

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГИБКОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО СЛЕДЯЩЕЙ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ

Холодарь Б. Г.

*Брестский государственный технический университет, Брест*

При геометрически-линейном подходе к задаче о нагружении консольного стержня поперечной силой, приложенной на свободном конце, максимальные значения момента, напряжений и деформаций возникают в заделке. Ситуация, однако, меняется в задаче о больших перемещениях стержней, когда допущения такого подхода нарушаются и возникает необходимость использования теории гибких стержней. При этом задача об изгибе гибкого линейно-упругого стержня на участке, свободном от распределенной нагрузки, сводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, решение которого выражается через эллиптические интегралы [1, 2]. Несмотря на наличие аналитического решения, получение результатов сопряжено с необходимостью приближенного определения некоторых числовых параметров, что можно выполнить, например, с использованием средств вычислительной техники.

Ниже рассматривается задача о нагружении гибкого стержня следящей поперечной силой, остающейся перпендикулярной осевой линии стержня при его изгибе. Решение строится путем численного интегрирования двух исходных уравнений первого порядка. При этом ролью возникающего в сечениях изогнутого стержня продольного усилия пренебрегаем.

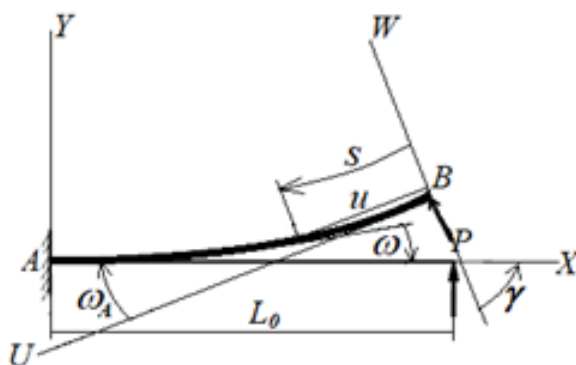


Рис. 1. Координатная система и обозначения

Задачу удобно рассматривать не в исходных координатах  $XY$ , а в подвижных координатах  $UW$  с началом на свободном торце стержня [1], поскольку при этом момент в точках оси не зависит от прогиба и однозначно определяется через координату  $u$ :  $M(u) = P \cdot u$ . Вводим в рассмотрение также дуговую координату  $S$  вдоль изогнутой оси стержня и угол наклона касательной  $\omega(u)$  к оси  $U$  (рис.1).

По определению кривизны плоской кривой  $\kappa = \frac{d\omega}{ds}$  и из геометрических соотношений

$$\frac{du}{ds} = \cos\omega, \quad \frac{dw}{ds} = \sin\omega,$$

находим

$$K(u) = \int_0^u \kappa du = \int_0^\omega \cos \omega d\omega = \sin \omega,$$

что устанавливает зависимость между величинами  $\omega$  и  $u$ :  $\omega = \arcsin K$ .

В соответствии с гипотезой плоских сечений связь кривизны упругой оси с действующим в сечении стержня моментом  $M = Pu$  имеет вид

$$\kappa = \frac{M}{EJ},$$

что приводит к зависимости

$$K = \frac{Pu^2}{2EJ} = \frac{PL^2}{2EJ} \xi^2 = k_u^2 \xi^2, \quad (1)$$

где  $\xi = u/L_0$ ,  $k_u = \sqrt{\frac{P}{2EJ}} L$ ;  $E$  – модуль упругости материала;  $J$  – момент инерции сечения.

Выразив  $ds = \frac{du}{\cos \omega} = \frac{du}{\sqrt{1-K^2}}$ , через интегралы

$$\zeta = \frac{s}{L} = \int_0^u \frac{du}{\cos \omega} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{1-k_u^4 \xi^4}}, \quad w = \int_0^\xi tg \omega d\xi$$

находим связь между координатами  $U$ ,  $W$  и  $S$ .

При определении величин интегралов  $\zeta = \int_0^u \frac{du}{\cos \omega}$  и  $w = \int_0^\xi tg \omega d\xi$  функции  $1/\cos \omega$  и  $tg \omega$  аппроксимировались кубическими сплайнами по координате  $u$ , а их последующее интегрирование выполнялось в аналитической форме по участкам разбиения  $u_j \leq u \leq u_{j+1}$ . Итерационное определение координаты  $u$ , при которой для заданного  $k_u$  достигается значение  $S = 1,0$  или значение  $\omega = \pi/2$ , вызывает необходимость в использовании шага различной длины.

Найдя величины  $u_A$  и  $w_A$ , а также угол поворота  $\gamma$  осей  $UW$  относительно исходных  $XU$ , по формулам

$$\begin{aligned} x_j &= (u_A - u_j) \cdot \sin \gamma + (w_A - w_j) \cdot \cos \gamma, \\ y_j &= (u_A - u_j) \cdot \cos \gamma - (w_A - w_j) \cdot \sin \gamma, \end{aligned}$$

определяем положение точек изогнутой оси стержня.

Для общего представления о поведении стержня при произвольных уровнях нагрузки удобно от моментов перейти к безразмерной характеристике напряженно-деформированного состояния материала – деформации материала наружного растянутого слоя сечений стержня в точках его упругой оси.

С этой целью примем, что максимально допустимый момент равен значению  $M_0$ , составляющему некоторую долю от предельного упругого момента  $M_0 = \psi \cdot \sigma_T W$ , где  $W$  – момент сопротивления сечения,  $\psi$  – уровень допустимых напряжений относительно напряжений текучести материала  $\sigma_T$ . При геометрически-линейном подходе ему бы соответствовала сила  $P_0 = M_0 / L_0$ , так что далее имеем  $0 < P \leq P_0$ . Текущее значение  $P$  можно представить как  $P = k_p P_0$  при коэффициенте  $k_p$  в интервале  $0 \leq k_p \leq 1,0$ , а соответствующая ей деформация  $\varepsilon$  выразится тогда через деформацию текучести материала  $\varepsilon_T = \sigma_T / E$  как  $\varepsilon = \psi k_p \xi \cdot \varepsilon_T$ .

В нашем случае расчеты проведены при следующих числовых данных:  $E = 1 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_T = 1 \cdot 10^5$  МПа,  $L_0 = 100$  см,  $b = 1,0$  см,  $h = 0,25$  см (прямоугольное сечение с шириной  $b$  и высотой  $h$ ). При этом  $\varepsilon_T = 1,0$ , вследствие чего задание упругой области работы конкретного материала может быть выполнено через величину коэффициента  $\psi$ .

При невысоких значениях  $\psi k_p$  возможный вид деформированной оси стержня соответствует рис. 1. С ростом нагрузки угол  $\omega_A$  становится больше  $90^\circ$ , зависимость  $S(u)$  приобретает неоднозначность, а на стержне появляется участок, на котором изгибающий момент имеет одинаковые значения в точках, симметричных относительно точки максимального момента  $S(\omega = \pi / 2) < 1$ , в силу чего изогнутая ось стержня также приобретает

соответствующую симметрию (рис. 2). При нагрузках, для которых реализуются случаи  $\omega = \pi n / 2$ , величина  $\zeta$  становится равной  $\zeta_n = 1 / n$  для последовательных  $n = 1, 2, \dots$ , а стержень делится на  $n$  одинаковых по форме участков длиной  $L_0/n$ .

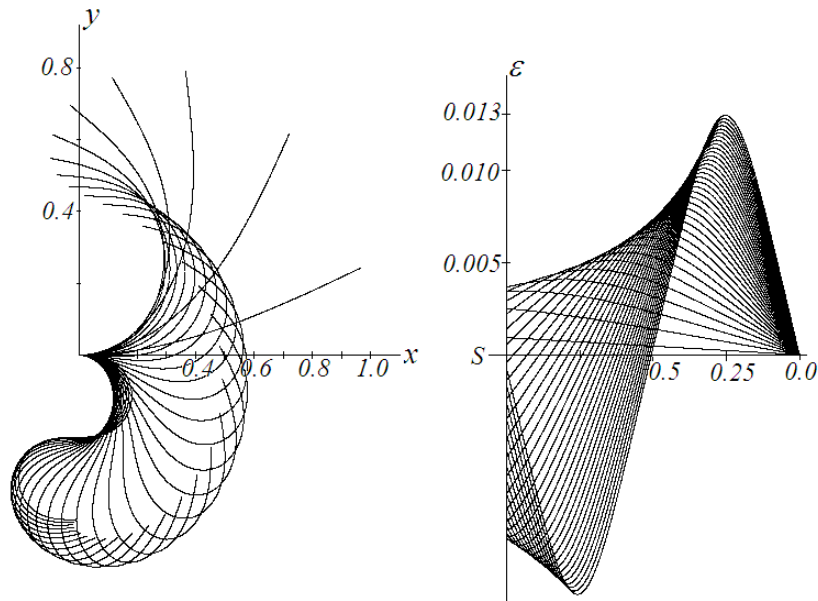


Рис. 2. Формы упругой оси и максимальные деформации в сечениях стержня

При  $\omega_A = \pi$  момент в заделке меняет знак, и кривая  $y(x)$  приобретает перегибную [1] форму равновесия, а при  $\omega_A = 2\pi$  образует изогнутую ось с четырьмя участками длиной  $L_0/4$ . Формы оси изогнутого стержня при  $0 \leq \omega_A \leq 2\pi$ , когда кривая  $y(x)$  имеет участки как положительной, так и отрицательной кривизны, видны на рисунке. Распределение деформаций в поверхностном слое стержня по координате  $S$  при уровне нагрузки  $0 \leq \psi k_p \leq 0,06(6)$  дает представление о положении наиболее нагруженных сечений стержня. По этим данным на рис. 3 построены значения максимальных (квадратики) и минимальных (ромбики) относительных моментов  $m = M/M_T = \varepsilon/\varepsilon_T$  в стержне, а также момента в его заделке (кружки) в зависимости от уровня приложенной силы.

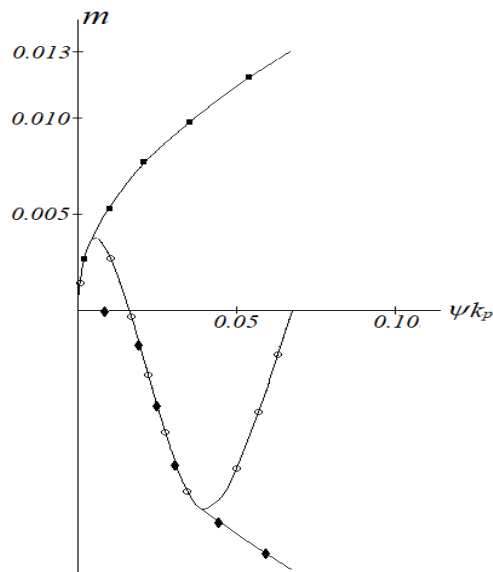


Рис. 3. Относительные моменты в зависимости от нагрузки

Практический интерес представляют как положение нагруженного торца стержня, так и положение на стержне сечений с максимальным изгибающим моментом. Эти сечения при  $\omega_A > \pi/2$  смещаются из положения  $\zeta = 1$  внутрь стержня в положения  $\zeta < 1$ . Параметры, соответствующие углу  $\omega = \pi/2$ , далее снабжены индексом «90».

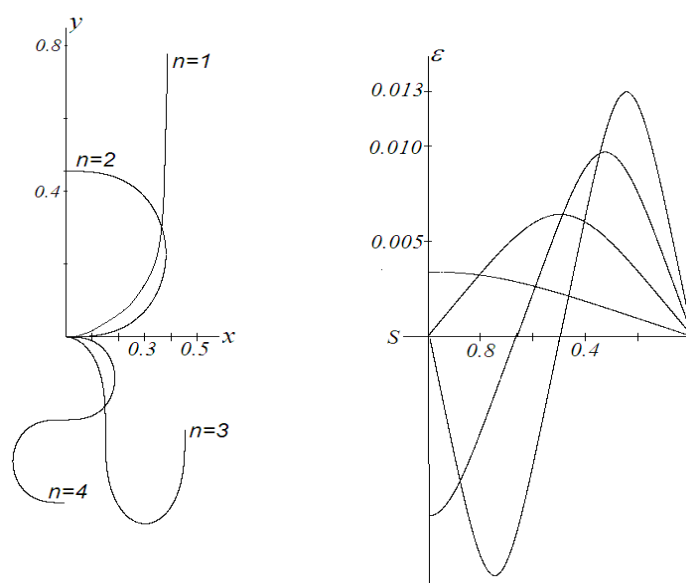


Рис. 4. Упругая ось и деформации для стандартных кривых

Для нагрузки, соответствующей значениям  $n=1, 2, 3, 4$ , на рис. 4 показаны стандартные формы упругой линии. Величины расчетных параметров приведены в табл. 1. Обращают на себя внимание закономерности в представленных данных. Появление коэффициента  $1/24$  в таблице связано с выражениями для моментов инерции и сопротивления прямоугольного сечения.

Таблица 1 – Числовые параметры к стандартным формам упругой оси

$n$	$\zeta_{90} = 1/n$	$\varepsilon/\varepsilon_T = 0,0032275 \cdot n$	$\psi k_p = n^2/24$	$\zeta_{90} = 0,7746/n$
1	1	0,0032275	0,00416(6)	0,77460
2	1/2	0,0064550	0,01666(6)	0,38730
3	1/3	0,0096825	0,037500	0,25820
4	1/4	0,0129100	0,06666(6)	0,19365

Эти результаты позволяет легко представить и построить форму изогнутой оси стержня – при заданном значении коэффициента  $k_p$  нужно провести расчет формы упругой оси для зоны  $0 < \omega \leq \pi/2$  и далее воспользоваться свойствами симметрии и антисимметрии кривых.

По рис. 2 можно увидеть, что в зоне максимального момента нормальная сила в сечении равна или близка к приложенной торцевой. Соответствующие однородные напряжения сжатия составляют весьма малую долю от изгибных ( $\sigma_c/\sigma_{II} = h / 6L_0\zeta_{90}$ ) и не выходят за рамки принятых допущений линейной теории, поэтому предположение о возможности пренебрежения нормальной компонентой силы в сечении можно считать оправданным.

С использованием представлений о симметрии участков упругой оси решается и задача о напряженно-деформированном состоянии гибкого стержня при наличии (кроме

следящей силы) дополнительного сосредоточенного момента  $M_B$ , приложенного на торце стержня. Конкретно был взят случай пропорциональной связи между приложенными торцевыми силовыми факторами:  $M_B = k_M \cdot P \cdot h$ . Расчеты проведены при  $M_B \cdot P > 0$ .

Особенностью задачи сравнительно с рассмотренной выше является появление участка стержня с положительной кривизной при отрицательной величине координаты  $u$ , лежащей в интервале  $-u_0 < u < 0$ , где  $u_0 = k_M \cdot h$ . Форма упругой оси для двух значений коэффициента пропорциональности  $k_M = 1,5$  (слева) и  $k_M = 7,5$  (справа) показана на рис. 5.

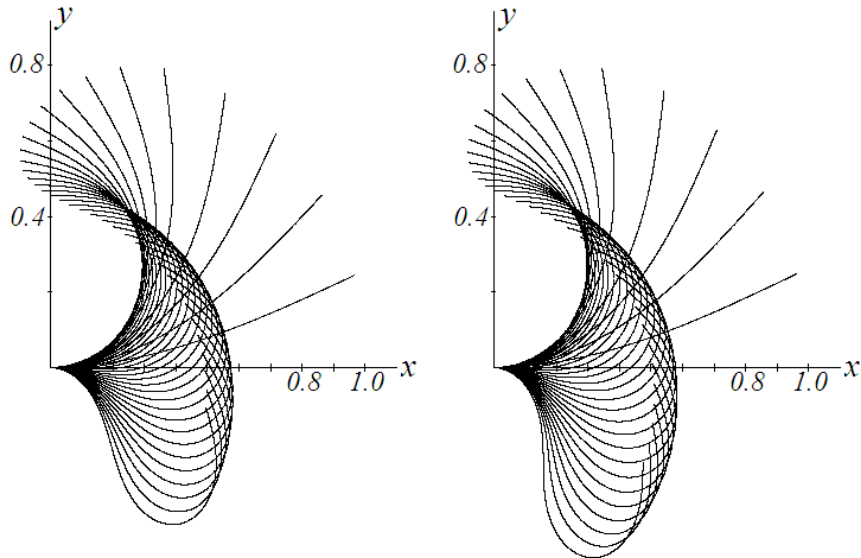


Рис. 5. Влияние торцевого момента на форму упругой оси стержня

Число шагов нагружения и величина поперечной силы на каждом шаге в обоих случаях одинаковы. Для данного рисунка величина шага вдвое ниже, чем для рис. 2. Можно отметить, что добавление торцевого момента при  $M_B \cdot P > 0$  на всех уровнях нагружения увеличивает кривизну оси стержня как в данном примере, так и сравнительно с предыдущей задачей.

Использованная методика решения применима и при любой нелинейно-упругой зависимости между напряжениями и деформациями материала. Для этого достаточно трансформировать выражение (1) применительно к выбранному описанию диаграммы  $\sigma(\varepsilon)$ . Естественно, это не всегда можно выполнить в аналитической форме.

Если воспользоваться известной зависимостью  $\sigma = A\varepsilon^m$ , то вместо (1) получаем

$$K = \left( \frac{P}{AJ} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot u^{\frac{m+1}{m}}, \quad \text{при} \quad J = \frac{2b}{m+2} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^{m+2}.$$

Для связи с предыдущими расчетами принято  $A = E/m$ .

На рис. 6 показаны кривые  $u(x)$  для  $m = 0,75$  и  $m = 0,50$  при одинаковом шаге нагрузки  $P$ . Ее наибольшему значению для случая  $m = 1$  соответствует форма упругой линии, которая находилась бы между стандартными кривыми при  $n = 3$  и  $n = 4$  на рис. 4. Это связано с тем, что с уменьшением параметра  $m$  крутизна кривой  $\sigma(\varepsilon)$  быстро нарастает (жесткость материала значительно увеличивается).

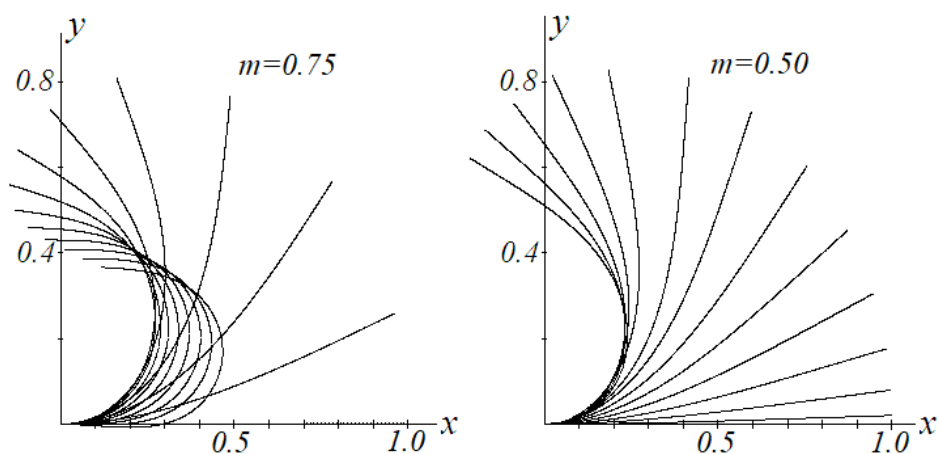


Рис. 6. Формы упругой оси для нелинейного материала

**Выводы.** Присутствие торцевого момента  $M_B$  в случае нелинейно-упругого материала не вносит дополнительных особенностей в развитие напряженно-деформированного состояния стержня сравнительно со случаем линейной упругости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев, С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.] ; под ред. С. Д. Пономарева. – Том 1. – М.: ГНТИ машиностроительной литературы, 1956. – 884 с.
2. Босаков, С. В. К расчету гибких упругих стержней / С. В. Босаков // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 2(247). – С. 2–5.

*Поступила: 26.01.2021*