УДК 517.4

О равномерной асимптотической устойчивости скалярного уравнения с запаздыванием

Шавель Н.А.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается скалярное уравнение вида

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t-r(t)), \qquad (1)$$

где $a: R_+ \to R_+$, $r: R_+ \to R_+$ – непрерывные функции, $r(t) \le r$ для любых $t \ge 0$ и некоторого $r > 0$.

Известно, что выполнение условий

$$\sup_{t\ge 0}\int_t^{t+r} a(s)ds < \frac{3}{2}, \quad \inf_{t\ge 0}\int_t^{t+r} a(s)ds < 0, \qquad (2)$$

обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость уравнения (1).

Предположим, что для некоторых $\alpha < \dfrac{3}{2}$ и непрерывной функции $p: R_+ \to R$ имеет место

$$\int_t^{t+r} a(s)ds \le \alpha + p(t), \forall t \ge 0; \int_{t-\square(t)}^{t} a(s)p(s)ds \le 0, \forall t \ge r; \inf_{t\ge 0}\int_t^{t+r} a(s)ds > 0, (3)$$

где $\square(t) = \min\left\{r(t), \sup\left\{0 \le \tau \le t : \int_{t-\tau}^{t} a(s)ds \le 1\right\}\right\}$.

Тогда уравнение (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Отметим, что условия (2) являются частным случаем условий (3) при $p(t) \equiv 0$. В то же время, если в условиях (3) нельзя положить $p(t) \equiv 0$, то первое из условий (2) будет нарушено. Например, в случае $a(t) = \cos\dfrac{9}{4}\pi t + 1$, $r(t) \equiv r = \dfrac{4}{3}$ условие (3) выполняются при достаточно малом $\varepsilon > 0$ с $\alpha = \dfrac{3}{2} - \varepsilon$, $p(t) = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{8}{9\pi}\sin\dfrac{9}{4}\pi t + \varepsilon$ и, следовательно, соответствующее уравнение вида (1) равномерно асимптотически устойчиво. При этом

$$\sup_{t\ge 0}\int_t^{t+r} a(s)ds = \frac{4}{3} + \frac{8}{9\pi} > \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2},$$

т.е. первое из условий (2) нарушено.