Избранные проблемы математической физики, теории обработки информации. Методические аспекты преподавания математики и информатики

УДК 51-7

Вейвлет-аппроксимация данных при моделировании поверхностных профилей

Нифагин В. А., Кондратьева Н. А.
Белорусский национальный технический университет

Статистика экспериментальных данных в большинстве своем обнаруживает нестационарность природы того или иного явления: нерегулярные всплески высокой частоты сменяются в данных гладкими низкочастотными волнами, при этом за регулярными структурами вновь следуют высокочастотные осцилляции. Понять причины возникновения тех или иных всплесков, локализовать и идентифицировать их природу позволяет использование вейвлет-функций.

В теории обработки поверхностей изучается вопрос отклонения формы реальных поверхностей от номинальной плоскости. Большое разнообразие совместно воздействующих технологических и эксплутационных факторов искажает номинальную поверхность. С другой стороны, однотипность и стабильность технологии производства и условий эксплуатации различных поверхностей порождают статистически однородную совокупность профилей, имеющих индивидуальные случайные особенности. Это позволяет при экспериментальном анализе форм реальных поверхностей применить статистические методы [1].

Стандартная схема аппроксимации измеряемых профилей рядом вейвлет-функций оказалась ориентированной на исследования одно- и двумерных данных с использованием гетерогенного разложения, каким является разложение в ряд по скейлинг- и вейвлет-функциям [2]. В связи с этим в работе рассматриваются функции, осуществляющие разложение и восстановление данных в базисе скейлингов [3].

При аппроксимации функций из $L_2(R)$ широко применяется разложение в ряда Фурье. В тоже время такой подход не всегда эффективен для осциллирующих функций из-за необходимости вычисления большого числа коэффициентов разложения. В этом смысле более актуальным является использование специального вида ортогональных рядов вида

$$f(x)=\sum_k \alpha_k \varphi_{0k}(x)+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_k \beta_{jk}\psi_{jk}(x), \tag{1}$$

где вейвлет коэффициенты вычисляются по формулам

$$\alpha_k=\int f(x)\overline{\varphi_{0k}(x)}\,dx,\ \ \beta_{jk}=\int f(x)\overline{\psi_{jk}(x)}\,dx, \tag{2}$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ — базисные вейвлеты

$$\varphi_{jk}(x)=2^{j/2}\varphi\left(2^j x-k\right),\ j,k\in\square, \tag{3}$$
$$\psi_{jk}(x)=2^{j/2}\psi\left(2^j x-k\right),$$

осуществляющих аппроксимацию в частотной и пространственной области.

Рассмотрим задачу непараметрической аппроксимации функции $f\in L_2(\square)$ вейвлетами, заменяя неизвестные коэффициенты (2) в разложении (1) оценками, полученными на основе исходных данных. При этом ряды в (1) заменяем на конечные суммы. В качестве порождающих вейвлетов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будем использовать действительнозначные функции, например вейвлеты Добеши [2].

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — исходные данные, содержащие случайную составляющую, тогда для их аппроксимации применим разложение

$$\hat{\vartheta}_{j_1}(x)=\sum_k \hat{\alpha}_{j0k}\varphi_{j0k}(x)+\sum_{j=j_0}^{j_1}\sum_k \hat{\beta}_{jk}\,\psi_{jk}(x), \tag{4}$$

здесь $j_0, j_1 \in$ □

$$\hat{\alpha}_{jk}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{jk}(x_2),\ \hat{\beta}_{jk}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi_{jk}(x_i), \tag{5}$$

оценки коэффициентов α_{jk},β_{jk} построенные методом моментов. Или

$$\hat{\vartheta}_{j_1}(x)=\sum_k \hat{\alpha}_{j_1,k}\varphi_{j_1,0k}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K_{j_1+1}(x,x_i),$$

где ядро

$$K_j(x,y)=2^j K(2^j x,2^j y),\ K(x,y)=\sum_k \varphi(x-k)\dot{\varphi}(y-k).$$

Идея использования ядер $K(x,y)$ в задачах аппроксимации предложена в работе [4]. Здесь $\varphi(t)\in W_p^m(R)$ представляют собой вейвлет-функции, образующие ортонормированную систему $\{\varphi(t-\tau)\,|\,k\in Z\}$ и обладающие свойствами δ - функции Дирака. Аппроксимирующие свойства данных ядер обусловливаются выполнением условия моментов, которое, в свою очередь, определяется свойствами функций, образующих данные ядра. При этом существует множество функций, ортогональных φ, выбирая ψ по разному, мы можем строить различные вейвлет расширения на базе одного отцовского вейвлета φ и нескольких материнских ψ.

На рис. 1 показан фрагмент реальной профилограммы поверхности (а), взятый в качестве примера для демонстрации результата аппроксимации, а также результат аппроксимации вейвлет-функциями Добеши 10-го порядка (б). Как видно, показанные на рисунке профиль и его аппроксимация являются практически идентичными друг другу: лишь участок с сильными осцилляциями, приведенный на рисунке (в), содержит незначительные искажения. Действительно, среднеквадратическое отклонение, рассчитанное по формуле $\sigma(s-\hat{s})$, в которой s представляет собой набор исходных данных, а $\hat{s}$ — аппроксимацию этого набора, полученную с использованием вейвлет-функций, составляет 0.0032.

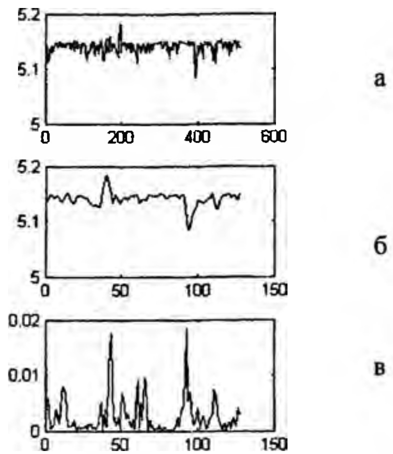

Рис. 1

Литература

1. Марков, Н. Н. Погрешность и выбор средств при линейных измерениях / Н. Н. Марков, Г. Б. Кайнер, П. А. Сацердотов. – М.: Машиностроение, 1967. – 391 с.
2. Чуи, К. Введение в вейвлеты / К. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
3. Hardle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A. Wavelets Approximation and Statistical Applications. – Seminar Berlin-Paris. – 2002. – 254 pp.
4. G. Garrigros and E. Hernrandez Non-linear approximation with wavelets in Sobolev and Triebel-Lizorkin spaces. IMUB Wavelets and Applications. – Lecture Notes. – V. 2, 2002. – p. 415-432.