$\frac{1}{2}(f(-2-0) + f(-2+0)) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2},$$

а в точке  $x = 0$  она равна

$$\frac{1}{2}(f(-0) + f(+0)) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}.$$

Поскольку ряд Фурье данной функции в точке  $x = 0$  имеет вид

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2},$$

то из уравнения

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2} = \frac{1}{2}$$

мы находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Учитывая далее, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

мы получаем

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

и, значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \text{ряд Эйлера.}$$

Для четной или нечетной функции ряд Фурье упрощается. Пусть, например,  $T$ -периодическая функция  $f(x)$  является четной и удовлетворяет условиям одной из [теорем 4](#) или [5](#). Тогда, учитывая, что при любом натуральном  $n$  функция  $f(x) \cos n\omega x$  является, очевидно,

четной, а функция  $f(x) \sin n\omega x$  – нечетной, мы, воспользовавшись теоремой 2 и формулами (5), получим:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x dx = 0.$$

Таким образом, четная  $T$ -периодическая функция раскладывается в ряд Фурье по косинусам, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x,$$

где

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx, \quad n \in \mathbf{N},$$

во всех точках непрерывности функции.

Аналогично мы можем убедиться в том, что нечетная  $T$ -периодическая функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условиям одной из теорем 4 или 5, представляется во всех точках непрерывности рядом Фурье по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x, \quad (6)$$

где

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x dx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (7)$$

Если функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[0, l]$ , то мы можем разложить ее в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам. Для этого достаточно доопределить ее на симметричном интервале  $(-l, 0)$  соответственно четным или нечетным образом и затем периодически продолжить на всю числовую ось, превратив ее тем самым в  $2l$ -периодическую функцию. При изучении основных уравнений математической физики мы будем использовать разложение таким образом заданной функции в ряд Фурье по синусам. Запишем, следуя (6) – (7), конкретный вид этого разложения, учитывая, что здесь  $T = 2l$  и, значит,  $\omega = \frac{\pi}{l}$ :

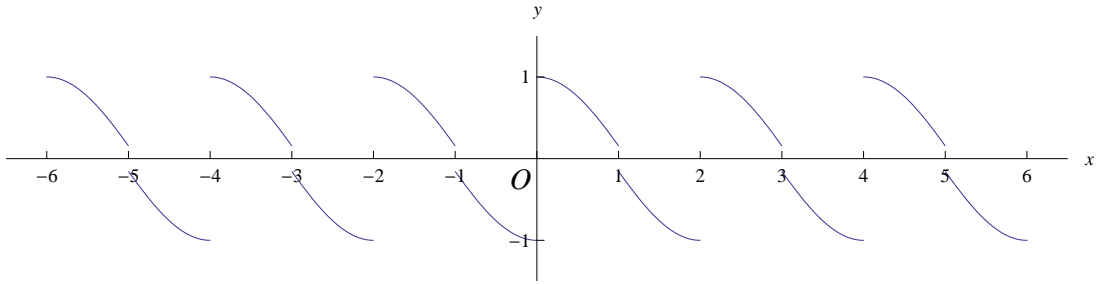
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (8)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (9)$$

**Пример 2.** Разложить в ряд Фурье по синусам функцию  $f(x) = \cos \sqrt{2}x$ ,  $x \in [0, 1]$ .

*Решение.* Доопределив эту функцию в интервале  $(-1, 0)$  нечетным образом и затем периодически продолжив ее на всю числовую ось, мы получим нечетную  $2$ -периодическую функцию, график которой имеет вид:



Коэффициенты разложения (8) этой функции в ряд Фурье мы найдем по формулам (9) при  $l = 1$ :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 \cos \sqrt{2}x \sin \pi n x dx = \int_0^1 \left( \sin \left( \pi n - \sqrt{2} \right) x + \sin \left( \pi n + \sqrt{2} \right) x \right) dx = \\ &= - \left( \frac{\cos \left( \pi n - \sqrt{2} \right) x}{\pi n - \sqrt{2}} + \frac{\cos \left( \pi n + \sqrt{2} \right) x}{\pi n + \sqrt{2}} \right) \Big|_0^1 = - \left( \frac{\cos \left( \pi n - \sqrt{2} \right)}{\pi n - \sqrt{2}} + \frac{\cos \left( \pi n + \sqrt{2} \right)}{\pi n + \sqrt{2}} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi n - \sqrt{2}} + \frac{1}{\pi n + \sqrt{2}} = \frac{2\pi n \left( 1 - (-1)^n \cos \sqrt{2} \right)}{\pi^2 n^2 - 2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\cos \sqrt{2}x = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left( 1 - (-1)^n \cos \sqrt{2} \right)}{\pi^2 n^2 - 2} \sin \pi n x, \quad x \in (0, 1).$$

В точках  $x = 0$ ,  $x = 1$  сумма ряда Фурье данной функции, очевидно, равна 0.

Обсудим, наконец, возможность разложения в ряд Фурье на некотором промежутке произвольной, вообще говоря, непериодической функции. Пусть функция  $f(x)$  на отрезке  $[x_0, x_0 + T]$ ,  $T > 0$  своей области определения кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна или кусочно-дифференцируема. Распространим ее периодически с промежутка  $[x_0, x_0 + T)$  на всю числовую ось. В результате мы получим  $T$ -периодическую функцию, совпадающую с данной на указанном промежутке. Поскольку эта функция удовлетворяет условиям теорем 4 или 5, то она разлагается в промежутке  $[x_0, x_0 + T)$  в ряд Фурье (2), причем по теореме 1 при вычислении коэффициентов ряда мы можем интегрировать не по отрезку  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , а по отрезку  $[x_0, x_0 + T]$  и, таким образом, во всех точках непрерывности функции в промежутке  $[x_0, x_0 + T)$

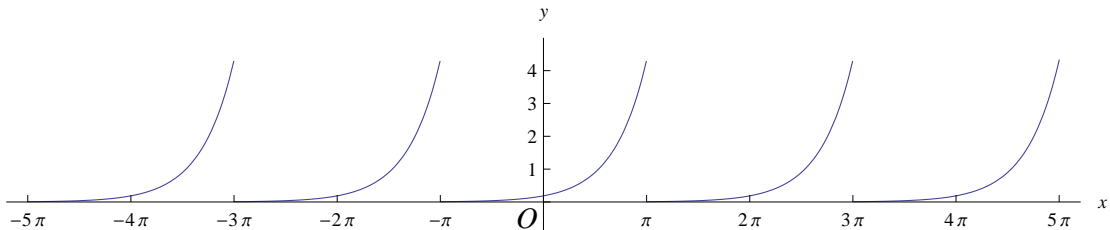
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos n\omega x dx; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin n\omega x dx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (10)$$

**Пример 3.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = 100e^x$  в промежутке  $[-3\pi, -\pi]$ .

*Решение.* Периодически продолжив функцию  $f(x)$  с промежутка  $[-3\pi, -\pi)$  на всю числовую ось, мы получим  $2\pi$ -периодическую функцию, совпадающую с данной на этом промежутке.



Коэффициенты ряда Фурье мы найдем по формулам (10).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-3\pi}^{-\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-3\pi}^{-\pi} 100e^x dx = \frac{100(e^{-\pi} - e^{-3\pi})}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-3\pi}^{-\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{100}{\pi} \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-3\pi}^{-\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{100}{\pi} \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x \sin nxdx.$$

Каждый из этих двух интегралов мы найдем двойным интегрированием по частям.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x \cos nxdx = \int_{-3\pi}^{-\pi} \cos nxd e^x = e^x \cos nx \Big|_{-3\pi}^{-\pi} - \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x d \cos nx = \\ &= (-1)^n (e^{-\pi} - e^{-3\pi}) + n \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x \sin nxdx = (-1)^n (e^{-\pi} - e^{-3\pi}) + n \int_{-3\pi}^{-\pi} \sin nxd e^x = \\ &= (-1)^n (e^{-\pi} - e^{-3\pi}) + n \left( e^x \sin nx \Big|_{-3\pi}^{-\pi} - \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x d \sin nx \right) = \\ &= (-1)^n (e^{-\pi} - e^{-3\pi}) - n^2 \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x \cos nxdx = (-1)^n (e^{-\pi} - e^{-3\pi}) - n^2 I_1. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$I_1 = \frac{(-1)^n (e^{-\pi} - e^{-3\pi})}{1 + n^2}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x \sin nxdx = \int_{-3\pi}^{-\pi} \sin nxd e^x = e^x \sin nx \Big|_{-3\pi}^{-\pi} - \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x d \sin nx = \\ &= -n \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x \cos nxdx = -n \int_{-3\pi}^{-\pi} \cos nxd e^x = -n \left( e^x \cos nx \Big|_{-3\pi}^{-\pi} - \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x d \cos nx \right) = \\ &= -n(-1)^n (e^{-\pi} - e^{-3\pi}) - n^2 \int_{-3\pi}^{-\pi} e^x \sin nxdx = (-1)^{n+1} n (e^{-\pi} - e^{-3\pi}) - n^2 I_2, \end{aligned}$$

и, значит,

$$I_2 = \frac{(-1)^{n+1} n (e^{-\pi} - e^{-3\pi})}{1 + n^2}.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{100}{\pi} I_1 = \frac{(-1)^n 100 (e^{-\pi} - e^{-3\pi})}{\pi(1 + n^2)}, \quad b_n = \frac{100}{\pi} I_2 = \frac{(-1)^{n+1} 100 n (e^{-\pi} - e^{-3\pi})}{\pi(1 + n^2)}$$

и, стало быть, искомое разложение имеет вид:

$$e^x = \frac{100(e^{-\pi} - e^{-3\pi})}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right), \quad x \in (-3\pi, -\pi).$$

В точках  $x = -3\pi, x = -\pi$  сумма ряда Фурье равна  $50(e^{-\pi} + e^{-3\pi})$ .

## ГЛАВА XIII. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В данной главе мы изучим основы теории аналитических функций комплексной переменной, находящей многочисленные приложения как в самой математике, так и в ее приложениях, таких, например, как теоретическая физика, аэро- и гидродинамика, теория упругости.

### §1. Предел функции комплексной переменной. Непрерывность

**Определение 1.** *Закономерность, по которой каждому комплексному числу  $z$  из множества  $D$  на комплексной плоскости ставится в соответствие по крайней мере одно комплексное число  $w = f(z)$ , называется функцией комплексной переменной, определенной на множестве  $D$ .*

Если каждому  $z \in D$  соответствует *единственное значение*  $w$ , то функция  $f(z)$  называется *однозначной*, иначе – *многозначной*. Например, функция  $w = z^n$  является однозначной, а вот функция  $w = \sqrt[n]{z}$ ,  $n \geq 2$  – многозначной, а точнее,  $n$ -значной, поскольку мы установили в [главе V, §8](#), что каждому ненулевому комплексному числу  $z$  соответствует  $n$  значений корня  $n$ -ой степени из этого числа.

Всюду в дальнейшем в этой главе, если это не оговаривается особо, мы будем рассматривать *однозначные* функции комплексной переменной.

Записав комплексное число  $z$  в алгебраической форме  $z = x + yi$  и выделив в выражении для функции  $w = f(z) = f(x + yi)$  действительную и мнимую части, мы можем записать ее в виде

$$w = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1)$$

где  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  – действительные функции действительных переменных  $x, y$ . Обратный переход мы можем осуществить с помощью очевидных формул:

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (2)$$

**Пример 1.** а) Выделить действительную и мнимую части функции  $w = iz^3 - 2z^2 + 3z - 4i$ ;  
 б) записать функцию комплексной переменной  $w = \frac{2xy + (x^2 - y^2)i}{(x^2 + y^2)^2}$  как функцию переменной  $z = x + yi$ .

*Решение.* а) Подставляя  $z = x + yi$  в выражение для функции  $w$ , мы получим:

$$\begin{aligned} w &= i(x + yi)^3 - 2(x + yi)^2 + 3(x + yi) - 4i = \\ &= i(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) - 2(x^2 + 2xyi - y^2) + 3(x + yi) - 4i = \\ &= -3x^2y + y^3 - 2(x^2 - y^2) + 3x + (x^3 - 3xy^2 - 4xy + 3y - 4)i. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно,

$$w = -3x^2y + y^3 - 2(x^2 - y^2) + 3x + (x^3 - 3xy^2 - 4xy + 3y - 4)i.$$

б) Воспользуемся формулами (2). Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned} xy &= \frac{1}{4i}(z^2 - \bar{z}^2), \quad x^2 - y^2 = \frac{1}{4}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + \frac{1}{4}(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) = \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2), \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{4}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) - \frac{1}{4}(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) = z\bar{z}, \end{aligned}$$

мы найдем

$$w = \frac{2 \cdot \frac{1}{4i}(z^2 - \bar{z}^2) + \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2)i}{(z\bar{z})^2} = \frac{-\frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) + \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2)i}{(z\bar{z})^2} = \frac{i\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2} = \frac{i}{z^2},$$

т. е.

$$w = \frac{i}{z^2}.$$

Введем теперь понятие *предела функции комплексной переменной* в точке. Здесь и в дальнейшем нам будет удобно *ассоциировать комплексные числа с точками на комплексной плоскости* и, значит, пользоваться терминологией, которую мы использовали в [главах VIII и X](#) для

некоторых множеств и линий на плоскости: *окрестность, проколота оокрестность, область, простая кривая* и т. д.

Пусть функция  $f(z)$  определена в некоторой проколота оокрестности  $\dot{U}(z_0)$  точки  $z_0$ .

**Определение 2.** *Комплексное число  $w_0$  называется пределом функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  отыщется проколота  $\delta_\varepsilon$ -окрестность  $\dot{U}(\delta_\varepsilon, z_0) \subset \dot{U}(z_0)$  точки  $z_0$ , для всех точек  $z$  которой соответствующие значения функции  $f(z)$  принадлежат  $\varepsilon$ -окрестности  $U(\varepsilon, w_0)$  точки  $w_0$ .*

Для этого предела сохраняется привычное обозначение  $w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

Учитывая, что  $\varepsilon$ -окрестность точки  $z_0$  на комплексной плоскости представляет собой множество внутренних точек круга радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $z_0$  и задается это множество в комплексной форме неравенством

$$|z - z_0| < \varepsilon,$$

то мы можем переформулировать определение предела следующим образом:  $w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что для всех комплексных чисел  $z$ , удовлетворяющих условию  $0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon$ , выполняется неравенство  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ .

Совершенно аналогично мы можем ввести определение *конечного предела в бесконечно удаленной точке* и *бесконечного предела*. Например, если функция  $f(z)$  определена вне некоторого круга (мы будем говорить, в окрестности бесконечно удаленной точки), то комплексное число  $w_0$  является пределом функции  $f(z)$  в бесконечно удаленной точке, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $M_\varepsilon > 0$  такое, что как только  $|z| > M_\varepsilon$ , то  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ . Обозначается этот предел через  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ .

Из определения предела следует, что функция  $f(z)$  стремится к своему предельному значению  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  независимо от того по какой линии на комплексной плоскости точка  $z$  приближается к точке  $z_0$ . Отсюда вытекает, что, предел не существует, если мы укажем две линии, вдоль которых предельные значения функции будут различными.

Приведем простейшие примеры.

$$1) \lim_{z \rightarrow z_0} c = c, c \in \mathbb{C}.$$

Это вполне очевидно, так как здесь неравенство

$$|f(z) - w_0| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

выполняется всегда при любом  $\varepsilon > 0$ .

$$2) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} = 0, n \in \mathbb{N}.$$

Для этой функции неравенство

$$|f(z) - w_0| = \left| \frac{1}{z^n} - 0 \right| = \frac{1}{|z|^n} < \varepsilon$$

при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$  выполняется при  $|z|^n > \frac{1}{\varepsilon} \iff |z| > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ , что и доказывает данное предельное равенство.

Приведенное выше определение предела функции комплексной переменной можно дать и в другой, эквивалентной форме. А именно, если функция  $w = f(z)$  записана в виде (1) и  $z_0 = x_0 + y_0i$ , то комплексное число  $w_0 = u_0 + v_0i$  является пределом данной функции в точке  $z_0$ , если и только если существуют оба предела

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Доказывается это утверждение точно так же, как и соответствующий факт для **векторных функций действительного аргумента** (глава V, §7).

Все основные свойства, которые мы сформулировали в главе IV, §4 для предела числовой функции действительной переменной, имеют место также и для предела функции комплексной переменной.

1) Если для функций  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$ , определенных в проколота оокрестности  $\dot{U}(z_0)$  точки  $z_0$ , существуют конечные пределы  $\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)$  и  $\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)$ , то существуют также пределы

функций  $c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$  и  $f_1(z)f_2(z)$ , причем

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{z \rightarrow z_0} (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)) &= c_1 \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) + c_2 \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z); \\ \text{b) } \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)f_2(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z). \end{aligned}$$

Если, сверх того,  $f_2(z) \neq 0$ ,  $z \in \dot{U}(z_0)$  и  $\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) \neq 0$ , то существует также предел дроби  $f_1(z)/f_2(z)$  и

$$\text{c) } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)}.$$

2) Предположим, что функция  $w = f_1(z)$  определена в проколотой окрестности  $\dot{U}(z_0)$  точки  $z_0$  и существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = w_0$ , а функция  $f_2(w)$  определена в проколотой окрестности  $\dot{U}(w_0)$  точки  $w_0$ , содержащей множество значений функции  $f_1(z)$  и существует предел  $\lim_{w \rightarrow w_0} f_2(w) = L$ . Тогда существует предел композиции функций

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(f_1(z)) = L.$$

При вычислении предела функции комплексной переменной также могут возникать различные неопределенности, которые требуют преобразования выражения под знаком предела.

**Пример 2.** Вычислить предел

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{iz^3 - z^2 + 5z - 4 + 3i}{((2+i)z - 1)(z^2 + 2)}.$$

*Решение.* Здесь, очевидно, имеет место неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$ . Разделив числитель и знаменатель дроби на  $z^3$ , получим:

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{i - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{4-3i}{z^3}}{(2+i - \frac{1}{z})(1 + \frac{2}{z^2})}.$$

Отсюда, используя свойство 1) и приведенные выше примеры, находим:

$$w_0 = \frac{i - 0 + 0 - 0}{(2+i-0)(1+0)} = \frac{i}{2+i} = \frac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1+2i}{5}.$$

Дадим теперь определение непрерывности функции комплексной переменной. Предположим, что функция  $f(z)$  определена в некоторой окрестности точки  $z_0$ .

**Определение 3.** Будем говорить, что функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , если существует предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , равный значению функции в данной точке, т.е.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Если функция непрерывна в каждой точке множества  $D$ , то она называется непрерывной на этом множестве.

Это определение, как и для числовой функции действительной переменной, мы можем переформулировать на языке приращений, а именно, если придать аргументу в точке  $z_0$  приращение  $\Delta z$  и обозначить через  $\Delta f(z_0, \Delta z) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$  соответствующее приращение функции в точке  $z_0$ , то, очевидно, функция будет непрерывной в точке  $z_0$  в том и только в том случае, если приращение функции будет бесконечно малым при  $\Delta z \rightarrow 0$ , т.е.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f(z_0, \Delta z) = 0.$$

Если в точке  $z_0$  функция не является непрерывной, то она называется точкой разрыва функции.

Из свойств предела немедленно следует, что линейная комбинация, произведение и частное двух непрерывных функций, а также их композиция являются непрерывными функциями.



Примером всюду непрерывной функции является *полином комплексной переменной*  $z$  с комплексными коэффициентами

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

Это следует из того, что, очевидно, функция  $w = z$ , а, значит, и любая натуральная степень переменной  $z$  являются непрерывными функциями.

## §2. Производная функции комплексной переменной, дифференцируемость и дифференциал. Аналитическая функция

Пусть функция  $f(z)$  определена в некоторой окрестности точки  $z_0$ .

**Определение 1.** Если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то он называется *производной функции*  $f(z)$  в точке  $z_0$  и обозначается через  $f'(z_0)$ .

Обозначив, как и в предыдущем параграфе, через  $\Delta z = z - z_0$  – приращение аргумента в точке  $z_0$ , а через

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

– соответствующее ему приращение функции, мы можем переписать определение производной в виде

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z}. \quad (1)$$

Покажем, что, как и для числовой функции действительной переменной, *существование производной функции комплексной переменной равносильно ее дифференцируемости в данной точке*, т. е. возможности представления приращения функции вблизи точки  $z_0$  в виде

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = A \Delta z + \varphi(\Delta z) \Delta z, \quad (2)$$

где  $A$  – комплексная постоянная,  $\varphi(\Delta z)$  – бесконечно малая при  $\Delta z \rightarrow 0$  функция комплексной переменной.

В самом деле, из определения производной по формуле (1) ясно, что функция

$$\varphi(\Delta z) = \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} - f'(z_0)$$

является бесконечно малой при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Значит,

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = f'(z_0) \Delta z + \varphi(\Delta z) \Delta z, \quad (3)$$

т. е. приращение функции в точке  $z_0$  представляется в виде (2) с постоянной  $A = f'(z_0)$ .

Обратно, если имеет место представление (2), то существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A \Delta z + \varphi(\Delta z) \Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (A + \varphi(\Delta z)) = A + 0 = A = f'(z_0).$$

**Замечание.** Из формулы (3) следует, что *дифференцируемая в точке  $z_0$  функция является и непрерывной в этой точке*.

Из формулы (3) для дифференцируемой в точке  $z_0$  функции  $f(z)$  следует, что *приращение функции складывается из двух частей: линейной относительно приращения аргумента  $\Delta z$  части  $f'(z_0) \Delta z$  и нелинейной  $\varphi(\Delta z) \Delta z$ . Линейная часть называется *дифференциалом функции*  $f(z)$  в точке  $z_0$  и обозначается через  $df(z_0)$ . Таким образом,*

$$df(z_0) = f'(z_0) \Delta z.$$

Если функция  $w = f(z)$  дифференцируема в некоторой области  $D$  комплексной плоскости, т. е. в каждой точке  $z$  этой области, то, считая по определению, что  $dz = \Delta z$ , мы можем представить выражение для дифференциала функции в произвольной точке области в следующей симметричной форме:

$$dw = w' dz.$$

Отсюда,  $w' = \frac{dw}{dz}$  – еще одно обозначение для производной.

*Правила дифференцирования* числовых функций действительной переменной, связанные с алгебраическими операциями над функциями, переносятся также и на функции комплексной переменной. А именно, если функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  дифференцируемы в точке  $z$ , то функции  $c_1f_1(z) + c_2f_2(z)$ , где  $c_1, c_2$  – комплексные числа, и  $f_1(z)f_2(z)$  также дифференцируемы в этой точке и

$$(c_1f_1(z) + c_2f_2(z))' = c_1f_1'(z) + c_2f_2'(z),$$

$$(f_1(z)f_2(z))' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z).$$

Если, кроме того, функция  $f_2(z)$  отлична от нуля в некоторой окрестности точки  $z$ , то дифференцируемой является и функция  $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ , причем

$$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \frac{f_1'(z)f_2(z) - f_1(z)f_2'(z)}{(f_2(z))^2}.$$

*Правило дифференцирования композиции функций* также сохраняется: если функция  $f_1(z)$  дифференцируема в точке  $z$ , а функция  $f_2(w)$  дифференцируема в точке  $f_1(z)$ , то композиция функций  $f_2(f_1(z))$  дифференцируема в точке  $z$  и

$$(f_2(f_1(z)))' = f_2'(f_1(z))f_1'(z).$$

Переформулируем здесь еще и *правило дифференцирования обратной функции*: если функция  $w = f(z)$  взаимно однозначно отображает область  $D$  комплексной плоскости  $z$  на область  $E$  комплексной плоскости  $w$  и в точке  $z \in D$  функция  $f(z)$  дифференцируема и  $f'(z) \neq 0$ , то обратная функция  $z = f^{-1}(w)$  дифференцируема в точке  $w = f(z)$  и

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

или в других обозначениях

$$z'_w = \frac{1}{w'_z}.$$

В качестве примера рассмотрим функцию  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Докажем по индукции, что

$$(z^n)' = nz^{n-1}. \quad (4)$$

При  $n = 1$  формула (4) справедлива, так как

$$z' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z) - z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 1 = 1 = 1 \cdot z^0.$$

Предполагая теперь, что формула (4) верна для фиксированного  $n \in \mathbf{Z}$ , убедимся в том, что она имеет место и при  $n \pm 1$ . В самом деле, воспользовавшись правилами дифференцирования произведения и частного, мы получим:

$$(z^{n+1})' = (z^n \cdot z)' = (z^n)' \cdot z + z^n \cdot z' = nz^{n-1} \cdot z + z^n \cdot 1 = (n+1)z^n,$$

$$(z^{n-1})' = \left(\frac{z^n}{z}\right)' = \frac{(z^n)' \cdot z - z^n \cdot z'}{z^2} = \frac{nz^{n-1} \cdot z - z^n \cdot 1}{z^2} = (n-1)z^{n-2}.$$

Найдем условия, которые являются необходимыми и достаточными для дифференцируемости функции комплексной переменной.

**Теорема.** Функция комплексной переменной  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  дифференцируема в точке  $z_0 = x_0 + y_0i$  тогда и только тогда, когда обе функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы в точке  $M_0(x_0, y_0)$  и в этой точке выполняются условия Коши-Римана:

$$u'_x(M_0) = v'_y(M_0), \quad u'_y(M_0) = -v'_x(M_0). \quad (5)$$

**Доказательство. Необходимость.** Предположим, что функция  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$ . Тогда вблизи этой точки ее приращение представляется в виде (2). Пусть

$$A = A_1 + A_2i, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \varphi(\Delta z) = \varphi_1(\Delta x, \Delta y) + i\varphi_2(\Delta x, \Delta y).$$

Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned}\Delta f(z_0, \Delta z) &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u(M_0, \Delta x, \Delta y) + i\Delta v(M_0, \Delta x, \Delta y), \\ A\Delta z &= A_1\Delta x - A_2\Delta y + i(A_1\Delta y + A_2\Delta x), \\ \varphi(\Delta z)\Delta z &= \varphi_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x - \varphi_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y + i(\varphi_1(\Delta x, \Delta y)\Delta y + \varphi_2(\Delta x, \Delta y)\Delta x),\end{aligned}\tag{6}$$

мы можем записать приращения функций  $u(x, y), v(x, y)$  в точке  $M_0$  в виде

$$\begin{aligned}\Delta u(M_0, \Delta x, \Delta y) &= B_1\Delta x + B_2\Delta y + \psi_1(\Delta x, \Delta y)\Delta r, \text{ где} \\ B_1 = A_1, B_2 = -A_2, \psi_1(\Delta x, \Delta y) &= \frac{\varphi_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x - \varphi_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y}{\Delta r}, \Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}; \\ \Delta v(M_0, \Delta x, \Delta y) &= C_1\Delta x + C_2\Delta y + \psi_2(\Delta x, \Delta y)\Delta r, \text{ где} \\ C_1 = A_2, C_2 = A_1, \psi_2(\Delta x, \Delta y) &= \frac{\varphi_1(\Delta x, \Delta y)\Delta y + \varphi_2(\Delta x, \Delta y)\Delta x}{\Delta r}.\end{aligned}$$

Поскольку  $\frac{|\Delta x|}{\Delta r} \leq 1, \frac{|\Delta y|}{\Delta r} \leq 1$ , то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \psi_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \psi_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$

и, значит, функции  $u(x, y), v(x, y)$  дифференцируемы в точке  $M_0$ . Для доказательства **условий Коши-Римана (5)** воспользуемся первым из равенств (6). При  $\Delta y = 0$  мы получим  $\Delta z = \Delta x$  и

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \Delta u_x(M_0, \Delta x) + i\Delta v_x(M_0, \Delta x),\tag{7}$$

где  $\Delta_x u(M_0, \Delta x) = u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)$ ,  $\Delta_x v(M_0, \Delta x) = v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)$  – частные приращения по переменной  $x$  функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , соответственно. Разделив обе части равенства (7) на  $\Delta z = \Delta x$ , мы найдем в пределе

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u_x(M_0, \Delta x)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x(M_0, \Delta x)}{\Delta x} = u'_x(M_0) + iv'_x(M_0).$$

Аналогично, если  $\Delta x = 0$ , то  $\Delta z = i\Delta y$ ,

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \Delta u_y(M_0, \Delta y) + i\Delta v_y(M_0, \Delta y)$$

и, значит,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u_y(M_0, \Delta y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y(M_0, \Delta y)}{i\Delta y} = v'_y(M_0) - iu'_y(M_0).$$

Следовательно,

$$f'(z_0) = u'_x(M_0) + iv'_x(M_0) = v'_y(M_0) - iu'_y(M_0)\tag{8}$$

и, таким образом **условия Коши-Римана (5)** выполняются.

**Достаточность.** Предположим теперь, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы в точке  $M_0(x_0, y_0)$  и в этой точке выполняются условия Коши-Римана (5). Тогда (**глава VIII, §2, формула (3)**)

$$\begin{aligned}\Delta u(M_0, \Delta x, \Delta y) &= u'_x(M_0)\Delta x + u'_y(M_0)\Delta y + \varphi_1(\Delta x, \Delta y)\Delta r, \\ \Delta v(M_0, \Delta x, \Delta y) &= v'_x(M_0)\Delta x + v'_y(M_0)\Delta y + \varphi_2(\Delta x, \Delta y)\Delta r,\end{aligned}$$

где

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varphi_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varphi_2(\Delta x, \Delta y) = 0.\tag{9}$$

Отсюда, учитывая, что  $\Delta r = |\Delta z|$  и принимая во внимание **условия Коши-Римана (5)**, мы получим:

$$\begin{aligned}\Delta f(z_0, \Delta z) &= \Delta u(M_0, \Delta x, \Delta y) + i\Delta v(M_0, \Delta x, \Delta y) = \\ &= u'_x(M_0)\Delta x - v'_x(M_0)\Delta y + i(v'_x(M_0)\Delta x + u'_x(M_0)\Delta y) + (\varphi_1(\Delta x, \Delta y) + i\varphi_2(\Delta x, \Delta y))|\Delta z| = \\ &= (u'_x(M_0)\Delta x + iv'_x(M_0)\Delta y)\Delta z + (\varphi_1(\Delta x, \Delta y) + i\varphi_2(\Delta x, \Delta y))\frac{\overline{\Delta z}}{|\Delta z|}\Delta z = A\Delta z + \varphi(\Delta z)\Delta z,\end{aligned}$$

где

$$A = u'_x(M_0)\Delta x + iv'_x(M_0)\Delta y, \varphi(\Delta z) = (\varphi_1(\Delta x, \Delta y) + i\varphi_2(\Delta x, \Delta y)) \frac{\overline{\Delta z}}{|\Delta z|}.$$

Поскольку  $\left| \frac{\overline{\Delta z}}{|\Delta z|} \right| = 1$ , то ввиду (9)  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varphi(\Delta z) = 0$  и, таким образом, приращение функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  представляется в виде (2), что и означает ее дифференцируемость в данной точке.

**Пример.** Являются ли функции а)  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  (функция Жуковского) и б)  $w = \bar{z}$  дифференцируемыми?

*Решение.* Проверим для каждой из функций условия Коши-Римана (5).

а)

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left( x + yi + \frac{1}{x + yi} \right) = \frac{1}{2} \left( x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) i. \end{aligned}$$

Значит,

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad v(x, y) = \frac{1}{2} \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

и

$$u'_x = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$u'_y = \frac{1}{2} \left( 0 + x \left( -(x^2 + y^2)^{-2} \right) \cdot 2y \right) = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$v'_x = \frac{1}{2} \left( 0 - y \left( -(x^2 + y^2)^{-2} \right) \cdot 2x \right) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$v'_y = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Следовательно, функция Жуковского дифференцируема при всех  $z \neq 0$ , так как в каждой такой точке выполняются условия Коши-Римана.

б) Для этой функции  $w = x - yi$  и, стало быть,  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = -y$ . Поскольку

$$u'_x = 1, u'_y = 0; v'_x = 0, v'_y = -1,$$

то первое из условий Коши-Римана не выполняется ни в одной из точек комплексной плоскости. Таким образом, данная функция, очевидно, везде непрерывна, но нигде не дифференцируема.

Введем следующее важное

**Определение 2.** Функция комплексной переменной называется аналитической в точке, если она дифференцируема в этой точке и некоторой ее окрестности. Если функция является аналитической в каждой точке некоторой области, то она называется аналитической в этой области.

Как мы увидим позже, аналитические функции обладают исключительно хорошими для исследования свойствами и находят широкое применение в приложениях теории функций комплексной переменной.

В приведенном выше примере функция Жуковского является аналитической во всей комплексной плоскости, кроме точки  $z = 0$ , а вторая функция  $w = \bar{z}$  не является аналитической.

### §3. Элементарные аналитические функции комплексной переменной

Определим сначала основные элементарные функции комплексной переменной.

1) Комплексная экспонента.

*Комплексной экспонентой* называется функция, которая для любого комплексного числа  $z = x + yi$  определяется равенством

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Именно так мы уже определяли эту функцию в [главе V, §8](#). Там же мы отметили, что *комплексная экспонента наследует свойства действительной экспоненты, связанные с алгебраическими операциями над ее значениями*:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, (e^z)^n = e^{zn}, z_1, z_2, z \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{Z}.$$

Заметим также, что, поскольку функции  $\cos y$  и  $\sin y$  —  $2\pi$ -периодические, то *комплексная экспонента является периодической функцией с чисто мнимым периодом  $2\pi i$* . Прямые  $\operatorname{Im} z = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  разбивают комплексную плоскость  $z$  на полосы, каждая из которых взаимно однозначно отображается функцией  $w = e^z$  на всю комплексную плоскость  $w$  с выколотой точкой  $0$ .

Проверим экспоненту на аналитичность. Поскольку для нее

$$u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y,$$

то

$$u'_x = e^x \cos y, u'_y = -e^x \sin y; v'_x = e^x \sin y, v'_y = e^x \cos y.$$

Значит, условия Коши-Римана выполняются и *комплексная экспонента является аналитической во всей комплексной плоскости*. По [формуле \(8\)](#) предыдущего параграфа ее производная равна

$$(e^z)' = e^z.$$

2) *Тригонометрические функции комплексной переменной.*

Из определения комплексной экспоненты при  $z = ix$  и  $z = -ix$ ,  $x \in \mathbf{R}$  следуют равенства

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Вычитая и складывая их почленно, мы находим:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Последние формулы служат основой для определения тригонометрических функций комплексной переменной  $z$ :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

*Эти функции  $2\pi$ -периодические и наследуют все формальные свойства соответствующих тригонометрических функций действительной переменной*. Отличительной особенностью является их неограниченность. В самом деле, на мнимой оси  $z = iy$ ,  $y \in \mathbf{R}$  комплексной плоскости

$$\sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i}, \cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2}$$

и, следовательно,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |\sin iy| = \lim_{y \rightarrow \infty} \cos iy = +\infty.$$

Ввиду дифференцируемости экспоненты дифференцируемы также и функции  $\sin z$ ,  $\cos z$  и

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})' = \frac{e^{iz}(iz)' - e^{-iz}(-iz)'}{2i} = \frac{e^{iz} \cdot i - e^{-iz} \cdot (-i)}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \\ (\cos z)' &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})' = \frac{e^{iz}(iz)' + e^{-iz}(-iz)'}{2} = \frac{e^{iz} \cdot i + e^{-iz} \cdot (-i)}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z. \end{aligned}$$

Таким образом, *данные функции являются аналитическими во всей комплексной плоскости и для них*

$$(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z.$$

Тангенс и котангенс комплексной переменной определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функция  $\operatorname{tg} z$  является аналитической везде, за исключением точек  $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , и, как и для тангенса действительной переменной,

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}.$$

Аналогично, областью аналитичности функции  $\operatorname{ctg} z$  является вся комплексная плоскость, кроме точек  $z_n = \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , и

$$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

3) *Логарифмическая функция комплексной переменной.*

Данная функция определяется как обратная к экспоненте, а именно, каждому комплексному числу  $z \neq 0$  ставится в соответствие комплексное число  $w$ , такое, что

$$e^w = z.$$

Ввиду  $2\pi i$ -периодичности экспоненциальной функции комплексная логарифмическая функция является многозначной, а точнее, бесконечнозначной и ее значения отличаются друг от друга на чисто мнимые числа, кратные  $2\pi i$ . Обозначим эту функцию через  $\operatorname{Ln} z$  и найдем для нее явное выражение. Пусть  $w = \operatorname{Ln} z = u + vi$ ,  $z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$ , где  $\arg z \in [0, 2\pi)$ . Тогда во определению экспоненты

$$e^w = z \iff e^u(\cos v + i \sin v) = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z),$$

откуда мы заключаем, что

$$e^u = |z| \implies u = \ln |z|, v = \arg z + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + (\arg z + 2\pi n)i, n \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Если зафиксировать в последней формуле целое  $n$ , то мы получим однозначную функцию, которая называется  $n$ -ой ветвью логарифмической функции. Эта ветвь взаимно однозначно отображает комплексную плоскость  $z$  без нуля на полосу  $\operatorname{Im} w \in [2\pi n, 2\pi(n+1))$  комплексной плоскости  $w$ . В частности, при  $n = 0$  функция

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

называется *главным значением логарифма*. Очевидно,

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi ni, n \in \mathbf{Z}.$$

*Логарифмы комплексных чисел обладают основными свойствами логарифмов положительных чисел:*

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2, \quad (2)$$

где  $z_1, z_2$  — неравные нулю комплексные числа. Для доказательства первого из этих равенств достаточно вспомнить, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (глава V, §8) и воспользоваться формулой (1):

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(z_1 z_2) &= \ln |z_1 z_2| + (\arg(z_1 z_2) + 2\pi n)i = \ln(|z_1||z_2|) + (\arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi n)i = \\ &= (\ln |z_1| + (\arg z_1 + 2\pi n_1)i) + (\ln |z_2| + (\arg z_2 + 2\pi n_2)i) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, n, n_1, n_2 \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

и  $n = n_1 + n_2$ . Второе из равенств (2) доказывается аналогично.

**Замечание.** Во избежание ошибок равенства (2) следует понимать не как равенства чисел, а как равенства множеств.

Приведем *примеры* вычисления логарифмической функции.

$$1) \operatorname{Ln}(-e) = \ln|-e| + (\arg(-e) + 2\pi n)i = \ln e + (\pi + 2\pi n)i = 1 + \pi(2n + 1)i,$$

$$2) \operatorname{Ln}(6i) = \ln|6i| + (\arg(6i) + 2\pi n)i = \ln 6 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)i = \ln 6 + \frac{\pi}{2}(4n + 1)i,$$

$$3) \operatorname{Ln}(1 - i) = \ln|1 - i| + (\arg(1 - i) + 2\pi n)i = \ln \sqrt{2} + \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)i = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}(8n + 7)i,$$

где  $n \in \mathbf{Z}$ .

Покажем, что *каждая из ветвей логарифмической функции*  $w = \operatorname{Ln} z$  дифференцируема в любой точке  $z \neq 0$ . Воспользуемся правилом дифференцирования обратной функции, учитывая, что здесь  $z = e^w$ :

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

Следовательно, *любая ветвь комплексного логарифма является аналитической функцией во всей комплексной плоскости, исключая точку*  $z = 0$ .

4) *Обратные тригонометрические функции комплексной переменной.*

Здесь речь идет о функциях  $\operatorname{Arcsin} z$ ,  $\operatorname{Arccos} z$ ,  $\operatorname{Arctg} z$ ,  $\operatorname{Arcctg} z$ . Они являются обратными к соответствующим тригонометрическим функциям. Найдем для них явные выражения.

Функция  $w = \operatorname{Arcsin} z$  является обратной к синусу. Поэтому

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

Отсюда,

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $e^{iw}$ , мы получим

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

Следовательно,

$$iw = \operatorname{Ln} \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

и, значит,

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

*Каждая из ветвей этой бесконечнозначной функции является аналитической функцией во всей комплексной плоскости, исключая точки*  $z = \pm 1$  и для нее по правилу дифференцирования обратной функции

$$(\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{(\sin w)'} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 w}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

т.е.

$$(\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Совершенно аналогично мы можем убедиться в том, что

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad (\operatorname{Arccos} z)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}};$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad (\operatorname{Arctg} z)' = \frac{1}{1 + z^2};$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}, \quad (\operatorname{Arcctg} z)' = -\frac{1}{1 + z^2}.$$

5) *Степенная функция комплексной переменной.*

Для фиксированного комплексного числа  $c$  *степенная функция* определяется равенством

$$z^c = e^{c \operatorname{Ln} z}, \quad 0 \neq z \in \mathbf{C}.$$

Несмотря на такое определение степени в *общем случае нельзя утверждать*, что

$$\operatorname{Ln} z^c = c \operatorname{Ln} z.$$

Например,

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln|i| + (\arg i + 2\pi n)i)} = e^{i(\ln 1 + (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)i)} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)}, n \in \mathbf{Z}$$

и, значит,

$$\operatorname{Ln} i^i = \operatorname{Ln} e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)} = \ln e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)} + 2\pi k i = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + 2\pi k i, n, k \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, множество комплексных чисел

$$\operatorname{Ln} i^i = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + 2\pi k i, n, k \in \mathbf{Z}$$

не совпадает с множеством действительных чисел

$$i \operatorname{Ln} i = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z},$$

т. е.

$$\operatorname{Ln} i^i \neq i \operatorname{Ln} i.$$

Аналогично на примерах можно убедиться в том, что все основные *свойства* действительных степеней для комплексных нарушаются, т. е. в общем случае:

$$z^{c_1} z^{c_2} \neq z^{c_1 + c_2}, \frac{z^{c_1}}{z^{c_2}} \neq z^{c_1 - c_2}, (z^{c_1})^{c_2} \neq z^{c_1 c_2}, c_1, c_2 \in \mathbf{C}.$$

*Степенная функция комплексного аргумента, как и логарифм, является бесконечнозначной, каждая из ее ветвей – аналитическая функция и*

$$(z^c)' = (e^{c \operatorname{Ln} z})' = e^{c \operatorname{Ln} z} (c \operatorname{Ln} z)' = e^{c \operatorname{Ln} z} \cdot \frac{c}{z} = c \cdot \frac{z^c}{z}.$$

Заметим, что производную степенной функции комплексной переменной мы не можем записать в привычном виде

$$(z^c)' = c z^{c-1},$$

так как в предыдущем абзаце мы отметили, что, вообще говоря,

$$\frac{z^c}{z} \neq z^{c-1}.$$

6) *Показательная функция комплексной переменной.*

По аналогии с предыдущей эта функция при фиксированном комплексном  $a \neq 0$  задается равенством

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

*Показательная функция бесконечнозначная, каждая ее ветвь – аналитическая функция с производной*

$$(a^z)' = (e^{z \operatorname{Ln} a})' = e^{z \operatorname{Ln} a} (z \operatorname{Ln} a)' = e^{z \operatorname{Ln} a} \operatorname{Ln} a = a^z \operatorname{Ln} a.$$

Таким образом,

$$(a^z)' = a^z \operatorname{Ln} a,$$

если при вычислении правой части в выражениях  $a^z$  и  $\operatorname{Ln} a$  выбирать одну и ту же ветвь логарифма.

*Элементарной функцией комплексной переменной* называется функция, полученная из основных элементарных с помощью конечного числа алгебраических операций и композиций. Ясно, что любая элементарная функция является аналитической в своей области определения с той лишь оговоркой, что, если в ее выражении явно или неявно участвует логарифм, то речь идет о некоторой выделенной ветви этой функции. Примерами элементарных функций



служат *гиперболические функции комплексной переменной*. Они определяются точно также, как и соответствующие функции действительной переменной (глава IV, §4, пункт 1):

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) - \text{синус гиперболический}; \\ \operatorname{ch} z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) - \text{косинус гиперболический}; \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} - \text{тангенс гиперболический}; \\ \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} - \text{котангенс гиперболический}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой мы можем убедиться в том, что гиперболические функции  $\operatorname{sh} z$  и  $\operatorname{ch} z$  выражаются через соответствующие тригонометрические по формулам

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

Первые две из этих функций являются аналитическими во всей комплексной плоскости, а функции  $\operatorname{th} z$  и  $\operatorname{cth} z$  аналитичны везде, кроме точек  $z_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}i$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  и  $z_n = \pi ni$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , соответственно. Выражения для производных этих функций точно такие же, как и для соответствующих функций действительной переменной:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh} z)' &= \operatorname{ch} z; \\ (\operatorname{ch} z)' &= \operatorname{sh} z; \\ (\operatorname{th} z)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}; \\ (\operatorname{cth} z)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}. \end{aligned}$$

#### §4. Интеграл функции комплексной переменной. Интегральные теорема и формула Коши

Пусть  $L$  – кусочно-гладкая, содержащая свои граничные точки, линия на комплексной плоскости. Выберем на ней определенную *ориентацию*. В соответствии с выбранной ориентацией разобьем линию на малые части точками  $z_0, z_1, \dots, z_n$  ( $z_0$  – начальная,  $z_n$  – конечная точки линии) и на каждой из дуг  $\widehat{z_{k-1}z_k}$ ,  $k = \overline{1, n}$  выберем произвольно по точке  $c_k$ .

Рассмотрим однозначную функцию комплексной переменной  $f(z)$ , заданную на кривой  $L$ . Составим для нее *интегральную сумму*

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta z_k,$$

где  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

**Определение.** *Конечный предел (если он существует) интегральных сумм  $I_n$  при условии, что диаметры всех частей разбиения линии  $L$  стремятся к нулю, не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точек внутри дуг разбиения, называется интегралом функции комплексной переменной  $f(z)$  по линии  $L$ . Обозначается он через*

$$\int_L f(z) dz. \quad (1)$$

Если интеграл (1) существует, то функция  $f(z)$  называется *интегрируемой* по линии  $L$ . Для интегралов по замкнутым кривым используется такое же обозначение, как и для криволинейных интегралов:

$$\oint_L f(z) dz.$$

Найдем выражение интеграла функции комплексной переменной через действительную и мнимую части этой функции. Пусть  $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$  и  $c_k = a_k + b_k i$ ,  $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Тогда интегральная сумма  $I_n$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=1}^n (u(a_k, b_k) + iv(a_k, b_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n (u(a_k, b_k)\Delta x_k - v(a_k, b_k)\Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v(a_k, b_k)\Delta x_k + u(a_k, b_k)\Delta y_k). \end{aligned}$$

Очевидно, первая сумма в последнем равенстве является интегральной для векторной функции  $(u(x, y), -v(x, y))$ , а вторая – интегральной для векторной функции  $(v(x, y), u(x, y))$  по линии  $L$ . Следовательно, в пределе мы получим:

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy. \quad (2)$$

Формально равенство (2) мы получим, если в левой части под знаком интеграла в выражении  $f(z)dz = (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy)$  раскроем скобки. Таким образом, *интеграл функции комплексной переменной сводится к двум криволинейным интегралам векторных функций.*

Из (2) следует, что *непрерывная на  $L$  функция  $f(z)$  интегрируема по линии  $L$* , так как в этом случае функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  также непрерывны на  $L$  и поэтому оба криволинейных интеграла в правой части существуют ([глава X, §1, пункт 2](#)).

*Свойства интеграла функции комплексной переменной* совершенно аналогичны соответствующим свойствам криволинейного интеграла векторной функции. Перечислим основные из них.

1) *Если  $f_1(z), f_2(z)$  – интегрируемые по линии  $L$  с выбранной на ней ориентацией функции комплексной переменной, то интегрируема также по этой линии и функция  $a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbf{C}$  и*

$$\int_L (a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z))dz = a_1 \int_L f_1(z)dz + a_2 \int_L f_2(z)dz.$$

2) *Пусть линия  $L$  с зафиксированной на ней ориентацией разбита на две дуги  $L_1, L_2$  и функция  $f(z)$  интегрируема по каждой из этих дуг. Тогда данная функция интегрируема по линии  $L$  и*

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz.$$

3) *Обозначим через  $L^+$  линию  $L$  с выбранной на ней ориентацией, а через  $L^-$  – ту же линию с противоположной ориентацией. Тогда, если функция  $f(z)$  интегрируема по  $L^+$  ( $L^-$ ), то она интегрируема и по  $L^-$  ( $L^+$ ) и*

$$\int_{L^+} f(z)dz = - \int_{L^-} f(z)dz.$$

Все эти свойства непосредственно следуют из определения интеграла функции комплексной переменной.

4) *Если функция  $f(z)$  непрерывна на линии  $L$ , то*

$$\left| \int_L f(z)dz \right| \leq \int_L |f(z)|dl.$$

*Если же  $|f(z)| \leq M, z \in L$  для некоторой положительной константы  $M$ , то*

$$\left| \int_L f(z)dz \right| \leq Ml,$$

где  $l$  – длина линии  $L$ .

Первое неравенство вытекает из предельного перехода в следующей оценке для интегральной суммы:

$$|I_n| = \left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(c_k)| |\Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(c_k)| \Delta l_k,$$

где  $\Delta l_k$  – длина дуги  $\widehat{z_{k-1} z_k}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Второе неравенство следует из первого, так как

$$\int_L |f(z)| dl \leq \int_L M dl = M \int_L dl = Ml.$$

Обсудим теперь *методы вычисления* интеграла функции комплексной переменной. Естественно, мы можем использовать [формулу \(2\)](#), вычислив два криволинейных интеграла. Однако это не всегда удобно. Иногда проще воспользоваться *комплексным параметрическим уравнением* кривой  $L$ , т.е. уравнением  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , где комплекснозначную функцию  $z(t)$  действительного аргумента  $t$  мы будем считать непрерывно дифференцируемой. В этом случае интеграл (1) мы можем вычислить по формуле

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) dz(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3)$$

Для доказательства формулы (3) достаточно записать параметрические уравнения кривой  $L$  в виде  $x = \operatorname{Re} z(t)$ ,  $y = \operatorname{Im} z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  и в формуле (2) совершить переход справа налево, выразив криволинейные интегралы через определенные по параметру  $t$ .

**Пример 1.** Вычислить интегралы:

a)  $\int_L \frac{z}{(\operatorname{Re} z)^2} dz$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $z_1 = 2 + 4i$  до точки  $z_2 = 1 + i$ ;

b)  $\oint_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dz$  для произвольных фиксированных  $z_0 \in \mathbf{C}$ ,  $R > 0$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , причем

окружность  $|z - z_0| = R$  обходится против часовой стрелки.

*Решение.* а) Воспользуемся [формулой \(2\)](#). Полагая  $z = x + yi$ , мы получим:

$$\int_L \frac{z}{(\operatorname{Re} z)^2} dz = \int_L \frac{x + yi}{x^2} (dx + idy) = \int_L \frac{xdx - ydy}{x^2} + i \int_L \frac{ydx + xdy}{x^2}.$$

Вычислим каждый из криволинейных интегралов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_L \frac{xdx - ydy}{x^2} = \int_2^1 \frac{xdx - x^2 dx^2}{x^2} = \int_2^1 \left( \frac{dx}{x} - dx^2 \right) = \\ &= (\ln x - x^2) \Big|_2^1 = \ln 1 - 1 - (\ln 2 - 4) = 3 - \ln 2; \\ I_2 &= \int_L \frac{ydx + xdy}{x^2} = \int_2^1 \frac{x^2 dx + x dx^2}{x^2} = \int_2^1 (dx + 2dx) = 3x \Big|_2^1 = -3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_L \frac{z}{(\operatorname{Re} z)^2} dz = I_1 + I_2 i = 3 - \ln 2 - 3i.$$

b) Пусть  $z_0 = x_0 + y_0 i$ ,  $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$ . Тогда параметрические уравнения данной окружности имеют вид:

$$x = x_0 + R \cos t, \quad y = y_0 + R \sin t, \quad t \in \mathbf{R}$$

и, значит,

$$z = x + yi = x_0 + y_0i + R(\cos t + i \sin t) = z_0 + Re^{it},$$

т. е.

$$z = z_0 + Re^{it}$$

– комплексное параметрическое уравнение окружности. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (3):

$$I = \oint_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n d(z_0 + Re^{it}) = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} Rie^{it} dt = R^{n+1}i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Если  $n \neq -1$ , то

$$I = \frac{R^{n+1}i}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1} (e^{2\pi i(n+1)} - 1) = \frac{R^{n+1}}{n+1} (1 - 1) = 0.$$

При  $n = -1$

$$I = i \int_0^{2\pi} dt = it \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Таким образом,

$$\oint_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$$

Эlegantные утверждения имеют место для *интегралов аналитических в некоторой области функций*. Речь будет идти об интеграле по замкнутой кривой (контуре), ограничивающей область на комплексной плоскости.

**Интегральная теорема Коши.** Пусть функция комплексной переменной  $f(z)$  является аналитической в односвязной области  $D$  и  $L \subset D$  – простая, замкнутая, ориентированная, кусочно-гладкая линия. Тогда

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Мы приведем упрощенное доказательство этой теоремы в предположении непрерывности производной  $f'(z)$  в области  $D$  (как мы увидим в дальнейшем аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой).

Ввиду непрерывности функции на кривой  $L$  интеграл

$$\oint_L f(z) dz$$

существует и для него справедлива формула (2). Благодаря сделанному предположению, действительная  $u(x, y)$  и мнимая  $v(x, y)$  части функции  $f(z)$  непрерывно дифференцируемы в замкнутой области  $\tilde{D}$ , ограниченной контуром  $L$  и, стало быть, к каждому из интегралов в правой части (2) мы можем применить формулу Грина (глава X, §2), в соответствии с которой

$$I_1 = \oint_L u(x, y) dx - v(x, y) dy = \iint_{\tilde{D}} (-v'_x(x, y)) - u'_y(x, y) dx dy,$$

$$I_2 = \oint_L v(x, y) dx + u(x, y) dy = \iint_{\tilde{D}} (u'_x(x, y) - v'_y(x, y)) dx dy.$$

Ввиду аналитичности функции  $f(z)$  всюду в области  $D$  выполняются условия Коши-Римана

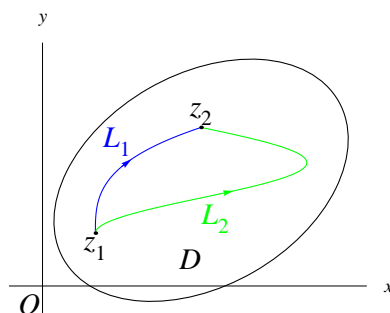
$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y), u'_y(x, y) = -v'_x(x, y) \iff u'_x(x, y) - v'_y(x, y) = 0, -v'_x(x, y) - u'_y(x, y) = 0.$$

Следовательно,

$$I_1 = I_2 = 0 \implies \oint_L f(z)dz = I_1 + I_2i = 0.$$

**Следствие.** Пусть функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям интегральной теоремы Коши. Тогда интеграл этой функции по любой простой, кусочно-гладкой линии  $L \subset D$ , соединяющей две фиксированные точки  $z_1, z_2 \in D$ , не зависит от  $L$ .

В самом деле, пусть  $L_1$  и  $L_2$  – две кривые, ведущие из точки  $z_1$  в точку  $z_2$ .



Обозначим через  $L_2^-$  кривую  $L_2$  с противоположной ориентацией, т. е. ведущую из  $z_2$  в  $z_1$ . Тогда  $L_1 \cup L_2^-$  – замкнутый контур и по интегральной теореме Коши

$$\oint_{L_1 \cup L_2^-} f(z)dz = 0.$$

Воспользовавшись свойствами 2) и 3) интеграла, мы получаем

$$\oint_{L_1 \cup L_2^-} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2^-} f(z)dz = 0 \iff \int_{L_1} f(z)dz = - \int_{L_2^-} f(z)dz \iff \int_{L_1} f(z)dz = \int_{L_2} f(z)dz,$$

что и доказывает следствие. Ясно, что в этом случае значение интеграла определяется только начальной и конечной точками, поэтому он обозначается через

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

и называется *определенным интегралом*.

Покажем, что функция  $f(z)$ , удовлетворяющая условиям интегральной теоремы Коши, обладает *первообразной*, т. е. существует функция комплексной переменной  $F(z)$ , для которой

$$F'(z) = f(z), \quad z \in D.$$

В качестве такой первообразной мы можем взять интеграл

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s)ds, \quad (4)$$

где  $z_0$  – фиксированная точка области  $D$ . В самом деле,

$$\Delta F(z, \Delta z) = F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds - \int_{z_0}^z f(s)ds = \int_z^{z+\Delta z} f(s)ds.$$

В качестве пути интегрирования в последнем интеграле мы выберем отрезок прямой, соединяющей точки  $z$  и  $z + \Delta z$ . Параметрическое уравнение этого отрезка

$$s = z + t\Delta z, \quad t \in [0, 1].$$

Применяя формулу (3), мы получим:

$$\int_z^{z+\Delta z} f(s)ds = \int_0^1 f(z+t\Delta z)\Delta z dt = \Delta z \int_0^1 f(z+t\Delta z)dt.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta F(z, \Delta z)}{\Delta z} = \int_0^1 f(z+t\Delta z)dt.$$

Пусть  $z = x + yi$ ,  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ . Тогда

$$\int_0^1 f(z+t\Delta z)dt = \int_0^1 u(x+t\Delta x, y+t\Delta y)dt + i \int_0^1 v(x+t\Delta x, y+t\Delta y)dt.$$

К интегралам в правой части мы применим теорему о среднем для определенного интеграла (глава VII, §1):

$$\int_0^1 u(x+t\Delta x, y+t\Delta y)dt = u(x+t_1\Delta x, y+t_1\Delta y), \quad \int_0^1 v(x+t\Delta x, y+t\Delta y)dt = v(x+t_2\Delta x, y+t_2\Delta y),$$

где  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ . Таким образом,

$$\frac{\Delta F(z, \Delta z)}{\Delta z} = u(x+t_1\Delta x, y+t_1\Delta y) + iv(x+t_2\Delta x, y+t_2\Delta y)$$

и, стало быть,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F(z, \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (u(x+t_1\Delta x, y+t_1\Delta y) + iv(x+t_2\Delta x, y+t_2\Delta y)) = u(x, y) + iv(x, y) = f(z),$$

т. е.

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F(z, \Delta z)}{\Delta z} = f(z).$$

Используя формулу (8) из §2, несложно убедиться в том, что любые две первообразные  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  функции  $f(z)$  связаны комплексной константой, т. е. существует комплексное число  $C$  такое, что

$$F_2(z) = F_1(z) + C. \quad (5)$$

Верна в этом случае также и формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2},$$

где  $F(z)$  – некоторая первообразная функции  $f(z)$ . Для доказательства достаточно воспользоваться формулой (4) и учесть соотношение (5).

**Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int_L z \sin^2 z^2 dz$$

по кривой  $L$ , соединяющей точки  $z_1 = -\sqrt{\frac{\pi}{4}}i$  и  $z_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}i$ .

*Решение.* Элементарная функция  $z \sin^2 z^2$  является аналитической во всей комплексной плоскости, поэтому для вычисления данного интеграла применима формула Ньютона-Лейбница.

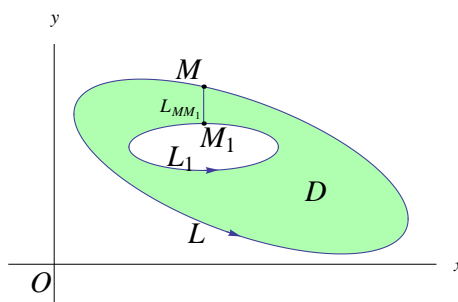
$$\begin{aligned} \int_L z \sin^2 z^2 dz &= \int_{z_1}^{z_2} z \sin^2 z^2 dz = \frac{1}{8} \int_{z_1}^{z_2} (1 - \cos 2z^2) d(2z^2) = \\ &= \frac{1}{8} (2z^2 - \sin 2z^2) \Big|_{-\sqrt{\frac{\pi}{4}i}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{1}{8} ((-\pi - \sin(-\pi)) - (-\pi/2 - \sin(-\pi/2))) = -\frac{\pi + 2}{16}. \end{aligned}$$

Переформулируем интегральную теорему Коши для *многосвязной области* на комплексной плоскости.

**Интегральная теорема Коши для многосвязной области.** Пусть функция комплексной переменной  $f(z)$  является аналитической в области  $D$  и  $L, L_i, i = \overline{1, n}$  – непересекающиеся, простые, замкнутые, кусочно-гладкие, контуры содержащиеся в области  $D$ , причем все контуры  $L_i, i = \overline{1, n}$  охватываются контуром  $L$  и ни один из них не вложен в другой. Тогда, если многосвязная область на комплексной плоскости, ограниченная контурами  $L, L_i, i = \overline{1, n}$  содержится в области  $D$ , то при условии одинаковой ориентации всех контуров  $L, L_i, i = \overline{1, n}$

$$\oint_L f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} f(z) dz,$$

Для простоты проведем рассуждения для двухсвязной области.



Соединим точку  $M \in L$  с точкой  $M_1 \in L_1$  простой, кусочно-гладкой линией  $L_{MM_1}$ , содержащейся в области, ограниченной контурами  $L$  и  $L_1$ . Для определенности будем считать, что линии  $L$  и  $L_1$  *положительно ориентированы*, т.е. при их обходе соответствующие области остаются слева. Линия  $L' = L_{MM_1} \cup L_1^- \cup L_{M_1M} \cup L$ , где  $L_1^-$  – кривая  $L_1$  с отрицательной ориентацией, является границей уже односвязной области. Применяя к ней интегральную теорему Коши и *свойства 2) и 3)* интеграла функции комплексной переменной, мы получим:

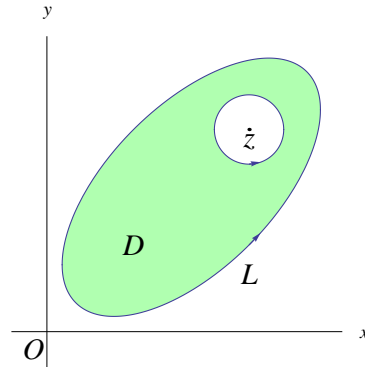
$$\begin{aligned} \oint_{L'} f(z) dz &= \int_{L_{MM_1}} f(z) dz + \oint_{L_1^-} f(z) dz + \int_{L_{M_1M}} f(z) dz + \oint_L f(z) dz = \\ &= \int_{L_{MM_1}} f(z) dz - \oint_{L_1} f(z) dz - \int_{L_{MM_1}} f(z) dz + \oint_L f(z) dz = 0 \implies \oint_L f(z) dz = \oint_{L_1} f(z) dz. \end{aligned}$$

Основой многих приложений теории функций комплексной переменной является

**Интегральная формула Коши.** Пусть функция комплексной переменной  $f(z)$  является аналитической в односвязной области  $\tilde{D}$  и  $D \subset \tilde{D}$  – область, ограниченная простой, замкнутой, кусочно-гладкой, положительно ориентированной линией  $L$ . Тогда для любой точки  $z \in D$  имеет место формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{t - z} dt. \quad (6)$$

**Доказательство.** Возьмем круг радиуса  $r$  с центром в точке  $z$ , целиком содержащийся в области  $D$ . Уравнение ограничивающей его окружности запишем в виде  $|t - z| = r$ ,  $t \in \mathbf{C}$ . Будем считать ее положительно ориентированной. Функция  $\frac{f(t)}{t-z}$  комплексной переменной  $t$  является аналитической в двухсвязной области, ограниченной линией  $L$  и окружностью  $|t - z| = r$ .



Тогда по интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_L \frac{f(t)}{t-z} dt = \oint_{|t-z|=r} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Учитывая, что (пример 1, b))

$$\oint_{|t-z|=r} \frac{dt}{t-z} = 2\pi i,$$

мы можем записать

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{f(t)}{t-z} dt - 2\pi i f(z) &= \oint_{|t-z|=r} \frac{f(t)}{t-z} dt - 2\pi i f(z) = \\ &= \oint_{|t-z|=r} \frac{f(t)}{t-z} dt - \oint_{|t-z|=r} \frac{f(z)}{t-z} dt = \oint_{|t-z|=r} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл

$$\oint_{|t-z|=r} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt$$

не зависит от  $r$ . Покажем, что он равен нулю. Ввиду своей аналитичности функция  $f(z)$  является и непрерывной в области  $D$ , поэтому при любом заданном  $\varepsilon > 0$  мы можем подобрать радиус  $r$  настолько малым, чтобы для всех точек окружности  $|t - z| = r$  выполнялось неравенство

$$|f(t) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Тогда, пользуясь свойством 4) интеграла функции комплексной переменной, мы получим:

$$\left| \oint_{|t-z|=r} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt \right| \leq \oint_{|t-z|=r} \left| \frac{f(t) - f(z)}{t-z} \right| dl \leq \oint_{|t-z|=r} \frac{\frac{\varepsilon}{2\pi}}{r} dl = \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

Поскольку  $\varepsilon$  произвольно мало, то отсюда и следует, что

$$\oint_{|t-z|=r} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt = 0,$$



а, значит, и

$$\oint_L \frac{f(t)}{t-z} dt - 2\pi i f(z) = 0,$$

что равносильно (6).

Интегральная формула Коши позволяет вычислить функцию комплексной переменной внутри области, если она известна только на границе этой области и по этой причине она широко используется в математической физике при решении краевых или граничных задач.

С другой стороны, из (6) следует, что

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (7)$$

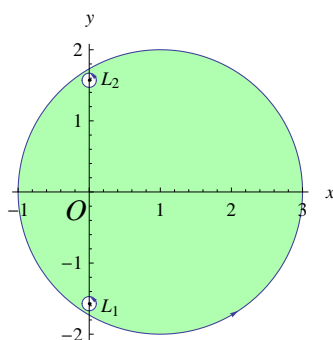
и, таким образом, интегральная формула Коши позволяет вычислять интегралы по замкнутым контурам.

**Пример 3.** Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{-z}}{4z^2 + \pi^2} dz.$$

Окружность  $|z-1|=2$  положительно ориентирована.

*Решение.* Подынтегральная функция является аналитической везде за исключением точек  $z_1 = -\frac{\pi}{2}i$ ,  $z_2 = \frac{\pi}{2}i$ . Обе они располагаются внутри окружности интегрирования. Пусть  $L_1, L_2$  – непересекающиеся, положительно ориентированные окружности с центрами в точках  $z_1, z_2$ , соответственно, содержащиеся внутри окружности  $|z-1|=2$ .



По интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{-z}}{4z^2 + \pi^2} dz = \oint_{L_1} \frac{e^{-z}}{4z^2 + \pi^2} dz + \oint_{L_2} \frac{e^{-z}}{4z^2 + \pi^2} dz.$$

Каждый из интегралов в правой части мы вычислим по формуле (7).

$$I_1 = \oint_{L_1} \frac{e^{-z}}{4z^2 + \pi^2} dz = \oint_{L_1} \frac{e^{-z}}{4\left(z - \frac{\pi}{2}i\right)} dz.$$

Здесь  $f(z) = \frac{e^{-z}}{4\left(z - \frac{\pi}{2}i\right)}$ , поэтому

$$I_1 = 2\pi i f\left(-\frac{\pi}{2}i\right) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{4\left(-\frac{\pi}{2}i - \frac{\pi}{2}i\right)} = -\frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2}i.$$

Аналогично

$$I_2 = \oint_{L_2} \frac{e^{-z}}{4z^2 + \pi^2} dz = \oint_{L_2} \frac{e^{-z}}{4\left(z + \frac{\pi}{2}i\right)} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{4\left(\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}i\right)} = \frac{1}{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = -\frac{1}{2}i.$$

Поэтому

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{-z}}{4z^2 + \pi^2} dz = I_1 + I_2 = -i.$$

Продифференцировав формально по переменной  $z$  обе части равенства (6), мы получим:

$$f'(z) = \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{t-z} dt \right)' = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \left( \frac{f(t)}{t-z} \right)' dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt. \quad (8)$$

Проверка этой формулы технически мало отличается от доказательства интегральной формулы Коши (6).

Аналогично, отправляясь от формулы (8), повторным дифференцированием мы можем убедиться в том, что существует вторая производная  $f''(z)$  и

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{(t-z)^3} dt.$$

Дальнейшее дифференцирование приводит к общей формуле

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (9)$$

Таким образом, аналитическая в односвязной области функция комплексной переменной бесконечно дифференцируема и для ее производных имеет место формула (9).

Для вычисления интегралов формулу (9) мы перепишем в виде

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z_0), \quad n \in \mathbf{N}. \quad (10)$$

**Пример 4.** Вычислить интеграл

$$\oint_L \frac{\sin 3z}{z^3 + z^2} dz$$

по положительно ориентированной окружности  $L: |z| = \frac{1}{2}$ .

*Решение.* Поскольку

$$\oint_L \frac{\sin 3z}{z^3 + z^2} dz = \oint_L \frac{\sin 3z}{z^2} \frac{z+1}{z^2} dz,$$

то, учитывая, что функция  $f(z) = \frac{\sin 3z}{z+1}$  является аналитической в круге  $|z| \leq \frac{1}{2}$ , мы можем воспользоваться формулой (10) при  $n = 2$  и  $z_0 = 0$ . Так как

$$f'(z) = \left( \frac{\sin 3z}{z+1} \right)' = \frac{(\sin 3z)'(z+1) - \sin 3z \cdot (z+1)'}{(z+1)^2} = \frac{3 \cos 3z \cdot (z+1) - \sin 3z}{(z+1)^2},$$

то

$$\oint_L \frac{\sin 3z}{z^3 + z^2} dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i.$$

В заключение этого параграфа вернемся к представлению аналитической в односвязной области  $D$  функции комплексной переменной  $f(z)$  через действительную и мнимую части:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Во всех точках области выполняются условия Коши-Римана

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y), \quad u'_y(x, y) = -v'_x(x, y). \quad (11)$$

Выше мы отметили, что аналитическая функция бесконечно дифференцируема, что дает нам право почленного дифференцирования равенств (11):

$$u''_{xx}(x, y) = v''_{yy}(x, y), \quad u''_{yy}(x, y) = -v''_{xx}(x, y).$$

Отсюда, учитывая, что  $v''_{xy}(x, y) = v''_{yx}(x, y)$  (глава VIII, §3), следует

$$u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0.$$

Таким образом, функция  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$ , т. е. она является гармонической. Совершенно аналогично мы можем убедиться в том, что и функция  $v(x, y)$  также гармоническая.

Гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, называются сопряженными гармоническими. Выше мы убедились в том, что действительная и мнимая части аналитической в односвязной области функции комплексной переменной являются сопряженными гармоническими.

Если известна одна из пары сопряженных гармонических функций, то нетрудно найти и другую. Пусть, например, известна функция  $v(x, y)$ . Найдем  $u(x, y)$ . Для этого заметим, что векторное поле на плоскости

$$\bar{a}(x, y) = v'_y(x, y)\bar{i} - v'_x(x, y)\bar{j}$$

является потенциальным, поскольку  $\partial_y v'_y(x, y) = v''_{yy}(x, y) = -v''_{xx}(x, y) = \partial_x(-v'_x(x, y))$ . Тогда из (11) следует, что функция  $u(x, y)$  служит потенциалом поля  $\bar{a}(x, y)$  и, стало быть, она может быть найдена как криволинейный интеграл

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v'_y(s, t)ds - v'_x(s, t)dt + C, \quad C \in \mathbf{R}, \quad (12)$$

где интегрирование проводится по любой линии, расположенной в области  $D$  и соединяющей точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$ . Эта формула была получена нами в главе XI, §3. Если область  $D$  является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, то функцию  $u(x, y)$  мы можем найти по формуле

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x v'_y(s, y)ds - \int_{y_0}^y v'_x(x_0, t)dt + C. \quad (13)$$

Аналогично, если известна функция  $u(x, y)$ , то для нахождения второй функции  $v(x, y)$  мы можем использовать формулу

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y(s, t)ds + u'_x(s, t)dt + C \quad (14)$$

или формулу

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x u'_y(s, y)ds + \int_{y_0}^y u'_x(x_0, t)dt + C. \quad (15)$$

Таким образом, мы можем, пользуясь формулами (12) – (15), восстановить аналитическую функцию комплексной переменной по одной из ее частей (действительной или мнимой).

**Пример 5.** Убедиться в том, что функция  $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$  может служить действительной частью аналитической функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Найти мнимую часть  $v(x, y)$  и записать выражение для функции  $f(z)$ .

*Решение.* Покажем, что функция  $u(x, y)$  – гармоническая. Действительно,

$$\begin{aligned} u'_x &= e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y), \quad u'_y = e^x(-x \sin y - \sin y - y \cos y); \\ u''_{xx} &= e^x(x \cos y - y \sin y + 2 \cos y), \quad u''_{yy} = e^x(-x \cos y - 2 \cos y + y \sin y) \end{aligned}$$

и, значит,  $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ . Функцию  $v(x, y)$  мы найдем по формуле (15), взяв в качестве стартовой точку  $O(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} v(x, y) &= - \int_0^x e^s (-s \sin y - \sin y - y \cos y) ds + \int_0^y (-t \sin t + \cos t) dt + C = \\ &= \int_0^x (s \sin y + \sin y + y \cos y) de^s + \int_0^y t d \cos t + \sin t \Big|_0^y + C = \\ &= (s \sin y + \sin y + y \cos y) e^s \Big|_0^x - \int_0^x e^s d(s \sin y + \sin y + y \cos y) + \\ &+ t \cos t \Big|_0^y - \int_0^y \cos t dt + \sin y + C = (x \sin y + \sin y + y \cos y) e^x - (\sin y + y \cos y) - \\ &- e^s \Big|_0^x \sin y + y \cos y - \sin t \Big|_0^y + \sin y + C = e^x (x \sin y + y \cos y) + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x (x \cos y - y \sin y) + i(e^x (x \sin y + y \cos y) + C) = \\ &= e^x (x \cos y - y \sin y + i(x \sin y + y \cos y)) + Ci = (x + yi) e^x (\cos y + i \sin y) + Ci = ze^z + Ci. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(z) = ze^z + Ci, \quad C \in \mathbf{R}.$$

## §5. Комплексные числовые ряды. Степенные комплексные ряды. Ряд Тейлора аналитической функции

Теория действительных числовых и степенных рядов естественным образом обобщается и на случай рядов комплексных чисел.

По определению, комплексным числовым рядом называется бесконечная сумма, слагаемыми которой являются комплексные числа:

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n. \quad (1)$$

Ряд (1) считается *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм, т. е. существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n, \quad (2)$$

где  $C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \sum_{k=1}^n c_k$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Предел (2) принимается за *сумму* ряда (1).

Соответственно, ряд (1) *расходится*, если предел (2) не существует или равен бесконечности.

Пусть

$$c_n = a_n + b_n i, \quad n \in \mathbf{N}$$

и  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Тогда  $C_n = A_n + B_n i$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Выше (§1) мы отметили, что предел (2) существует в том и только в том случае, когда существуют оба предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ . Таким образом, ряд (1) *сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (3)$$

составленные из действительных и мнимых частей, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

В главе XII, §1 мы доказали *необходимый признак сходимости* для действительного ряда, который без изменений переносится и на комплексный ряд: *если ряд (1) сходится, то его общее слагаемое исчезает на бесконечности, т.е.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0. \quad (4)$$

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится положительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

Из неравенств  $|a_n|, |b_n| \leq |c_n|$ ,  $n \in \mathbf{N}$  и  $|c_n| \leq |a_n| + |b_n|$ ,  $n \in \mathbf{N}$  и признака сравнения для положительных рядов (глава XII, §1) следует, что *комплексный ряд (1) абсолютно сходится в том и только в том случае, когда абсолютно сходятся оба ряда (3)*. Отсюда мы сразу же заключаем, что *из абсолютной сходимости ряда (1) следует его сходимости*. Обратное, вообще говоря, неверно.

**Пример 1.** Исследовать на сходимости ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (1 + ni) \left( \frac{1+i}{2} \right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}.$$

*Решение.* а) Покажем, что данный ряд сходится абсолютно. Так как

$$\left| (1 + ni) \left( \frac{1+i}{2} \right)^n \right| = |1 + ni| \left| \frac{1+i}{2} \right|^n = \sqrt{1+n^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (1 + ni) \left( \frac{1+i}{2} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1+n^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n.$$

Применим к последнему ряду *признак Даламбера* (глава XII, §1). Здесь  $a_n = \sqrt{1+n^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$ , поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+(n+1)^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}}{\sqrt{1+n^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+(n+1)^2}{1+n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{n^2} + (1 + \frac{1}{n})^2}{\frac{1}{n^2} + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1, \end{aligned}$$

что и означает абсолютную сходимости ряда а).

б) Здесь *абсолютной сходимости не наблюдается*, так как ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

совпадает с гармоническим рядом, который, как мы установили в главе XII, §1, расходится. Сам же ряд б) *сходится*, поскольку мы можем представить его в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1},$$

а оба знакопередающихся ряда в правой части сходятся по *признаку Лейбница* (глава XII, §1).

Комплексным степенным рядом с центром в точке  $z_0 \in \mathbf{C}$  называется ряд, составленный из целых неотрицательных степеней линейного выражения  $z - z_0$  с комплексными коэффициентами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (5)$$

Ряд (5) сходится равномерно к своей сумме  $C(z)$  на множестве  $D$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется номер  $n_\varepsilon$  такой, что при  $n > n_\varepsilon$  для всех  $z \in D$  выполняется неравенство

$$\left| C(z) - \sum_{k=0}^n c_k (z - z_0)^k \right| < \varepsilon \iff \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \right| < \varepsilon.$$

В главе XII, §3 мы доказали *теорему Абеля*, которая позволила нам выяснить структуру множества сходимости действительного степенного ряда. Для комплексного степенного ряда (5) справедлив аналог этой теоремы и его доказательство также совершенно аналогично.

**Теорема Абеля.** Если степенной ряд (5) сходится в некоторой точке  $z_1 \neq z_0$ , то он сходится абсолютно в круге  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ , а в любом круге  $|z - z_0| \leq r$ ,  $0 < r < |z_1 - z_0|$  этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

Из этой теоремы следует, что для некоторого неотрицательного числа  $R$  внутри круга

$$|z - z_0| < R$$

комплексный степенной ряд (5) сходится абсолютно, вне этого круга он расходится, а в точках окружности  $|z - z_0| = R$  требуется дополнительное исследование – там он может как сходиться, так и расходиться. Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Для вычисления радиуса сходимости, как и в главе XII, §3, мы можем в подходящих случаях использовать, например, *признаки Даламбера* или *Коши*.

Точно также, как и в предыдущей главе, несложно проверить, что *внутри круга сходимости степенной ряд (5) мы имеем право почленно дифференцировать и интегрировать любое количество раз и полученные после этого степенные ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд*. Отсюда, в частности, следует, что *сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости*.

Важным для нас примером степенного комплексного ряда является *ряд геометрической прогрессии*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

с комплексным знаменателем  $z$ . Очевидно, радиус его сходимости равен 1 и, таким образом, данный ряд сходится абсолютно в круге  $|z| < 1$ , вне круга он расходится, а в любой точке окружности  $|z| = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 1 \neq 0$$

и, значит, ряд также расходится, поскольку для него не выполняется *необходимое условие сходимости* (4). Сумма этого ряда, как и соответствующего действительного, равна  $\frac{1}{1-z}$ , т. е.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \quad (6)$$

Докажем теперь теорему о разложении аналитической функции в степенной ряд.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в области  $D$  комплексной плоскости и  $z_0 \in D$ . Тогда в круге  $|z - z_0| < r$ ,  $r > 0$ , содержащемся в области  $D$ , данная функция представляется степенным рядом (5), коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad 0 \leq n \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (8)$$

Ряд в правой части равенства (8) называется рядом Тейлора функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  (рядом Маклорена, если  $z_0 = 0$ ).

Докажем теперь. Заметим, прежде всего, что выражение (7) для коэффициентов ряда Тейлора следует из формулы (9) предыдущего параграфа. Далее, поскольку

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{t-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}},$$

то, пользуясь разложением (6), мы можем записать

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}, \quad (9)$$

причем для любой точки  $t$  окружности  $|t-z_0| = r$  ряд в правой части абсолютно сходится при  $\left| \frac{z-z_0}{t-z_0} \right| < 1 \iff |z-z_0| < r$ .

Оценим теперь по модулю разность между функцией  $f(z)$  и  $n$ -ой частичной суммой ряда Тейлора, воспользовавшись интегральной формулой Коши, разложением (9) и свойством 4), §4 интеграла функции комплексной переменной.

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=r} \frac{f(t) dt}{t-z} - \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=r} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}} \right) (z-z_0)^k \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=r} f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}} dt - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}} dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=r} f(t) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|t-z_0|=r} |f(t)| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}} \right| dl. \end{aligned}$$

Ввиду аналитичности функции  $f(z)$  она является непрерывной на окружности  $|z-z_0| = r$  и, стало быть, по теореме Вейерштрасса (глава VIII, §1) ее модуль  $|f(z)|$  ограничен на данной окружности, т.е. найдется константа  $M > 0$ , для которой во всех точках окружности

$$|f(z)| \leq M. \quad (10)$$

Далее, для любой точки  $t$  окружности  $|t-z_0| = r$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{|t-z_0|^{k+1}} = \frac{1}{r} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{|z-z_0|}{r} \right)^k.$$

Остаток сходящегося ряда геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{|z-z_0|}{r} \right)^n$$

бесконечно мал при  $n \rightarrow \infty$  и, значит, для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется номер  $n_\varepsilon$ , начиная с которого

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{|z-z_0|}{r} \right)^k < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Следовательно, для всех точек  $t$  окружности  $|t-z_0| = r$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{rM}, \quad n > n_\varepsilon. \quad (11)$$

Учитывая неравенства (10) и (11), мы можем продолжить начатую выше оценку:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|t-z_0|=r} M \cdot \frac{\varepsilon}{rM} dl = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольного выбора  $\varepsilon$  и следует представление (8).

**Замечание.** Возникает вопрос о *наибольшем радиусе круга* с центром в точке  $z_0$ , внутри которого справедливо разложение (8). Этот радиус равен расстоянию от точки  $z_0$  до ближайшей точки, где теряется аналитичность функции  $f(z)$ .

Запишем *разложения некоторых элементарных аналитических функций комплексной переменной в степенные ряды*. По виду они ничем не будут отличаться от соответствующих разложений функций действительного аргумента, найденных в [главе XII, §3](#), поскольку в §3 настоящей главы мы установили, что производные основных элементарных функций комплексной переменной сохраняют вид производных соответствующих функций действительного аргумента.

- 1)  $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbf{C};$
- 2)  $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, z \in \mathbf{C};$
- 3)  $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbf{C};$
- 4)  $\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, z \in \mathbf{C};$
- 5)  $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbf{C};$
- 6)  $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1;$
- 7)  $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, |z| < 1.$

Из разложения 2) следует, что

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}, 0 \neq z \in \mathbf{C}.$$

Значит, как и случае действительной переменной,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

## §6. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции

*Ряд Лорана в точке  $z_0$*  является обобщением комплексного степенного ряда на случай произвольных целых степеней линейного выражения  $z - z_0$ , т. е. он имеет вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \dots + c_{-m} (z - z_0)^{-m} + \dots + c_{-2} (z - z_0)^{-2} + c_{-1} (z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots \quad (1)$$

Формально ряд Лорана состоит из двух рядов: ряда по отрицательным степеням

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} (z - z_0)^{-m} \quad (2)$$



и ряда по неотрицательным степеням

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (3)$$

Будем считать по определению *ряд Лорана* (1) *сходящимся в точке  $z$ , если сходятся оба ряда (2) и (3)*. Если по крайней мере один из этих рядов расходится, то и ряд (1) также расходится.

Выясним структуру множества сходимости ряда Лорана. Ряд (2) подстановкой  $t = (z - z_0)^{-1}$  сводится к степенному ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} t^m \quad (4)$$

и, если  $r^{-1}$  – конечный радиус его сходимости, то данный ряд абсолютно сходится при  $|t| < r^{-1}$  и, значит, ряд (2) абсолютно сходится, когда

$$|(z - z_0)^{-1}| < r^{-1} \iff |z - z_0| > r,$$

т. е. множеством сходимости ряда (2) является внешность круга радиуса  $r$  с центром в точке  $z_0$ . Если ряд (4) сходится при всех  $t$ , то ряд (2) сходится при  $|z - z_0| > 0$ , т. е. при всех  $z$ , исключая точку  $z_0$ . Ряд же (3) абсолютно сходится в некотором круге  $|z - z_0| < R$ . Тогда *при условии  $r < R$  ряд Лорана (1) абсолютно сходится в кольце  $r < |z - z_0| < R$  и внутри кольца сходимости он допускает почленное дифференцирование и интегрирование*. Во всех точках вне кольца ряд Лорана расходится, так как в каждой такой точке расходится один из рядов (2) или (3). В точках ограничивающих кольцо окружностей ряд (1) может как сходиться, так и расходиться.

**Теорема Лорана.** *Аналитическая в круговом кольце  $0 \leq r < |z - z_0| < R \leq +\infty$  функция  $f(z)$  представляется в этом кольце абсолютно сходящимся *рядом Лорана* (1), коэффициенты которого вычисляются по формулам*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r_1} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad r < r_1 < R, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Доказательство этой теоремы практически не отличается от доказательства *теоремы 2* предыдущего параграфа.

Покажем, что указанное в теореме *разложение в ряд Лорана аналитической в кольце функции единственно*. В самом деле, пусть

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \quad (5)$$

– еще одно разложение этой функции в ряд Лорана. Для любого фиксированного целого числа  $k$  умножим обе части разложения (5) на  $\frac{1}{(z - z_0)^{k+1}}$  и проинтегрируем затем обе части полученного равенства по окружности  $|z - z_0| = r_1$ ,  $r < r_1 < R$ :

$$\oint_{|z-z_0|=r_1} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \oint_{|z-z_0|=r_1} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{(z-z_0)^{k-n+1}} \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \oint_{|z-z_0|=r_1} \frac{dz}{(z-z_0)^{k-n+1}}.$$

В §4 мы установили, что

$$\oint_{|z-z_0|=r_1} \frac{dz}{(z-z_0)^{k-n+1}} = 0,$$

если  $k \neq n$ , а при  $k = n$  данный интеграл равен  $2\pi i$ . Поэтому

$$\oint_{|z-z_0|=r_1} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} = 2\pi i d_k$$

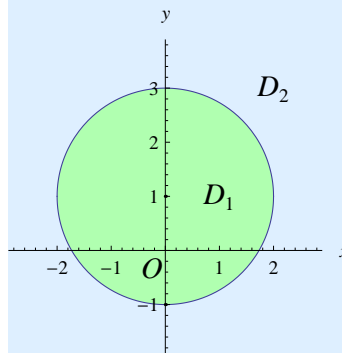
и, значит,

$$d_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r_1} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} = c_k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

что и означает единственность разложения в ряд Лорана.

**Пример 1.** Найти все разложения в ряд Лорана функции  $\frac{z}{z^2+1}$  в точке  $z_0 = i$ .

*Решение.* Эта функция является аналитической везде, за исключением точек  $z = \pm i$ . Найдем ее разложения в ряд Лорана в областях  $D_1: 0 < |z-i| < 2$  и  $D_2: |z-i| > 2$ .



Поскольку

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(z-i) + (z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right),$$

то для решения задачи достаточно разложить в указанных областях функцию  $\frac{1}{z+i}$ . В обоих случаях воспользуемся разложением 6) предыдущего параграфа.

В области  $D_1$ :

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i + (z-i)} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{z-i}{2i} \right)^n = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{2} \right)^n (z-i)^n.$$

Ряд в правой части сходится при  $\left| \frac{z-i}{2i} \right| < 1 \iff |z-i| < 2$ . Таким образом, в области  $D_1$  мы имеем разложение в ряд Лорана

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{2} \right)^n (z-i)^n \right).$$

Аналогично, в области  $D_2$ :

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i + (z-i)} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2i}{z-i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+1}}.$$

Здесь ряд в правой части сходится, когда  $\left| \frac{2i}{z-i} \right| < 1 \iff |z-i| > 2$ . Следовательно, в области  $D_2$

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+1}} \right) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+1}}.$$

Пусть всюду в дальнейшем в этом параграфе функция  $f(z)$  является аналитической в некотором круге  $|z-z_0| < R$  с выколотой точкой  $z_0$ , в которой данная функция не является аналитической. Точка  $z_0$  называется *изолированной особой точкой* функции  $f(z)$ .

Проведем *классификацию особых точек*, пользуясь тем, что по теореме Лорана данная функция в области  $0 < |z-z_0| < R$  разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n. \quad (6)$$

1) Если разложение (6) не содержит отрицательных степеней, то  $z_0$  называется *устранимой особой точкой* функции  $f(z)$ .

2) Если (6) содержит конечное число отрицательных степеней, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad m \geq 1, \quad c_{-m} \neq 0,$$

то точка  $z_0$  называется *полюсом порядка  $m$* . Если  $m = 1$ , то  $z_0$  – *простой полюс*.

3) Если же число отрицательных степеней в разложении (6) бесконечно, то точка  $z_0$  называется *существенно особой*.

Исследуем поведение функции вблизи особой точки.

**Теорема 2.** *Для устранимой особой точки  $z_0$  функции  $f(z)$  существует конечный предел*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

*Если же  $z_0$  – полюс, то существует*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

**Доказательство.** Пусть  $z_0$  – устранимая особая точка. Тогда в области  $0 < |z - z_0| < R$  она разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

В предыдущем параграфе мы установили, что степенной ряд в правой части абсолютно сходится в круге  $|z - z_0| < R$  и его сумма, которую мы обозначим через  $C(z)$ , является аналитической функцией в этом круге и во всех его точках, кроме  $z_0$ , совпадает с функцией  $f(z)$ . Поэтому существует

$$\lim_{z \rightarrow z_0} C(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C(z_0) = c_0.$$

Пусть теперь  $z_0$  – полюс порядка  $m$ . Тогда

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \frac{f_1(z)}{(z-z_0)^m},$$

где

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m}(z-z_0)^n$$

– аналитическая в круге  $|z - z_0| < R$  функция. Поскольку  $\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = c_{-m} \neq 0$ , то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Для существенно особой точки справедлива следующая теорема, которую мы здесь приводим без доказательства.

**Теорема Сохоцкого.** *Если  $z_0$  – существенно особая точка функции  $f(z)$ , то для любого комплексного числа  $w$  (конечного или бесконечно удаленной точки) найдется последовательность комплексных чисел  $z_n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , сходящаяся к  $z_0$ , для которой соответствующая последовательность  $f(z_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  значений функции сходится к  $w$ .*

Из теоремы Сохоцкого следует, что *предел функции в существенно особой точке не существует* (ни конечный, ни бесконечный).

Последние две теоремы позволяют судить о характере особой точки по поведению функции в малой окрестности этой точки.

1) Если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z),$$

то  $z_0$  – *устраняемая особая точка* функции  $f(z)$ .

Действительно, по теореме 2 она не может быть полюсом, а по теореме Сохоцкого она не может быть существенно особой.

Аналогично рассматриваются и два других случая.

2) Если при некотором натуральном  $m$  существует конечный, не равный нулю предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z),$$

то особая точка  $z_0$  является *полосом порядка  $m$* .

3) В том случае, когда ни конечный, ни бесконечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

не существуют, особая точка  $z_0$  является *существенно особой*.

**Пример 2.** Покажем, что особыми точками рациональной функции могут быть только полюсы.

*Решение.* Рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

где  $P_m(z)$ ,  $Q_n(z)$  – полиномы комплексной переменной  $z$  степеней  $m \geq 0$  и  $n \geq 1$ , соответственно, не имеющие общих корней. Очевидно, особыми точками этой функции являются корни знаменателя. Пусть  $z = z_0$  – корень знаменателя кратности  $k$ . Тогда, как мы установили в главе V, §8, мы можем записать знаменатель в виде

$$Q_n(z) = (z - z_0)^k R_{n-k}(z),$$

где  $R_{n-k}(z)$  – полином степени  $n - k$ , для которого число  $z_0$  уже не является корнем. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P_m(z)}{R_{n-k}(z)} = \frac{P_m(z_0)}{R_{n-k}(z_0)} \neq 0$$

и, таким образом, особая точка  $z_0$  – *полюс порядка  $k$*  данной рациональной функции.

**Пример 3.** Определить тип особых точек функции

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}} \sin 2z}{z^3 + 2iz^2 - z}.$$

*Решение.* Поскольку  $z^3 + 2iz^2 - z = z(z+i)^2$ , то у данной функции три особые точки:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -i$ ,  $z_3 = 1$ . Исследуем поведение функции вблизи каждой из них.

$$\lim_{z \rightarrow z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{z-1}} \sin 2z}{z(z+i)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^{\frac{1}{z-1}}}{(z+i)^2} \cdot \frac{\sin 2z}{2z} = \frac{2e^{-1}}{i^2} \cdot 1 = -2e^{-1}.$$

Следовательно,  $z_1 = 0$  – *устраняемая особая точка*.

$$\lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)^2 \frac{e^{\frac{1}{z-1}} \sin 2z}{z(z+i)^2} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{\frac{1}{z-1}} \sin 2z}{z} = \frac{e^{\frac{1}{-i-1}} \sin(-2i)}{-i} = \frac{e^{-\frac{1}{i+1}} \sin 2i}{i} \neq 0.$$

Значит,  $z_2 = -i$  – *полюс второго порядка*.

Покажем, что в точке  $z_3 = 1$  предел функции не существует. Вычислим односторонние пределы в этой точке на действительной оси. Пусть  $z = x \in \mathbf{R}$ . Тогда слева

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} \cdot \frac{\sin 2x}{x(x+i)^2} = 0 \cdot \frac{\sin 2}{(1+i)^2} = 0,$$

а справа

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} \cdot \frac{\sin 2x}{x(x+i)^2} = \infty.$$

Значит, предел

$$\lim_{z \rightarrow z_3} f(z)$$

не существует и, стало быть,  $z_3 = 1$  – *существенно особая точка* данной функции.

## §7. Вычет аналитической функции в особой точке.

### Применение вычетов к вычислению интегралов

Пусть  $z_0$  – изолированная особая точка аналитической в области  $D : 0 < |z - z_0| < R$  функции  $f(z)$ . По [теореме Лорана \(§6\)](#) данная функция разлагается в области  $D$  в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad 0 < r < R, n \in \mathbf{Z}.$$

**Определение.** Вычетом функции  $f(z)$  в особой точке  $z_0$  называется коэффициент  $c_{-1}$  при первой отрицательной степени в разложении в ряд Лорана (1).

Для вычета используется обозначение

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

Таким образом,

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z)dz, \quad 0 < r < R. \quad (2)$$

Если  $z_0$  – *устраняемая особая точка*, то в ее разложении (1) нет отрицательных степеней и поэтому в ней

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = 0.$$

Найдем формулу для вычисления вычета в полюсе порядка  $m$ . В этом случае

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad m \geq 1, c_{-m} \neq 0.$$

Умножив обе части этого равенства на  $(z - z_0)^m$ , мы получим:

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}.$$

Ряд в правой части не содержит отрицательных степеней и вычет в нем является коэффициентом при  $(m - 1)$ -ой степени. Продифференцировав почленно  $(m - 1)$  раз последнее равенство, мы придем к соотношению

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) = (m - 1)! c_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z - z_0)^n,$$

где  $d_n = c_{n-1} (n + m - 1)(n + m - 2) \dots (n + 1)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Отсюда следует, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) = (m - 1)! c_{-1}.$$

Значит, *вычет в полюсе порядка  $m$*  вычисляется по формуле

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)). \quad (3)$$

В частности, *вычет в простом полюсе ( $m = 1$ )* находится по формуле

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Применение вычетов к вычислению интегралов основывается на следующем утверждении.

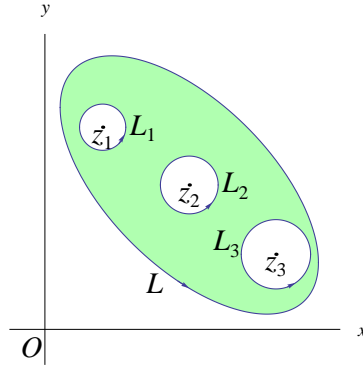
**Теорема.** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в односвязной области  $D$  за исключением конечного числа изолированных особых точек и  $L \subset D$  – простая, замкнутая,

кусочно-гладкая, положительно ориентированная линия, не проходящая ни через одну из особых точек. Тогда

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z),$$

где  $z_k, k = \overline{1, n}$  – особые точки функции, охватываемые контуром  $L$ .

**Доказательство.** Пусть  $L_k, k = \overline{1, n}$  – непересекающиеся, положительно ориентированные окружности с центрами в особых точках  $z_k$ , находящиеся внутри контура  $L$ .



По интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} f(z)dz,$$

а из формулы (2) следует, что

$$\oint_{L_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_k} f(z), \quad k = \overline{1, n}.$$

Поэтому

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{res}_{z_k} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

**Пример.** Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=3} \left( \sin \frac{1}{z+2i} + \frac{\cos z}{z^2(2z-\pi)} \right) dz.$$

*Решение.* Подынтегральная функция, которую мы обозначим через  $f(z)$ , является аналитической в круге  $|z| < 3$  за исключением трех особых точек

$$z_1 = -2i, z_2 = 0, z_3 = \frac{\pi}{2}.$$

В точке  $z_1 = -2i$  предел подынтегральной функции не существует. В самом деле, при  $z = x - 2i$

$$f(x - 2i) = \sin \frac{1}{x} + \frac{\cos(x - 2i)}{(x - 2i)^2(2x - \pi - 4i)}.$$

Предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

не существует (глава IV, §5, пункт 2), а

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x - 2i)}{(x - 2i)^2(2x - \pi - 4i)} = \frac{\cos(-2i)}{(-2i)^2(-\pi - 4i)} = \frac{\cos 2i}{4(\pi + 4i)},$$

поэтому  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x - 2i)$ , а, значит, и  $\lim_{z \rightarrow -2i} f(z)$  не существуют. Таким образом,  $z_1 = -2i$  — существенно особая точка функции  $f(z)$ . Вычет в этой точке мы найдем, разложив функцию в ряд Лорана. Воспользовавшись найденным в §5 разложением синуса в ряд Маклорена, получим:

$$\sin \frac{1}{z + 2i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!(z+2i)^{2n-1}}, \quad z \neq -2i.$$

Функция  $\frac{\cos z}{z^2(2z-\pi)}$  является аналитической в точке  $-2i$ , поэтому

$$\operatorname{res}_{-2i} f(z) = \operatorname{res}_{-2i} \sin \frac{1}{z+2i} = 1.$$

В точке  $z_2 = 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \sin \frac{1}{z+2i} = 0 \cdot \sin \frac{1}{2i} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \cdot \frac{\cos z}{z^2(2z-\pi)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2z-\pi} = \frac{\cos 0}{0-\pi} = -\frac{1}{\pi},$$

поэтому

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = 0 - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \neq 0.$$

Следовательно,  $z_2 = 0$  — полюс второго порядка данной функции. Вычет в нем мы найдем по формуле (3) при  $m = 2$ . Поскольку

$$(z^2 f(z))' = \left( z^2 \sin \frac{1}{z+2i} + \frac{\cos z}{2z-\pi} \right)' = 2z \sin \frac{1}{z+2i} - \frac{z^2}{(z+2i)^2} \cos \frac{1}{z+2i} - \frac{(2z-\pi) \sin z + 2 \cos z}{(2z-\pi)^2},$$

то

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 f(z))' = -\frac{2}{\pi^2}.$$

Наконец, в точке  $z_3 = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(z) &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \sin \frac{1}{z+2i} + \frac{\cos z}{z^2(2z-\pi)} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \sin \frac{1}{z+2i} - \frac{1}{2z^2} \cdot \frac{\sin(z-\frac{\pi}{2})}{z-\frac{\pi}{2}} \right) = \sin \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2i} - \frac{2}{\pi^2} \cdot 1 = \sin \frac{2}{\pi+4i} - \frac{2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Значит,  $z_3 = \frac{\pi}{2}$  — устранимая особая точка и, стало быть,

$$\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} f(z) = 0.$$

Осталось применить доказанную теорему:

$$\oint_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ |z_k|=3}}^3 \operatorname{res}_{z_k} f(z) = 2\pi i \left( 1 - \frac{2}{\pi^2} + 0 \right) = 2 \left( \pi - \frac{2}{\pi} \right) i.$$

Рассмотрим важный в приложениях случай вычисления несобственного интеграла.

**Следствие.** Предположим, что функция  $f(z)$  комплексного аргумента  $z$  является аналитической в открытой полуплоскости  $\operatorname{Re} z < x_0$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}$ , непрерывной в замкнутой полуплоскости  $\operatorname{Re} z \leq x_0$  за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$ ,  $\operatorname{Re} z_k < x_0$ ,  $k = \overline{1, n}$  и

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re} z \leq x_0}} f(z) = 0.$$

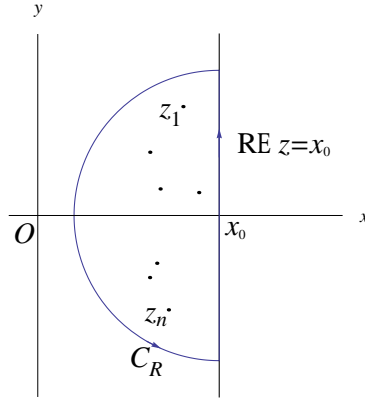
Тогда при любом  $\gamma > 0$  сходится несобственный интеграл

$$\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{\gamma z} f(z) dz,$$

где интегрирование проводится по прямой  $z = x_0 + yi$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ , параллельной мнимой оси, и

$$\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{\gamma z} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k}(e^{\gamma z} f(z)).$$

**Доказательство.** Возьмем произвольный замкнутый контур  $L_R$ ,  $R > 0$ , охватывающий особые точки  $z_k, k = \overline{1, n}$  и состоящий из отрезка прямой  $\operatorname{Re} z = x_0$  и полуокружности  $C_R : |z - x_0| = R, \operatorname{Re} z \leq x_0$ .



Очевидно, у функций  $f(z)$  и  $e^{\gamma z} f(z)$  общие особые точки. Тогда по доказанной выше теореме

$$\oint_{L_R} e^{\gamma z} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k}(e^{\gamma z} f(z))$$

и, значит, интеграл

$$\oint_{L_R} e^{\gamma z} f(z) dz$$

не зависит от  $R$ . Разобьем его на сумму двух интегралов:

$$\oint_{L_R} e^{\gamma z} f(z) dz = \int_{C_R} e^{\gamma z} f(z) dz + \int_{x_0-Ri}^{x_0+Ri} e^{\gamma z} f(z) dz.$$

По *лемме Жордана*, доказательство которой можно найти, например, в учебнике *Свейникова А.Г.* и *Тихонова А.Н.* по теории функций комплексной переменной, приведенному в списке литературы,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{\gamma z} f(z) dz = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{L_R} e^{\gamma z} f(z) dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{\gamma z} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{x_0-Ri}^{x_0+Ri} e^{\gamma z} f(z) dz = \\ &= 0 + \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{\gamma z} f(z) dz = \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{\gamma z} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k}(e^{\gamma z} f(z)). \end{aligned}$$



## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М.  
*Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М., Наука, 1981.
2. Кудрявцев Л.Д.  
*Краткий курс математического анализа. ТТ. 1, 2.* – Висагинас, Alfa, 1998.
3. Фихтенгольц Г.М.  
*Курс дифференциального и интегрального исчисления. ТТ. 2, 3.* – М., Наука, 1969.
4. Пискунов Н.С.  
*Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.2.* – М., Наука, 1985.
5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н.  
*Теория функций комплексной переменной.* – М., Физматлит, 2005.
6. *Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа.* (под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича) – М., Наука, 1986.
7. Ласый П.Г.  
*Лекции по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ (I семестр)* [Электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: <http://rep.bntu.by/handle/data/4484>. – Дата доступа: 22.03.2013.
8. Ласый П.Г.  
*Лекции по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ (II семестр)* [Электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: <http://rep.bntu.by/handle/data/5021>. – Дата доступа: 26.06.2013.