

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЙ ВИТКОВ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕКОЙ ПРУЖИНЫ

¹Докукова Н. А., ²Кафтайкина Е. Н.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Иностранное общество с ограниченной ответственностью «Плэйтिका Бел», Минск

Рассматриваются напряженно-деформированные состояния витой цилиндрической пружины, состоящей из однородного упругого материала. Этот конструкционный элемент является одним из основных во многих технических устройствах, поскольку принимает участие в гашении вертикальных колебаний и смягчает удары от запредельных внешних сил [1–3]. Пружина обладает несколькими функциональными свойствами. Она обязана обеспечить стабильную поддержку силовых агрегатов и быть оптимально жесткой. С дугой стороны, должна создавать условия для наилучшего гашения вредных вибраций, устойчивой управляемости, плавности движений при перегрузках.

В постановке динамической задачи теории упругости были приняты гипотеза плоского сечения при кручении и изгибе и гипотеза ненадавливания слоев. Получена математическая модель перемещений изгибов соприкасающейся плоскости к виткам и поворотов поперечных сечений проволоки пружины. Представлены аналитические решения и графические зависимости.

Упругая пружина используется во многих отраслях промышленности: нефтегазовой, горной, энергетической, аэрокосмической и др. Представленный аналитический расчет витой цилиндрической пружины имеет методическое значение в учебном процессе, поскольку выведенные законы движений используемых переменных смещения и угла закручивания поперечного сечения весьма полезны для облегчения понимания ее работы. Полученные расчетные уравнения в общем виде могут быть использованы для проектирования виброизоляторов и подвесок автомобилей.

Для формирования системы уравнений движений рассматривается равновесие элемента ds витой цилиндрической пружины с радиусом витка R и радиусом проволоки r , находящегося в сложном нагрузочном режиме, рис. 1, *a* и *б*. В общем случае нагружения пружина испытывает изгиб в своей плоскости, кручение в поперечных сечениях проволоки, продольное и радиальное растяжение – сжатие. При его достаточно больших величинах прикладываемых нагрузок форма пружины может стать неустойчивой. Динамические уравнения движений элемента пружины ds таковы:

$$L_1(x_3) + d_{12}(x_4) = \psi_1 \sin(\eta\varphi) \sin(pt), \quad (1)$$

$$d_{21}(x_3) + L_2(x_4) = \psi_2 \sin(\eta\varphi) \cos(pt). \quad (2)$$

Здесь

$$L_1 = \frac{1}{R} \partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^4 - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \partial_{\varphi\varphi}^2 + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \partial_{tt}^2,$$

$$L_2 = -\frac{GJ_k}{EJ_1} \partial_{\varphi\varphi}^2 + 1 + \frac{m_0 R^3 r}{EJ_1} \partial_{tt}^2,$$

$$d_{12} = \left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \partial_{\varphi\varphi}^2 + \frac{m_0 R^3 r}{EJ_1} \partial_{tt}^2,$$

$$d_{21} = \left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{1}{R} \partial_{\varphi\varphi}^2 + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \partial_{tt}^2,$$

η – любое нецелое действительное положительное число, p – частота внешних воздействий на пружину, $F_1(\varphi, t) = \psi_1 \sin(\eta\varphi) \sin(pt)$ и $F_2(\varphi, t) = \psi_2 \sin(\eta\varphi) \cos(pt)$ – внешние нагрузки, количество витков пружины равно 2,5 или $\varphi \in [0, 5\pi]$ рад. на рис. 1, а.

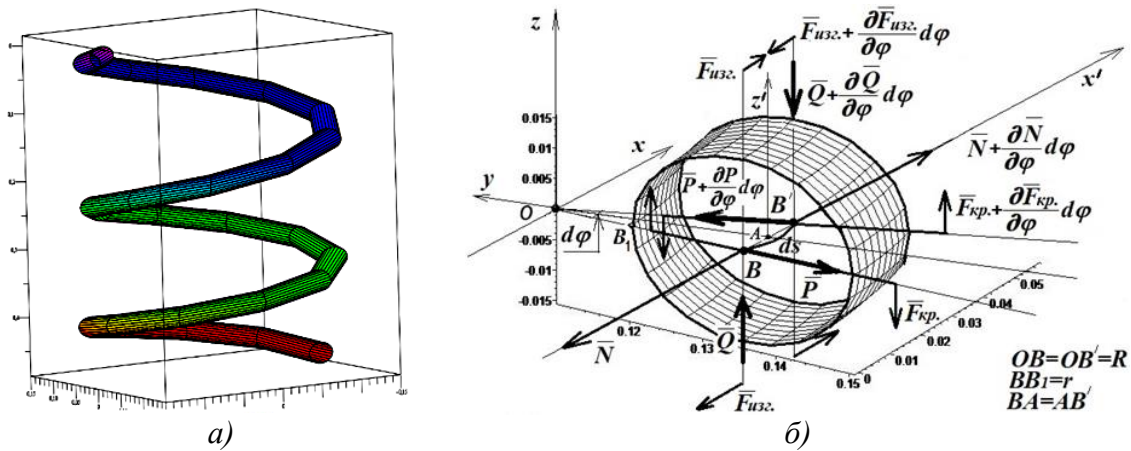


Рис. 1. Пружина с 2,5 витками на (а) и ее бесконечно малый элемент ds с приложенными нагрузками на (б)

Каноническое представление общей системы уравнений динамики напряженно-деформируемого состояния пружины с особым нагрузочным режимом [4, 5]:

$$-\frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^6 x_3}{\partial \varphi^6} + \frac{m_0 R^2 r}{EJ_1} \frac{\partial^6 x_3}{\partial \varphi^4 \partial t^2} - 2 \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^4} - \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \left(1 + 2 \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^2 \partial t^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} = W(\varphi, t), \quad (3)$$

$$-\frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^6 x_4}{\partial \varphi^6} + \frac{m_0 R^2 r}{EJ_1} \frac{\partial^6 x_4}{\partial \varphi^4 \partial t^2} - 2 \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^4 x_4}{\partial \varphi^4} - \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \left(1 + 2 \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{\partial^4 x_4}{\partial \varphi^2 \partial t^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2} = Q(\varphi, t), \quad (4)$$

где правые части формул (3) и (4)

$$W(\varphi, t) = \left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1} k^2 - p^2 r \frac{m_0 R^3}{EJ_1}\right) \psi_1 \sin(\eta\varphi) \sin(pt) + \left(\left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) k^2 + p^2 r \frac{m_0 R^3}{EJ_1}\right) \psi_2 \sin(\eta\varphi) \cos(pt), \quad (5)$$

$$Q(\varphi, t) = \left(\left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{k^2}{R} + p^2 \frac{m_0 R^3}{EJ_1}\right) \psi_1 \sin(\eta\varphi) \sin(pt) + \left(\frac{k^4}{R} + \frac{GJ_k}{EJ_1 R} k^2 - p^2 \frac{m_0 R^3}{EJ_1}\right) \psi_2 \sin(\eta\varphi) \cos(pt). \quad (6)$$

Методом разделения переменных из уравнения, например, (3) получаются два независимых уравнения, при этом $x_3^c(\varphi, t) = X_3(\varphi)T_1(t)$ является решением однородной системы (3), (4),

$$X_3^{(6)} + \left(2 + \frac{r}{R} \lambda\right) X_3^{(4)} + \left(1 - \lambda \left(1 + \frac{r}{R}\right) (1 + 2a_1 R)\right) X_3'' + \lambda X_3 = 0, \quad (7)$$

$$T_1'' + \frac{a_1 \lambda}{a_5} T_1 = 0, \quad (8)$$

где $a_1 = \frac{GJ_k}{EJ_1 R}$, $a_5 = \frac{m_0 R^3}{EJ_1}$, λ – произвольная положительная константа, $\lambda > 0$.

Начальные условия для однородной системы (3), (4)

$$x_3^o(\varphi, 0) = \theta_1(\varphi), \quad x_4^o(\varphi, 0) = \theta_2(\varphi), \quad (9)$$

$$\partial_t(x_3^o(\varphi, 0)) = 0, \quad \partial_t(x_4^o(\varphi, 0)) = 0, \quad (10)$$

и граничные условия неподвижных концов

$$x_3^o(0, t) = 0, \quad \partial_\varphi(x_3^o(0, t)) = 0, \quad (11)$$

$$\partial_{\varphi\varphi}^2(x_3^o(0, t)) = 0, \quad \partial_{\varphi\varphi\varphi}^3(x_3^o(0, t)) = 0, \quad (12)$$

$$x_4^o(0, t) = 0, \quad \partial_\varphi(x_4^o(0, t)) = 0. \quad (13)$$

Здесь θ_1 и θ_2 – некоторые функции, зависящие от переменной φ .

Используем начальные условия для частного решения системы (3), (4)

$$x_3^*(\varphi, 0) = \theta_3 \sin(\eta\varphi), \quad x_4^*(\varphi, 0) = \theta_4 \sin(\eta\varphi), \quad (14)$$

$$\partial_t(x_3^*(\varphi, 0)) = \theta_5 \sin(\eta\varphi), \quad \partial_t(x_4^*(\varphi, 0)) = \theta_6 \sin(\eta\varphi), \quad (15)$$

и граничные, не противоречащие физической сути задачи, для одного закрепленного сечения S и колеблющегося противоположного сечения на другом конце пружины со скоростью v_0 по закону $x_0 \sin(pt + \alpha)$, где $x_0 = v_0/p$

$$x_3^*(0, t) = 0, \quad x_4^*(5\pi, t) = v_0 \sin(pt + \alpha)/p, \quad (16)$$

$$\partial_{\varphi\varphi}^2(x_3^*(0, t)) = 0, \quad \partial_{\varphi\varphi}^2(x_4^*(5\pi, t)) = -v_0 \eta^2 \sin(pt + \alpha)/p, \quad (17)$$

$$x_4^*(0, t) = 0, \quad \partial_\varphi(x_4^*(5\pi, t)) = 0. \quad (18)$$

Объединяя частные решения и решения однородной системы дифференциальных уравнений в частных производных, получим окончательные общие решения задачи (1), (2) в общем виде

$$x_3(\varphi, t) = \cos(p_1 t) (\sigma_1 \cos(\omega_1 \varphi) + \sigma_2 \sin(\omega_1 \varphi) + \sigma_3 \cos(\omega_2 \varphi) + \sigma_4 \sin(\omega_2 \varphi) + \sigma_5 \cos(\omega_3 \varphi) + \sigma_6 \sin(\omega_3 \varphi)) + \left(\frac{q_{11}}{\delta^2 - p^2} \sin(pt) + \frac{q_{12}}{\delta^2 - p^2} \cos(pt) \right) \sin(\eta\varphi), \quad (19)$$

$$x_4(\varphi, t) = \cos(p_1 t) (h_{21} (\sigma_1 \cos(\omega_1 \varphi) + \sigma_2 \sin(\omega_1 \varphi)) + h_{22} (\sigma_3 \cos(\omega_2 \varphi) + \sigma_4 \sin(\omega_2 \varphi)) + h_{23} (\sigma_5 \cos(\omega_3 \varphi) + \sigma_6 \sin(\omega_3 \varphi))) + \left(\frac{q_{21}}{\delta^2 - p^2} \sin(pt) + \frac{q_{22}}{\delta^2 - p^2} \cos(pt) \right) \sin(\eta\varphi). \quad (20)$$

Для численной реализации решений напряженно-деформированного состояния пружины, находящейся в условиях внешнего нагрузочного режима, выберем следующие коэффициенты: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ н/м², $G = 8,0 \cdot 10^{10}$ н/м², $\rho^* = 7,86 \cdot 10^3$ кг/м³, $\mu = 0,35$ – коэффициент Пуассона; $J_1 = 3,21 \cdot 10^{-4}$ м⁴, $J_k = 7,95 \cdot 10^{-8}$ м⁴, $m_0 = 6,897$ кг/м, $R = 0,15$ м, $r = 0,015$ м, $p = 1,8$ рад/с, $\eta = 0,05$, $\theta_1 = 0,2$, $\psi_1 = 10^{-6}$, $\psi_2 = 0,0$, $v_0 = 1,152$ м/с, $\alpha = 0$ рад., угол наклона витков – 15°. Тогда вычисляются параметры: $\lambda = 0,1103311115$, $\omega_1 = 0,5241683003$ рад/с, $\omega_2 = 1,208934347$ рад/с, $\omega_3 = 0,5241740626$ рад/с, $p_1 = 448,3661465$ рад/с.

Численные значения общих решений (19), (20) примут вид:

$$x_3(\varphi, t) = 1016.840644 \cos(448.3661465 t) \sin(0.5241683003 \varphi) + 0.002244434 \cos(448.3661465 t) \sin(1.208934347 \varphi) - 1016.834642 \cos(448.3661465 t) \sin(0.5241740626 \varphi) + 0.639952346 \sin(1.8 t) \sin(0.05 \varphi) \quad (21)$$

$$x_4(\varphi, t) = 1862.729261 \cos(448.3661465 t) \sin(0.5241683003 \varphi) + 0.021867831 \cos(448.3661465 t) \sin(1.208934347 \varphi) - 1862.759219 \cos(448.3661465 t) \sin(0.5241740626 \varphi) + 0.010666876 \sin(1.8 t) \sin(0.05 \varphi) \quad (22)$$

В справедливости полученных решений можно убедиться, если их подставить в уравнения исходной задачи (1), (2) и ее краевые условия (9)–(18) [6–15].

Трехмерное представление напряженно-деформированного состояния витой цилиндрической пружины вследствие вынужденного динамического нагружения представлены на рис. 2, полученные путем использования формул (21) и (22) – законов движений смещения и угла закручивания поперечного сечения проволоки в пакете символьного моделирования Maple. На всех рисунках крайний верхний конец пружины от которого отсчитывается угол φ не меняет своего положения в начале выбранной системы координат $x = 0,15$ м, $y = 0,0$ м, $z = 0,0$ м, $\varphi = 0$ рад., поскольку по условию задачи и ее граничным условиям оно закреплено и неподвижно. На первом рис. 2 в момент времени $t = 0$ с, на остальных показаны развивающиеся вынужденные колебания в последующие моменты времени.

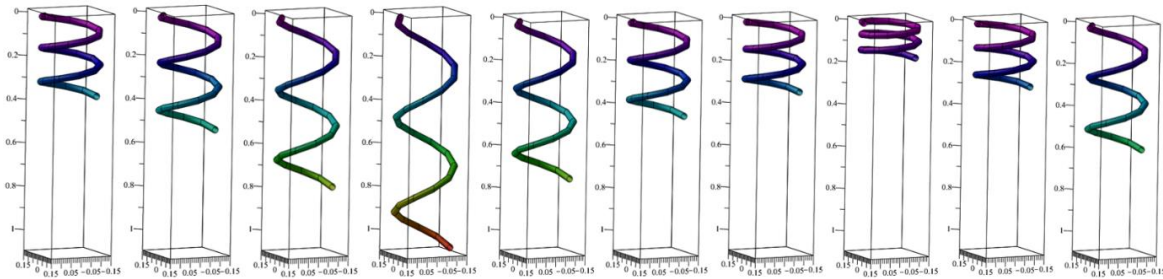


Рис. 2. Пространственные вынужденные колебания цилиндрической пружины со смещениями ее витков в различные моменты времени

Компоненты перемещений в цилиндрической системе координат, с учетом гипотезы плоских сечений, таковы:

$$u_\varphi = 0, \quad u_\rho = \rho - \sqrt{\rho^2 - (x_3(\varphi, t) + r \cos(x_4(\varphi, t)))^2}, \quad u_z = x_3(\varphi, t) + r \cos(x_4(\varphi, t)), \quad (23)$$

здесь r – радиус поперечного сечения проволоки цилиндрической пружины, который равен 0,015 м, ρ – расстояние от неподвижного центра цилиндрической системы координат до поверхности проволоки, поэтому $\rho \in [0,135; 0,165]$ м. При $\rho = 0,15$ м, $\varphi \in [0; 5\pi]$ рад. и $z \in [0; 0,35]$ м кривая линия витой пружины в цилиндрической системе координат описывает среднюю линию.

Компоненты тензора относительной деформации упругого материала пружины: – нормальные

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \quad (24)$$

– касательные

$$2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{\rho z} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} = 0, \quad 2\varepsilon_{\rho\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}. \quad (25)$$

После подстановки формул (21) и (22) в (23)–(25) получаются графики деформаций в относительных единицах, представленные на рис. 3.

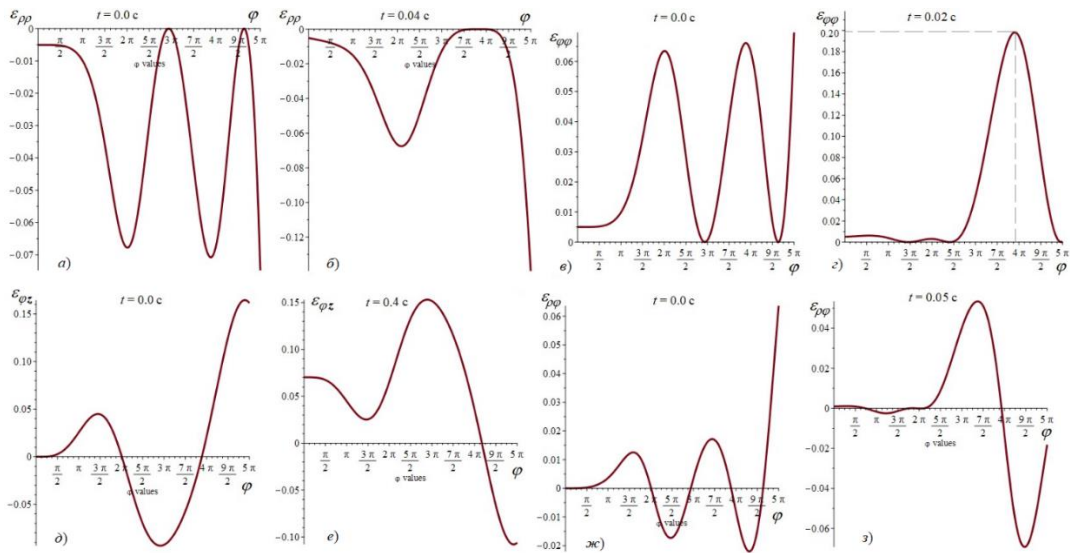


Рис. 3. Деформации цилиндрической пружины на (а), (в), (д) и (ж) в начальный момент времени, на (б), (г), (е) и (з) в различные моменты времени от 0,02 с до 0,4 с

Пространственное напряженно-деформированное состояние цилиндрической пружины, находящейся в сложном нагрузочном режиме показано на рис. 4. Для всех расчетов значительно преувеличены нагрузки за пределами усилиями без учета их критических значений для наилучшего визуального наблюдения в анимационных файлах за движением и сложным напряженно-деформированным состоянием. Силы и моменты превышают величины $5,0 \cdot 10^6$ Н и $5,0 \cdot 10^5$ Нм для стальной пружины диаметром 30 см и радиусом сечения 1,5 см.

Как видно на рис. 4, б поперечное сечение 4π повернуто почти на $2\pi/5$ относительно близлежащего сечения. Произведем простейшие расчеты. Некоторое сечение, находящееся в положении $\varphi = 4\pi$ рад. закручено на угол $\Delta\chi_4(\varphi, t) \approx 2\pi/5$ рад. или чуть меньше четверти окружности по отношению к соседнему. Вычислим на какую долю повернуто исходное сечение или относительную деформацию $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, если целым является полная окружность,

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{|\Delta\chi_4(4\pi, 0.02)|}{2\pi} = 0,2. \quad (26)$$

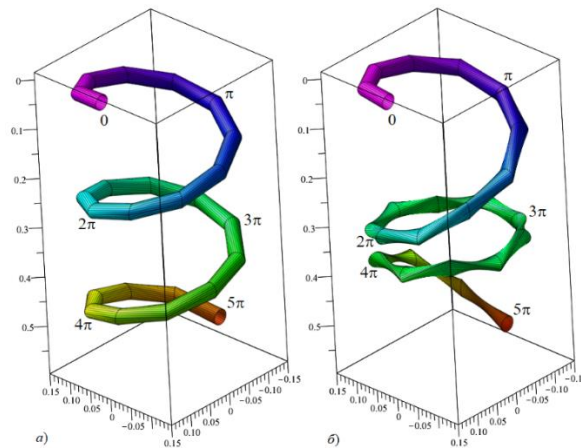


Рис. 4. Пространственное напряженно-деформированное состояние цилиндрической пружины, находящейся в сложном нагрузочном режиме

Сравним этот результат с рис. 3, з при $t = 0,02$ с и $\varphi = 4\pi$ рад. Они практически совпадают.

Выводы. Математическая модель пространственного напряженно-деформированного состояния цилиндрической пружины, находящейся в динамическом сложном

нагрузочном режиме, выведена верно, о чем свидетельствуют сопоставленные величины тензора деформаций (24), (25) и графические явные схемы на рис. 4, полученные на основании аналитических решений (19) и (20) полностью проинтегрированной задачи математической физики относительно неизвестных двухпараметрических функций $x_3(\varphi, t)$ и $x_4(\varphi, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман, В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
2. Василевич, Ю. В. Механика материалов: учебное пособие / Ю. В. Василевич. – Минск: БНТУ, 2005.
3. Чигарев, А.В. Введение в мехатронику: учебное пособие / А. В. Чигарев, К. Циммерманн, В. А. Чигарев. – Минск: БНТУ, 2013. – 388 с.
4. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
5. Dokukova, N. A. General laws governing in mechanical vibratory systems / N. A. Dokukova, P. N. Konon // JEPT. – 2006. – Vol. 79, No. 4. – P. 824–831.
6. Докукова, Н. А. Метод линеаризации и его применение для анализа нелинейных колебательных систем / Н. А. Докукова, М. Д. Мартыненко // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук. – 1999. – Т. 3. – С. 108–111.
7. Мартыненко, М. Д. О колебательных процессах в механических системах / М. Д. Мартыненко, Н. А. Докукова, Л. И. Бойко // Инженерно-физический журнал. – 1999. – Т. 72(3). – С. 491–494.
8. Dokukova, N. A. Equivalence of the Impedance Method and the Method of Amplitude-Frequency Characteristics for Investigations of Vibrations in Hydraulically Powered Supports / N. A. Dokukova, P. N. Konon // Journal of engineering physics and thermophysics. – 2003. – Vol. 76(6). – P. 1401–1404.
9. Dokukova, N. A. Generalities of passive vibration dampers isolating vibrations / N. A. Dokukova, P. N. Konon // Journal of engineering physics and thermophysics. – 2006. – Vol. 79(2). – P. 412–417.
10. Высоцкий, М. С. Метод исследования механических колебательных систем с помощью дифференциальных операторов / М. С. Высоцкий, Н. А. Докукова, П. Н. Конон // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2006. – Т. 50. – С. 114–119.
11. Dokukova, N. A. Nonnatural vibrations / N. A. Dokukova, P. N. Konon, E. N. Kaftaikina // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2008. – Vol. 81(6). – P. 1191–1196.
12. Dokukova, N. A. / Nonlinear vibrations of hydraulic / N. A. Dokukova, M. D. Martynenko, E. N. Kaftaikina // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2008. – Vol. 81(6). – P. 1197–1200.
13. Dokukova, N. A. General patterns of improper vibrations of dynamical systems with arbitrary number of degrees of freedom / N. A. Dokukova, E. N. Kaftaikina, V. V. Zenkovich // Proceedings of scientific progress – 2011: Proceedings of the 7th International Scientific Conference, Sofia. – 2011. – Vol. 9. – P. 56–64.
14. Kaftaikina, E. N. General characteristic equation of dynamic multielement system / E. N. Kaftaikina [et al.] // Математика. Дифференциальные уравнения. – 2015.
15. Dokukova, N. A. One method for solving the dynamics of bending and twisting of the ring / N. A. Dokukova, E. N. Kaftaikina, P. N. Konon // Математика. – 2015.

Поступила: 31.01.2021